Dobó Andor

# Matematikai vizsgálatok a számítógépek várható számának alakulásával kapcsolatban

## Bevezetés

Ebben az anyagban valamely ágazat vagy ország számítógépparkja helyzetének alakulását vizsgáljuk az idő függvényében; pontosabban a számítógépek várható számának becslésével foglalkozunk.

Az alkalmazott módszer általános jellege lehetővé teszi, hogy nemcsak számítógép esetében, hanem más ipari termék (pl. rádió, televízió, magnetofon, autó stb.) várható számának becslésénél is a közölt meggondolásokat alkalmazhassuk. Ugyanis „a gazdaság gyarapodási folyamatát" számos esetben az anyagban közölt modellel jól jellemezhetjük, s az így kapott eredmények is jól hasznosíthatók a vizsgált jelenségek viselkedésének leírásánál. Matematikai szempontból látni fogjuk, hogy lényegében „a születési és halálozási sztochasztikus folyamat" [1] általános modelljében szereplő függvények speciálisabb választásaival kapjuk a konkrét eredményeket.

Azért, hogy a kapott eredmények a gyakorlatban hasznosíthatók legyenek, részletesebben foglalkozunk az előállt függvénykapcsolatokban szereplő paraméterek becslésével, valamint az időszakos beszerzések ütemezésének kérdésével.

Megemlítjük, hogy a közölt problémára — ha más oldalról való megközelítésben és szempontból is — a válaszadás igénye a gyakorlatban ténylegesen felmerült többek között a Kohó- és Gépipari Minisztérium Számítástechnikai Alkalmazási Bizottság, a Központi Statisztikai Hivatal Országos Számítástechnika-alkalmazási Iroda, valamint az Országos Műszaki Fejlesztési Bizottság részéről is. Ez az anyag a kérdéskört elsősorban matematikai aspektusból tárgyalja, s a válaszadás egy lehetséges változatát mutatja be első közelítésként. (A Központi Statisztikai Hivatal Országos Számítástechnika-alkalmazási Iroda maga is kezdeményezője volt többek között egy matematikai alapon való megközelítésnek.)

Természetesen további más, az ittenitől eltérő, vagy meg nem fogalmazott szempontok és feltételek is előtérbe kerülhetnek akkor, amikor a jövőre nézve gazdaságilag tervezni és befolyásolni akarjuk a számítógéppark helyzetének alakulását. (Ilyen pl. az igény- és lehetőségelemzés!)

## 1. A számítógépek várható számának becslése

Jelölje $\xi_t$ a $t$ időpontban meglevő számítógépek számát. (Nyilvánvaló, hogy $\xi_t$ valószínűségi változó.) Tegyük fel, hogy:

$1^0$ Ha a $t$ időpontban a meglevő gépek száma $\xi_t = k$, akkor annak a valószínűsége, hogy a $t + \Delta t$ időpontban a gépek száma $\xi_{t+\Delta t} = k + 1$ lesz $a_k(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$-vel egyenlő, vagyis

$$P\{\xi_{t+\Delta t} = k + 1 \mid \xi_t = k\} = a_k(t)\,\Delta t + o(\Delta t) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

itt $o(\Delta t)$ („kis ordó $\Delta t$") $\Delta t$ olyan függvénye, melyre $o(\Delta t)/\Delta t \to 0$ midőn $\Delta t \to 0$; $a_k(t)$ pedig egy pozitív folytonos függvény.

$2^0$ Ha a $t$ időpontban a meglevő gépek száma $\xi_t = k$, akkor annak a valószínűsége, hogy a $t + \Delta t$ időpontban a gépek száma $\xi_{t+\Delta t} = k - 1$ lesz $b_k(t)\Delta t + o(\Delta t)$, vagyis

$$P\{\xi_{t+\Delta t} = k - 1 \mid \xi_t = k\} = b_k(t)\,\Delta t + o(\Delta t) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

ahol $b_k(t)$ pozitív folytonos függvény.

Legyen $P\{\xi_t = k\} = P_k(t)$, vagyis jelölje $P_k(t)$ annak a valószínűségét, hogy a $t$ időpontban a meglevő gépek száma pontosan $k$. Tegyük fel, hogy

$$3^0 \quad P_k(0) = \begin{cases} 1 \text{ ha } k = 0 \\ 0 \text{ ha } k \neq 0 \end{cases}.$$

Az $1^0$ és $2^0$ feltételek alapján valószínűségszámítási meggondolásokkal az alábbi matematikai összefüggésekhez jutunk:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)[1 - a_0(t)\,\Delta t] + P_1(t)\,b_1(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t)[1 - \big(a_k(t) + b(t)\big)\Delta t] + P_{k-1}(t)\,a_{k-1}(t)\,\Delta t + P_{k+1}(t)\,b_{k+1}(t)\,\Delta t + o(\Delta t) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ha a kapott egyenletrendszert rendezzük, s a $\Delta t$-vel való osztás után elvégezzük a $\Delta t \to 0$ határ átmenetet, az alábbi differenciálegyenletrendszert kapjuk:

$$(1) \quad \begin{aligned} P_0'(t) &= -P_0(t)\,a_0(t) + P_1(t)\,b_1(t) \\ P_k'(t) &= P_{k-1}(t)\,a_{k-1}(t) - P_k(t)[a_k(t) + b_k(t)] + P_{k+1}(t)\,b_{k+}(t) \quad (k = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Első közelítésként tegyük fel, hogy

$$(2) \quad \begin{aligned} a_k(t) &= \eta\, t^{\alpha-1} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \\ b_k(t) &= k\,\gamma\, t^{\alpha-1} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots), \end{aligned}$$

ahol $\alpha$, $\eta$ és $\gamma$ pozitív konstans. A közölt feltételek mellett a differenciálegyenletrendszer megoldásaként kapjuk, hogy $P_k(t)$ Poisson-eloszlást követ, vagyis

$$(3) \quad P_k(t) = \frac{[\lambda(t)]^k}{k!}\, e^{-\lambda(t)},$$

ahol

$$\lambda(t) = \frac{\eta}{\gamma}\,[1 - e^{-\frac{\gamma}{\alpha} t^\alpha}],$$

s itt $1 - e^{-\frac{\gamma}{\alpha} t^\alpha}$ tulajdonképpen nem más mint egy Weibull-eloszlásfüggvény.

