KÁDAS SÁNDOR—SZAKOLCZAI GYÖRGY

# A beruházás és a technikai felszereltség optimális növekedési üteme

Az a munka, melyről ez a tanulmány számol be, szerves kapcsolatban áll az optimális beruházás problémájával foglalkozó külföldi eredményekkel, valamint saját korábbi vizsgálatainkkal.

Az említett *korábbi külföldi kutatások* (vö.: [2] [3], valamint az ott megadott irodalom) leegyszerűsített modellből indulnak ki. Feltételezik, hogy a termelés és az állóeszköz állomány azonos és az időben változatlan ütemben növekszik, aminek folytán a tőkekoefficiens is konstans; hallgatólagosan feltételezik, hogy a helyettesítési rugalmasság egységnyi, és így a modell csak a Cobb—Douglas esetre vonatkoztatható; a nettó termelés elemzéséből indulnak ki, vagyis elhanyagolják az amortizációt és a javítási költségeket; végül feltételezik, hogy a műszaki fejlődés és a beruházás függetlenek egymástól, vagyis nem veszik figyelembe az ún. megtestesült műszaki fejlődést, melynek érvényesülése újabb állóeszközök létesítését tételezi fel. Az eredmények ennek ellenére jól közelítik a valóságot, és a pénzügyi szabályozórendszer konzisztens elméleti megalapozását is lehetővé teszik (vö.: [6] [8]). A valóság és az elméleti eredmények elég nagy mértékű összhangja ellenére célszerűnek látszik a *modell továbbfejlesztése*, és a korlátozó feltételek legalább egy részének a feloldása. Az ezzel kapcsolatos munka *első eredményeit már korábban publikáltuk* [1] [7] [10]. Az ebben a korábbi munkában alkalmazott modell számolt az állóeszközállomány és a termelés növekedési ütemének eltérésével, és így a tőkekoefficiens esetleges időbeli csökkenésével vagy növekedésével. Lehetővé tette az egységnyitől különböző, bár konstans helyettesítési rugalmasság figyelembevételét, és így az elemzésnek a CES esetre való kiterjesztését. A nettó termelés helyett az amortizációt és a javítási költséget is magába foglaló hozzáadott érték elemzéséből indult ki, és így lehetővé tette e tényezők hatásának kifejezett figyelembevételét is. Ugyanakkor azonban teljesen elhanyagolta a műszaki fejlődés és a beruházás kölcsönös kapcsolatait, vagyis abból a hallgatólagos feltételezésből indult ki, hogy az ún. megtestesült műszaki fejlődés üteme zérus.

A modell felhasználásával bizonyítani lehetett, hogy ilyen feltevések esetén *az állóeszköz-állomány növekedési ütemének minden reális esetben egyértelműen meghatározható optimuma van*, mely egy véges időszak fogyasztásának egyértelműen meghatározható maximumára vezet. A beruházási folyamat optimálása ezek szerint elvben tisztán gazdasági kérdés, és nem a folyó fogyasztás

[1] Ez a cikk az Országos Anyag- és Árhivatal, valamint az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat kiadásában megjelent részletes tanulmány [9] anyagán alapul. Az itt kifejtettek a szerzők személyes nézetei, és nem szükségképpen azonosak a fenti szervek álláspontjával.

ezzel járó korlátozásával kapcsolatos politikai, társadalmi vagy erkölcsi meggondolások függvénye. A modellből a különböző növekedési tényezők viszonylagos szerepére, az árpolitikára, és a fejlesztés finanszírozására vonatkozó további következtetések voltak levonhatók.

A most ismertetett *kutatás célja* ennek *a vizsgálat*nak a *továbbfejlesztése*: elsősorban a műszaki fejlődés és a beruházás függetlenségére vonatkozó feltevés elejtése, és az ún. *állóeszközökben megtestesült műszaki fejlődés figyelembevétele*. A modell ezen felül az amortizáció és a javítási költségek ábrázolását is valamivel közelebb kívánja vinni a valósághoz. A tanulmány 1. része a modellt, 2. része az ezen alapuló analitikus elemzést, 3. része pedig a numerikus számításokat és ezek eredményeit ismerteti. A tanulmányt az összefoglalás és az irodalomjegyzék zárja le.

## 1. A modell és a feltevések

A modell mindenekelőtt feltételezi, hogy a $b(t)$ *beruházás* $x = \gamma(b)$ konstans exponenciális ütemben nő az időben, vagyis

$$b(t) = b_0 e^{\gamma(b)t} = b_0 e^{xt}, \tag{1.1}$$

ahol $b_0$ a bázisidőszak beruházási színvonalát jelöli. A megtestesült műszaki fejlődés figyelembevétele évjáratonkénti termelési függvények (vö.: Solow [4] [5]) felírását teszi szükségessé.

Jelölje a továbbiakban $\tau$ az egyes *évjáratok*at, tehát azt, hogy a kérdéses állóeszköz a mindenkori futó időszakot (évet) megelőzően hány időszakkal (évvel) jött létre. Jelölje tehát $k(t, \tau)$ a $t$ időszakban $\tau$ éves állóeszközök állományát. Erre az állományra vonatkozóan felírhatjuk, hogy

$$k(t, \tau) = b(t - \tau) = b_0 e^{x(t-\tau)}, \tag{1.2}$$

vagyis hogy a mindenkori $t$ időpontban $\tau$ éves, azaz a $\tau$ évjárathoz tartozó állóeszközök állománya éppen a $\tau$ évvel azelőtti beruházással egyenlő. Feltételezzük tehát, hogy a javítások az állóeszköz-állományt folyamatosan éppen a kiinduló állapotnak megfelelő technikai szinten tartják, vagyis hogy az egyes évjárathoz tartozó állóeszközök állománya a selejtezési időpontjáig nem változik.

A modell egyik legfontosabb célkitűzése a már kifejtettek értelmében az ún. *állóeszközökben megtestesült műszaki fejlődés* ($\varepsilon_6$) figyelembevétele. Ez a műszaki fejlődés az állóeszköz állomány hatékonyságának időbeli növekedését írja le; feltételezzük, hogy a hatékonyságnak ez az időbeli változása konstans exponenciális ütemben megy végbe. Ez a műszaki fejlődés azonban azt eredményezi, hogy a különböző időpontban létrehozott eszközök hatékonysági színvonala eltérő lesz, és ezért ezek az eszközök nem adhatók össze közvetlenül, hanem a teljes $k(t)$ *eszközállomány* csak a

$$k(t) = \int_0^{T(t)} e^{\varepsilon_6(t-\tau)} k(t, \tau)\, d\tau \tag{1.3}$$

alakban definiálható, ahol $T(t)$ a $t$ időszakban működő legrégebbi állóeszköz életkora. Ennek az egyenletnek az értelmében tehát az állóeszközökben megtestesült műszaki fejlődés csak az egyes évjáratok létrehozásának $(t - \tau)$

időpontjáig érvényesül, és ettől kezdve ezek az állóeszközök üzemeltetésük egész időszaka alatt csak a létrehozásuk idejének megfelelő, változatlan műszaki színvonalon üzemeltethetők, tehát ezt a műszaki fejlettségi színvonalat testesítik meg.

Az $l(t)$ *munkaerő-állomány*ról feltételezzük, hogy a bázisidőszak $l_0$ állományából kiindulva $\gamma(l)$ konstans exponenciális ütemben növekszik, vagyis hogy fennáll az

$$l(t) = l_0 e^{\gamma(l)t}. \tag{1.4}$$

összefüggés.

