Simonovits András

Megjegyzések a dinamikus ÁKM harmonikus volumen- és árarányainak meghatározásáról

Bevezetés

Tanulmányom dr. Bródy András akadémiai doktori disszertációjának egyetlen részkérdését vizsgálja: az egyensúlyi-harmonikus volumen- és árarányok meghatározására szolgáló soklépéses eljárások számítástechnikai tulajdonságát. Az olvasóról feltételezem, hogy ismeri Bródy [1] disszertációját („Érték és újratermelés") és/vagy későbbi [2] „Beszámolójá"-t. Igyekszem elkerülni az ismétléseket, ennek megfelelően jelöléseimben is teljesen követem Bródyt. Egészen röviden összefoglalom a problémát:

Bródy kimutatta, hogy a dinamikus ágazati kapcsolatok mérlegével leírt gazdaság harmonikus volumen- és árarányait, valamint harmonikus növekedési ütemét (s az ezzel egyező átlagprofitrátát) csak körkörösen, lineáris sajátvektor-sajátérték feladatként lehet megoldani. Ezért az értékről a termelési árra nem egy, hanem végtelen sok lépésben lehet áttérni; véges sok lépéssel tetszőlegesen jó közelítés érhető csak el. Általánosabban: Bródy ismétléses eljárása (iterációja) bizonyos nem egyensúlyi arányoktól az egyensúlyi arányokhoz való valamilyen átmenetet illusztrál. Mivel az eljárás nem mondja meg, hogy mi történik az áttérés folyamán jelenlevő feleslegekkel-hiányokkal, ez az eljárás inkább a gazdaság szereplőinek eszmei tevékenységeit (pl. alkuit), modellezi, mint ténylegesen tárgyiasuló döntéseit. (Ezt Bródy is kimondja; Kornai János pedig több helyen, pl. az „Anti-equilibrium"-ban [5] figyelmeztet több matematikus közgazdász ilyen jellegű hibájára.)

Tanulmányom a Bevezetésen kívül három részt tartalmaz:

I. A Leontief-Bródy modell harmonikus arányai és azok Bródy-féle iteratív meghatározása.

II. A Bródy-féle számítási eljárás konvergenciája. Ebben a részben

1. megmutatom, hogy Bródy *bizonyítása* elnagyolt, heurisztikus;
2. *igazolom*, hogy Bródy *állítása* helyes, ha feltesszük, hogy a kiindulási arányok elég közel vannak a harmonikus arányokhoz;
3. kiterjesztem az előző állítást két másik, Bródy által érintett eljárásra.

Mindhárom esetben feltételünk túl erős. Valószínűnek látszik, hogy egész általános feltételek mellett konvergensek az eljárások, csak az általam adott bizonyítás „követeli" e megszorítást, nem pedig az igazság.

III. Más típusú eljárást tárgyalok a dolgozat utolsó részében. Ez az eljárás közgazdaságilag szintén értelmezhető, a konvergencia gyorsaságát nem ismerem, mindenesetre bizonyos hatékonysági függvény monoton javul az eljárás során. Az eljárás talán átvihető az általánosabb Neumann-modellre is, szemben Bródy eljárásával.

Köszönetet mondok Bródy Andrásnak, aki e dolgozat korábbi változatát gondosan átnézte, több hibára és pongyolaságra mutatott rá. Természetesen a dolgozat esetleges hibáiért minden felelősség a szerzőt terheli.

I. A Leontief-Bródy modell harmonikus arányainak kiszámítása és a Bródy-féle algoritmusok

1. *A Leontief-Bródy modell*

Bródy könyvében az ágazati kapcsolatok mérlegének dinamikus és zárt formáját használja: n termelő ágazat van és az $n+1$-edik ágazat a munkaerő termelése-fogyasztása. A bővített újratermelés arányait a folyó- és a lekötött ráfordítások A és B mátrixa írja le. Mindkét mátrix $(n+1)\times(n+1)$ dimenziós, nemnegatív (elemű), irreducibilis és primitív mátrix. A termelő ágazatok folyó- és lekötött ráfordítás mátrixa $\bar{A}$ és $\bar{B}$ — vagyis Bródy jelölési elveihez hasonlóan, de ellentétesen a felülhúzás az n dimenziós nyílt rendszerre utal! A megfelelő mátrixok között a következő összefüggés áll:

$$A = \begin{pmatrix} \bar{A} & f \\ v & 0 \end{pmatrix} \text{ és } B = \begin{pmatrix} \bar{B} & g \\ z & 0 \end{pmatrix}.$$

Föltesszük, hogy a gazdaság képes növekedni, azaz van terméktöbbletet hozó volumenvektora: $x > 0$, melyre $Ax < x$. Ezzel egyenértékű, hogy létezik értéktöbbletet hozó árvektor: $p > 0$, melyre $pA < p$. Másszóval, A maximális abszolútértékű (= domináns) egyébként pozitív — sajátértéke (= spektrálsugara) kisebb mint 1 : $p(A) < 1$.

Ekkor létezik — az arányossági tényezőtől eltekintve — egyetlen pozitív x^0 oszlop- és p^0 sorvektor, valamint λ^0 pozitív szám, melyek kielégítik a következő egyenleteket:

$$(A + \lambda^0 B)\,x^0 = x^0 \tag{1}$$

$$p^0(A + \lambda^0 B) = p^0\,. \tag{2}$$

Könnyen belátható, hogy x^0 jobboldali sajátvektor a marxi-leontiefi-bródy értelemben vett egyensúlyi termelés vektora, p^0 baloldali sajátvektor a termelési ár vektora, λ^0 sajátérték pedig a harmonikus fejlődési ütem, ill. az átlagprofitráta.