Jelölje $M(t)$ a $\xi_t$ várható értékét. Ekkor a várható érték definíciója szerint:

$$M(t) = M\{\xi_t\} = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k(t) = \lambda(t)\, e^{-\lambda(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda(t)$$

azaz

$$(4) \quad M(t) = \frac{\eta}{\gamma}\,[1 - e^{-\frac{\gamma}{\alpha} t^\alpha}],$$

Mivel

$$M'(t) = \eta t^{\alpha-1} e^{-\frac{\gamma}{\alpha} t^\alpha} \tag{5}$$

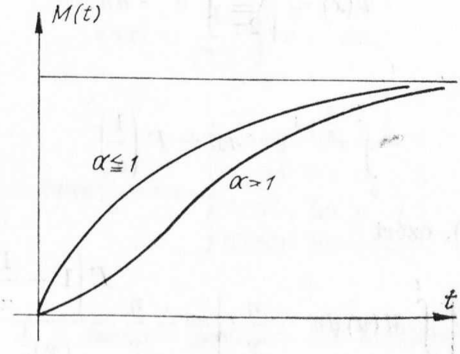
és

$$M''(t) = [\eta(\alpha - 1) t^{\alpha-2} - \eta\gamma t^{2(\alpha-1)}] e^{-\frac{\gamma}{\alpha} t^\alpha}, \tag{6}$$

ezért ha $0 < \alpha \leq 1$, akkor a $0 \leq t < \infty$ intervallumon

$$M''(t) < 0,$$

ami azt jelenti, hogy ez esetben $M(t)$ alulról nézve konkáv. Ha $\alpha > 1$, akkor $M(t)$ egy ideig konvex, majd utána konkáv alakba megy egy át. (1.1. ábra.)




*1. ábra*

Az empirikus adatok ismeretében már gyakran előre felismerhető $\alpha$ értékének értelmezési tartománya. A tapasztalat szerint általában $\alpha > 1$. A továbbiakban $\alpha$ -t alakparaméternek nevezzük.

Mint látható:

$$\lim_{t\to\infty} P_k(t) = \frac{\left(\frac{\eta}{\gamma}\right)^k}{k!} e^{-\frac{\eta}{\gamma}} \tag{7}$$

$$\lim_{t\to\infty} M(t) = \frac{\eta}{\gamma}. \tag{8}$$

Az

$$\int_0^t M(u)\, du = \frac{\eta}{\gamma} t - \frac{\eta}{\gamma} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{\alpha} u^\alpha} du \tag{9}$$

összefüggést vizsgálva a $\frac{\gamma}{\alpha} u^\alpha = x$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\int_0^t M(u)\, du - \frac{\eta}{\gamma} t = \frac{\eta}{\gamma} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{\frac{\gamma}{\alpha} t^\alpha} x^{\frac{1}{\alpha} - 1} e^{-x} dx. \tag{9'}$$

Ha $\alpha = 1$, akkor

$$\int_0^t M(u)\,du = \frac{\eta}{\gamma} t - \frac{\eta}{\gamma^2}[1 - e^{-\gamma t}].$$

Ha $\alpha = 2$, akkor

$$\int_0^t M(u)\,du = \frac{\eta}{\gamma} t - \frac{\eta}{\gamma}\sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}}\left[[\Phi(\sqrt{\gamma}\,t) - \frac{1}{2}\right],$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-x}\,dx = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

és $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, ezért

$$\lim_{t\to\infty}\left[\int_0^t M(u)\,du - \frac{\eta}{\gamma} t\right] = -\frac{\eta}{\gamma}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{10}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t M(u)\,du = \frac{\eta}{\gamma}. \tag{11}$$

E szerint tehát a „telítettségi szint" becslésére a numerikus számításoknál a (8)-val szemben kevésbé érzékeny (11)-et, illetve

$$\int_0^t M(u)\,du \approx \frac{\eta}{\gamma} t - \frac{\eta}{\gamma}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

összefüggést használhatjuk.

## 2. A $\xi_t$ konfidencia-intervalluma

Mivel $\xi_t$ $\lambda(t)$ várható értékű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, ezért $\xi_t$ szórás négyzete:

$$D^2\{\xi_t\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k(t) - \lambda^2(t) = \lambda(t) = M(t),$$

vagyis

$$D\{\xi_t\} = D(t) = \sqrt{M(t)}. \tag{12}$$

Ezek után annak a valószínűsége, hogy $\xi_t$ valószínűségi változó értéke az $M(t)-\mu\sqrt{M(t)}$ és $M(t)+\mu\sqrt{M(t)}$ határok közé esik, ismert módon [2] jó közelítéssel megadható. Eredményül kapjuk, hogy

$$P\{M(t)-\mu\sqrt{M(t)}\le\xi_t<M(t)+\mu\sqrt{M(t)}\}=$$

$$=\sum_{M(t)-\mu\sqrt{M(t)}\le k<M(t)+\mu\sqrt{M(t)}} e^{-M(t)}\frac{[M(t)]^k}{k!}=\sum_{-\mu\le\frac{k-M(t)}{\sqrt{M(t)}}<\mu} e^{-M(t)}\frac{[M(t)]^k}{k!}\approx 2\Phi(\mu)-1$$

$$(M(t)-\mu M(t)\ge 0), \tag{13}$$

ahol

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

$$2\Phi(\mu)-1=\begin{cases}0{,}683, & \text{ha } \mu=1\\ 0{,}954, & \text{ha } \mu=2\\ 0{,}997, & \text{ha } \mu=3\\ 0{,}999, & \text{ha } \mu=4.\end{cases}$$