A termelési összefüggések évjáratonkénti felírására való tekintettel szükség van az összes $t$ időpontban az egyes $\tau$ évjáratokon dolgozó $l(t, \tau)$ munkaerő-állomány definiálására is, amit később adunk meg. Természetesen az összes évjáraton együtt nem dolgozhat több munkaerő, mint amennyi a $t$ évben rendelkezésre áll, vagyis

$$l(t) \geq \int_0^{T(t)} l(t, \tau)\, d\tau. \tag{1.5}$$

A $t$ időpontban a $\tau$ évjárathoz tartozó állóeszköz-állomány felhasználásával elérhető $q(t, \tau)$ *termelés* nagyságát megadó termelési függvény az eddigi jelölések bevezetése után a

$$q(t, \tau) = \varepsilon_2 e^{\varepsilon_1 t} [e^{\varepsilon_6(t-\tau)} k(t, \tau)]^{\varepsilon_3 \varepsilon_5} [e^{\varepsilon_7 t} l(t, \tau)]^{(1-\varepsilon_3)\varepsilon_5} \tag{1.6}$$

alakban írható fel, ahol $\varepsilon_2$ egy közgazdasági jelentéssel nem bíró konstans, $\varepsilon_1$ és $\varepsilon_7$ a meg nem testesült, illetve a munkaerőben megtestesült műszaki fejlődés átlagos évi üteme, $\varepsilon_3$ a termelés állóeszközök szerinti elaszticitása a volumen konstans hozadéka esetén, és $\varepsilon_5$ a volumen hozadékának nagyságát megadó paraméter.

Az $\varepsilon_7$ paraméter a munkaerővel kapcsolatos minőségi tényezők hatását juttatja kifejezésre. A beruházási kérdések elemzése esetén szerepe nem különbözik a meg nem testesült műszaki fejlődés hatásától. Bevezethetjük tehát az

$$\varepsilon_8 = \varepsilon_1 + \varepsilon_7(1 - \varepsilon_3)\, \varepsilon_5$$

jelölést, és a (1.6) termelési függvényt a

$$q(t, \tau) = \varepsilon_2 e^{\varepsilon_8 t} [e^{\varepsilon_6(t-\tau)} k(t, \tau)]^{\varepsilon_3 \varepsilon_5}\, l(t, \tau)^{(1-\varepsilon_3)\varepsilon_5} \tag{1.7}$$

egyszerűbb alakra hozhatjuk.

Az *évjáratonkénti termelési függvények* bevezetése esetén a $t$ időszak teljes állóeszköz-állományán, tehát az összes évjárathoz tartozó termelőeszközön elért termelés a

$$q(t) = \int_0^{T(t)} q(t, \tau)\, d\tau \tag{1.8}$$

alakban írható fel.

A megtestesült műszaki fejlődés bevezetésének egyenes következménye, hogy fel kell tételeznünk: egy-egy *adott évjáratra a munka technikai felszereltsége is adott*. Ez az utóbbi feltevés teljesen indokoltnak látszik. Ha valamely gépegység műszaki színvonalát a beruházás pillanatában véglegesen meghatározottnak tekintjük, ami teljes mértékben reális feltevés, akkor méginkább adottnak kell tekintenünk az ezen a gépegységen, illetve az ennek az évjáratnak megfelelő tőkén dolgozó munka technikai felszereltségét, vagyis a tőke–munka arányt. Minden egyes munkahely ugyanis egy valamely adott tőke–munka arányt testesít meg. Éppúgy, ahogy a munkahely technikai színvonala nem módosítható lényegesen a gépegység kiselejtezéséig, nem módosítható lényegesen a munkahely értéke, és így a tőke—munka arány vagyis a technikai felszereltség sem – egészen a munkahely kiselejtezéséig. Ezek szerint tehát nem követünk el nagy hibát, ha az egyes évjáratokhoz tartozó technikai felszereltséget adott konstansnak tekintjük.

Más szavakkal, ez a feltevés tulajdonképpen a termelési függvények szokásos feltevésrendszerébe tartozó *korlátlan helyettesíthetőség feltevésének* az elvetését, illetve *módosítását* jelenti. A korlátlan helyettesíthetőség feltevése azt jelenti, hogy a tőke–munka arány korlátlanul változtatható, és ugyanaz a termelési volumen számos – vagy elvben végtelenül sok – tőke–munka kombinációval állítható elő. Ez a modell ezt a feltevést oly értelemben módosítja, hogy a *korlátlan helyettesíthetőség* fennáll ugyan, vagyis a tőke–munka arány elvben bármilyen értéket felvehet, ez azonban *csak a még meg nem valósított beruházásokra vonatkozik. A már megvalósult beruházásokon* – tehát a már létrehozott termelő berendezéseken – ez *a tőke–munka arány már nem változtatható meg*, hanem a berendezéseket üzemeltetésük egész ideje alatt a létrehozásuk időpontjában végérvényesen meghatározott technikai felszereltség vagyis tőke–munka arány szintjén kell üzemeltetni (ez a feltevés természetesen nem teljesen pontosan, de elég jól közelíti meg a valóságot), tehát

$$\frac{k(t,\tau)}{l(t,\tau)} = \frac{k(t-\tau,0)}{l(t-\tau,0)} = \varkappa(t-\tau). \tag{1.9}$$

Ezek szerint a $t$ időszakban a $\tau$ évjárathoz tartozó tőke technikai felszereltsége egyenlő a $t-\tau$ időszakban a zérus évjárathoz tartozó, tehát az abban az időszakban beruházott tőke technikai felszereltségével, ami csak $(t-\tau)$-tól függ: ez a $\varkappa(t-\tau)$. Ez teljes mértékben érthető is, mert a $t$ időszakban $\tau$ éves tőke fizikailag azonos a $t-\tau$ időszakban 0 éves tőkével.

Most egy eddigi feltevésrendszerünkbe illő újabb feltevést vezetünk be: a mindenkor újonnan beruházott állóeszközök technikai felszereltsége kontans $\gamma(\varkappa) = y$ exponenciális ütemben nő:

$$\varkappa(t) = \varkappa_0 e^{yt}, \tag{1.10}$$

ahol $\varkappa_0$ a bázisidőszakban megvalósított beruházás technikai felszereltsége.

Ezeknek a jelöléseknek a bevezetése után a $t$ időszak $q(t)$ bruttó *termelési értékét* a

$$q(t) = c(t) + b(t) + d(t) + r(t) \tag{1.11}$$

alakban is felírhatjuk, ahol $c(t)$, $d(t)$ és $r(t)$ rendre a $t$ időszak fogyasztását, amortizációját és javítási költségeit jelöli.

A $t$ időszakban a $\tau$ évjárathoz tartozó állóeszközök utáni $d(t, \tau)$ *amortizáció* a

$$d(t,\tau) = \delta(t,\tau)\, k(t,\tau) \tag{1.12}$$

egyenlettel adható meg, ahol $\delta(t, \tau)$ a megfelelő koefficiens. Ennek értékére vonatkozóan különböző feltevéseket vezettünk be; ezeket a numerikus elemzés során fogjuk tárgyalni. A $t$ időszak összes $d(t)$ amortizációja innen a

$$d(t) = \int_0^{T^*} d(t, \tau)\, d\tau \tag{1.13}$$

kifejezéssel írható fel, ahol $T^*$ az amortizáció számítás céljára felhasznált, konstansnak tekinthető élettartam.

Az amortizáció ilyen módon való kezelése a modell egyik kritikus eleme. Az (1.3), (1.5) és (1.8) egyenletekben szereplő $T(t)$ élettartam ugyanis a számított optimális élettartam, ezzel szemben viszont $T^*$ az amortizáció számítás céljára használt, becsült és konstansnak tekintett élettartam. Elvben akkor járnánk el a leghelyesebben, ha a kettőt azonosnak vennénk, ez azonban azért nem biztosítható, mert az amortizációs költség az optimális élettartam meghatározásának egyik elem, és az amortizáció maga is az optimális élettartamtól függ. Az adott modell keretei között nem tudtuk megoldani, hogy ezeket az értékeket szimultán határozzuk meg, és így $T(t)$ és $T^*$ értékét azonosnak vegyük.

A most elmondottak ellenére ez a megoldás nem vezet nagyobb hibára, ugyanis biztosítottuk, hogy az eszközök értékét teljesen leírjuk, azaz a $t$ időpontban beruházott eszköz (amely a $t'$ időpontban $t' - t$ éves) után működtetése során évenként felszámított amortizációk összege (integrálja) kiadja a teljes értékét:

$$\int_t^{t+T^*} d(t', t' - t)\, dt' = k(t, 0), \tag{1.14}$$

ahonnan

$$\int_t^{t+T^*} \delta(t', t' - t)\, dt' = 1, \tag{1.15}$$

és ahol $t'$ egy integrációs változó.