2. *A harmonikus arányok kiszámítása*

A harmonikus volumen- és árarányok kiszámítása szokványos, ha rendelkezésre áll a teljes A mátrix Leontief-inverze: $Q = (I-A)^{-1}$. Ekkor ugyanis (1) és (2) egyensúlyi egyenletek a következő alakra hozhatók:

$$\frac{1}{\lambda^0}x^0 = QBx^0 \quad \text{és} \tag{3}$$

$$\frac{1}{\lambda^0}p^0 = p^0\,BQ\,. \tag{4}$$

Mindkét egyenlet a szokásos *domináns* sajátvektor-sajátérték feladat, amely feltevéseink mellett egyszerű iterációval gyorsan és jól közelíthető. (Részletesebben lásd II. 2. 2. Tétel.)

Természetesen Q meghatározása torzítja a számítást, de ez nem lényeges. Bródy eltérő eljárása inkább azért érdekes, mert közvetlen közgazdasági tartalma van. x volumenvektor és p árvektor esetén a növekedési ütem jól becsülhető $\lambda(x, p) = p(I-A)x/pBx$ formulával. E közelítés relatív hibájáról mutattam ki korábbi [7] dolgozatomban, hogy lényegében kisebb, mint a volumenvektor, ill. az árvektor relatív hibájának kétszeres szorzata – általánosítva Bródy ezen tételét [1, 239–242. o.]. Továbbá x volumenvektor termeléséhez Ax volumenvektor folyó ráfordítás szükséges, a bővített termeléshez $\lambda(x, p)Bx$ volumenvektor lekötése szükséges.

A fentieknek megfelelően Bródy a következő iterációt vezette be:

– x volumenvektorból a φ függvénnyel

(5) $$\varphi(x, p) = Ax + \frac{p(I-A)x}{pBx} Bx \text{ új volumenvektort képezzük;}$$

– p árvektorból a ψ függvénnyel

(6) $$\psi(x, p) = pA + \frac{p(I-A)x}{pBx} pB \text{ új árvektort képezzük.}$$

Lényegében ψ és ψ leképzésekkel háromféle iteráció képezhető:

(i) Rögzítsünk valamilyen p fiktív árvektort.

Valamilyen x^1 volumenvektorból kiindulva

(5i) $x^{t+1} = \psi(x^t, p)$ iterációval közelítjük x^0 harmonikus vektort.

Hasonló a helyzet

(6i) $$p^{t+1} = \psi(x, p^t) \text{ iterációval.}$$

„Közgazdaságilag azonban legérdekesebbnek az a számítási (és így elvont gazdasági) mechanizmus ígérkezik, amely kiindulva az adott árakból módosítja a termelési arányokat, s e módosulás hatását figyelembeveszi az árak oldalán, s. i. t. Ez tulajdonképpen az előbbi két külön-külön végezhető számítás együttes (ii), méginkább felváltva (iii) való végzése. Bármilyen fontos is ennek további vizsgálata, messze túlmutat e dolgozat keretén s a gazdasági mechanizmus működési modelljeinek vizsgálatához, s a mechanizmus matematikai vizsgálatához vezet. E kérdéseket itt nem tárgyaljuk." (Bródy [1], 174–176. o.) Képletben:

(ii) Együttes alkalmazkodás:

$$\text{(5ii)}\quad x^{t+1} = \psi(x^t, p^t) \qquad \text{(6ii)}\quad p^{t+1} = \psi(x^t, p^t);$$

(iii) Váltakozó alkalmazkodás:

$$\text{(5iii)}\quad x^{t+1} = \psi(x^t, p^t) \qquad \text{(6iii)}\quad p^{t+1} = \psi(x^{t+1}, p^t)\,.$$

II. A Bródy-féle eljárás konvergenciája

1. *Bródy állításai*

Bródy könyvében azt állítja, hogy (i) *iteráció konvergens*. Valójában csak azt bizonyítja, hogy $p\psi(x, p) = px$, azaz az „iteráció során az ... árösszeg ... változatlan marad." Ebből még $\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$ sorozat korlátossága sem következik, nemhogy konvergenciája. Később Bródy is és a szerző is észrevették, hogy a kalkulatív ár nem lehet tetszőleges pozitív vektor. Ha pl. a bérek túl magasak az egyéb árakhoz képest, akkor $\lambda(x, p)$ negatívvá válhat, ami a volumenek negativitásában jut kifejezésre — rögzített árak mellett!

A továbbiakban mindig föltesszük, hogy a kiindulásul használt árak vektora értéktöbbletet hoz: $p > pA$. Ekkor $\lambda(x, p)$ pozitív, tehát pozitív x esetén $\varphi(x, p)$ is pozitív, (5) miatt. Tehát $\{x^t\}$ sorozat a $\{px = px^1, x > 0\}$ n-dimenziós szimplexben van, tehát *korlátos*. Ekkor Bródy állításának egy része — a korlátosság — helyes.

Bródy „Beszámoló"-jában visszatér (i) iterációra. Ebben az írásában egy bizonyításvázlatot közöl, amely azonban elnagyolt, heurisztikus és ellentmondásos ([2] 14. o.).