### 3. A szereplő paraméterek becslése

Ebben a részben az

$$M(t)=\frac{\eta}{\gamma}\left[1-e^{-\frac{\gamma}{\alpha}t^\alpha}\right]$$

összefüggésben szereplő $\eta$, $\gamma$, $\alpha$ paraméterek becslésével foglalkozunk. Induljunk ki abból, hogy

$$u^{\alpha-1}M(u)=\frac{\eta}{\gamma}u^{\alpha-1}-\frac{\eta}{\gamma}u^{\alpha-1}e^{-\frac{\gamma}{\alpha}u^\alpha},$$

és így

$$\int\limits_0^t u^{\alpha-1}M(u)\,du=\frac{\eta}{\gamma}\int\limits_0^t u^{\alpha-1}\,du-\frac{\eta}{\gamma}\int\limits_0^t u^{\alpha-1}e^{-\frac{\gamma}{\alpha}u^\alpha}\,du=$$

$$=\frac{\eta}{\gamma}\frac{t^\alpha}{\alpha}-\frac{\eta}{\gamma}\frac{1}{\gamma}\left[1-e^{-\frac{\gamma}{\alpha}t^\alpha}\right],$$

vagyis

$$M(t)=\eta\frac{t^\alpha}{\alpha}-\gamma\int\limits_0^t u^{\alpha-1}M(u)\,du. \tag{14}$$

Rögzített $\alpha$ mellett határozzuk meg $\eta$ és $\gamma$ közelítő értékét, vagyis az $\hat{\eta}$ és $\hat{\gamma}$ értékét a legkisebb négyzetek módszere szerint. Keressük tehát rögzített $\alpha$ mellett $\hat{\eta}$-ra és $\hat{\gamma}$-ra nézve a

$$(15)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left\{\hat{M}(t_i)-\left[\hat{\eta}\frac{t_i^\alpha}{\alpha}-\hat{\gamma}\int_0^{t_i}u^{\alpha-1}\hat{M}(u)\,du\right]\right\}^2 \quad (\xi_t=\hat{M}(t),\text{ ha } 0\le t\le t_n)$$

kifejezés minimumát, melyet az

$$y_i=\hat{M}(t_i);\ z_i=z_i(\alpha)=\frac{t_i^\alpha}{\alpha};\ x_i=x_i(\alpha)=\int_0^{t_i}u^{\alpha-1}\hat{M}(u)\,du$$

jelölés mellett

$$(15')\qquad \sum_{i=1}^{n}\{y_i-\hat{\eta}z_i+\hat{\gamma}x_i\}^2$$

alakban is írhatunk. Az $\hat{\eta}$ illetve $\hat{\gamma}$ szerint differenciálva és a differenciálhányadosokat 0-val egyenlővé téve kapjuk, hogy a (15') kifejezés akkor lesz minimális, ha

$$(16)\qquad \hat{\eta}=\hat{\eta}(\alpha)=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_iz_i+\hat{\gamma}\sum_{i=1}^{n}x_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$$

$$(17)\qquad \hat{\gamma}=\hat{\gamma}(\alpha)=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}y_iz_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}z_ix_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}z_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}z_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\right)^2}.$$

Az ilymódon számított ($\alpha$-tól is függő) $\hat{\eta}$ és $\hat{\gamma}$ értékek ismeretében $\hat{\alpha}$ értékét becsüljük azzal az $\alpha$ értékkel, mely mellett $\hat{\eta}>0$, $\hat{\gamma}>0$ és

$$\delta(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-\hat{\eta}(\alpha)z_i(\alpha)+\hat{\gamma}(\alpha)x_i(\alpha)\}^2 \qquad (0<\alpha<\infty)$$

négyzet összeg minimális. Vagyis legyen $\hat{\eta}>0$, $\hat{\gamma}>0$ mellett

$$(18)\qquad \hat{\alpha}=\{\alpha:\delta(\alpha)=\text{minimum}\}.$$

Ez utóbbi meghatározása számítógép igénybevétele esetén nem okoz különösebb nehézséget, mivel végső fokon egyváltozós feltételes szélsőérték helyet (minimumot) kell csupán kiszámítani. Az $x_i$ értékeit jó közelítéssel a trapézformulával számolhatjuk. E szerint, ha

$$u_i^{\alpha-1}\hat{M}(u_i)=W_i,\quad (i=0,1,2,\ldots;\ W_0=0)$$

akkor

$$(19)\qquad x_i = x_i(\alpha) = \int_0^{t_i} u^{\alpha-1}\hat{M}(n)\,du = \sum_{k=1}^{i}\int_0^{t_k} u^{\alpha-1}\hat{M}(u)\,du \approx$$

$$\approx h\left(\frac{W_0+W_1}{2}+\frac{W_1+W_2}{2}+\ldots+\frac{W_{i-1}+W_i}{2}\right)=$$

$$= h\left(\frac{W_0}{2}+W_1+W_2+\ldots+\frac{W_i}{2}\right),$$

ahol

$$h = \frac{t_i}{i} = \text{állandó} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Megemlítjük, hogy a $\delta(\alpha)$ egyváltozós függvény minimumát a Hooke—Jeeves néven ismert minimum-kereső módszer alkalmazásával számítottuk ki. [3]. Ez a módszer egyébként — bizonyos feltételek mellett — alkalmas tetszőleges korlátos $n$ változós függvény lokális minimumának a meghatározására is. A paraméterek becslését eredményező algoritmus Fortran nyelvű gépi programozását *Illés József* végezte, s ezért a közreműködéséért ez úton is köszönetet mond a szerző.

