

SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági
Szakosztályának lapja

Szerkeszti:

MARTOS BÉLA

Társszerkesztők:

ANDORKA RUDOLF, BÁGER GUSZTÁV, BOD PÉTER, PONGRÁCZ TIBOR

*

Szerkesztő bizottság:

AUGUSTINOVICS MÁRIA, BÁCSKAY ZOLTÁN, BÉKÉSI GÁBOR, BOD PÉTER, BRÓDY ANDRÁS,
DOBÓ ANDOR, ÉLTETŐ ÖDÖN, FORGÓ FERENC, GANCZER SÁNDOR, GYIRES BÉLA,
HALABUK LÁSZLÓ, HEPPES ALADÁR, HOSSZU MIKLÓS, KÁDAS KÁLMÁN, KORNAI JÁNOS,
KREKÓ BÉLA, MESZÉNA GYÖRGY, ORMÓS ZSOLT, PRÉKOPA ANDRÁS, SEBESTYÉN JÁNOS,
SÓLYOM CSABA, STAHL JÁNOS, SZAKOLCZAI GYÖRGY, SZÉP JENŐ, TARDOS MÁRTON (elnök),
THEISS EDE, TÓTH JÓZSEF, ZIERMANN MARGIT

E szám szerzői:

BOTOS BALÁZS, dr, az MTA Ipargazdaságtani Kutató Csoport tudományos munkatársa,
GÁCS PÉTER, az MTA Matematikai Kutató Intézet tudományos segédmunkatársa,
HUNYADI LÁSZLÓ, az Országos Terhivatal Tervgazdasági Intézete főelőadója, HÜTTLE
ANTÓNIA, az Országos Terhivatal Tervgazdasági Intézete főelőadója, KÁDAS SÁNDOR,
az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet tudományos segédmunka-
társa, KISS ISTVÁN, az MTA Központi Fizikai Kutató Intézet tudományos titkára, KOTÁSZ
GYULÁNÉ, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, KOVÁCS ÁLMOS, az INFELOR
Rendszertechnikai Vállalat munkatársa, LIGETI CSÁK, a Gödöllői Agrártudományi Egye-
tem tanársegédje, MEGYERI FERENC, a MÉM Statisztikai és Gazdaságelemző Központ
osztályvezető helyettese, MÉSZÁROS SÁNDOR, a MÉM Statisztikai és Gazdaságelemző
Központ osztályvezetője, NAGY SÁNDOR, a KSH Gazdaságkutató Intézet főelőadója,
NYÁRY ZSIGMOND, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, PAPANÉK GÁBOR, az MTA
Ipargazdaságtani Kutató Csoport tudományos munkatársa, RABÁR FERENC, az INFELOR
Rendszertechnikai Vállalat igazgatója, STAHL JÁNOS, az INFELOR Rendszertechnikai
Vállalat munkatársa, STRAZICKY BEÁTA, az MTA Számítástechnikai és Automatizálási
Kutató Intézet tudományos munkatársa, SZABÓ ISTVÁN, az Építőipari Számítástechnikai
és Ügyvitelgépesítési Vállalat tudományos munkatársa, TÓTH JÓZSEF, a Gödöllői Agrár-
tudományi Egyetem tanszékvezetője, VARGA KÁROLY, a Debreceni Agrártudományi
Egyetem Üzemtani Tanszékének adjunktusa

Szerkesztőség: 1051 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a
Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI 1900 Budapest V., József
nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI. 215—96162
pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők a 1055 Budapest V.,
Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban.

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Bu-
dapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215—11488.,
a AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci utca 22. Telefon: 185—612
Előfizetési díj egy évre: 40,— Ft

Hálótechnika alkalmazása egy kevert jellegű programozási feladatban



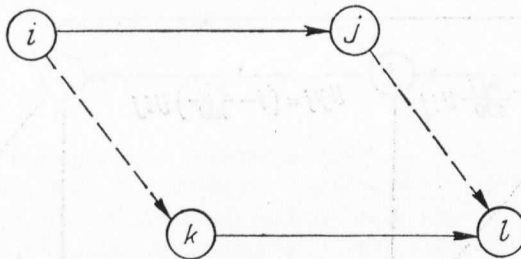
1. Bevezetés

Lapunkban már régebben ismertetésre került a hálótechnika alapuló ERALL-2 ütemezési algoritmus [1], amelynek tárgyalásánál kitértünk a hálótechnikai alapfogalmakra. Az eljárás azóta is sűrűn alkalmazásra került, de egyrészt — számítógép adta lehetőségek miatt — kibővített formában, (ERALL-3), másrészt olyan formában is, amely a hálótechnikával való ismeretek további tanulmányozását és az ebből kapott hálózatalakítási szabályok ismeretét kívánta. Erre térünk ki a továbbiakban részletesebben, a matematikai alapok részletes tárgyalásával, míg az alkalmazásoknál csak ismertetjük a módszer felhasználási módját, mivel az eljárás ezen részének közzététele már megtörtént¹ [2].

2. Hálótechnikai bevezető: a hálók és relációk átalakítása

2.1. Legyen a P halmaz egy kaszkádszerű háló, melyen értelmezve van egy $\ll$ közvetlen megelőzési és egy $\rightarrow$ átlapolási részben rendező reláció [1].

Ha $(i, j) \rightarrow (k, l)$, akkor először is vezessük be az (i, k) , valamint a (j, l) látszattevékenységeket. Ezzel az átlapolásos tevékenységek közti kapcsolat szokásos ábrázolásmódot nyerjük (1. ábra).



1. ábra

¹ A kritikus út módszerek állandó fejlesztése létrehozta az átlapolásos tevékenység-típusok technikáját, amely nemcsak a tevékenységek kezdései, hanem befejezéseik közti kapcsolat betartását is igényli, és ezzel módosította a CPM/TIME eredeti algoritmusát is (MPM-módszer). Az erőforrás-allokációs módszerek azonban mindegyik esetben az időszámítási algoritmus módosított változatait igénylik; éppen emiatt nyitva kell hagynunka kérdést, hogy CPM vagy MPM módszer alkalmazása látszik-e célszerűnek, mert az időszámítási algoritmus csak az ütemezés kezdetekor a lebegések számításánál szolgál tájékoztatásul; a továbbiakban az erőforráskorlátok miatt úgyis el kell térnünk az eredetileg kritikus tevékenységektől, és a figyelmet az erőforrások okozta „gazdasági kritikus út”-ra kell fordítani. [3]

E két látszattevékenységet az időszámítási algoritmus fel tudja használni a kritikus út megállapításában, ugyanis ezeket a megfelelő átlapolási % alapján tartammal láthatjuk el, és így a kritikus út számítás közvetlenül végezhető.