Feltételezzük, hogy az állóeszközök állandó karbantartásuk és felujításuk miatt egész kiselejtezésükig eredeti teljesítőképességük, műszaki színvonaluk fenntartása mellett üzemeltethetők.

A *javítási költségek*et ugyancsak évjáratonként definiáljuk az

$$r(t, \tau) = k(t, \tau)\, \varrho_1 e^{\varrho_2} \tag{1.16}$$

egyenlettel, ahol $\varrho_1$ és $\varrho_2$ a javítási és állóeszköz fenntartási költségek meghatározásához felhasznált paraméterek. Innen a szokott módon, az

$$r(t) = \int_0^{T(t)} r(t, \tau)\, d\tau \tag{1.17}$$

kifejezéssel kaphatjuk meg a $t$ időszak összes $r(t)$ állóeszköz fenntartási költségét.

Az (1.1), (1.7), (1.13) és (1.17) egyenleteket az (1.11) egyenletbe behelyettesítve kifejezhetjük a $t$ időszakhoz tartozó $c(t)$ fogyasztás értékét. Ezt az értéket a bázisidőszak és a $T$ befejező időszak közötti intervallumra összegezve és esetleg az $\eta$ diszkonttényezővel a bázisidőszakra lediszkontálva kapjuk meg a vizsgált időszak összes fogyasztását, mely érték $x$ és $y$ szerinti maximumának meghatározása, vagyis a

$$C(x, y) = \int_0^T e^{-\eta t} c(t)\, dt \to \max \tag{1.18}$$

feladat megoldása a vizsgálat célja. Az elemzés feltételezi, hogy a fogyasztási célra rendelkezésre álló termelés realizálásához szükséges vásárlóerő folyamatosan rendelkezésre áll, és ezért a probléma a keresleti oldal mellőzésével, csupán a termelési oldal figyelembevételével elemezhető.

Ezt a vizsgálatot az előző tanulmányokhoz ([1], [7], [10]) hasonlóan egyrészt analitikus, másrészt numerikus módszerekkel végeztük el.

## 2. Analitikus elemzés

A $C(x, y)$ *összes fogyasztás maximálásának* az (1.18) kifejezéssel definiált feladatát az (1.11) egyenletből kiindulva oldjuk meg. Ebből az egyenletből a $c(t)$ fogyasztás értéke egyértelműen meghatározható, ha ismerjük a $q(t)$ termelés, $b(t)$ beruházás, $d(t)$ amortizáció és $r(t)$ javítási és állóeszköz fenntartási költségek nagyságát.

A $q(t, \tau)$ *termelési érték* a $k(t, \tau)$ állóeszközállomány és $l(t, \tau)$ létszám függvénye. $k(t, \tau)$ értékét az (1.2) egyenlet egyértelműen meghatározza, $l(t, \tau)$ értéke pedig az (1.9) egyenletből fejezhető ki. Ezeket a kifejezéseket az (1.7) termelési függvénybe behelyettesítve és felhasználva még az

$$\varepsilon_9 = \varepsilon_3\, \varepsilon_5\, \varepsilon_6$$

jelölést is, a termelési függvény a

$$q(t, \tau) = \varepsilon_2\, e^{\varepsilon_8 t} e^{\varepsilon_9 (t-\tau)} \frac{b_0^{\varepsilon_5}\, e^{\varepsilon_5 x (t-\tau)}}{[\varkappa_0\, e^{y(t-\tau)}]^{(1-\varepsilon_3)\varepsilon_5}} \tag{2.1}$$

alakba írható. Ha a jelölések egyszerűsítése érdekében az

$$\varepsilon_{10} = \frac{\varepsilon_2\, b_0^{\varepsilon_5}}{\varkappa_0^{(1-\varepsilon_3)\varepsilon_5}}$$

jelölést is bevezetjük, akkor a termelési összefüggést a

$$q(t, \tau) = \varepsilon_{10}\, e^{[\varepsilon_8 t + \varepsilon_9 (t-\tau)]}\, e^{\varepsilon_5 (t-\tau)[x-(1-\varepsilon_3) y]} \tag{2.2}$$

képlettel fejezhetjük ki. Ezt az (1.8) egyenletbe behelyettesítve kaphatjuk meg a $t$ időszak összes bruttó termelését. Az integrálás elvégzése után felírhatjuk, hogy

$$q(t) = \begin{cases} \varepsilon_{10} e^{[\varepsilon_8 + \varepsilon_9 + \varepsilon_5 (x-(1-\varepsilon_3)y))]t} * \dfrac{1 - e^{-T(t)(\varepsilon_9 + \varepsilon_5 [x-(1-\varepsilon_3)y])}}{\varepsilon_9 + \varepsilon_5 [x - (1-\varepsilon_3) y]}. \\ \text{ha } \varepsilon_9 + \varepsilon_5 [x - (1-\varepsilon_3) y] \neq 0; \text{ és } \varepsilon_{10}\, e^{[\varepsilon_8 + \varepsilon_9 + \varepsilon_5 (x-(1-\varepsilon_3)y))]} T(t), \\ \text{ha } \varepsilon_9 + \varepsilon_5 [x - (1-\varepsilon_3) y] = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

A *javítási és állóeszköz fenntartási költségek* meghatározását az (1.16) egyenletből kiindulva tárgyaljuk. Ez az egyenlet az (1.2) egyenlet felhasználásával a

$$r(t, \tau) = b_0\, e^{x(t-\tau)}\, \varrho_1\, e^{\varrho_2 \tau} \tag{2.4}$$

alakra hozható. Innen az (1.7) egyenlet figyelembevételével és az integrálás elvégzésével felírhatjuk, hogy

$$r(t) = \begin{cases} b_0\, \varrho_1\, e^{xt} \dfrac{1 - e^{-(x-\varrho_2)\,T(t)}}{x - \varrho_2} & \text{ha } \varrho_2 \neq x, \\ b_0\, \varrho_1\, e^{xt}\, T(t) & \text{ha } \varrho_2 = x. \end{cases} \tag{2.5}$$

Az eddigiekből kitűnik, hogy mind $q(t)$, mind pedig $r(t)$ értéke az állóeszközök $t$ időszakhoz tartozó optimális $T(t)$ *élettartamától* függ. $T(t)$ értékét úgy kell meghatároznunk, hogy $c(t)$ értéke maximális legyen az alábbi két feltétel mellett:

$$1.\ \int_0^{T(t)} 1(t, \tau)\, d\tau = \int_0^{T(t)} \frac{k(t, \tau)}{\varkappa_0\, e^{y(t-\tau)}}\, d\tau \leq 1_0\, e^{\varkappa(L)t} \tag{2.6}$$

illetve

$$2.\ T(t + \Delta t) \leq T(t) + \Delta t \text{ bármely } t\text{-re és } \Delta t\text{-re.} \tag{2.7}$$

Az első feltétel értelmében a rendelkezésre álló munkaerőnél többet nem használhatunk fel, a második feltétel értelmében pedig a $t$ időpontban kiselejtezett gépet később már nem üzemeltethetjük. Ez utóbbi differenciálható $T(t)$ esetén ekvivalens a

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t} \leq 1$$

feltétellel.