A számításokhoz az empirikus adatokat a KSH által kiadott ,,Számítástechnikai Évkönyv 1972'' [4] alapján, illetve az 1972-re vonatkozó tényadatok ismeretében állítottuk össze.

A paraméterek becslését eredményező numerikus számításokat 1966-tól 1972-ig, vagyis $t = 8$-tól $t = 14$-ig minden évre elvégeztük bizonyos ,,simítások'', ,,kiegyenlítések'' érdekében, valamint ,,érzékenység-elemzés'' végett. A minimum-keresés révén kapott paraméter értékek közül $\alpha$-ra nézve, vagyis az alakparaméterre volt a legkevésbé ingadozó a számértékek alakulása. A $t = 8$-tól $t = 14$-ig terjedő időszakban az $\alpha$ becslésére kapott értékek átlaga: $\underline{\alpha} = 3{,}5498$; az átlag korrigált empirikus szórása pedig 0,087 értéknek adódott. A prognózist eredményező számítások folyamán $\alpha$ számszerű becslésére az $\hat{\underline{\alpha}}$ értéket választottuk. Az alakparaméter, vagyis $\alpha$ ismeretében az $\eta$ és $\gamma$ paramétereket az alábbi módon is becsülhetjük.

A $\hat{\gamma}$-ra nézve megköveteljük, hogy

$$(20)\qquad \delta(\hat{\gamma};\,\alpha) = \min_{0<\gamma} \delta(\gamma;\,\alpha),$$

ahol

$$\delta(\gamma;\,\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\hat{M}(t_i) - \frac{\hat{\eta}(\gamma;\,\alpha)}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{\alpha}t_i^{\alpha}}\right]\right\}^2$$

és itt

$$\eta(\gamma;\,\alpha) = \frac{\gamma}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{M}(t_i)}{1-e^{-\frac{\gamma}{\alpha}t_i^{\alpha}}}.$$

A $\hat{\gamma} = \gamma(\alpha)$ ismeretében

$$(21)\qquad \hat{\eta} = \hat{\eta}(\hat{\gamma};\,\alpha).$$

Ennél a paraméterbecslési eljárásnál is végső fokon egyváltozós feltételes szélső értékhelyet kell meghatározni.

A (21) alapján a $t = 8$-tól $t = 14$-ig terjedő időszakban $\eta$ becslésére kapott értékek átlaga: $\hat{\underline{\eta}} = 0{,}067673$; az átlag korrigált empirikus szórása pedig 0,00116 érték volt. Az $\alpha$ és $\eta$ ismeretében $\gamma$ értékét például (16) alapján becsülhetjük.

E szerint

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\eta} \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}. \tag{22}$$

(Amennyiben $\gamma$ értékére ilymódon negatív számot kapunk, úgy $\gamma$-ban egyváltozós függvény feltételes ($\gamma > 0$) minimumát kell keresni!)

Az itt közölt meggondolások alapján az

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 3{,}5498 \\ \hat{\eta} &= 0{,}067673 \\ \hat{\gamma} &= 0{,}000097657 \end{aligned} \tag{23}$$

értékek mellett a $\xi_t$-vel kapcsolatos számértékek alakulását az 1. Táblázat tartalmazza. A tényleges és számolt értékek függvényszerű alakulását — konfidencia határokkal — az 1. ábra tünteti fel. Természetesen az 1976—80 évekre eső számértékek alakulásáról lényegesen reálisabb képet fogunk kapni, ha majd a gépi programot az 1973—75 évre eső tényadatok figyelembevétele mellett futtatjuk le.

*1. táblázat*

| t | Év | Tényleges adatok | | Számolt értékek | | Konfidencia intervallumok | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\Psi_t$ | $\xi_t$ | $M(t)$ | $\xi_t - M(t)$ | 68,3% | 95,4% | 99,7% |
| 0 | 1958 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 1 | 1959 | 2 | 2 | 0 | 2 | | | |
| 2 | 1960 | 0 | 2 | 0 | 2 | | | |
| 3 | 1961 | 1 | 3 | 1 | 2 | | | |
| 4 | 1962 | 2 | 5 | 3 | 2 | 1— 4 | 0— 6 | |
| 5 | 1963 | 3 | 8 | 6 | 2 | 3— 8 | 1— 11 | 0— 13 |
| 6 | 1964 | 2 | 10 | 11 | —1 | 8— 14 | 4— 18 | 1— 21 |
| 7 | 1965 | 7 | 17 | 19 | —2 | 14— 23 | 10— 27 | 6— 32 |
| 8 | 1966 | 12 | 29 | 30 | —1 | 24— 35 | 19— 41 | 14— 46 |
| 9 | 1967 | 15 | 44 | 45 | —1 | 38— 52 | 32— 58 | 25— 65 |
| 10 | 1968 | 21 | 65 | 64 | 1 | 56— 72 | 48— 80 | 40— 88 |
| 11 | 1969 | 22 | 87 | 89 | —2 | 79— 98 | 70—107 | 60—117 |
| 12 | 1970 | 32 | 119 | 118 | 1 | 107—129 | 96—140 | 85—150 |
| 13 | 1971 | 43 | 162 | 152 | 10 | 140—164 | 127—177 | 115—189 |
| 14 | 1972 | 22 | 184 | 191 | —7 | 177—205 | 163—218 | 149—232 |
| 15 | 1973 | | | 234 | | 218—249 | 203—264 | 188—280 |
| 16 | 1974 | | | 280 | | 263—297 | 246—313 | 230—330 |
| 17 | 1975 | | | 328 | | 310—346 | 292—364 | 274—383 |
| 18 | 1976 | | | 377 | | 358—397 | 338—416 | 319—435 |
| 19 | 1977 | | | 426 | | 405—446 | 384—467 | 364—488 |
| 20 | 1978 | | | 472 | | 450—494 | 428—515 | 407—537 |
| 21 | 1979 | | | 515 | | 492—538 | 469—560 | 447—583 |
| 22 | 1980 | | | 553 | | 530—577 | 506—600 | 483—624 |