Vegyünk most fel egy j' és l' látszateseményt úgy, hogy

$$i \ll j' \ll j,$$

illetve

$$k \ll l' \ll l$$

legyen, és ezzel osszuk fel az (i, j) , illetve (k, l) tevékenységet két-két részre — (i, j') és (j', j) , illetve (k, l') és (l', l) — a következő módon:

$$(i, j') \ll (j', j)$$

$$(i, j') \ll (k, l')$$

$$(k, l') \ll (l', l).$$

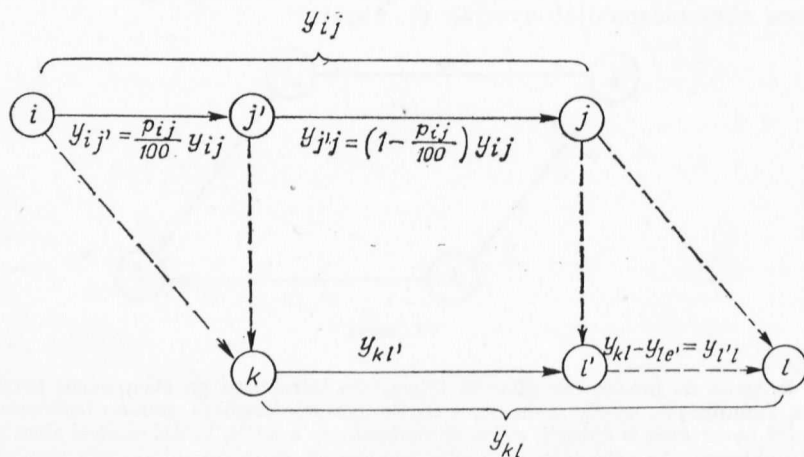
Legyen továbbá:

$$0 < p_{ij} < 100$$

és

$$y_{ij'} = \frac{p_{ij}}{100} \cdot y_{ij}$$

(ahol y -nal az egyes tevékenységek tartamát jelöltük). p_{ij} itt az (i, j) tevékenység átlapolási %-át jelöli; az ERALL-módszer esetén ugyanis a megelőző (ún. „vezér”-) tevékenység tartamának %-ában szokás megadni az átlapolás mértékét.² p_{ij} % tehát azt jelenti, hogy a (k, l) tevékenység megvalósítását az (i, j) tevékenység p_{ij} %-ának elvégzése után kezdhethjük el.



2. ábra

² (i, j) -hez több átlapoló tevékenység is tartozhat különböző átlapolási %-kal, így p_{ij} tulajdonképpen (k, l) -től is függhet; egyszerűség kedvéért azonban ezt az esetet nem részletezzük.

A $p = 0$ szélső esetben — mellyel külön nem foglalkozunk — (i, j) és (k, l) függetlenekké válnak, a másik szélső esetben, ha $p = 100$, az $(i, j) \ll (k, l)$ érvényes, tehát e két esetben felesleges átlapolásról beszélni.

Ha mármost

$$y_{kl} \geq \left(1 - \frac{p_{ij}}{100}\right) \cdot y_{ij},$$

akkor (2. ábra)

$$(j', j) \ll (l', l),$$

ellenkező esetben pedig

$$(k, l') \ll (j, l);$$

ezek bekövetkezését egy (j', k) és ezenkívül első esetben egy (j, l') , második esetben egy (l', j) látszattevékenység beiktatása valósítja meg. (A 2. ábrán ezért nem irányítottuk a tevékenységet ábrázoló nyilat.)

Mármost, ha P kaszkádszerű háló, akkor az ily módon kiegészített P^* is az. Az [1]-ben megadott 3 tulajdonság teljesülését ugyanis könnyen beláthatjuk:

1. A 2. ábrán jól látható, hogy az i, j', j, k, l', l eseményekkel meghatározott részhálónak is egyetlen kezdőeseménye van, mégpedig i , egyetlen záróeseménye, mégpedig l , ha tehát $i = 0$ ($i \in P$) volna, ez az $i \in P^*$ esetében is egyetlen kezdőesemény lenne, hasonlóan mondhatunk ki l -re záróesemény vonatkozásában.

2. j' és l' beiktatása által 4 további részben rendezési feltételt mondtunk ki, ezek azonban egyéb viszonylatokban nem szerepelnek, mert ha

$$\begin{aligned} & (h, i) \ll (i, j) \quad \text{vagy} \quad (h, i) \text{---}\ll (i, j) \\ \text{fennáll, akkor} \quad & (h, i) \ll (i, j'), \quad \text{ill.} \quad (h, i) \text{---}\ll (i, j') \end{aligned}$$

is, és megfelelően, ha

$$\begin{aligned} & (k, l) \ll (l, m), \quad \text{ill.} \quad (k, l) \text{---}\ll (l, m), \\ \text{akkor a} \quad & (l', l) \ll (l, m), \quad \text{ill.} \quad (l', l) \text{---}\ll (l, m) \end{aligned}$$

kapcsolatok is fennállnak, ami biztosítja, hogy az eddigi elérhetőségi feltételek is teljesüljenek, s az új események mindegyike is „elérhető”.

3. Az (i, k) és (j, l) tevékenységek beiktatása a tranzitivitás miatt a hurokmentességen nem változtat, ugyanígy a (j', k) -é sem, továbbá a (j, l') vagy (l', j) bármelyikét (de csak egyiket!) vezessük is be, hurkot nem okozunk, mert j és l' között más kapcsolat nincs (mint a 2. ábrából ugyancsak kitűnik).

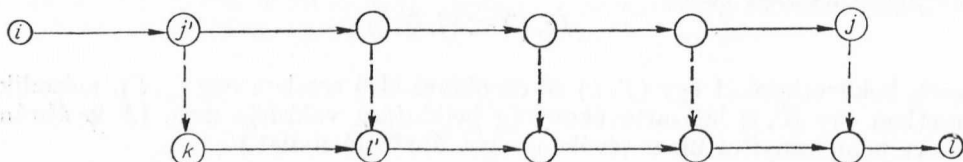
Fentiek alapján beláttuk, hogy P^* -ra is teljesülnek a kaszkádszerűség feltételei, tehát P^* is kaszkádszerű háló. Ily módon minden $(i, j) \text{---}\ll (k, l)$ átlapolásos kapcsolatot helyettesíthetünk a fenti módon adott 4 közvetlen megelőzési kapcsolattal, illetve fentieket megismételve, ennek véges számú többszörösével.

Eljárásunk gyakorlatilag azt jelenti, hogy az átlapoló, illetve átlapoló tevékenységeket az átlapolás %-ának megfelelően felbontottuk olyan kapcsolatokra, melyek már átlapolást nem tartalmaznak, s ezt egy tevékenységen belül

többször is megismételhetjük. Így például $p = 20$ (%) és $y_{ij} = y_{kl}$ mellett a 3. ábrán látható felbontás adódik.

A gyakorlatban a tevékenységek ilyen kapcsolódása legtöbbször úgy jelentkezik, hogy $y_{ij} \neq y_{kl}$, s ez esetben a láncolat egyes elemeinek tartamát megnyújtjuk vagy a tevékenységet megszakítjuk, hogy ez az eset álljon fenn.

Az átlapolás elsőrendű értelme az, hogy két (vagy több) tevékenység adott p %-os egymáshoz való eltolása által részben párhuzamosan valósul meg. Ennek alkalmazása elsősorban nagy (építőipari) létesítmények programozásánál fordul elő, például több szintes, több szakaszos (több lépcsőházas) épít-



3. ábra

mények esetén, ahol egy tevékenység 1—1 szintre vonatkozik (falazás), ugyanakkor a következő tevékenység (vakolás) megkezdésével nem várjuk meg a szint teljes elkészültét. Ez esetben elegendő, ha a tevékenységeknek a (3. ábra szerinti) felbontása helyett az (i, k) , ill. (j, l) tevékenységekhez az

$$y_{ik} = y_{jl} = \frac{p_{ij}}{100} \cdot y_{ij}$$

tartamot rendeljük, s az $\{i, j', j, k, l', l\}$ részháló átfutási ideje ebből a j' és l' kihagyása által előálló (eredeti) részháló átfutási ideje lesz. Ezen eset tárgyalása lényegesen egyszerűbb, mint az általánosítás, de az általános eseten semmit sem módosít, ugyanis ha

$$y_{kl} < \left(1 - \frac{p_{ij}}{100}\right) y_{ij},$$

akkor (j, l) tartamával

$$- \left(1 - \frac{p_{ij}}{100}\right) \cdot y_{ij} + y_{kl}$$

értéket véve, a teljes átfutási időt ezen (negatív) szám segítségével ugyanígy lehet meghatározni.