Röviden indokolom, mit tartok Bródy bizonyításában helytelennek:

Saját jelöléseimet használva, Bródy kiindulása a következő: Legyen $\tilde{x}^{t+1} = \lambda^t QB\tilde{x}^t$ a kiinduló iteráció, ahol λ^t értékét $\lambda(\tilde{x}^t, p)$ előírással úgy választottuk meg, hogy $p\tilde{x}^{t+1} = p\tilde{x}^t$ legyen (Bródy). Valójában ez utóbbi feltételt $\tilde{\lambda}^t = \tilde{\lambda}(\tilde{x}^t, p) = p\tilde{x}^t/pQB\tilde{x}^t$ választás biztosítja, amely általában különbözik λ^t-től.

„A fenti iterációból egyszerű és megengedett átalakításokkal kapjuk az ... $\tilde{x}^{t+1} = A\tilde{x}^t + \tilde{\lambda}^t B\tilde{x}^t + A(\tilde{x}^{t+1} - \tilde{x}^t)$ iterációt. Mivel azonban az iteráció konvergens, s így $\tilde{x}^{t+1} - \tilde{x}^t$ tart zérushoz, ezért az utolsó tag elhagyható. Így azonban éppen ..." (5i) ... „iterációhoz jutottunk." (Bródy) Eltekintve attól, hogy $\tilde{\lambda}^t \neq \lambda^t$, ha az iteráció perturbációs tagját — $A(\tilde{x}^{t+1} - \tilde{x}^t)$-t — elhagyjuk, a konvergencia megszűn*het*. —

Tanulmányom további részében (i), (ii) és (iii) iteráció konvergenciáját bizonyítom — az alábbi erős megszorítás mellett: *a kiindulásnál használt* (x^1, p^1) *legyen elég közel a célhoz,* (x^0, p^0)*-hoz.* Ez a megszorítás túl erős! Valószínű, bizonyításom nem a legalkalmasabb, s ezért kényszerülünk erre a megszorításra. Kellemetlen, hogy még azt sem tudom megadni, hogy mennyi az az „elég közel". A fejezet végén levő illusztráció szintén arra utal, hogy általános feltételek mellett is konvergens (i)iteráció.

2. *Néhány fontos konvergencia feltétel*

Nem sikerült olyan konvergencia-feltételt találnom, amelyből rögtön következne a Bródy iteráció konvergenciája. Három ismert konvergencia-feltétel együttes alkalmazásával bizonyítom eljárásunk konvergenciáját

Legyen U valamilyen halmaz az n dimenziós euklidesi térben, R^n-ben. Legyen f folytonos függvény, amely U-t U-ba képezi le. A fix-pont ($u^0 = f(u^0)$) meghatározására a következő iterációt szokták alkalmazni: $u^{t+1} = f(u^t)$. A fő kérdés: milyen $u^1 \in U$ kezdőértékekre konvergál az iteráció. Nyilvánvaló, hogy ha konvergál az iteráció, akkor valamilyen fixponthoz konvergál; s ha fixpontból indulunk ki, akkor ott is maradunk.

1. *Konvergencia tétel*: Legyen $f(u)$ kontrakció értelmezve $U \subset R^n$-beli korlátos és zárt halmazon: $s = \sup\limits_{u,v \in U} \dfrac{\| f(u) - f(v) \|}{\| u - v \|} < 1$. Ekkor egy és csak egy fixpontja van f-nek, s az iteráció tetszőleges kiindulás esetén (= globálisan) konvergens. ($\| u \|$ u valamilyen, pl. euklidesi normája.) [3; 9 12.2. 1 Tétel.]

2. *Konvergencia tétel*: Legyen $f(u) = Cu + d$ lineáris leképezés értelmezve $U = R^n$-ben és legyen $\varrho(C)$ C lineáris transzformáció (mátrix) spektrálsugara.

Az iteráció akkor és csak akkor konvergens globálisan, ha $\varrho(C) < 1$. A fixpont — az arányossági szorzótól eltekintve — egyértelmű [3; 9 13.3. Tétel.].

3. *Konvergencia tétel*: Legyen $f(u) = Cu$ *homogén* lineáris leképezés R^r-en. Az iteráció globálisan akkor és csak akkor korlátos, ha $\varrho(C) \leq 1$. Ha $\varrho(C) < 1$, akkor az iteráció globálisan konvergál a nulla-vektorhoz. Ha $\varrho(C) = 1$, akkor az iteráció pontosan akkor konvergens, ha egyetlen domináns sajátértéke van. Ha e domináns sajátértékhez egyetlen sajátvektor tartozik, akkor a fixpont is egyértelmű — eltekintve a triviális $u = 0$ fixponttól.

Ha C nemnegatív, irreducibilis és primitív mátrix (azaz van olyan hatványa, amely pozitív), akkor a domináns sajátvektor egyértelmű és minden nemnegatív és nem zéró u^1 esetén az iteráció ehhez konvergál [8].

Az 1. konvergencia tétel alapján bizonyítunk egy negyedik konvergencia tételt, amely Ostrowskitól [6] származik.

4. *Konvergencia tétel*: Legyen $f(u)$ leképezés valamilyen U tartományt U tartományba folytonosan leképező függvény, $u^0 \in U$ fixponttal. Tegyük föl, hogy $f(u)$ folytonosan differenciálható valamilyen V nyílt halmazon $(u^0 \in V)$, amelyet U tartalmaz; és $f_u(u)$ derivált mátrix spektrál sugara a fixpontban kisebb mint 1, azaz $\varrho\ \{f_u(u^0)\} < 1$. Ekkor van olyan W nyílt halmaz, melyet V tartalmaz, hogy minden $u^1 \in W$-re az iteráció u^0-hoz konvergál.