Ha most a többi változót adottnak tekintjük, $q(t)$ és $r(t)$, ennek folytán pedig $c(t)$ *csak* $T(t)$ *függvénye*. Az (1.11) egyenlőség ennek folytán a

$$c(T) = q(T) - r(T) - b_0\, e^{xt} - d(t) \tag{2.8}$$

alakban írható fel, ahol a jobboldal két utolsó tagját adottnak tekintjük. Ha most bevezetjük a

$$G(x, y) = \varepsilon_9 + \varepsilon_5[x - (1 - \varepsilon_3)y]$$

jelölést, akkor

$$q(T) = \begin{cases} \varepsilon_{10}\, e^{[\varepsilon_8 + G(x,y)]t} \dfrac{1 - e^{-TG(x,y)}}{G(x, y)}, & \text{ha } G(x, y) \neq 0, \text{ és} \\ \varepsilon_{10}\, e^{[\varepsilon_8 + G(x,y)]t}\, T, & \text{ha } G(x, y) = 0; \end{cases} \tag{2.9}$$

illetve

$$r(T) = \begin{cases} b_0\, \varrho_1\, e^{xt} \dfrac{1 - e^{-(x-\varrho_2)T}}{x - \varrho_2}, & \text{ha } x \neq \varrho_2, \text{ és} \\ b_0\, \varrho_1\, e^{xt} \cdot T, & \text{ha } x = \varrho_2. \end{cases} \tag{2.10}$$

Innen, figyelembe véve, hogy

$$\frac{\partial c(T)}{\partial T} = \frac{\partial q(T)}{\partial T} - \frac{\partial r(T)}{\partial T},$$

felírhatjuk, hogy

$$\frac{\partial c(T)}{\partial T} = \varepsilon_{10}\, e^{[\varepsilon_8 + G(x,y)]t} * e^{-TG(x,y)} - b_0\, \varrho_1 e^{xt} e^{-(x-\varrho_2)T}, \tag{2.11}$$

illetve, hogy

$$\frac{\partial^2 c(T)}{\partial T^2} = -\varepsilon_{10}\, e^{[\varepsilon_9 + G(x,y)]t}\, G(x, y)\, e^{-TG(x,y)} + b_0\, \varrho_1 (x - \varrho_2)\, e^{xt} e^{-(x-\varrho_2)T}. \tag{2.12}$$

Vezessük most be a

$$H(x, y) = G(x, y) - (x - \varrho_2)$$

jelölést. Ekkor $c(T)$ alakja a paraméterek, továbbá $x$, $y$, és $t$ függvényében az alábbiak szerint alakul.

1. Ha $H(x, y) \neq 0$, akkor (2.11)-ből következik, hogy a $\frac{\partial c(T)}{\partial T}$ parciális derivált értéke egyetlen $T_2$ helyen lesz zérus, tehát a $c(T)$ függvénynek egyetlen $T_2$ szélső érték helye lesz, melynek értékét a

$$T_2 = \frac{\ln \frac{\varepsilon_{10}}{b_0\, \varrho_1} + [\varepsilon_8 + G(x, y) - x]t}{H(x, y)} \tag{2.13}$$

kifejezés adja meg. Ezt (2.12)-be behelyettesítve megfelelő átalakítások után a

$$\left. \frac{\partial^2 c(T)}{\partial T^2} \right|_{T=T_2} = -\, b_0\, \varrho_1\, H(x, y) \tag{2.14}$$

egyszerű eredményt kapjuk. $T_2$ maximumhely, ha $H(x, y) > 0$, és minimumhely, ha $H(x, y) < 0$. A (2.13) a

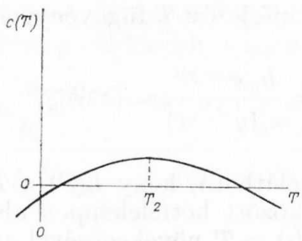
$$T_2 = \frac{\ln \frac{\varepsilon_{10}}{b_0\, \varrho_1} + [\varepsilon_8 + H(x, y) - \varrho_2]t}{H(x, y)} \tag{2.15}$$

alakra hozható. Könnyen belátható, hogy – amennyiben $H(x, y) > 0$ – reális paraméterértékek mellett a számláló pozitív lesz, és így $T_2 > 0$.

Ez az összefüggés *grafikusan* is ábrázolható. Ennek értelmében határozzuk meg $c(T)$ értékét a $T = 0$ helyen. (2.8)–(2.10) alapján könnyen belátható, hogy

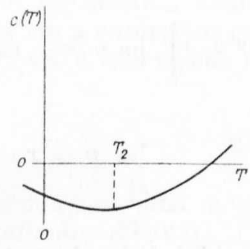
$$c(o) = -\, b_0\, e^{xt} - d(t),$$

vagyis hogy $c(0)$ értéke negatív. A $H(x, y) > 0$ és $T_2 > 0$ esetet ennek megfelelően az 2.1 ábra tünteti fel.

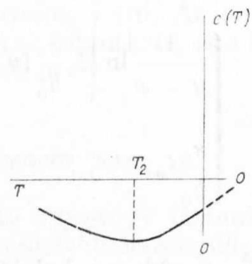



2.1 ábra

Ha $H(x, y) < 0$, akkor $T_2$ előjeléről semmit sem tudunk. A görbék alakját ez esetben a 2.2a és a 2.2b ábra mutatja be.

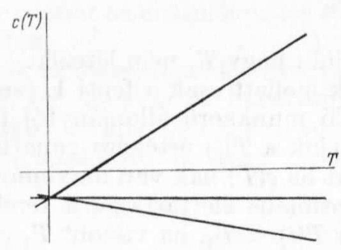



2.2a ábra




2.2b ábra

2. Ha $H(x, y) = 0$, akkor $\dfrac{\partial c(T)}{\partial T}$ konstans, és $c(T)$ monoton növekvő, konstans, vagy monoton csökkenő lineáris függvény lehet (vö.: 2.3 ábra).




2.3 ábra

A most elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy a *paraméterektől, valamint $x$, $y$ és $t$ értékétől függ, hogy* $c(T)$-nak *van-e szélső értéke*, és ha igen, akkor az maximum-e. Vizsgáljuk most meg, hogyan alakul a *munkaerő foglalkoztatása*. Ha a (2.6) kifejezésben (1.2) figyelembevételével $k(t, \tau)$ helyébe $b_0\, e^{x(t-\tau)}$-t írunk és elvégezzük az integrálást, akkor

$$(2.16) \qquad \int_0^{T(t)} \frac{b_0}{\varkappa_0}\, e^{(x-y)(t-\tau)}\, d\tau = \frac{b_0\, e^{(x-y)t}}{\varkappa_0(y-x)}\, [e^{-(x-y)T(t)} - 1] \leq l_0\, e^{\gamma(L)t}.$$

Az egyenlet baloldalán levő kifejezést $T$ függvényének tekintve felírható, hogy

$$(2.17)\qquad L(T) = \frac{b_0\, e^{(x-y)t}}{\varkappa_0(y-x)} = [e^{-(x-y)T} - 1],$$

aminek alapján könnyen belátható, hogy $L(T)$ a $T$-ban monoton nő. (2.16) értéke ilyen körülmények között kétféleképpen alakulhat.

1. Adott $t$ időpontban $T(t) = T$ növekedésével az egyenlőtlenség baloldala — $L(T)$ — egy pontban (jelölje ezt a pontot $T_1$) túllépi az egyenlőtlenség jobb oldalán álló értéket, tehát ennél régebbi állóeszközt ebben a $t$ időpontban a munkaerő szűkössége miatt nem lehet üzemeltetni. Ekkor a (2.16) kifejezésben az egyenlőség jele érvényesül, és ekkor

$$(2.18)\qquad T_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{y-x} \ln\left\{l_0 \dfrac{\varkappa_0}{b_0}(y-x)\, e^{[\gamma(L)+y-x]t} + 1\right\}, & \text{ha } y \neq x, \text{ és} \\[2ex] \dfrac{\varkappa_0}{b_0}\, l_0\, e^{\gamma(L)t}, & \text{ha } y = x. \end{cases}$$

2. Ha $T \to \infty$, akkor a baloldal egy, a jobb oldalnál kisebb értékhez tart. Ebben az esetben az állóeszközök rendelkezésre álló mennyisége nem teszi lehetővé a teljes munkaerő kihasználását, még akkor sem, ha a legrégebbi állóeszközöket is üzemeltetjük. Ekkor a (2.18) egyenletben

$$l_0 \frac{\varkappa_0}{b_0}(y-x)\, e^{[\gamma(L)+y-x]t} + 1 \leq 0.$$

Ezt az esetet úgy tárgyaljuk, hogy $T_1$ nem létezik.

Reális paraméterértékek mellett csak a fenti 1. eset következik be, tehát $T$ értéke a rendelkezésre álló munkaerő állománytól függ.

Most már összefoglalhatjuk a $T(t)$ értékére vonatkozó eredményeket.