2.2. Ezekután értelmezzük a P' hálót a következőképpen (ahol P egy kaszkádszerű háló):

$$\text{ha } i \in P, \text{ akkor } i \in P',$$

$$\text{ha } i \notin P, \text{ akkor } i \notin P',$$

$$\text{ha } (i, j) \in P, \text{ akkor } (j, i) \in P'.$$

P' -höz tehát ugyanazon események tartoznak, mint P -hez, és ugyanazon eseménypárok között vannak értelmezve a tevékenységek is, de ellentétes irányítással.

Világos, hogy ekkor 0-nak n , n -nek 0 felel meg, és az egyes események éppúgy elérhetőek maradnak, mint előzetesen, valamint érvényes a hurokmentesség is, P' tehát szintén kaszkádszerű háló.

2.3. Legyen P_1 és P_2 mindegyike kaszkádszerű háló, legyenek P_1 és P_2 eseményei

$$i'_x \in P_1 \quad (x = 1, \dots, X),$$

illetve

$$i''_y \in P_2 \quad (y = 1, \dots, Y),$$

és legyen

$$P_1 \cap P_2 = \emptyset;$$

ekkor alkossuk meg a következő P^{**} halmazt: először is legyen

$$P_1 \cup P_2 \subset P^{**},$$

valamint tetszőleges számú

$$(i'_x, i''_y)$$

tevékenységet felvéve, köztük az

$$(i'_1, i''_1)$$

és

$$(i'_X, i''_Y)$$

tevékenységeket (utóbbi esetben a kezdő és végpontok — események — összekötéséről van szó), alkossuk meg P^{**} -ot. (P^{**} eseményei tehát P_1 és P_2 összes eseményeivel azonosak, de a tevékenységek száma több lett az újabb kapcsolatok bevezetésével, melyek azonban mind $P_1 \rightarrow P_2$ irányításúak.)

Mármost P^{**} -nak egyetlen kezdőeseménye van, i'_1 , egyetlen végeseménye i''_Y , a két legutóbb említett tevékenység hozzávétele által az elérhetőséget is biztosítottuk (hiszen P_1 és P_2 -re külön-külön teljesül az elérhetőségi feltétel). Nem nehéz belátni továbbá azt sem, hogy P^{**} hurokmentes, mivel egyrészt P_1 és P_2 is az, másrészt csak $P_1 \rightarrow P_2$ irányítással létesítettünk újabb kapcsolatot, így P_2 -ből P_1 -be vissza nem juthatunk. Így tehát beláttuk, hogy P^{**} is kaszkádszerű háló, s ily módon a P_1 és P_2 -t egyesíthetjük („összevarrhatjuk”) kaszkádszerű hálóvá.

2.4. Legyen mármost a P halmaz a következő struktúrájú:

a) P kaszkádszerű háló,

b) létezik egy

$$i_1^*, i_2^*, \dots, i_M^*$$

lánc, és ennek elemeihez tartoznak olyan

$$P_{i_1}^*, P_{i_2}^*, \dots, P_{i_M}^*$$

halmazok, hogy mindegyik

$$P_{i_m}^* \quad (m = 1, \dots, M) \subset P$$

halmaz is kaszkádszerű háló, továbbá

$$P_{i_m}^* \text{ első elemére } (i_m^1)$$

$$0 \leq i_m^1,$$

utolsó (i_m^n) elemére

$$i_m^n \leq i_m^*,$$

vagyis $P_{i_m}^*$ a $(0, i_m^1)$, ill. (i_m^n, i_m^*) látszattevékenységekkel csatlakozik a fenti lánchoz. Pontosabban P -ről csak annyit kell kikötnünk, hogy megfelelő látszattevékenységek és események beiktatásával ilyenre tehető, tehát a $P_{i_m}^*$ halmazok diszjunktak, ami azt jelenti, hogy az i_m^* -ot megelőző munkák különböző m -ek mellett egymástól nem függenek.

Ebben az esetben kaszkádszerű háló lesz az a halmaz (Q) is, amely P -ből a következőképpen állítható elő:

$$Q' = P - \bigcup_{m=1}^M P_{i_m}^*,$$

majd képezzük Q^* -ot:

$$Q^* = Q' + \bigcup_{m=1}^M P_{i_m}^{**},$$

és vegyük még hozzá a

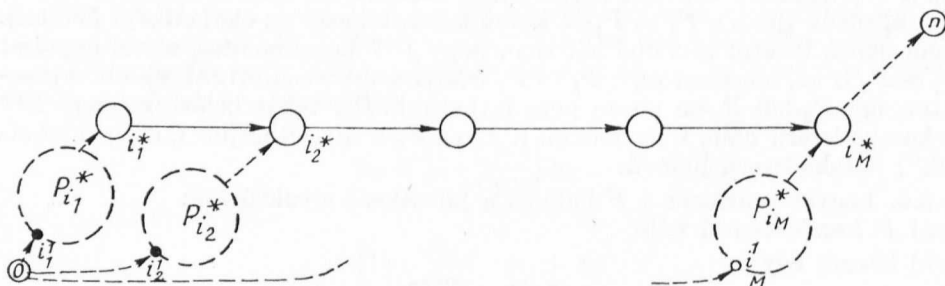
$$(0, i_1^*), (i_1^1, i_2^1), \dots, (i_{M-1}^1, i_M^1), \text{ végül } (i_M^1, n)$$

látszattevékenységet.

Az így képzett Q halmazról könnyű belátni, hogy szintén kaszkádszerű háló, mert

Q első eleme is 0, utolsó eleme n ,

a hálók egyesítése a 2.2. és 2.3. alapján történt, ami az ott bizonyítottak szerint azt jelenti, hogy Q valóban kaszkádszerű háló. A közölt eljárás a 4. ábrán látható vázlat szerint valósította meg a háló átalakítását.



4. ábra

Szóban kifejezve eljárásunk azt jelenti, hogy egy kaszkádszerű hálót adott lánchoz csatlakoztatva felbontunk, majd a lánchoz előlről kapcsolódó részhálókat „megfordítjuk”, és így csatlakoztatjuk vissza a lánchoz (a kaszkádszerűséghez szükséges megfelelő látszattevékenységekkel kiegészítve).

3. Az ütemezési feladat megfogalmazása

Az ütemezési feladat az [1]-ben szereplővel rokon, és a következőket jelenti: az

$$i_1^*, \dots, i_M^*$$

lánc minden eleméhez rendeljünk hozzá egy

$$t(i_1^*), \dots, t(i_M^*)$$

időpontot (ahol $\{i_1^*, \dots, i_M^*\} \subset P$), majd rendeljünk a P halmaz minden olyan tevékenységéhez, melyek kezdő- és végeseménye nem tartozik az $\{i_1^*, \dots, i_M^*\}$ halmazhoz, az [1]-ben leírt módon korlátozott erőforrásokat, illetve ezek segítségével tartamokat. Ezekután a tevékenységeket oly módon ütemezzük, hogy egyrészt

$$t_n \rightarrow \min !,$$

másrészt

$$t_0 \rightarrow \max !$$

legyen, figyelemmel az erőforráskorlátokra, és emellett az

$$i_1^*, \dots, i_M^*$$

elemekhez a

$$t(i_1^*), \dots, t(i_M^*)$$

időpont tartozzék.

A két optimálási követelményt a P halmazból kialakított Q halmazra vonatkoztatva láthatjuk, hogy egymásnak nem mondanak ellent, mert a 2.4.-ben definiált Q halmazon a két követelmény azonosan (minimumként) értelmezhető.