Bizonyítás-vázlat

A 4. Konvergencia tétel az 1. és a 2. konvergencia tétel *részleges* általánosítása, bizonyítása az 1. tételen alapszik. A bizonyítás lényege a következő: Ha $\bar{t}$ elég nagy természetes szám, akkor f függvény $\bar{t}$-adik iterált függvényének a derivált mátrixa kontrakció-mátrix, alkalmas V halmazon. Tehát az 1. Konvergencia tétel értelmében $m\bar{t}$-adik értékek sorozata konvergál u^0-hoz, stb.

Részletezve:

Ismert, hogy tetszőleges C mátrix esetén $\varrho(C) = \lim\limits_{t \to \infty} \sqrt[t]{\| C^t \|}$, (Varga [9], 62.0 Theorem 3.2.) ahol $\| C \| = \sup\limits_{u \neq 0} \{ \| Cu \| / \| u \| \}$. Ezért, ha $\varrho(C) < 1$, akkor van olyan $\bar{t}$ természetes szám, hogy $\| C^{\bar{t}} \| < 1$.

Legyen $f^t(u)$ f leképezés t-edik iteráltja: $f^1(u) = f(u)$ és $f^{t+1}(u) = f(f^t(u))$. A láncszabály alkalmazásával belátható, hogy $f_u^{t+1}(u) = f_u(f^t(u))\, f_u^t(u)$. A fixpontban e kifejezés egyszerűsödik: $f_u^{t+1}(u^0) = f_u(u^0)\, f_u^t(u^0)$, azaz $f_u^{t+1}(u^0) = f_u(u^0)^{t+1}$, ahol $t+1$ hatványkitevő, eltérően az eddigi iterációs indexektől!

Szükségünk lesz Lagrange-középértéktételének következő általánosítására: Legyen $g(u)$ folytonosan differenciálható függvény V konvex tartományban. Ekkor minden u és v V-beli pontpárhoz van olyan w pont az $\overline{u, v}$ szakaszon, hogy teljesül $\| g(u) - g(v) \| \leq \| g_u(w) \| \cdot \| u - v \|$ egyenlőtlenség.

Alkalmazzuk e tételt $g = f^{\bar{t}}$ függvényre; ha $\bar{t}$ elég nagy, akkor $f_u^{\bar{t}}(u^0) = f_u(u^0)^{\bar{t}}$ és $\varrho\ \{f_u(u^0)\} < 1$ miatt $\| f_u^{\bar{t}}(u^0) \| < 1$. A norma folytonosan függ a mátrix elemeitől, a mátrix elemei folytonosan függnek u-tól V-ben, tehát $f_u(u)$ folytonos függvénye u-nak. Mivel $\| f_u^{\bar{t}}(u^0) \| < 1$, van olyan W gömb V-ben, és s 1-nél kisebb pozitív szám, hogy minden $w \in W$-re $\| f_u^{\bar{t}}(w) \| < s < 1$. Eszerint és az utolsó bekezdés szerint $\| f^{\bar{t}}(u) - f^{\bar{t}}(v) \| \leq s \| u - v \|$, ha u, $v \in W$. — Vagyis $f^{\bar{t}}$ kontrakció W-ben.

Előfordulhat, hogy van olyan $u^1 \in W$, melyre $\{u^t\}$ nem minden eleme marad W-ben. Ezt elkerülendő, szorítkozzunk olyan $W_{\bar{t}}$-gömbre, melynek központja szintén u^0, és sugara W sugarának $(1-s)/s$-szerese, ha $s > 1/2$, ill. azonos W-vel, ha $s < 1/2$. [3; 9 12.2. B) feltétel].

Az 1. konvergencia tétel szerint minden $u^{\bar{t}} \in W_{\bar{t}}$-re $\{u^{m\bar{t}+\bar{t}}\}$ sorozat konvergál u^0-hoz. Alkalmasan választott W_r-re minden $u^r \in W_r$-re $f(u^r) \in W_{r+1}$ és $\{u^{m\bar{t}+r}\}$ sorozat konvergál u^0-hoz, $1 \leq r \leq \bar{t}$-ra. Tehát $\{u^t\}$ sorozat konvergál u°-hoz, ha $u^1 \in W_1$.

3. *A Bródy eljárás lokális konvergenciája*

Az előkészületek után könnyen bizonyíthatjuk:

I. TÉTEL. Ha a kalkulatív árvektor és a kiinduló volumenvektor elegendő közel van a harmonikus ár- és volumenvektorhoz, akkor a Bródy-féle (5i) iteráció konvergál a harmonikus volumenvektorhoz.

Bizonyítás:

Ha $p = p^0$, akkor $\lambda(x, p^0) = \lambda^0$, tehát $\psi(x, p^0) = (A + \lambda^0 B)x$. Ekkor $\psi(x, p^0)$ lineáris leképezés, amely kielégíti 3. konvergencia tétel utolsó bekezdésének feltételeit.

Ha $p \neq p^0$, akkor $\psi(x, p)$ nem lineáris, mert $\lambda(x, p)$ nem állandó, sőt nem is lineáris, hanem tört lineáris függvénye x-nek. Továbbá $p\varphi(x, p) = px$ azonosságból következően $p\varphi_x(x, p) = p$, vagyis $\varrho\{\varphi_x(x, p)\} \geq 1$, azaz $||\varphi_x(x, p)|| \geq 1$, így nem tudjuk bizonyítani, hogy φ kontrakció. ($n=1$ esetben a Lagrange-középértéktétel szerint $f(u) - f(v) = f_u(w)(u - v)$, ezért $|f_u(u)| \geq$ ≥ 1-ből következik, hogy f nem kontrakció. Viszont $n > 1$ esetén két ellentétes irányú egyenlőtlenségünkből nem következik semmi sem.)