## 4. A számítógép beszerzések éves ütemezése

Jelölje $\Psi_t$ a $t$-edik időszakaszban ($t = 0, 1, 2, \ldots$) beszerzett számítógépek számát, $\xi_t$ pedig változatlanul jelölje a $t$-edik időszakaszban meglevő (működő) számítógépek számát ($\xi_t = \hat{M}(t)$ ha $0 \leq t \leq T$). Legyen $\nu$ egy számítógép használati idejének várható értéke. Hogy egy számítógépet átlagosan mennyi ideig használunk, az függ a gép megbízhatóságától, a felhasználás módjától, a terhelés jellegétől, a vállalatok anyagi helyzetétől stb. A tapasztalatok szerint $\nu$ értéke általában $6 \leq \nu \leq 12$, de leginkább 7 és 8 év körül mozog.

A $\nu$ értékétől függően jelölje $Q_\nu(t)$ a $t$-edik időszakban beszerzendő számítógépek átlagos (várható) számát. Tegyük fel, hogy $t = T$ időpontig áll rendelkezésünkre a beszerzett gépek számának alakulására vonatkozó tényleges adat. Legyen

$$\Psi_t^* = \begin{cases} \Psi_t, & \text{ha } 0 \leq t \leq T \\ Q_\nu(t), & \text{ha } T < t < \infty. \end{cases} \tag{24}$$

Feltehetően $Q_\nu(t) = \Psi_t$, ha $0 \leq t \leq \nu$.

Mivel $\nu$ időtartam után a meglevő gépeket lecseréljük, illetve újabbal helyettesítjük, azért $Q_\nu(T+1)$ értékét jó közelítéssel az

$$M(T+1) - M(t) = Q_\nu(T+1) - \Psi_{T+1-\nu}^*$$

összefüggésből határozhatjuk meg. Innen kapjuk, hogy

$$Q_\nu(t+1) = M(T+1) - M(T) + \Psi_{T+1-\nu}^*.$$

Általában ha $T$ és $\nu$ értékei egészek:

$$Q_\nu(T+k) = M(T+k) - M(T+k-1) + \Psi_{T+k-\nu}^*. \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

Mivel

$$\lim_{k\to\infty} [M(T+k) - M(T+k-1)] = 0,$$

ezért

$$\lim_{k\to\infty} [Q_\nu(T+k) - \Psi_{T+k-\nu}^*] = 0.$$

Tekintettel arra, hogy a beszerzendő gépek száma az igény és anyagi lehetőségek folytán a gyakorlatban korlátos, így kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} Q_\nu(T+k) = \lim_{k\to\infty} \Psi_{T+k-\nu}^* = \text{állandó}. \tag{26}$$

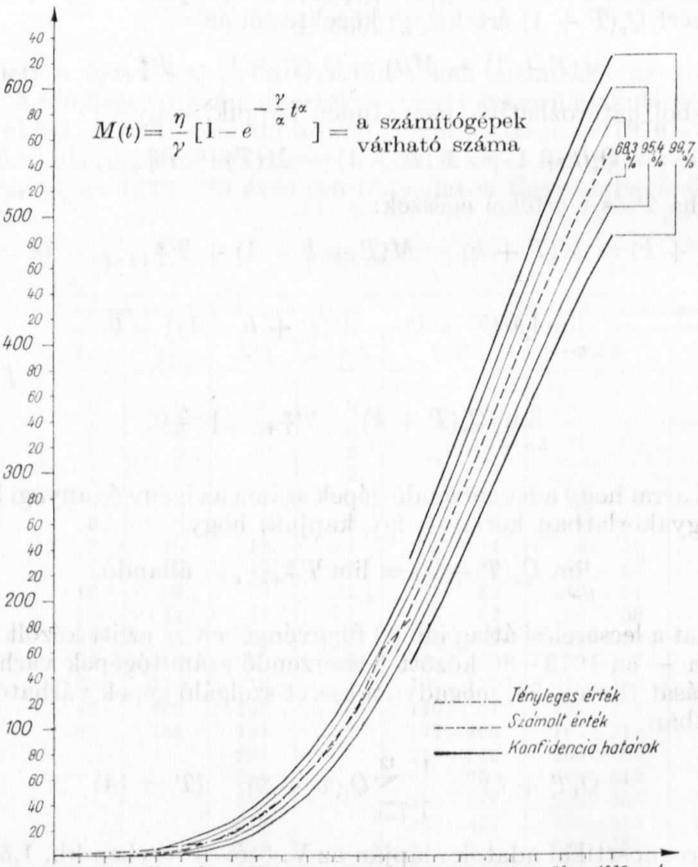
A 2. táblázat a lecserélési átlag idő ($\nu$) függvényében — az itt közölt összefüggések alapján — az 1973—80 között beszerzendő számítógépek várható számának alakulását tünteti fel, megadva a cserét szolgáló gépek várható számát is. A táblázatban

$$\bar{Q}(T+k) = \frac{1}{7}\sum_{i=6}^{12} Q_i(T+k). \qquad (T = 14) \tag{27}$$

A közölt prognosztikai adatok alapján az V. ötéves tervben kb. 1,5-ször annyi számítógép kerülne beállításra, mint amennyi várhatóan a IV. ötéves terv időszakára esik.