A célfüggvényt szavakban röviden így fogalmazhatjuk meg: adott (időben meghatározott) alapprogramhoz határozzuk meg az annak részeit megelőző és követő műveletek célszerű ütemezését. A célszerűség itt a megelőző tevékenységek vonatkozásában azt jelenti, hogy ezeket úgy állítsuk programba, hogy az alapprogram tevékenységeitől mintegy „visszafelé” ütemezzünk, ugyanakkor azonban a korlátos erőforrásokra is legyünk figyelemmel. Ezzel egyúttal arra is választ kapunk, hogy az előkészítő munkákat mikor és mennyivel kell az alapprogram előtt megkezdeni, hogy a munkák végzése egyrészt folyamatos legyen, másrészt az alapprogramban szereplő munkák elkezdéséig azok mind befejeződjenek (korlátos erőforrásokat véve figyelembe):

Gyakorlatban ez úgy jelentkezett, hogy egy nagy gép (toronydaru) előre betervezett működéséhez határozzuk meg az alapépítmények szükséges legkésőbbi kezdését, ill. a befejező munkák legkorábbi befejezését, figyelemmel az erőforráskorlátokra.

4. A feladat megoldása az ERALL-eljárás segítségével

Az ütemezési algoritmussal a feladatot két lépésben oldottuk meg:

4.1. A feladat átalakítása.

A 2. fejezetben részletesen tárgyaltuk a feladat megoldására szolgáló hálóttechnikai eljárásokat. Itt ezért csak vázlatosan foglaljuk össze annak lépéseit.

4.1.1. A tevékenységeket 3 halmazba soroljuk:

E , elemei azon tevékenységek és események, amelyek megvalósulása (bekövetkezése) az adott alapprogram tevékenységeit megelőzi;

I , az alapprogramhoz tartozó tevékenységek és események;

$U = Q - (E \cup I)$, azaz az alapprogramot követő tevékenységek és események.

4.1.2. Az E halmazhoz tartozó tevékenységek irányítását megfordítjuk, és az eseményeket átkódoljuk.

4.1.3. A kezdési és befejezési időpontokat átalakítjuk sorszámossal, azaz az E halmaz ütemezését ezen „fordított módszer”-rel elvégezzük.

4.2. A megoldás 2. része:

4.2.1. Az E halmazhoz tartozó ütemezés után visszaállítjuk az eredeti helyzetet, s azokban az időszakokban, ahol mind előzmény, mind utólagos munkák folynak, az erőforráskorlátokat a már beütemezett tevékenységek szükségletei szerint módosítjuk (csökkentjük).

4.2.2. Elvégezzük az U halmazra nézve az allokációt.

4.2.3. A teljes programot átkonvertáljuk naptári dátumokra (ha a feladat megadása így történt).

4.3. Megjegyzések:

A 2.1.-ben tárgyalt eljárással az átlapolások kezelése is megoldódik; az allokációs módszer pedig az [1]-ben már tárgyalt ERALL-eljárás, így azt nem részletezzük.

Ha a feladat véghatárideje adott, és a kezdési határidőre nézve tehetünk engedményt, akkor a 4.2.2. és 4.1.3. lépések sorrendjét megcseréljük.

Ha az alapprogram is ugyanazon erőforrásokból használ fel, amelyek az E és U halmazhoz tartoznak, akkor természetesen ezeket először kigyűjtjük, és a korlátokat a megfelelő időszakban ezekkel módosítjuk.

A megoldhatóság feltételei általában azonosak az [1]-ben leírtakkal; természetes követelmény még az is, hogy az I elemeihez tartozó tevékenységek összes erőforrásigénye a korlátos erőforrásokból az összkorlát alatt maradjon (illetve azt ne lépje túl), valamint az is, hogy a feladat kezdési és befejezési határideje (ha ilyen van) olyan legyen, hogy az erőforráskorlátok túllépése nélkül tartható legyen. (Ez utóbbiak is általános követelmények hasonló feladatokban, ezért ezek vizsgálatát mellőzzük.)

5. Gyakorlati alkalmazások

A fentiekben leírt, matematikailag megalapozott módszert sikerrel alkalmaztuk egy lakásépítési programban, ahol is több, az építkezés fő tevékenységeit meghatározó daru előzetes számítások alapján programozva lett, és ehhez kellett a többi erőforrás ütemtervét elkészíteni az elmondott szempontok szerint. Felmerült a módszer olyan alkalmazása is, amikor az alapprogram nem előre adott, hanem azt is a módszernek kell elkészítenie. Ilyen esetre példa a lineáris programozásból ismert gépterhelési probléma (1. pl. [4]), ahol az egyes gépek leterhelését lineáris programozás segítségével optimalizálhatjuk, így kiválaszthatjuk az egyes létesítményekhez a megfelelő gépet (darut), s ezek leterheléséhez igazítjuk a kivitelezés többi fázisát a hálótéchnika segítségével. Mivel az I halmaz ütemezése vagy előre adott, vagy pedig valamilyen egzakt (pl. lineáris) programozási módszerrel történt, a feladat hatékonysága és egzaktysága azonos az ERALL-módszer már közölt hatékonyságával és egzaktyságával.

A hálótéchnikán alapuló ütemezési eljárások alkalmazási területe erősen kibővült azzal, hogy olyan esetben is alkalmazásra kerülnek, amikor a programozási feladat lényege egy sorrendprogramozási vagy lineáris programozási

feladat, de számolni kell a rendszerben fellépő kapacitáskorlátokkal. A módszer kisebb-nagyobb mértékben több ízben alkalmazásra került, s a gyakorlat azt bizonyítja, hogy a hálótechnika alkalmazása az ilyen „kevert” jellegű feladatokban is hasznos.

(Beérkezett: 1973. október 5.)

IRODALOM

1. SZABÓ, I. — SZOLNOKY, A.: Az ERALL-2 hálótechnikai algoritmus. SZIGMA, 1970. 3. sz. 195 — 211. o.
2. CZÉKMÁNY, I. — SZABÓ, I.: Vezértevékenységre épülő hálós szervezési módszerek. Információ Elektronika, 1971. 4. sz. 258 — 262. o.
3. „Hálótervezési módszerek”. Budapest, 1968. Országos Ügyvitelgépesítési Felügyelet.
4. KREKÓ BÉLA: Lineáris programozás. Budapest, 1962. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

APPLICATION OF NETWORKS IN A PROGRAMMING PROBLEM OF MIXED CHARACTER

The article introduces the application of network techniques — i.e. one of its special methods, the procedure ERALL which our journal has already described — in a new connection combined with another problem. It determines the chronological distribution of the preceding and following jobs, their latest starts and their earliest possible ends or a so called basic program, that was made independent by the method, in general not by way of net technics. In the procedure the continuation of activities of the basic program, and the constraints on resources are taken into consideration. The detailed mathematical description is followed by a brief account of application and the conditions of solvability.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЕТЕВОЙ ТЕХНИКИ В ЗАДАЧЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ СМЕШЕННОГО ХАРАКТЕРА

Статья показывает использование сетевой техники — и ее специальной методики, написанной в нашем журнале, метод ЭРАЛЛ, — в новом аспекте, комбинированно с другой задачей. К так называемой основной программе, которую, независимо от методики, изготовили по методу сетевой техники, определяется распределение по времени предыдущих, а также следующих работ, позднейшие начала и возможные самые ранние окончания, следя, чтобы предыдущие работы могли непрерывно следовать действия основной программы и везде предусматривать возможности ограничения ресурсов. После исчерпывающего освещения математических основ, статья коротко рассказывает о ее применениях и занимается условиями ее решения.

Egytermékes modell idényszerűen változó feltételekkel

A modellt egy konkrét gyakorlati probléma hívta életre. Nevezetesen az, hogy a sertéshizlaldák alapanyagellátása és a vágósertés iránti igény idényszerűen ingadozik.

I. A feladat megfogalmazása

Az alábbiakban egy olyan termék előállításáról lesz szó, melynél egyféle alapanyagnak meghatározó szerepe van. Az erőforrások közül pedig a termelés és raktározás együttes helyigénye jelenti a szűk keresztmetszetet. Feltételezzük, hogy az alapanyagellátás és a készáru iránti kereslet ismert törvényszerűségek alapján ingadozik.