Át kell térni a bonyolultabb, nem-szimmetrikus *inhomogén* formulákra. Legyen $px = 1$, ekkor egyszerű számolással adódik (5)-ből

$$(5') \qquad \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{p}) = \bar{A}\bar{x} + (1 - \overline{px})f + \lambda(\bar{x}, \bar{p})\left(\bar{B}\bar{x} + (1 - \overline{px})g\right).$$

Legyen $h^0 = f + \lambda^0 g$, és $h^* \bar{p} = (h_i \bar{p}_j)_{ij}^{nn}$ diád-mátrix. Ekkor $\varphi(\bar{x}, \bar{p}^0) = (\bar{A} + \lambda^0 \bar{B} - h^0 * \bar{p}^0)x + h^0$. Mivel $\varphi(x, p^0)$ homogén leképezés globálisan konvergens, $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{p}^0)$ inhomogén lineáris leképezés is globálisan konvergens, emiatt a 2. konvergencia tétel értelmében $\bar{\varphi}_x(\bar{x}, \bar{p}^0) = \bar{A} + \lambda^0 \bar{B} - h^0 * \bar{p}^0$ spektrálsugara kisebb mint 1. Folytonossági megfontolások miatt van olyan V gömb $\bar{p}^0$ körül, hogy $\bar{p} \in V$ esetén teljesüljön $\{\bar{\varphi}_{\bar{x}}(\bar{x}^0, \bar{p})\} \leq s < 1$. Ekkor a 4. konvergenciatétel szerint van olyan W (p-től függetlenül, csak V-től függően!), hogy $\bar{x} \in W$ esetén a Bródy-féle iteráció konvergens. —

Megjegyzés:

A bizonyításban felhasznált tételek elég lazán illeszkednek egymáshoz. Ez tehet a fő oka, hogy gyengébb eredményt (lokális konvergenciát) bizonyítottunk, mint ami igaznak látszik és ami szükséges volna. Tételünk csak arról biztosít, hogy a harmonikus pontok stabilak.

4. *A kettős iterációk lokális konvergenciája*

Az I. rész végén bevezettünk még két másik iterációs eljárást is, amelyeknél mind az árak, mind a volumenek minden lépésben módosulnak. Mind matematikai, mind közgazdasági megfontolások azt sugallják, hogy ezek az iterációk gyorsabban konvergálnak a harmonikus vektorokhoz, mint a fixáras (vagy fix-volumenes) volumen- ill. ár-iteráció.

Gondolatmenetünk teljesen hasonló az előzőhöz, ezért meglehetősen rövidre fogjuk a kifejtést.

II. TÉTEL: (ii) és (iii) kettős iterációk lokálisan konvergensek.

Bizonyítás:

Megint az inhomogén formulákra kell áttérni, de kissé eltérő formában. Legyen $x = (\bar{x}, x_{n+1})$ és $p = (\bar{p}, p_{n+1})$. Az előző kiküszöbölés helyett most $X = \bar{x}/x_{n+1}$ és $P = \bar{p}/p_{n+1}$ arányokra térünk át.

Ekkor az (5ii) és (6ii) formulákat inhomogén formulák helyettesítik:

$$(5'\text{ii})\ X^{t+1} = \Phi(X^t, p^t) \quad \text{és} \quad (6'\text{ii})\ P^{t+1} = \Psi(X^t, P^t)\,.$$

Tekintsük a (Φ, Ψ) leképezést, mely $2n$ dimenziós tyrtományt $2n$ dimenziós tartományba visz át. A derivált mátrix a következő: $J(X, P) = \begin{pmatrix} \Phi_X & \Phi_P \\ \Psi_X & \Psi_P \end{pmatrix}$.

Mivel $\Phi(X^0, P) = X^0$, $\Phi_P(X^0, P^0) = \Phi_P^0 = \mathrm{O}$. Hasonlóan $\Psi_X^0 = \mathbf{0}$.

Vagyis $J^0 = \begin{pmatrix} \Phi_X^0 & 0 \\ 0 & \Psi_P^0 \end{pmatrix}$, s így $\varrho(J^0) = \max\,\{\varrho(\Phi_X^0), \varrho(\Psi_P^0)\}$. Alkalmas V és W gömbök esetén tehát $P \in V$ és $X \in W$ esetén $\varrho\{J(X, P)\} < s < 1$.

(iii) egyetlen helyen tér el (ii)-től: (6'ii) helyett (6'iii) $\Psi(X^{t+1}, P^t) = \Psi\,\{\Phi\,(X^t, P^t), P^t\} = \tilde{\Psi}(X^t, P^t)$. De a harmonikus (X^0, P^0) pontban $\tilde{J}^0 = J^0$, stb. —

5. *Illusztráció*: *Kétszektoros modell*

Mivel vizsgálatunk közel sem befejezett, érdemesnek tűnik kitérni az egyetlen megoldott esetre, amikor is egy termelő- és egy fogyasztó ágazat van: $n = 1$. Ekkor A és B $n \times n$ dimenziós mátrixok a és b skalárokká zsugorodnak össze. Hogy (i) iteráció minden p kalkulatív ár mellett lineáris legyen, föltesszük, hogy $g = z = 0$. (Elhanyagoljuk a munkaerő bővített újratermeléséhez szükséges többletfogyasztást és az áruk bővített újratermeléséhez szükséges többletmunkaerőráfordítást!)

Legyen $p = (\bar{p}, 1)$ és $\overline{px} = 1$.