1. Ha $H(x, y) > 0$, tehát ha $c(T)$-nak van maximuma és $T_1 \leq T_2$, vagyis ha az állóeszköz-állomány optimális élettartama a rendelkezésre álló munkaerő mennyiségétől függ, akkor $T(t) = T_1$, ha viszont $T_1 > T_2$, vagyis ha a rendelkezésre álló állóeszköz-állomány nem biztosítja a munkaerő teljes foglalkoztatását, akkor $T(t) := T_2$.

2. Ha $H(x, y) < 0$, tehát ha $c(T)$-nak minimuma van és $c(T_1) > c(0)$, akkor $T(t) := T_1$, ha viszont $c(T_1) \leq c(0)$, akkor $T(t) := 0$.

3. Ha $H(x, y) = 0$, akkor monoton növekvő $c(T)$ esetén $T(t) := T_1$, egyébként $T(t) := 0$.

4. Irreális paraméterek mellett előfordulhat, hogy $T_1$ nem létezik, s ekkor $H(x, y) < 0$, vagy $H(x, y) = 0$ és monoton növekvő $c(T)$ esetén $T(t)$-t nem tudjuk értelmesen definiálni.

Reális paraméterek és $x$, $y$ értékek mellett csak a fenti 1. eset következik be, és még ezen belül is az az eset, amikor $T(t) = T_1(t)$, vagyis *a reális esetben és az itt bevezetett feltevések mellett az állóeszköz-állomány élettartama a rendelkezésre* *álló munkaerő mennyiségétől függ.* Ekkor a $T(t) = T_1(t)$ függvény differenciálható, és differenciálhányadosa 1-nél kisebb, vagyis belátható, hogy

$$\frac{\partial T_1(t)}{\partial t} = \frac{l_0 \frac{\varkappa_0}{b_0} e^{[\gamma(L)+y-z]t} [\gamma(L) + y - x]}{l_0 \frac{\varkappa_0}{b_0} (y - x) e^{[\gamma(L)+y-x]t} + 1} < 1. \tag{2.19}$$

*Reális paraméterkombinációk és x, y értékek esetén* tehát $T(t)$ függvényünk kielégíti a (2.1) – (2.7) egyenletekkel definiált *termelési összefüggéseket is.*

Az eredmény az elmondottak értelmében attól függ, hogy milyen értéket vesznek fel a beruházási politika parametrikusan kezelt változói. Ezek viselkedésére és hatására vonatkozóan azonban a modell itt közölt változata alapján nem sikerült egyértelmű analitikus eredményekre jutni. Az analitikus rész ezért elsősorban a numerikus rész előkészítésének tekinthető, és a legfontosabb következtetések a numerikus részből vonhatók le.

## 3. Numerikus elemzés

A probléma numerikus megközelítése során ugyanúgy jártunk el, mint a korábbi tanulmányokban ([1],[7],[10]). Az egyenletekben szereplő paramétereknek különböző értékeket adtunk, és különböző paraméterkombinációk mellett meghatároztuk a le nem diszkontált összes fogyasztás egy bizonyos adott intervallumon belüli számított értékét, majd a különböző paraméterkombinációkkal kapott értékek összehasonlítása alapján következtettünk az egyes paramétereknek a le nem diszkontált összes fogyasztás alakulására gyakorolt hatására. E számítások során kiinduló pontnak egy ún. *alapváltozat*ot választottunk, amelyben az összes paraméternek az ún. bázisértéket adtuk. A különböző numerikus változatok tehát az eredményeket ehhez a kiinduló paraméterkombinációhoz viszonyítják.

Külön kell foglalkoznunk az *amortizáció* kezelésével. Kétféle adott amortizációs politikát tételeztünk fel: *lineáris* és lineárisan gyorsított amortizációt. Az első esetben az állóeszköz beruházásától kezdve $T\varphi$ éven keresztül minden évben értékének $1/T^*$ hányadát írjuk le, azaz

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{T^*}. \tag{3.1}$$

*Lineárisan gyorsított amortizáció* esetén viszont az évenként leirandó hányad lineárisan csökken, azaz

$$\delta(t, \tau) = \frac{a}{T^*} \left(1 - \frac{\tau}{T^*}\right). \tag{3.2}$$

(1.15) figyelembevételével ezt a függvényt integrálva azt kapjuk, hogy $a = 2$.

A paraméterekből két alapváltozatot állítottunk össze, az ún. *összehasonlítható*, és az ún. *reális alapváltozatot*. Az előbbiben a műszaki fejlődés ütemére vonatkozó paramétereknek zérus értéket, a másodikban pedig megközelítőleg reális értéket adtunk. Az első, tehát az összehasonlítható változat ilyen módon megközelítőleg a korábbi vizsgálat ([1],[7],[10]) alapváltozatának felel meg, a reális változat viszont a feltételezett műszaki fejlődési ütemek reális szinten való megválasztása folytán jobban közelíti meg a valóságot. Az alapváltozatok paraméterértékei a következők:

| *Korábbi* | *Összehasonlítható* alapváltozat | *Reális* |
|---|---|---|
| $\varepsilon_1 = 0$ | $\varepsilon_1 = 0$ | $\varepsilon_1 = 0{,}02$ |
| $\varepsilon_2 = 1$ | $\varepsilon_2 = 1$ | $\varepsilon_2 = 1$ |
| $\varepsilon_3 = 0{,}25$ | $\varepsilon_3 = 0{,}25$ | $\varepsilon_3 = 0.25$ |
| $\varepsilon_4 = 0$ | $\varepsilon_4 = 0$ | $\varepsilon_4 = 0$ |
| $\varepsilon_5 = 1$ | $\varepsilon_5 = 1$ | $\varepsilon_5 = 1$ |
| $\varepsilon_6$: – | $\varepsilon_6 = 0$ | $\varepsilon_6 = 0{,}05$ |
| $\varepsilon_7$: – | $\varepsilon_7 = 0$ | $\varepsilon_7 = 0$ |
| $l_0 = 1$ | $l_0 = 1$ | $l_0 = 1$ |
| $b_0$: – | $b_0 = 0{,}1$ | $b_0 = 0{,}15$ |
| $\gamma(L) = 0$ | $\gamma(L) = 0$ | $\gamma(L) = 0{,}01$ |
| $\delta = 0{,}05$ | $\delta = 0{,}05$ | $\delta = 0{,}05$ |
| $\varrho_1 = 0{,}05$ | $\varrho_1 = 0{,}05$ | $\varrho_1 = 0{,}05$ |
| $\varrho_2 = 0$ | $\varrho_2 = 0$ | $\varrho_2 = 0$ |
| $\eta = 0$ | $\eta = 0$ | $\eta = 0$ |
| $\varkappa_0 = 1(!!)$ | $\varkappa_0 = 1$ | $\varkappa_0 = 1$ |
| $T = 20$ | $T = 20$ | $T = 20$ |

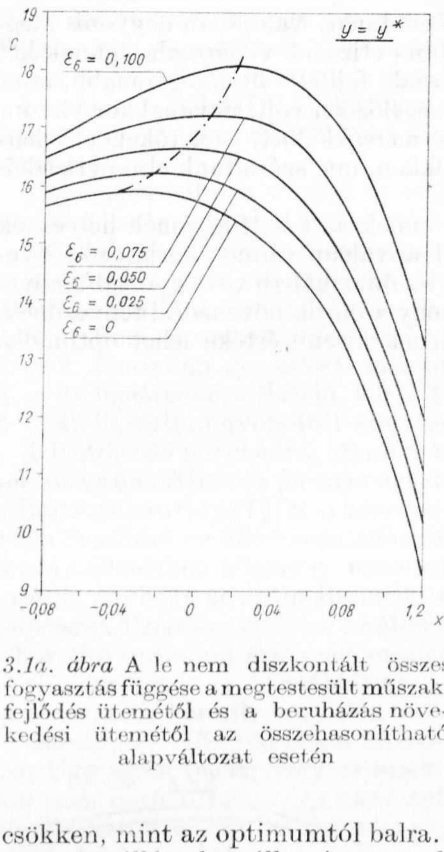
Természetesen *az összehasonlítható alapváltozat sem felel meg pontosan a korábbi számítások alapváltozatának*, mert a paraméterkészlet nem teljesen azonos. Fel kell hívni a figyelmet arra is, hogy $\varkappa_0$ a korábbi számításokban a munkaerő egészének átlagos technikai felszereltségét jelölte, ezekben a számításokban viszont a bázisidőszak zérus évjáratához tartozó eszközállományán dolgozó munkaerő technikai felszereltségét.