A gyártási folyamat lényegében a kitüntetett alapanyag feldolgozásának folyamatát jelenti. A gyártási időtartam alatt pedig az alapanyag beszállításától (például a hízóalapanyag beérkezésétől) a készáru (a vágósertés) elszállításáig eltelt időt (a hizlalási időt) értjük. Az egységnyi mennyiségű alapanyag feldolgozása után elérhető nyereség a gyártási időtartam ismert — általában konkáv — függvénye.¹

A feladat az üzem termelési programjának elkészítése úgy, hogy az egy adott időszakban a maximális nyereséget biztosítsa. A termelési program elkészítése alatt azt értjük, hogy meghatározzuk az alapanyag beszállításának és a késztermék elszállításának ütemtervét, valamint a beszállítási időpont (a gyártás kezdete) függvényében a gyártási időtartamot.

II. Folytonos modell

Az alábbiakban feltételezzük, hogy az alapanyag beszállítása és a készáru elszállítása folyamatosan történik. Tegyük fel, hogy alapanyag és a késztermék olyan egységben adott, hogy az egységnyi alapanyagból egységnyi késztermék lesz.

A be-, illetve az elszállítás folyamatának leírására a be-, illetve az elszállítás intenzitását használjuk, ami az időegység alatt (például naponként) be-, illetve elszállított mennyiséget (malacok, illetve vágósertések számát) jelenti.

Az alapanyagellátás és a késztermék iránti kereslet ingadozását úgy építjük be a modellbe, hogy a be-, illetve az elszállítás intenzitásának alsó és felső korlátját az idő függvényeként kezeljük.

¹ Például a hizlalási idő csökkentése intenzívebb takarmányozást követel, illetve kisebb végsúlyt eredményez, a túlzottan hosszú hizlalásnál pedig romlik a takarmány hasznosulása és a hús minősége.

Vezessük be a következő jelöléseket:

t	időparaméter
T	a vizsgált időszak (periódus) hossza
$h(t)$	gyártási időtartam az alapanyag beszállítási időpontjának függvényében
h_m	a gyártási időtartam alsó korlátja
h_M	a gyártási időtartam felső korlátja
$f(t)$	az alapanyag beszállításának intenzitása
$f_m(t)$	a beszállítás intenzitásának alsó korlátja
$f_M(t)$	a beszállítás intenzitásának felső korlátja
$g(t)$	a késztermék elszállításának intenzitása
$g_m(t)$	az elszállítás intenzitásának alsó korlátja
$g_M(t)$	az elszállítás intenzitásának felső korlátja
$c(h)$	az egységnyi mennyiségű alapanyag feldolgozása után elérhető nyereség a gyártási időtartam függvényében
K	az üzem kapacitása, vagyis az a maximális alapanyag-, félkész- és késztermékmennyiség, ami az üzemben összesen elfér.

Mivel a nyereség a gyártási időnek általában konkáv függvénye, ezért az optimális megoldás csak olyan lehet, hogy a korábban beszállított alapanyagból készült készterméket hamarabb szállítják el, mint aminek az alapanyaga később került az üzembe. Így a $[0; t]$ intervallumban beérkező alapanyagból készült késztermék a $[h(0); t + h(t)]$ intervallumban kerül elszállításra. A be-, illetve az elszállítás intenzitása közötti kapcsolatot tehát az

$$(1) \quad \int_0^t f(s) ds = \int_{h(0)}^{t+h(t)} g(s) ds$$

egyenlet írja le.² Megjegyezzük még, hogy a $[t; t + h(t)]$ intervallumban elszállított

$$(2) \quad \int_t^{t+h(t)} g(s) ds$$

mennyiség éppen a t időpontbeli készlettel egyenlő.

A feladat lényegében az, hogy az idő függvényében úgy határozzuk meg a be- és az elszállítás intenzitását és a gyártási időtartamot, hogy azok az adott korlátok között mozogjanak, elégítsék ki az (1) egyenletet, az üzem K befogadóképességét sohasem haladja meg a mindenkor készlet, és a $[0; T]$ időszakban elérhető nyereség maximális legyen.

A feladat matematikai modellje tehát az alábbi formában adható meg:

Adottak az $f_m(t)$, $f_M(t)$, $g_m(t)$, $g_M(t)$ nem-negatív függvények, a $c(h)$ konkáv függvény, valamint $0 \leq h_m \leq h_M$ és K valós számok. Határozzuk meg a $h(t)$,

² Amennyiben $h(t)$ differenciálható, úgy (1) helyett az

$$[1 + h'(t)]g(t + h(t)) = f(t)$$

differenciálegyenlet írható, amelynek a $h(t)$ -re vonatkozó, $h(0)$ kezdeti értékhez tartozó általános implicit megoldása éppen (1).

$f(t)$ és $g(t)$ függvényeket úgy, hogy a

$$(3) \quad h_m \leq h(t) \leq h_M,$$

$$(4) \quad f_m(t) \leq f(t) \leq f_M(t),$$

$$(5) \quad g_m(t) \leq g(t) \leq g_M(t),$$

$$(6) \quad \int_0^t f(s) ds = \int_{h(0)}^{t+h(t)} g(s) ds,$$

$$(7) \quad \int_t^{t+h(t)} g(s) ds \leq K$$

feltételek t minden valós értéke mellett teljesüljenek, és a

$$(8) \quad J = \int_0^T c(h(t))f(t) dt$$

funkcionál maximumot adjon.³

A modell teljes általánosságban nem oldható meg. Különböző gyakorlati esetekben azonban leegyszerűsíthető vagy átalakítható úgy, hogy a megoldást klasszikus feltételes szélsőérték-feladatra vagy folyamatvezérlési feladatra, vagy esetleg — diszkrét modellre áttérve — lineáris programozásra vezethessük vissza.

III. Diszkrét modell

A diszkrét modell lényege, hogy a vizsgált időszakot felosztjuk egyenlő hosszúságú intervallumokra. A be-, illetve az elszállításokat úgy tekintjük, mintha azok kizárólag az intervallumok kezdő-, illetve végpontjaiban történének.

Véges folyamat modellje

Feladatunk legyen a $[t_1; t_2]$ intervallumban a termelési folyamat optimalítása úgy, hogy a beszállításra vonatkozó feltételek az ezt tartalmazó $[0; t_2]$, a kiszállítás pedig $[t_1; t_3]$ -ban teljesüljenek, ahol

$$t_1 = t_3 - t_2 \geq h_M$$

Osszuk fel $[0; t_3]$ -at τ hosszúságú intervallumokra. Tételezzük fel, hogy $[0; t_1]$ és $[t_2; t_3]$ pontosan n , $[t_1; t_2]$ pedig N intervallumból áll. Az i -edik inter-

³Természetesebb követelmény lenne a $[0; T]$ intervallumban elszállított késztermék utáni

$$J_1 = \int_{t_1}^{t_2} c(h(t))f(t) dt, \quad t_1 + h(t_1) = 0, \quad t_2 + h(t_2) = T$$

nyereség maximálása. Ha viszont T elég nagy akkor J_1 gyakorlatilag helyettesíthető J -vel.

vallumban be-, illetve elszállított mennyiségeket

$$(9) \quad F_i = \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} f(s) ds, \quad \text{illetve} \quad G_i = \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} g(s) ds$$

jelölje. Hasonlóan értelmezzük az $F_i^{(m)}$, $F_i^{(M)}$, $G_i^{(m)}$, $G_i^{(M)}$ alsó és felső korlátokat.

Jelölje A_i az i -edik intervallumban beszállított alapanyag mennyiségének azon részét, amely a t_1 időpillanatban még feldolgozás alatt áll, x_{ij} pedig azon részét, amelyből készült terméket a j -edik intervallumban szállítanak el.

Legyen $j \geq i$ esetén $c_{ij} = c((j-i+1)\tau)$.