(5*i*) utolsó (itt második) sora: $\bar{x}_2^{t+1} = vx_1^t$, ahonnan behelyettesítéssel $x_1^{t+1} = (1 - vx_1^t)/p$ iterációt kapjuk, $0 < x_1 < 1/p$ korláttal.

Könnyen látható, hogy
— az iteráció globálisan konvergens, ha $v/\bar{p} < 1$,
— az iteráció globálisan divergens (a végtelenbe osszcillál), ha $v/\bar{p} > 1$, és
— $x^1 = x^0$ kivételével (fixpont) az iteráció divergens (két érték között alternál), ha $v/\bar{p} = 1$.

Összehasonlításul jegyezzük meg, hogy $p^0 = 1/f$; a bővíthetőség feltétele $vf < 1$-a; az ár értéktöbbletet hoz, ha $p > v/(1-a)$. Vagyis még meglehetősen általános feltevésünk is, miszerint a kalkulatív ár értéktöbbletet hoz, túl erős, legalábbis ebben az esetben.

III. A harmonikus arányok meghatározása a „tanuló módszerrel"

1. *A „tanuló" algoritmus rövid leírása*

Célszerűnek látszik az eljárás alapgondolatát előre venni — egyszerűsége miatt.

Induljunk ki valamilyen termelés (arány) vektorból (ahol az elemek összege 1). Vizsgáljuk meg az egyes ágazatok nettó termelésének és felhalmozásigényének hányadosát. Nyilvánvaló, hogy mennél kisebb a hányados, viszonylag annál szűkösebb ezen ágazat terméke. Ha az (egyik) legszűkebb ágazat arányát μ — 0 és 1 közötti pozitív — számmal növeljük, az összes termék egyforma arányú visszaszorításával, akkor a legszűkösebb ágazat bősége nő, a többié csökken. Belátható, hogy e növelési arány megválasztható úgy, hogy a kiindulásnál legszűkebb, ill. legbővebb termék bőség-mutatója egyenlővé váljon. Eközben a többi termék bősége alá is, fölé is kerülhet a közös értéknek, de mindenképpen alatta marad a kiindulásnál legnagyobb bőség-mutatónak. Vagyis eljárásunk fokozatosan csökkenti a legnagyobb bőség-hányadost, s folytonossági megfontolásokból fakadóan határértékben a maximális egyöntetű növekedési ütemre csökkenti. Ekkor viszont az alsó értékek is ide konvergálnak alulról (ha nem is monoton értelemben!), és a termelési arányok is a harmonikus arányokhoz konvergálnak.

2. *Matematikai tárgyalás*

Térjünk rá a matematikai tárgyalásra.

Legyen

$$\lambda_i(x) = (x_i - a_i x)/b_i x \tag{7}$$

az i. ágazat viszonylagos szűkösség-(bőség-) mutatója.[1] Itt és a továbbiakban a_i A matrix i. sorát jelöli, stb. Legyen $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ és μ valamilyen 0 és 1 közti szám. Jelölje $h(x)$, ill. $j(x)$ egyikét azoknak az indexeknek, melyre $\lambda_i(x)$ maximális, ill. minimális: $\lambda_{j(x)}(x) \leq \lambda_i(x) \leq \lambda_{h(x)}(x)$, $i = 1, \ldots m$.

Az előző pontban leírtak szerint a módosított termelési arányokat

$$\tilde{x} = \mu e_{j(x)} + (1-\mu) x \tag{8}$$

összefüggés adja, ahol $e_j = (\underbrace{0, \ldots, 1}_{j}, 0)$ a j-edik m dimenziós egységvektor.

A változtatási tényező megválasztása lényeges az iteráció konvergenciája, ill. konvergencia-sebessége szempontjából. Célszerűtlennek látszik a játék-

[1] Ebben a fejezetben már csak a homogén ($m = n + 1$ dimenziós) esetet vizsgáljuk.

elméletből ismert Brown-Robinson-féle tanuló algoritmus [4] követése, amely x-től függetlenül, a t-edik lépésben $\mu_t = \frac{1}{t}$ szorzót alkalmazza.

Először utalnék arra az egyszerű és közgazdaságilag is kézenfekvő tényre, hogy $\lambda_i(x, \mu, j)$ bőség-mutató rögzített j esetén minden $i \neq j$-re szigorúan csökken μ-vel, és $i = j$-re szigorúan nő. Nyilván

$$\lambda_i(x, 0, j) = \lambda_i(x) \text{ és } \lambda_i(x, 1, j) = \frac{\delta_{ij} - a_{ij}}{b_{ij}}, \ 1 \leq i \leq m.$$

Vagyis $\lambda_{j(x)}(x, 1, j(x)) > 0 \geq \lambda_{h(x)}(x, 1, j(x))$, vagyis $\lambda_i(x, \mu, j)$ folytonossága miatt van egyetlen egy olyan $\mu(x) \in [0, 1]$, melyre teljesül

$$(9) \qquad \lambda_{j(x)}(x, \mu(x), j(x)) = \lambda_{h(x)}(x, \mu(x), j(x)) .$$

Mivel $i \neq j(x)$-re $\lambda_i(x, \mu, j(x))$ szigorúan monoton csökken, $\lambda_i(\tilde{x}) < \lambda_i(x)$, $i \neq j(x)$.

Következésképp igaz

$$(10) \qquad \lambda_{h(\tilde{x})}(\tilde{x}) < \lambda_{h(x)}(x) ,$$

az áttérésnél a maximális bőség-mutató csökken, kivéve $x = x^0$ esetet, amikor $\mu(x) = 0$.