*2. táblázat*

| $T+k$ | Év | $M(t)$ | $Q_\nu(T+k)$ a $T+k$ évben beszerzendő gépek száma $\nu$ függvényében | | | | | | | Beszerzés ütemezése | Cserét szolgál átlagban |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\nu=6$ | $\nu=7$ | $\nu=8$ | $\nu=9$ | $\nu=10$ | $\nu=11$ | $\nu=12$ | $\bar{Q}(T+k)$ | |
| 15 | 1973 | 234 | 58 | 55 | 50 | 45 | 46 | 45 | 44 | 49 | 6 |
| 16 | 1974 | 280 | 67 | 61 | 58 | 53 | 48 | 49 | 48 | 55 | 9 |
| 17 | 1975 | 328 | 70 | 69 | 63 | 60 | 55 | 50 | 51 | 60 | 12 |
| 18 | 1976 | 377 | 81 | 71 | 70 | 64 | 61 | 56 | 51 | 65 | 16 |
| 19 | 1977 | 426 | 92 | 81 | 71 | 70 | 64 | 61 | 56 | 71 | 22 |
| 20 | 1978 | 472 | 68 | 89 | 78 | 71 | 67 | 61 | 58 | 70 | 24 |
| 21 | 1979 | 515 | 86 | 65 | 86 | 78 | 65 | 64 | 58 | 72 | 29 |
| 22 | 1980 | 553 | 84 | 81 | 60 | 86 | 70 | 70 | 59 | 73 | 35 |
| | | | | | | | | Összesen: | | 515 | 153 |
| | | | | | | | | 1976–80 | | 351 | 126 |




2. *ábra*

## 5. Kiegészítő megjegyzések

a) A kapott matematikai összefüggések jelenlegi és későbbi alkalmazásánál is gondot kell fordítani az adatok megbízhatóságára. (Sajnos nekünk a közölt számítások folyamán nem állt módunkban figyelembe venni azon gépek számát, amelyeket 1972-ig már lecseréltek. Mivel ezek száma viszonylag kicsi, feltehető, hogy a kapott eredményeket ez a hiányosság jelentősen nem befolyásolja.) Lényeges szempontnak kell tekinteni azt is, hogy az adatok közel azonos körülmények és feltételek mellett kialakult helyzetet, illetve állapotot tükröznek. Az elmúlt időszakban hazánkban a számítógépek elterjedését, a beszerzések alakulását különböző körülmények (új gazdasági mechanizmus, hazai számítógépgyártás, SZKFP) befolyásolták, és várhatóan befolyásolni is fogják. A modellezés során ez azt jelenti, hogy a szereplő paraméterek bizonyos idő után módosulni fognak. A tudományos és technikai haladás, a gazdasági feltételek módosulása, a nemzeti jövedelem gyarapodása, az irányítás rendszerének tökéletesítésére való törekvés mind befolyásoló hatással van az $\eta$, $\gamma$, $\alpha$ paraméterek számszerű értékére.

Ha $\tau$-val jelöljük azon hatások összességének a mértékét, melyek a számítógépek elterjedésének fejlődését jellemzik és befolyásolják, úgy írhatjuk, hogy

$$\eta = \eta(\tau); \; \gamma = \gamma(\tau); \; \alpha = \alpha(\tau).$$

Bár ebben a megfogalmazásban a gyakorlati szempontból $\tau$ eléggé definiálatlan marad, alkalmazási szempontból mégis figyelembe vehető. Ugyanis ebben a bizonytalannak tűnő formában is kifejezi, sőt lehetővé teszi a fejlődés okozta változások követését. Ha például egy múltbeli időponttól, pl. 1966-tól, vagyis $t = 8$-tól előre rögzített eljárás szerint minden évre a tényleges adatok alapján elvégezzük $\eta$, $\gamma$ és $\alpha$ becslését, akkor az így kapott értékeket $\tau$ függvényeként foghatjuk fel.

Esetünkben például

$$\begin{aligned} \eta(\tau_8) &= 0{,}071899 & \eta(\tau_{12}) &= 0{,}066931 \\ \eta(\tau_9) &= 0{,}066345 & \eta(\tau_{13}) &= 0{,}064478 \\ \eta(\tau_{10}) &= 0{,}064600 & \eta(\tau_{14}) &= 0{,}071790 \\ \eta(\tau_{11}) &= 0{,}067670 \end{aligned}$$

értéknek adódott. Mint látható, a közölt értéksor kevésnek bizonyul ahhoz, hogy az $\eta$ értékek jövőbeni tendenciájára nézve következtetéseket vonjunk le, de számuk további gyarapodásával minden bizonnyal megállapítható lesz, hogy $\eta$ értéke hosszabb távon nem egy konstans körül ingadozik, hanem valamilyen tendenciát követő függvény mentén veszi fel értékeit.