A numerikus számítások eredményeit a már idézett kiadvány [9] részletezi; ezek között a keretek között csak a legfontosabb eredményeket lehet összefoglalni.

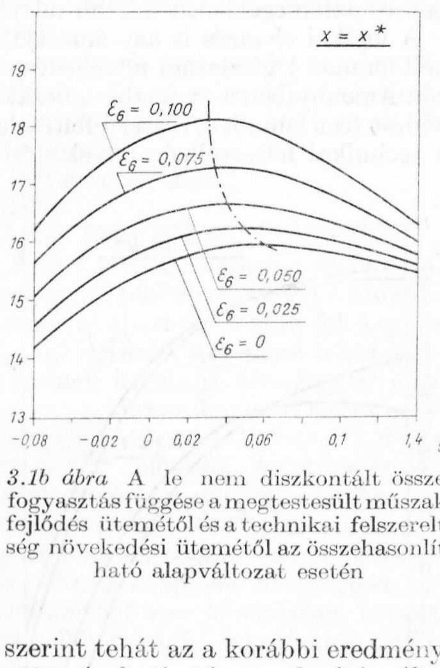
Ennek a vizsgálatnak a legfontosabb célja a megtestesült műszaki fejlődés hatásának elemzése volt. A le nem diszkontált összes fogyasztásnak a megtestesült műszaki fejlődés ütemétől való függését a 3.1a) és a 3.1b) ábra mutatja be.

Mindkét ábra a le nem diszkontált összes fogyasztás alakulását ábrázolja a megtestesült műszaki fejlődés ütemének parametrikus kezelésével. Az első ábra a beruházás növekedési ütemét tekinti független változónak, és a technikai felszereltség növekedési ütemét a mindenkori optimális értékén rögzíti, a második ábra viszont a technikai felszereltség növekedési ütemét tekinti független változónak, és a beruházás növekedési ütemét rögzíti mindenkori optimális értékén. Ezek az optimális értékek természetesen a paraméterek függvényei, és így a megtestesült műszaki fejlődés más és más feltételezett üteméhez más és más optimális értékek tartoznak. Ezek az értékek leolvashatók az ábrákról; a számtáblázatokat itt hely hiányában nem lehet közölni.

A 3.1a ábra áll a legközelebb a korábbi vizsgálat eredményeiről beszámoló publikációkban ([1], [7], [10]) közöltekhez. Alakja teljes mértékben megfelel a korábbi publikációkban közölt ábrákénak. *A beruházás növekedési ütemének egyértelműen meghatározott optimuma* és a le nem diszkontált összes fogyasztásnak egyértelműen meghatározott maximuma *van akkor is, ha figyelembe veszszük a megtestesült műszaki fejlődést*, sőt ennek gyors ütemét tételezzük fel. Az elérhető összes fogyasztás görbéje az optimum pottól jobbra meredekebben




*3.1a. ábra* A le nem diszkontált összes fogyasztás függése a megtestesült műszaki fejlődés ütemétől és a beruházás növekedési ütemétől az összehasonlítható alapváltozat esetén




*3.1b ábra* A le nem diszkontált összes fogyasztás függése a megtestesült műszaki fejlődés ütemétől és a technikai felszereltség növekedési ütemétől az összehasonlítható alapváltozat esetén

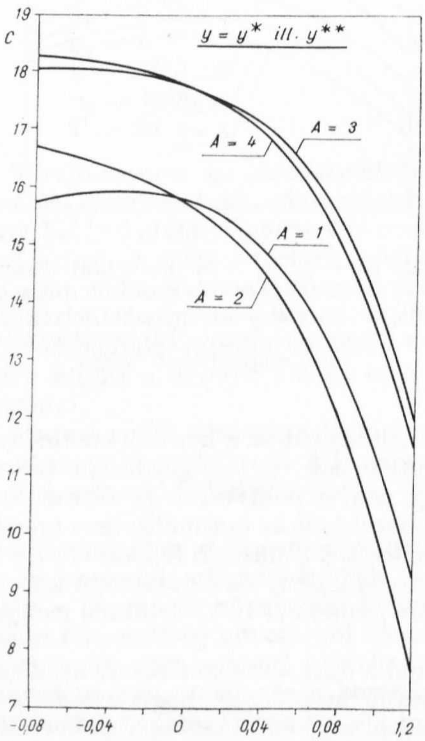
csökken, mint az optimumtól balra. Ezek szerint tehát az a korábbi eredmény, hogy az állóeszköz-állomány növekedési ütemének tisztán gazdasági változóktól függő optimális értéke van, és hogy nem a politikai vagy társadalmi szempontból még megengedhető maximális beruházás az optimális, nem annak a következménye, hogy elhanyagoltuk a megtestesült műszaki fejlődést, vagyis a beruházás és a műszaki fejlődés közötti összefüggést. Ez az alapvető következtetés a megtestesült műszaki fejlődés igen gyors, évi 10%-os üteme mellett is teljes mértékben fennáll.

A 3.1b ábra alakja nagymértékben hasonló a 3.1a ábráéhoz, azonban mégis vannak lényeges különbségek. A legfontosabb hasonlóság, hogy *a technikai felszereltség növekedési ütemének* is *egyértelműen meghatározható optimális értéke van*, mely a fogyasztás maximális értékére vezet. A beruházás politika két független változóval, tehát a beruházás és a technikai felszereltség növekedési ütemével való ábrázolása tehát lényegében véve ugyanarra az eredményre vezet, mint az egy független változós ábrázolás, mely a beruházási politikát az állóeszköz-állomány növekedési ütemével írta le.

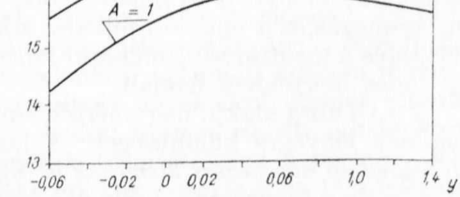
E megegyezés ellenére figyelemreméltók az eltérések. A műszaki fejlődés gyorsulása esetén a technikai felszereltség optimális növekedési üteme csökken. Ez azt mutatja, hogy *a műszaki fejlődés és a technikai felszereltség növekedése bizonyos mértékig egymást kompenzáló növekedési tényezők*. Érdekes módon úgy tűnik, hogy a műszaki fejlődés gyorsabb üteme csökkenti a technikai felszereltség optimális növekedési ütemét.

Ez az első pillanatban meglepőnek tűnő eredmény valójában nagyonis megfelel a *tényleges tapasztalatok*nak. A legutóbbi évtizedek világgazdaságának két alapvető fontosságú jellemzője, hogy a műszaki fejlődés üteme gyorsabb, mint a XX. század első évtizedeiben vagy azt megelőzően volt, ugyanakkor viszont a technikai felszereltség növekedési üteme mérséklődött, és a tőkekoefficiens a vezető ipari államokban inkább kissé csökken, míg századunk első évtizedeiben és azt megelőzően inkább növekedett.

A logikai elemzés is azt mutatja, hogy ennek az összefüggésnek helyesnek kell lennie. A gazdasági növekedésnek nyilvánvalóan vannak korlátozó tényezői. Amennyiben a gyorsabb műszaki fejlődés önmagában véve gyorsabb növekedést tesz lehetővé, ésszerű feltételezni, hogy a másik növekedési tényezőnek, a technikai felszereltség növekedési ütemének kisebb értéke lehet optimális.