Rátérünk az eljárás konvergenciájának bizonyítására: (Az iteráció t. lépése $x = x^t$ vektorból (8) és (9) szerint $x = x^{t+1}$ vektort képezi, stb., $t = 1, 2, \ldots$).

Nyilván $x^t \geq 0$ és $\sum_{i=1}^{m} x_i^t = 1$ fennáll minden $t = 1, 2, \ldots$-re, vagyis $\{x^t\}$ korlátos. Ezért kiválasztható belőle (legalább) egy konvergens részsorozat; jelöljük ezt $\{x^{t_k}\}_{k=1}^{\infty}$-nel: $\lim_{k \to \infty} x^{t_k} = y$.

(10) értelmében $0 < \lambda_{h(x^{t+1})}(x^{t+1}) < \lambda_{h(x^t)}(x^t)$, $t = 1, 2, \ldots$, tehát létezik

$$(11) \qquad \lim_{t \to \infty} \lambda_{h(x^t)}(x^t) = \inf_t \lambda_{h(x^t)}(x^t) .$$

Mivel $\lambda_{h(x)}(x)$ folytonosan függ x-től,

$$(12) \qquad \lim_{t \to \infty} \lambda_{h(x^t)}(x^t) = \lambda_{h(y)}(y) .$$

Könnyen belátható (pl. [1]), hogy

$$(13) \qquad \lambda_{j(x)}(x) \leq \lambda^0 \leq \lambda_{h(x)}(x)$$

egyenlőtlenség minden x-re fennáll, sőt egyenlőség csak mindkét oldalon egyszerre teljesülhet, méghozzá csak az $x = x^0$ helyen. Tehát elegendő belátni, hogy $\lambda_{h(y)}(y) = \lambda^0$, hiszen ekkor minden konvergens $\{x^{t_k}\}$ részsorozat x^0-hoz tart, vagyis az egész $\{x^t\}$ *korlátos* sorozat is x^0-hoz tart.

Indirekt bizonyítunk: $\lambda_{h(y)}(y) > \lambda^0$ (hiszen $\lim \lambda_{h(y)}(y) \geq \lambda^0$ eleve következik (13)-ból).

Indirekt feltevésünk szerint $y \neq x^0$, azaz $\lambda_{j(y)}(y) < \lambda_{h(y)}(y)$, tehát $\mu(y) > 0$. Másrészt (7), (8), (9) szerint $\{\mu(x^{t_k})\}_{k=1}^{\infty}$ konvergens és $\lim_{k \to \infty} \mu(x^{t_k}) = \mu(y)$.

Létezik legalább egy olyan j_0 index, melyre $j(x^{t_k}) = j_0$ végtelen sokszor teljesül. Tegyük föl, hogy a részsorozatba eleve csak ilyen tagokat vettünk be. Ekkor $x^{t_k+1} = \mu(x^{t_k})\, e_{j_0} + [1 - \mu(x^{t_k})]\, x^{t_k}$ összefüggésből következően $\lim\limits_{k\to\infty} x^{t_k+1}$ létezik és $= \mu(y)\, e_{j_0} + [1 - \mu(y)]\, y$, azaz $j_0 = j(y)$ és $\lim\limits_{k\to\infty} x^{t_k+1} = \tilde{y}$.

Viszont (12), (11) szerint $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{h(x^{t_k+1})}(x^{t_k+1}) = \lambda_{h(\tilde{y})} < \lambda(\tilde{y})$, hiszen indirekt feltevésünk szerint $y \neq x^0$. Másrészt (10) és (12) szerint $\lim \lambda_{h(x^{t_k+1})}(x^{t_k+1}) = \lambda(y)$, ami ellentmond az előző egyenlőtlenségnek.

3. *Számítástechnikai megjegyzések*

(7) és (8) összefüggésből adódik

$$\lambda_i(x, \mu) = \frac{x_i - a_i\, x + \mu\, \{\delta_{ij(x)} - a_{ij(x)} - x_i + a_i\, x\}}{b_i\, x + \mu(b_{ij(x)} - b_i\, x)}\,.$$

Röviden: $\lambda_i(x, \mu) = \dfrac{\alpha_i + \mu\beta_i}{\gamma_i + \mu\varepsilon_i}$, ahol α_i, β_i, γ_i, ε_i függnek x-től. (9) figyelembevételével — x indexet elhagyva! —

$$(\beta_h\, \varepsilon_j - \beta_j\, \varepsilon_h)\, \mu^2 + (\alpha_h\, \varepsilon_j + \beta_h\, \gamma_j - \alpha_j\, \varepsilon_h - \beta_j\, \gamma_h)\, \mu + \alpha_h\, \gamma_j - \alpha_j\, \gamma_h = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk μ-re.

Mivel $\lambda_i(x) = \dfrac{\alpha_i(x)}{\gamma_i(x)}$ és $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_i(x^t) = \lambda^0$,

$$\lim_{t\to\infty} (\alpha_h\, \gamma_j - \alpha_j\, \gamma_h)\, \{x^t\} = 0 \text{ és } \alpha_h\, \gamma_j - \alpha_j\, \gamma_h \geq 0\,.$$

Vagyis a másodfokú egyenlet megoldásánál az állandótag egyre kisebb szerepet játszik, és ha eleve elhagyjuk, akkor a keletkező lineáris egyenlet $\nu(x)$ gyöke alul becsüli $\mu(x)$-et: $0 < \nu(x) < \mu(x)$, tehát $\lambda_{j(x)}(x, \nu(x)) < \lambda_{h(x)}(x, \nu(x))$. E módosított eljárás minőségileg azonosan viselkedik az eredetivel: az eljárás konvergenciája és a maximális bőség monoton csökkenése analóg módon igazolható.