A modell az alábbi lineáris programozási feladattal adható meg:

$$(10) \quad x_{ij} \geq 0; \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n+N, \\ j = n+1, n+2, \dots, 2n+N; \end{array}$$

$$(11) \quad x_{ij} = 0; \quad \begin{array}{l} \text{ha } (j-i+1)\tau < h_m, \\ \text{vagy ha } (j-i+1)\tau > h_M; \end{array}$$

$$(12) \quad \sum_{j=n+1}^{2n+N} x_{ij} = A_i; \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$(13) \quad F_i^{(m)} \leq \sum_{j=n+1}^{2n+N} x_{ij} \leq F_i^{(M)}; \quad i = n+1, n+2, \dots, n+N;$$

$$(14) \quad G_j^{(m)} \leq \sum_{i=1}^{n+N} x_{ij} \leq G_j^{(M)}; \quad j = n+1, n+2, \dots, 2n+N;$$

$$(15) \quad \sum_{i=k-n+1}^k \sum_{j=k}^{i+n-1} x_{ij} \leq K; \quad k = n+1, n+2, \dots, n+N;$$

$$(16) \quad \sum_{i=1}^{n+N} \sum_{j=n+1}^{n+N} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{maximum}.$$

A folytonos modellel összehasonlítva láthatjuk, hogy a (3)-nak itt (10) és (11), (4)-nek (13), (5)-nek (14), (7)-nek (15), (8)-nak (16) a tartalmi megfelelője. A (6) feltétel tartalmának teljesülése a diszkrét modell szerkezetéből már eleve következik.

Periodikus folyamat modellje

Az előzőektől eltérően most nem rögzítjük a kezdő állapotot, de megköveteljük azt, hogy a vezérelt folyamat (a feltételek periodicitásának megfelelően) időben periodikus legyen.

Legyen T a folyamat periódushosszána az a legkisebb egész számú többszöröse, amely nagyobb, mint h_M .

Az előzőekben bevezetett jelöléseket annyiban módosítjuk, hogy most a $[0; T]$ intervallumot osztjuk fel

$$\tau = \frac{T}{n}$$

hosszúságú részintervallumokra.

A folyamat periodicitásából következik, hogy

$$x_{ij} = x_{i^*j^*},$$

ha i és i^* , illetve j és j^* kongruensek egymással az n modulusra nézve. Ezért elegendő az x_{ij} változókat $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$ indexekre meghatározni. Megállapodhatunk abban, hogy amennyiben az x_{ij} indexei nem esnek a fenti indexhalmazba, úgy azok kongruens megfelelőire térünk át.

Az optimális periodikus folyamatot az alábbi lineáris programozási feladat megoldása szolgáltatja:

$$(17) \quad x_{ij} \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ és } j = 1, 2, \dots, n;$$

$$(18) \quad x_{ij} = 0; \quad \begin{aligned} &\text{ha } (j^* - i + 1) \tau < h_m, \\ &\text{vagy ha } (j^* - i + 1) \tau > h_M, \\ &\text{ahol } j^* = j, \text{ ha } j \geq i, \\ &\text{különben } j^* = j + n; \end{aligned}$$

$$(19) \quad F_i^{(m)} \leq \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq F_i^{(M)}; \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$(20) \quad G_j^{(m)} \leq \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq G_j^{(M)}; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$(21) \quad \sum_{i=k-n+1}^k \sum_{j=k}^{i+n-1} x_{ij} \leq K; \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$(22) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{maximum}.$$

A modell általánosítása

A fenti modellben több erőforrás kapacitáskorlátját is figyelembe vehetjük. Jelölje K_{mk} az m -edik erőforrásból a k -adik intervallumban rendelkezésre álló mennyiséget. Ha egy termék előállítása $p\tau$ ideig tart, akkor $q\tau$ idő elteltével az m -edik erőforrás iránti fajlagos igény legyen a_{mpq} . Így véges folyamat modelljének (15)-ös feltétele, illetve a periodikus (21)-es feltétele helyett az alábbi feltételt írhatjuk:

$$(23) \quad \sum_{i=k-n+1}^k \sum_{j=k}^{i+n-1} a_{m,j-i+1,k-i+1} x_{ij} \leq K_{m,k}$$

ahol $m = 1, 2, \dots, M$ és $k = n + 1, n + 2, \dots, n + N$.

A modell méretének csökkentése

Végezetül megjegyezzük, hogy a véges folyamatnál a (11), a periodikusnál a (18) feltétel alapján általában igen jelentős méretcsökkentésre nyílik lehetőség. Ugyanis mindazon változók, melyekre (11), illetve (18) vonatkozik, a modellből kihagyhatók. (Ilyenkor természetesen a többi feltételben csak

a megmaradt változókra kell az összegezést elvégezni.) Ez a redukálás a feltételek számát csak ritkán érinti.

Legyen például az általános periodikus folyamat modelljében $n = 50$, s minden i -re legfeljebb 5 olyan j index, amire (18) nem vonatkozik. Ekkor a változók száma 2500-ról 250-re csökkenthető. Ha a modellben $M = 5$ különböző erőforrással számolunk, akkor a feltételrendszer $n(4 + M) = 450$ egyenlőtlenségből áll.

(Beérkezett: 1973. november 15.)

ONE - PRODUCT MODEL WITH SEASONALLY FLUCTUATING CONDITIONS

The scheduling of large-scale pigfarms can be described by a one-product model in which material supply and product delivery fluctuate seasonally. We suppose that the lower limits $f_m(t)$ and $g_m(t)$ and the upper limits $f_M(t)$ and $g_M(t)$ of the intensity of supply $f(t)$ and delivery $g(t)$ are known. These limits are given as functions of time. Turnover time of production (fattening) $h(t)$ can fluctuate between the given values h_m and h_M . Profit $c(h)$, after processing (fattening) of per unit of basic material is a function of the turnover time production (fattening). It is known and generally concave. Optimal scheduling is determined by those functions $f(t)$, $g(t)$ and $h(t)$ for which the functional (8) attains its maximum subject to the conditions (3)–(7). The solution of the model can be well approximated by linear programming. The period under examination is divided into intervals of length τ . x_{ij} denotes that part of material that was supplied and the end product of which is dispatched in the j -th interval. If, furthermore, notation (9) is introduced, then the finite model is given by the linear programming problem (10)–(16), and that of the periodical one is given by the linear programming problem (17)–(22).

МОДЕЛЬ ОДНОГО ПРОДУКТА С ПЕРЕМЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ ПО СЕЗОНУ

Осуществление ритмичности производства крупных свиноферм можно описать моделью одного продукта, где колебается, по сезону, потребность удовлетворения сырьем и готового продукта. Предполагаем, что знаем нижние $f_m(t)$ и $g_m(t)$, а также верхние $f_M(t)$ и $g_M(t)$ пределы, по функции времени, интенсивности удовлетворения сырьем $f(t)$ и транспортировки готового продукта $g(t)$. Срок откармливания $h(t)$ может изменяться между значениями h_m и h_M . После откармливания единицы сырья, достигаемая прибыль $c(h)$, — есть известная функция срока откармливания (в общем вогнутая). Оптимальный график определяют те $f(t)$, $g(t)$ и $h(t)$ функции, на которые функционал (8) дает максимум при условиях (3)–(7). Решение модели, хорошим приближением, можно привести к линейному программированию. В этом случае рассматриваемый период разбиваем на интервалы длиной τ , и обозначим через x_{ij} ту часть транспортируемого сырья в i -м интервале, из которого изготавливаемый продукт транспортируют в j -й интервал. Кроме того, если введем обозначение по (9), модель конечных процессов можно решить по (10)–(16), а периодические процессы по (17)–(22) задачам линейного программирования.