Így végső fokon $\tau$ függvényében — implicite az időtől is függően — a szereplő paraméterek változását prognosztikai igényeket kielégítő szinten követni tudjuk. Összefoglalóan tehát azt mondhatjuk, hogy a közölt matematikai modell elég általánosnak tekinthető ahhoz, hogy a vizsgált problémára első közelítésben kielégítő és elfogadható választ adjon. Minthogy azonban a szereplő paraméterek alakulására a fejlődés kimenetele hatást gyakorol, ezért e hatás tartósságától függ az, hogy a paraméterek milyen szakaszon maradnak állandósult értéken. A közöltek a prognosztikai eljárást mind módszert azonban nem bizonytalanabbá, hanem inkább egzaktabbá teszik, mivel a modell a dinamikus fejlődés tényét is figyelembe veszi.

b) Egy ország számítógépállományának darabszáma bár jellemzője lehet a számítástechnikai kulturáltságának, a számítástechnikai eszközök alkalmazási színvonalát, a géppark teljesítőképességét azonban ez elfogadhatóan már kevésbé jellemzi. A géppark teljesítményét alapvetően nem a darabszám, hanem a géptípusok műszaki paraméterei és az alkalmazott konfigurációjuk megoszlása, kiépítettsége jellemzi. Egyébként már a darabszám megállapításánál is mutatkozhatnak problémák, ugyanis nem mindig könnyű eldönteni, hogy milyen hardware-technikai eszközt tekintsünk számítógépnek.

Az ország gépparkjának teljesítményét nem volt szándékunk modellezni. Amennyiben a géppark teljesítménymegoszlását vizsgálnánk, úgy jó közelítéssel feltehetően Weibull-eloszlás jellemezné azt, melynél az összgépszám viszonylatában a kisgépek száma kb. 40–60% között mozogna.

Ha a számítógépek számát például ESZR kategóriákba sorolva vizsgálnánk, úgy a közölt módszerrel prognózist adhatunk az egyes típusok várható számának alakulásáról. Az így kapott információk jelentősen elősegítik a beszerzési terv kialakítását, a gyártási kooperáció tervszámainak kimunkálását. A közölt eljárás alkalmasnak bizonyulhat arra is, hogy az egyes ágazatok számítógép ellátottságának fejlődését tervszerűen befolyásoljuk. Általában elmondható, hogy a modell megfelelő alkalmazásával, illetve szükség szerinti fejlesztésével a számítástechnikai eszközök alkalmazásbavétele irányíthatóbbá tehető.

c) Az 1. pontban ismertetett matematikai modellel számos további probléma is vizsgálható, illetve megválaszolható. Így például egy számítógép típus vagy család „kihalását" vizsgálva megnézhetjük azt, hogy a $t$ idő függvényében a vizsgált gépcsalád működésben levő gépeinek száma hogyan alakul. (Ennek a problémának a szerviz és alkatrész, valamint software ellátás tekintetében van gyakorlati jelentősége.) Ha $\chi_t$ jelöli egy adott géptípus vagy gépcsalád $t$ időpontban használatban levő gépeinek számát és $P\{\chi = k\} = V_k(t)$, ahol

$$V_k(0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = 1 \\ 0, & \text{ha } k \neq 1, \end{cases}$$

akkor $V_k(t)$-ről belátható, hogy $P_k(t)$-hez hasonló differenciálegyenletrendszerrel jellemezhető. Ha már most feltételezhető, hogy

$$a_k(t) = k\beta$$

$$b_k(t) = k\mu t,$$

akkor a differenciálegyenletrendszer megoldásaként kapjuk, hogy

$$V_0(t) = 1 - \frac{e^{\frac{\beta^2}{2\mu}}}{A(t) + B(t)}$$

$$V_k(t) = \frac{e^{-\beta t + \frac{\mu}{2}t^2 + \frac{\beta^2}{\mu}}}{[A(t) + B(t)]^2}\left[\frac{A(t)}{A(t) + B(t)}\right]^{k-1}, \tag{28}$$

ahol

$$A(t) = \beta \int_0^t e^{\frac{(\mu x - \beta)^2}{2\mu}}\, dx$$

$$B(t) = e^{\frac{(\mu t - \beta)^2}{2\mu}}.$$

Ha $H(t)$ jelöli a szóban levő géptípus vagy gépcsalád $t$ időpontban használatban levő gépeinek várható értékét (átlagát), akkor $V_k(t)$ ismeretében

$$(29) \qquad H(t) = M\{\chi_t\} = \sum_{k=0}^{\infty} k V_k(t) = e^{-\frac{\mu}{2}t^2+\beta t}.$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $H(t)$ a maximumát a $t_0 = \frac{\beta}{\mu}$ helyen veszi fel, és ekkor

$$(30) \qquad H(t_0) = e^{\frac{\beta^2}{2\mu}}.$$

d) Befejezésül nyomatékosan felhívjuk a figyelmet arra, hogy ebben az anyagban a számítógépek számának várható alakulását prognosztizáltuk, anélkül, hogy a hazánkban található géppark kategorizálásával behatóbban foglalkoztunk volna. A tényadatokat a KSH számítástechnikai évkönyvéből [4] vettük, s számítógépnek tekintettünk minden olyan hardware-technikai eszközt, melyet e könyv ilyennek megjelölt. Amennyiben a szereplő adatok közül bizonyosakat nem számítógépnek, hanem csupán szervezéstechnikai eszköznek tekintünk, úgy a prognosztikai adatokat is ennek figyelembevételével kell előállítani, illetve kiszámolni. A kidolgozott és kipróbált gépi program birtokában e számítások elvégzése már nem jár különösebb nehézséggel.

Ami a kapott eredmények alapján a számítógépek elterjedésének trendjét illeti, erről sokféleképpen vélekedhetünk. Bármi is legyen az első benyomásunk az eredményekről, tény, hogy konkrét műszaki—gazdasági összefüggések elemzésének mellőzése esetén reálisnak mondható véleményt kialakítani túlságosan kockázatos lenne. Ilyen aspektusból, valamint a már ismert igények és lehetőségek számbavétele mellett külön is értékelendők a modellezés útján kapott numerikus eredmények.