4. *A két eljárás összehasonlítása*

A Bródy-féle algoritmus teljesen hasonló lépésekből áll, míg az általam javasolt algoritmusnál mindig változhat a minimális és/vagy maximális index: $j(x^t)$ ill. $h(x^t)$. Egyrészt az új eljárásban az indexekkel külön kell törődni, sőt $\lambda_i(x)$-ek i-szerinti maximumát-minimumát is meg kell határozni, másrészt a (8) $x \to \tilde{x}$ lépés sokkal egyszerűbb, mint az (5)-beli φ leképezés.

Eljárásom érdekes közgazdasági vonása, hogy egyedül a primál feladatra épül, a duális árakról szó sincs. Megemlítem még, hogy nemcsak hogy globálisan konvergens, de bőségmutatója is monoton csökken az iteráció során. Viszont minden lépésben legfeljebb egy olyan tevékenységet hoz be, amely a kiindulásban nem szerepel, bár az optimális megoldásban szerepel, ami nagy feladatnál előnytelen.

Másrészt ez a módszer nem érzékeny a legnagyobb, ill. a második legnagyobb abszolút értékű sajátérték hányadosának 1-hez való közelségére, szemben a Mises iterációval, ami módszerem mellett szól.

(Beérkezett: 1973. március 5.)

IRODALOM

1. Bródy A.: Érték és újratermelés. Budapest 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. Bródy A.: Beszámoló a dinamikus ÁKM-modellel végzett első magyarországi számításokról. (Kézirat) Budapest, 1970. p. 43.
3. Collatz, L.: Funktionanalysis und numerische Mathematik. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1964. Springer. pp. 447.
4. Gale, D.: The theory of linear economic models. New York—Toronto—London, 1960. Mc Graw Hill. p. 330.
5. Kornai J.: Anti-equilibrium. Budapest, 1971. Közgazdasági ěs Jogi Könyvkiadó. 437. p.
6. Ostrowski, A.: Solution of Equations and Systems of Equations. New York, 1960. Academic Press.
7. Simonovits Á.: Pozitív mátrixok Raylegh hányadosáról. Szigma, 1969. 1. sz.
8. Szép J.: Analízis. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
9. Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, 1962. Prentice-Hall.

NOTE ON THE DETERMINATION OF THE HARMONIC VOLUME AND PRICE PROPORTIONS IN THE DYNAMIC INPUT-OUTPUT MODEL

I. The paper deals with the determination of equilibrium volume and price vectors of a closed dynamic input-output model. In the paper A and B denote the matrices of current and capital inputs, x and p — the volume and price vectors, λ — the rate of growth and the rate of profit which are equal. The quantities denoted by an ^{0} refer to equilibrium situation, which are determined by the equations (1) and (2) or the equivalent equations (3) and (4) of the paper, uniquely up to a scalar factor. For their determination András Bródy in [1] and [2] has introduced a procedure, which differs from the well-known Mises iteration, being economically interpretable and practically applicable. It is described by equations (5) and (6).

II. The paper points out that Bródy has not proven the *global* convergence of his procedure in a proper way. The author succeeded in .correcting the mistake with a heavy restriction only: he proves *local* convergence, despite that he agrees with Bródy that his procedure must be convergent globally, too.

III. In the third part of the paper an algorithm is introduced, called ,,learning algorithm'' based on the well-known Brown-Robinson algorithm [4] of game theory. The procedure is iterative, too, it decreases in each step the production of every sector, proportionally so as to expand on this account the production of that sector which has the least ,,commodity surplus/capital input'' quotient (the bottleneck sector). The reallocation is carried out so that the indices of previously tightest and richest sectors became dentical (see 7,8 and 9). It is easy to see that this procedure is globally convergent.

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЦЕНОВЫХ И ОБЪЕМНЫХ ПРОПОРЦИЙ ДИНАМИЧНОГО БАЛАНСА ЗАТРАТ И ВЫПУСКОВ

Статья занимается определением векторов объема и ценовой пропорции баланса закрытой динамичной модели затрат и выпусков. В статье A и B означают матрицы текущих и связанных затрат, x и p — векторы объема и цены, λ — темп роста и равная этим норму прибыли. Количества, отмеченные ^{0}, касаются положения баланса, которое определяют однозначно уравнения статьи (1) и (2) или эквивалентные им уравнения (3) и (4), несмотря на скалярные коэффициент. Андраш Броди в [1] и [2] внедрил вместо известной Мизес-итерации другой метод, который можно объяснять экономически и важный в практической работе. Этот метод описывают уравнения (5) и (6).

Статья показывает, что Броди не подходящим образом доказывает *глобальную* сходимость метода. И автору удалось исправить ощибку только с большим ограничением: он доказывает *локальную* сходимость, несмотря на то, что он соглашается с Броди в том, что его метод должен иметь глобальную сходимость.

В третьей части статьи автор знакомит с новым алгоритмом, основанным на хорошо известном в теории игр «учебном алгоритме» Брауна-Робинсона. Данный метод — также итеративный, он снижает на каждом шагу производство отраслей в одинаковой пропорции, чтобы освободившуюся часть можно было обратить на расширение отрасли с наименьшим частным от избытка продуктов на связанные затраты (т. е. самой скудной отрасли). Степень перегруппировки выбираем так, чтобы показатель самой скудной и самой обильной отраслей до перегруппировки был идентичным показателю после перегруппировки (7), (8), (9). Легко заметить, что метод является *глобально сходящимся*.