A geometriai programozás és két gazdasági alkalmazása*

1. A geometriai programozás

A geometriai programozás a matematikai programozás egy viszonylag új ága, az első cikkek a témakörben az 1960-as évek elején, az első könyv [1] pedig 1966-ban jelent meg. Az alapvető elméleti eredmények és az alkalmazhatóság felismerése amerikai szerzők nevéhez fűződik, de érdekes eredményeket ért el a témában többek között Klafszy Emil is [2, 3].

A geometriai programozás alapfeladata egy speciális nem-lineáris programozási feladat, amelyben a célfüggvény és a feltételek is pozitív együtthatós általánosított polinomok (melyeket szokás pozinomoknak, a feladatot pedig pozinomiális programozási problémának nevezni). Ehhez hozzárendelhető egy duál feladat. A primál-duál feladatpár a következő:

Primál feladat

$$\min g_0(t)$$

$$t \in R^m$$

$$t > 0$$

$$g_1(t) \leq 1$$

$$\vdots$$

$$g_p(t) \leq 1$$

ahol

$$\left. \begin{aligned} g_k(t) &= \sum_{i \in J[k]} c_i t_1^{a_{i1}} \dots t_m^{a_{im}} \\ J[k] &= \{m_k, m_k + 1, \dots, n_k\} \end{aligned} \right\} k = 0, 1, \dots, p$$

$$m_0 = 1, m_k = n_{k-1} + 1 \quad (k = 1, \dots, p); n_p = n,$$

$c_i > 0$ minden i -re és a_{ij} tetszőleges valós számok.

* A cikk 2. ill. 3. része a szerzőnek az ezévi, Oslóban rendezett, ökonometriai ill. balatonfüredi operációkutatási konferencián tartott előadásában szereplő modell rövidített leírása. A 2. rész modelljének részletesebb ismertetésére, a numerikus számítási eredmények és a modellel kapcsolatos tapasztalatok értékelésére a szerző egy későbbi cikkben szeretne visszatérni.

Duál feladat

$$\max_{\delta \in R^n} v(\delta) = \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \right] \prod_{k=1}^p \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}$$

ahol

$$\lambda_k(\delta) = \sum_{i \in J[k]} \delta_i \quad \text{és}$$

$$\delta \geq 0$$

$$\sum_{i \in J[0]} \delta_i = 1 \quad (\text{a „normalitási feltétel”})$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \delta_i = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{az „ortogonalitási feltételek”}).$$

Látjuk, hogy a duálfeladat változóinak számát a primál additív kifejezések száma (a célfüggvényben és a feltételekben együttesen) adja, míg a duálfeltételek száma eggyel nagyobb a primál változókénál.

Az első pillantásra kissé bonyolult jelölések mögötti lényeg szemléltetésére bemutatunk egy egyszerű példát:

a primál feladat:

$$\min (t_1^2 t_2 + 2t_1^{1/2} t_2^{-1/2})$$

$$t_1 > 0, \quad t_2 > 0$$

$$3t_1 t_2 + \frac{1}{2} t_1^{-2} t_2 \leq 1$$

$$2t_1 t_2 \leq 1,$$

a hozzátartozó duálfeladat pedig:

$$\max_{\delta_1, \dots, \delta_5 \geq 0} \delta_1^{-\delta_1} \left(\frac{2}{\delta_2} \right)^{\delta_2} \left(\frac{3}{\delta_3} \right)^{\delta_3} \left(\frac{1}{2\delta_4} \right)^{\delta_4} \left(\frac{2}{\delta_5} \right)^{\delta_5} (\delta_3 + \delta_4)^{\delta_3 + \delta_4} \delta_5^{\delta_5}$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 1$$

$$2\delta_1 + \frac{1}{2} \delta_2 + \delta_3 - 2\delta_4 + \delta_5 = 0$$

$$\delta_1 - \frac{1}{2} \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 = 0.$$

A primál feladat eredeti formájában nem konvex, de bevezetve az $e^{z_k} = t_k$ helyettesítést az új változókban már könnyen láthatóan az. Bizonyítható (l. pl. [1]-ben), hogy a duálfüggvény logaritmusukonkáv, s mivel a duálfeladat lineárisan korlátozott, azért ez is konvex programozási probléma. A geometriai programozás dualitás elméletében alapvető szerepet játszik a geometriai egyenlőtlenség, amely a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség általánosítása, innen származik a problémakör elnevezése.

A dualitástétel értelmében egy (t, δ) primál-duál megengedett megoldás párja:

$$g_0(t) \geq v(\delta),$$

továbbá általános feltételek mellett a primál program minimumértéke megegyezik a duálprogram maximumértékével és egy egyszerű összefüggés (a változók logaritmusában lineáris egyenletrendszer) áll fenn az optimális primál- és duál megoldások között, tehát ha meghatározzuk a duálfeladat egy optimális megoldását, abból könnyen kapható egy primál optimális megoldás.

Ez adja meg a dualitástétel és az ilyen feladattípus jelentőségét. Míg a primál feladatban a célfüggvény és a feltételek egyaránt nem-lineárisak, addig a duálban a feltételek lineárisak, tehát, ez, különösen nagyobb méreteknél számítástechnikailag sokkal könnyebben kezelhető. Sok gyakorlati feladat fogalmazható meg ilyen alakban, a geometriai programozásnak számos alkalmazása van mérnöki tervezési-optimalizálási problémákban (l. pl. [1], [4]-ben), azonban a gazdasági alkalmazások újkeletűek.

Nijkamp [5] ipari komplexumok telepítésének tervezésére, Nijkamp—Paelinck [6] egy környezetvédelmi-területfejlesztési modell, Dinkel—Kochenberger—Seppälä [7] pedig különböző területi tervezési modellek számszerűsítésére használta fel a geometriai programozást.

Ezen feladattípus (amelyben az általános nem-lineáris problémához képest, a duálfeladaton keresztüli megoldhatóság miatt általában sokkal nagyobb méretek kezelhetők) alkalmazása közgazdasági modellekben biztató.

Például a $T = \gamma I^\alpha L^\beta$ Cobb—Douglas termelési függvény, vagy az

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\alpha_1}, \quad \frac{L}{L_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\alpha_2}$$

ún. technológiai függvények könnyen vezethetnek geometriai programozási feladatra, mint erre a 2. és 3. részben példát is látunk majd.

Az ilyen alakban való megfogalmazásnak a legfőbb korlátja az együtthajtók pozitivitásának feltétele, amely a feladat konvexitását biztosítja. Viszont közismert, hogy nem-konvex optimalizálási feladatok megbízható megoldására amúgy sincs használható módszer.

2. Egy dinamikus népgazdasági modell

Egy 15 éves, öt egyenként 3 éves részperiódusra bontott időszakot vizsgálunk (a felbontás ilyen konkrét módja a modell szempontjából nem alapvető fontosságú). A gazdaság állapotát befolyásoló döntéseket: a beruházást, munkaerő elosztást, minimális nettó termelési előírást csak az egyes 3 éves periódusokra összevontan vizsgáljuk (hogy kevesebb változónk legyen), t az aktuális periódus sorszámát jelenti. A gazdaságot 3 ipari és 3 nem ipari ágazatra bontjuk, ezek:

- | | |
|-------------------|-----------------|
| 1. Nehézipar | 4. Építőipar |
| 2. Könnyűipar | 5. Mezőgazdaság |
| 3. Élelmiszeripar | 6. Egyéb |

A 6. ágazat tartalmazza többek között a közlekedést, kereskedelmet és a szolgáltatásokat. A 4—6 ágazatok termelését egzogénnek vesszük (mivel ezek termelési függvényekkel való leírhatósága kérdéses), az értékek előrejelzésére exponenciális trendet alkalmazunk; az ipari ágazatok termelését pedig Cobb—Douglas termelési függvényekkel fejezzük ki:

$$(2.1) \quad q_t^i = \varepsilon_1^i e^{3\varepsilon_2^i t} \widehat{K}_t^{i\alpha_i} \widehat{L}_t^{i\beta_i}, \quad i = 1, 2, 3; t = 1, \dots, 5,$$

ahol q_t^i a t periódus utolsó évében az i ágazat termelése, továbbá:

$$(2.2) \quad \widehat{K}_t^i = k_t^i K_t^i, \quad \widehat{L}_t^i = l_t^i L_t^i,$$

s itt K_t^i a termelő állóeszközök értéke, k_t^i a kihasználási együttható, L_t^i a munkaerő létszáma, l_t^i pedig az évi átlagos munkaidő munkásonként, mindegyik mennyiséget az i ágazat t periódusbeli helyzetére vonatkoztatva.