Természetesen elképzelhető, hogy pl. az egy főre jutó nemzeti jövedelem gyarapodásának és más hasonló számszerű jellemzőnek a függvényében vizsgáljuk a számítógépek elterjedésének az alakulását, s ezen az úton prognosztizáljuk a fejlődés trendjét. Az ilyen meggondolásokat elsősorban akkor célszerű megtenni, ha az elterjedés, felfutás trendjét más országok viszonylatában akarjuk vizsgálni, azért, hogy a fejlődés menetét ezekhez mérten befolyásoljuk. Ez a szándék bár helyesnek tűnik, de nem minden esetben közelíti meg a problémát reálisan, illetve elfogadhatóan. Nem szabad megfeledkeznünk ugyanis arról, hogy a fennálló lehetőségeinket tulajdonképpen a paraméterek becslésénél, ha implicite is, de figyelembe vettük, a lehetőségeken túlmenő változtatásokat pedig csak nagy nehézségek árán vagyunk képesek elérni. Arról nem is beszélve, hogy bizonyos gazdasági összefüggéseknek egésze más lehet a szerepük és hatásuk az egyes társadalmi rendszerekben, ezért az ilyen alapon nyugvó viszonyítás nem mindig szolgáltat helyes információt a beruházási politikák kialakításához.

Különben is a számítógépeknek egy országban való elterjedését olyan tények is jelentősen befolyásolják, melyeket nehezen lehet összehasonlítási mértékül kimunkálni. Így pl. a számítógépek elterjedésére hatással van az automatizáltság színvonala, az irányítás rendszerének fejlettségi foka, az egyes iparági tevékenységek súlya, szerepe, megoszlása az ország gazdasági életében; a vállalatok száma, szervezettségi foka; a számítástechnikai eszközök alkalmazásbavételi érdekeltségének mértéke; a számítástechnikai vonatkozású szolgáltatások színvonala; a befektetés megtérülésének kimeneti lehetősége stb.

Ahhoz tehát, hogy két vagy több ország számítástechnikai eszközökkel való ellátottságának színvonala reálisan összehasonlítható legyen, ilyen és hasonló szempontokat is alapul kellene venni. Ezek számbavételét is magában foglaló vizsgálatok kimunkálása nem látszik könnyű feladatnak.

Ezek után az itt közölt prognosztikai eljárást a problémakör első megközelítési változatának foghatjuk fel, amely jobb módszer híján ebben a formában is hasznosnak bizonyulhat.

*(Beérkezett: 1973. szeptember 10.)*

## IRODALOM


1. Gnyegyenko, B. K.—Beljajev, J. K.—Szolovjev, A. D.: A megbízhatóságelmélet matematikai módszerei; Budapest Műszaki Könyvkiadó. Budapest 1970.
2. Medgyessy P.—Takács L.: Valószínűségszámítás. — Budapest 1966. Tankönyvkiadó. (Műszaki Matematikai Gyakorlatok sorozat) 65. o.
3. Cooper, L.—Steinberg, D.: Introduction to methods of optimization; Philadelphia—London—Toronto, 1970. Saunders.
4. KSH Számítástechnikai Évkönyv 1972. Budapest, 1972. Statisztikai Kiadó.


## MATHEMATICAL STUDIES ON THE TREND OF EXPECTED NUMBER OF COMPUTERS


In this paper the author models the probable trend of the $\xi_t$ number of the computers, existing at a $t$ moment with the "stochastic birth and death process" which — on general conditions — is defined by the differential-equation system (1). The author proves by the choice (2) that in case of the fulfilment of the initial conditions, given in 3°, the solution of the differential-equation system (1) is offered by (3) where $P_k(t) = P\{\xi_t = k\}$ is the probability of the condition that the number of the existing machines is exactly $k$ at a $t$ moment. On the basis of this the expected value of $\xi_t$ is given by the formula $M(t)$ in (4).

Considering (3) the author gives an estimation to the confidence interval of $\xi_t$ then deals in details with the estimation of the parameters $\eta$, $\gamma$, $\alpha$, figuring in function $M(t)$. Given certain basic facts, he defines concretely their value with the help of a program, adapted to computer by József Illés. Then the author deals with the estimation of expected number of computers, to be obtained in the $t$-th period. The expected number is represented by $Q_\nu(t)$ [see: (25)] where $\nu$ is the expected life-time of a computer.

At the end of the paper there are riders, relating to the application and the applicability respectively.


## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В СВЯЗИ С ДВИЖЕНИЕМ ПРЕДПОЛАГАЕМОГО ЧИСЛА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН


В этом труде автор моделирует предполагаемое движение числа вычислительных машин $\xi_t$, существующих в момент «$t$» «стохастическим процессом рождения и смерти», который при общих условиях описывается системой дифференциальных уравнений (1). Автор доказывает при выборе (2), что в случае осуществления исходных условий, заданных в 3°, решение системы дифференциальных уравнений (1) доставляет (3), где $P(k_t) = P\{\xi_t = k\}$ вероятность того, что число машин, существующих в момент «$t$» равняется точно «$k$». На основе этого ожидаемая величина $\xi_t$ получается из выражения $M(t)$ в (4).

Учитывая (3), автор дает оценку на конфиденционный интервал $\xi_t$, потом более подробно занимается оценкой параметров $\eta$, $\gamma$, $\alpha$, входящие в функцию $M(t)$. Автор точно определяет величину этих параметров с помощью программы, адаптированной на вычислительную машину Йожефом Иллешем. После этого он занимается оценкой $Q_\nu(t)$, ожидаемого числа вычислительных машин, доставаемых в периоде «$t$», где $\nu$ ожидаемая величина времени использования одной вычислительной машины.

Наконец можно найти дополнительные замечания о применении и применимости.