*3.2a. ábra* A le nem diszkontált összes fogyasztás függése az amortizáció elszámolásának rendjétől és a beruházás növekedési ütemétől az összehasonlítható alapváltozat esetén




*3.2b. ábra* A le nem diszkontált összes fogyasztás függése az amortizáció elszámolásának rendjétől és a technikai felszereltség növekedési ütemétől az összehasonlítható alapváltozat esetén

Végül figyelemre méltó, hogy a 3.1b ábra görbéi lényegesen laposabbak, mint a 3.1a ábrán feltüntetett görbék. Ez arra utal, hogy a technikai felszereltség változása kevésbé fontos paraméter, mint a beruházás növekedési üteme, ugyanis az optimális értéktől való eltérés kevésbé csökkenti az elérhető összes fogyasztást

Az összehasonlítható alapváltozat felhasználásával végzett további számítások azt vizsgálták, hogy a le nem diszkontált összes fogyasztás értéke hogyan függ a meg nem testesült műszaki fejlődés ütemétől valamint a részesedési paraméter értékétől. Az eredmények teljes mértékben párhuzamosak voltak a korábbi vizsgálat ([1], [7], [10]) eredményeivel, tehát a megtestesült műszaki fejlődés figyelembevétele ebből a szempontból sem módosította az összefüggéseket.

Figyelemreméltóak viszont az *amortizációs politika* változtatásának hatásait bemutató számításokból levonható következtetések.

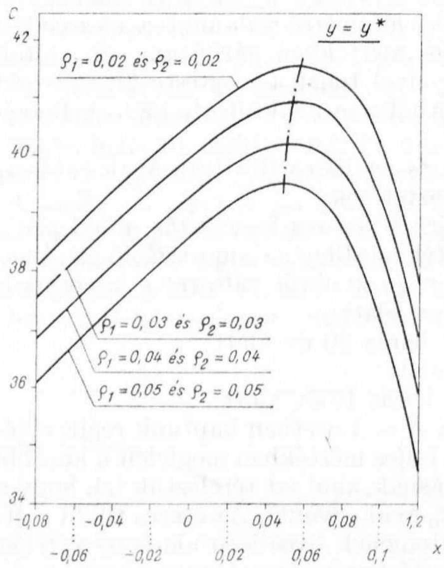
Az eredmények értelmében mind az elérhető összes fogyasztás, mind pedig az optimális beruházási politika nagymértékben függ az amortizáció elszámolásának módjától. Az itt figyelembe vett négy konkrét változat a következő:
A = 1: lineáris amortizáció, leírás húsz év alatt;
A = 2: lineárisan gyorsított amortizáció, leírás 20 év alatt;
A = 3: lineáris amortizáció, leírás 10 év alatt;
A = 4: lineárisan gyorsított amortizáció, leírás 10 év alatt.

A beruházás növekedési ütemére csak a A = 1 esetben kaptunk reális értéket; ez az amortizációs politika egyébként teljes mértékben megfelelt a korábbi számításokban ([1],[7],[10]) követett eljárásnak, ahol azt tételeztük fel, hogy a leírás évenként az állóeszköz állomány 5%-ával egyenlő. Az összes többi esetben az állóeszköz állomány növekedési ütemének irreálisan alacsony értékét kaptuk, úgyhogy az optimális értéket számítási programunk nem is tudta meghatározni. Ezért szerepelnek az ábrán az optimális értéket jelző $x^*$ és $y^*$ helyett a közelítő optimum értéknek megfelelő $x^{**}$ és $y^{**}$ jelölések. Az eredmények értelmében tehát — legalábbis az összehasonlítható alapváltozat esetében — az *amortizáció* bármilyen módon való *meggyorsítása* nagymértékben *csökkenti a beruházás optimális növekedési ütemét, és egyben növeli az elérhető összes fogyasztást*. Úgy tűnik tehát, hogy az amortizációs politika megfelelő megválasztásának nem csupán pénzügyi, elszámolási szempontból van jelentősége, hanem nagyon határozottan befolyásolja a gazdasági folyamatok alakulását is. Ez a kérdés tehát további alapos vizsgálatot igényel.

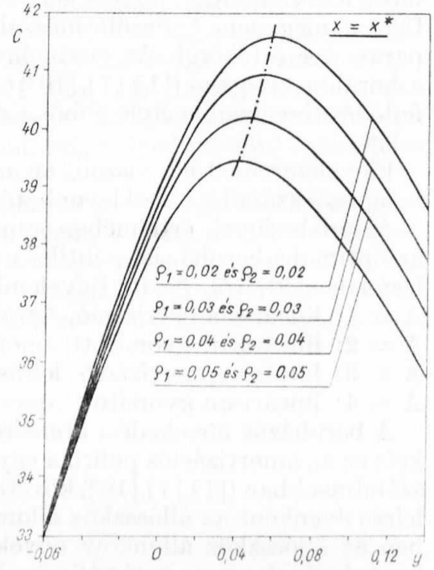
A technikai felszereltség optimális növekedési üteme már lényegesen kisebb mértékben függ az amortizáció elszámolási rendjétől, mint a beruházás növekedési üteme. A 3.2b ábra görbéi nagyon kevéssé jellegzetesek, ami ismét azt mutatja, hogy az elérhető összes fogyasztás csak csekély mértékben függ a technikai felszereltség növekedési ütemétől.

A reális alapváltozatból kiinduló számításainkban a megtestesült, a meg nem testesült, valamint e kétféle műszaki fejlődés kombinált hatását vizsgáltuk. A számítások nem vezettek az eddigiektől lényegesen eltérő eredményekre. Azt minden esetre meg lehetett állapítani, hogy a gazdaságpolitika szabadságfoka az egyes paraméterek értékének megváltozása tekintetében határozottan növekszik akkor, ha a figyelembe vett paraméterek száma növekszik, vagyis ha a gazdaságpolitikának többféle eszköz áll a rendelkezésére. Ugyanerre az eredményre vezettek a részesedési paraméter értékével kapcsolatos vizsgálatok is.

Végül a *javítási költségek*nek a le nem diszkontált összes fogyasztás alakulására gyakorolt hatását elemeztük. A számítások eredményei értelmében a fajlagos javítási költségek feltételezett növekedése párhuzamosan csökkenti az elérhető összes fogyasztást, valamint a beruházás és a technikai felszereltség optimális növekedési ütemét. Az összefüggéseket a 3.3a és a 3.3b ábra tünteti fel.




*3.3a. ábra* A le nem diszkontált összes fogyasztás függése a javítási költségek alakulásától és a beruházás növekedési ütemétől a reális alapváltozat esetén




*3.3b. ábra* A le nem diszkontált összes fogyasztás függése a javítási költségek alakulásától és a technikai felszereltség növekedési ütemétől a reális alapváltozat esetén

## Összefoglalás

1. Az a kutatás, melyről ez a tanulmány számol be, az állóeszközállomány optimális növekedési ütemével-kapcsolatos korábbi vizsgálatok szerves folytatása. Elsősorban annak tisztázására törekedett, hogy az ún. *megtestesült műszaki fejlődés* figyelembevétele mennyiben módosítja az összefüggéseket és az optimális beruházási politikával kapcsolatban korábban elért eredményeket. Ennek a tényezőnek a figyelembevétele kapcsolatot hoz létre a *beruházás* és a *műszaki fejlődés* között, vagyis ilyen körülmények között a műszaki fejlődés nagyobb mértékben érezteti hatását, ha több a beruházás. Feltehető, hogy ilyen körülmények között az állóeszközállomány gyorsabb növekedési üteme lesz majd optimális.

2. A megtestesült műszaki fejlődés figyelembevétele a modell nagymértékű átdolgozását tette szükségessé. A megtestesült műszaki fejlődés figyelembevétele azt jelenti, hogy *a berendezéseket létrehozásuk időpontjának megfelelő technikai színvonalon és technikai felszereltség mellett lehet csak üzemeltetni*. Ennek folytán az állóeszköz állomány különböző időszakokban létre hozott, tehát különböző évjáratokhoz tartozó elemei már nem adhatók össze közvetlenül.

A termelés ilyen körülmények között csak az *egyes évjáratokra* külön-külön *felírt termelési függvényekkel* ábrázolható.

3. Ilyen feltevések mellett a modell és a beruházási politika *központi változója* nem a homogénnek tekintett állóeszköz állomány növekedési üteme, hanem egyrészt *a beruházás*, másrészt pedig *a technikai felszereltség* időben változatlannak tekintett *növekedési üteme* lesz. A vizsgálat során e két növekedési ütemnek azt a kombinációját próbáljuk meghatározni, az amortizációra és a javítási, valamint az állóeszköz fenntartási költségek elszámolására vonatkozó korábbi feltevések mellett, mely a *fogyasztás maximumára* vezet. Az elemzést analitikus és numerikus eszközökkel bonyolítottuk le.

4. Az *analitikus elemzés* arra az eredményre vezetett, hogy a beruházás és a technikai felszereltség növekedési ütemének parametrikus kezelése esetén az elérhető összes fogyasztás elsősorban az *állóeszközök optimális élettartamától* függ. Reális paraméterkombinációk esetén viszont ez az optimális élettartam nem tisztán gazdasági változóknak, hanem elsősorban a rendelkezésre álló *munkaerő-állománynak* a *függvénye*. Az optimális élettartam tehát e feltevések keretei között az állóeszköz-állomány illetve a létszám viszonylagos szűkösségének illetve bőségének, és nem a műszaki fejlődés ütemének vagy egyéb tisztán gazdasági változáknak a függvénye. Elsősorban azért kaptuk ezt az eredményt, mert az *amortizációs politikát adottnak tekintettük*, és nem hoztuk közvetlen kapcsolatba az optimális élettartam meghatározásával.

5. A *numerikus számítások* legfontosabb eredménye, hogy a *megtestesült műszaki fejlődés* figyelembevétele *nem módosítja lényegesen a korábban kapott eredményeket*. A beruházás növekedési ütemének határozott és egyértelműen meghatározható optimuma, az elérhető összfogyasztásnak pedig egyértelműen meghatározható maximuma van akkor is, ha figyelembe vesszük a megtestesült műszaki fejlődést, vagyis a beruházás és a műszaki fejlődés kölcsönös kapcsolatát. A korábbi modell alapján kapott az az eredmény tehát, hogy nem a társadalmi és politikai korlátozó feltételek függvényében elérhető legmagasabb beruházási színvonal az optimális, hanem *a beruházásnak tisztán gazdasági változók függvényében meghatározható optimális értéke van*, nem módosul akkor, ha figyelembe vesszük a megtestesült műszaki fejlődést és évjáratonkénti termelési függvényeket írunk fel.

6. A numerikus számítások egyéb eredményei közül elsősorban az amortizációs politikához kapcsolódókat kell megemlíteni. Ezek értelmében az elérhető összes fogyasztás gyorsan nő, és a beruházás optimális növekedési üteme gyorsan csökken, ha bármilyen módon gyorsítjuk az amortizációt. Úgy látszik tehát, hogy az *amortizáció* távolról sem csupán pénzügyi—elszámolástechnikai kérdés, hanem *nagy befolyással van a növekedési folyamat egészére*. Feltétlenül szükségesnek látszik a *modell* olyan *továbbfejlesztése*, mely az optimális élettartamot és amortizációs politikát a beruházási politika egyéb alapváltozóival együtt, és azokkal szerves egységben tárgyalja.

*(Beérkezett: 1973. április 16.)*

## IRODALOM

1. Mihályffy L., Szakolczai Gy.: Az állóeszköz-állomány optimális növekedési üteme. Gazdaság, V (1972) 83–106. o.
2. Phelps, E. E.: A felhalmozás aranyszabálya (Tanmese). A gazdasági növekedés feltételei c. kötetben. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 266–275. o.
3. Phelps, E. E.: Második értekezés a felhalmozás aranyszabályáról. A gazdasági növekedés feltételei c. kötetben. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 276–296 o.
4. Solow, R. M.: A beruházás és a technikai haladás. A gazdasági növekedés feltételei c. kötetben. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 141–151. o.
5. Solow, R. M.: A technikai haladás, a tőkeképződés és a gazdasági növekedés. A gazdasági növekedés feltételei c. kötetben. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyv kiadó. 152–162. o.
6. Szakolczai Gy.: Az erőforrások értékelése, II. rész: A növekedési elmélet. Közgazdasági Szemle, előkészületben.
7. Az ártervezés ökonometriai modelljének eredményei IV.: Az állóeszköz-állomány optimális növekedési üteme. Az egyszektoros modell alapján végzett számítások eredményei. Országos Anyag- és Árhivatal és INFELOR Rendszertechnikai Vállalat, Budapest, 1970. 83+8+54 o.
8. Az ártervezés ökonometriai modelljének eredményei VIII.: Az erőforrások értékelése. Kísérlet a pénzügyi szabályozórendszer konzisztens elméleti megalapozására. Országos Anyag- és Árhivatal és INFELOR Rendszertechnikai Vállalat, Budapest, 1972, 161 o.
9. Kádas S.–Szakolczai Gy.: Az ártervezés ökonometriai modelljének eredményei V.: A beruházás és a technikai felszereltség optimális növekedési üteme. Országos Anyag- és Árhivatal és INFELOR Rendszertechnikai Vállalat, Budapest, 1973, sajtó alatt.
10. A távlati tervezés ökonometriai modelljének eredményei I.: Mihályffy L.–Szakolczai Gy.: Az állóeszköz-állomány optimális növekedési üteme a létszámváltozás ütemére vonatkozó különböző feltevések függvényében. Az egyszektoros modell alapján végzett számítások eredményei. Országos Tervhivatal és INFELOR Rendszertechnikai Vállalat, Budapest, 1970, 46 + 11 + 33 o.)

## THE OPTIMUM RATE OF GROWTH OF INVESTMENT AND CAPITAL-LABOUR RATIO

The paper deals with the further development of the results of an earlier research work, on the issues of optimal investment. It takes into consideration the relationship between investment and technological development and includes embodied technological development in the model. This leads to a large-scale transformation of the model, as the consideration of embodied technological development makes it impossible to sum up directly the fixed assets established at various points of time and representing different technological levels. Therefore vintage production functions shall be described for the explanation of production on the fixed assets established at various periods. The two main variables of optimal investment policy model will be the rate of growth of investment and capital-labour ratio, for under these conditions it is rational to suppose that the fixed assets can operate only at a technological level and with a capital-labour ratio corresponding to the data of establishment.

The analysis carried out with the model has led to a result that the total consumption available depends at the first place on the optimal lifespan of fixed assets, and lifespand depends at the first place on the available manpower. The most important result of numerical calculations is that the consideration of embodied technological development does not alter the conclusion that it is not the socially and politically admissible highest investment level which is optimal. Even under these conditions optimum investment depends on economic variables only, which leads to the maximum of the total consumption. It was manifest too, that amortization exerts a great influence on the whole growth process and therefore it is expedient to treat amortization together with the other basic variables of investment policy and in an organic unity with them.

## ОПТИМАЛЬНОЕ ТЕМПЫ РОСТА КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ ТЕХНИЧЕСКОГО СНАБЖЕНИЯ

Статья занимается дальнейшим развитием результатов более ранней исследовательской работы. Она обращает внимание на связь между капитальными вложениями и техническим прогрессом и вставляет в модель воплощенный технический прогресс. Это ведет к перестройке модели, так как учет воплощенного технического прогресса делает невозможным непосредственное суммирование основных фондов, созданных в разных периодах и таким образом представляющих разные технические уровни. Поэтому на каждый год следует написать производственные функции для объяснения достижимого производства на основных фондах, созданных в разных периодах. Двумя главными переменными модели оптимальной политики капитальных вложений будет темп роста капиталовложения и техническое снабжение, так как в этих условиях рационально предполагать, что основные фонды можно эксплуатировать только на техническом уровне, соответствующем периоду создания, а также при техническом снабжении, определенном в период создания.

Аналитическое исследование, сделанное на основе модели, привело к тому результату, что все достижимое потребление зависит в первую очередь от оптимальной продолжительности жизни основных фондов, а продолжительность жизни зависит в первую очередь от наличия рабочей силы. Самый важных результат численных расчетов в том, что и в случае учета воплощенного технического прогресса правильным является то более раннее заключение, что не самый высокий уровень капитальных вложений, достижимый как функция общественных и политических ограничительных условий является оптимальным. Капитальное вложение и при таких условиях имеет оптимальное значение, определяемое как функция только экономических переменных, которое ведет к максимальной стоимости всего достижимого потребления. Стало ясным и то, что амортизация имеет большое влияние на весь процесс роста и поэтому целесообразно рассматривать амортизацию вместе с другими основными переменными политики капитальных вложений и в органическом единстве с ними.