Az ágazatok közötti termelési kapcsolatokat a szokásos input-output modellel írjuk le:

$$(2.3) \quad q_t = Aq_t + Bd_t + c_t,$$

ahol $q_t, d_t, c_t \in R^6$ a termelés, beruházás és fogyasztás vektorai, A és B a technológiai együttható-, ill. a beruházási mátrix. Az endogén (tehát az ipari ágazatok) állóeszköz-állományának évenkénti x_t^i növekedési ütemeit optimalizálандó változóknak tekintjük, ezekre:

$$(2.4) \quad K_t^i = x_t^i K_{t-1}^i, \quad x_t^i \geq 1 \quad \text{és} \quad \text{így}$$

$$(2.5) \quad d_t^i = (x_{t+1}^i - 1)K_t^i \geq 0, \quad t = 1, \dots, 5; \quad i = 1, 2, 3.$$

Az 1—3 ágazatok által együttesen felhasználható munkaerőt adottnak vesszük — értékét múltbeli idősorból extrapoláljuk —, de a közöttük való felosztásáról periódusonként dönthetünk:

$$(2.6) \quad L_t^i = \lambda_t^i L_t, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_t^i \leq 1, \quad \lambda_t^i > 0, \quad t = 1, \dots, 5; \quad i = 1, 2, 3.$$

Egy olyan gazdaság esetét vizsgálva, amely jelentős strukturális változást hozó növekedés előtt áll, de beruházási lehetőségei elég korlátozottak, ésszerű kritérium a beruházások diszkontált értékösszegét minimalizálni az endogén ágazatokban létrehozott nettó termelés bizonyos minimális szintjeinek megkövetelése mellett:

$$(2.7) \quad \min \sum_{j=1}^5 \gamma_j 1' B_1 \left(\sum_{t=1}^j d_t \right) = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^3 \gamma_j f_i K_0^i \left(\prod_{t=1}^j x_t^i - 1 \right)$$

feltéve, hogy

$$(2.8) \quad (E_{(3)} - A_1)q_t \geq \begin{bmatrix} \hat{q}_t^1 \\ \hat{q}_t^2 \\ \hat{q}_t^3 \end{bmatrix}, \quad t = 1, \dots, 5$$

ahol B_1 a B első 3 oszlopából, A_1 az A első 3 sorából (ezek felelnek meg az endogén ágazatoknak) alkotott részmátrix, $f_i = \sum_{k=1}^6 b_{ki}$, a γ_j -k pedig a diszkontálást biztosítják:

$$\gamma_5 = 1, \quad \sum_{k=1}^6 \gamma_j = (1 + s)^{5-k},$$

ahol s a 3 éves periódusra vonatkoztatott diszkonttényező ($s = 0,2$ -t használunk).

A (2.1)—(2.6) feltételeket (2.8)-ba helyettesítve (2.7)-tel együtt egy geometriai programozási primál feladatot kapunk. Ennek a feladatnak 30 változója van, ezek:

$$x_i^t, \lambda_i^t \quad i = 1, 2, 3 \text{ és } t = 1, \dots, 5\text{-re.}$$

A primál feltételek és additív kifejezések száma 35, ill. 90, s ezért a megoldandó duál feladatnak 90 változója és $30 + 1 = 31$ feltétele van.

A feladat megoldásával arra lehet feleletet kapni, hogy a nem ipari ágazatok rögzített fejlődési pályája és az ipari ágazatokra előírt minimális nettó termelési szintek esetén mi lesz az időszakra vonatkozó lediszkontált beruházás-összeg minimumát megvalósító beruházási és munkaerő elosztási pálya. A modellel, a geometriai programozási feladatot megoldó algoritmus és számítógépi program kidolgozása után a magyar népgazdaságra vonatkozó adatokat használva fel, az 1970—85-ös időszakra végeztem kísérleti számításokat. Ezek igazolták a feladat számítástechnikai kivitelezhetőségét; jelenleg folyamatban van a modell továbbfejlesztése (pl. a külkereskedelem figyelembevételével való kibővítése), az ezzel kapcsolatos numerikus eredményekre és a levonható következtetésekre szeretnék majd később visszatérni.

3. Egy ipartelepítési modell

Tegyük fel, hogy egy ipari komplexum létesítésére a tervező szerv különböző szempontok alapján kijelöl egy földrajzi térséget (régiót) és a telepítendő termelő egységek, üzemek egy szóba jövő csoportját. Mivel a beruházási keret korlátozott, ezek közül kell kiválasztani a soron levő periódusban ténylegesen megépítendőket. A választásra többféle kritérium képzelhető el, mi most a kérdést kicsit leegyszerűsítve a megvalósítandó beruházások árösszegének adott technikai és jövedelmezőségi korlátozások melletti minimalizálását választjuk.

Az üzemek termelését homogénnek tételezzük fel, s az i üzemre ($i = 1, \dots, I$) a következő jelöléseket alkalmazzuk:

- p_i az üzem termékének egységára
- b_i az egységnyi beruházás költsége
- l_i egységnyi munkaerő éves bérköltsége
- a_{ji}, c_{ki} a régió belüli, ill. a régió és külső termelők közötti termelési kapcsolatok input-output együtthatói ($j = 1, \dots, I; k = 1, \dots, K$)
- ϱ_i a beruházás egy évre eső amortizációhányada
- π_i a minimális megkövetelt jövedelmezőségi szint (jövedelem/lekötött eszközérték)
- T_i megvalósítandó termelési szint (naturális mértékegységben)
- L_i az alkalmazott munkaerő létszáma
- I_i a megvalósítandó beruházási szint (naturális mértékegységben)
- γ_{ji} agglomerációs együtthatók.

Feltételezzük, hogy ismerjük a szóba jövő üzemek működését leíró technológiai függvényeket, ezek az i üzem esetében:

$$(3.1) \quad \frac{I_i}{I_{i_0}} = \left(\frac{T_i}{T_{i_0}} \right)^{\alpha_i}, \quad \frac{L_i}{L_{i_0}} = \left(\frac{T_i}{T_{i_0}} \right)^{\beta_i},$$

ahol T_{i0} a termelés technológiailag vagy egyéb okokból megkívánt minimális szintje (tehát megépítés esetén az i üzemet legalább ilyen szinten kell működtetni), I_{i0} , L_{i0} az ehhez tartozó beruházási és munkaerő szint, $0 < \alpha_i, \beta_i < 1$ degressziós kitevők.

Legyen $\delta_i = 0$ vagy 1 aszerint, hogy az i üzemet megépítjük, vagy nem. A (3.1) függvények használata feltételezi, hogy adott üzem (technológia) esetén a termelés szintje a lekötött eszköz és a munkaerő szintjét egyértelműen meghatározza (tehát nincs helyettesítés), s a méretnövekedés a gazdaságosságot javítja, magasabb termelési szint mellett a termelés egységnyi növeléséhez kevesebb pótlólagos beruházási és munkaerő ráfordítás szükséges. Az α_i , β_i kitevők termelési statisztikák és becslések alapján határozhatók meg, szokásos értékek:

$$\alpha = 0,5-0,6, \beta = 0,15-0,25 \text{ (általában } \alpha > \beta \text{)}.$$

A régió belül több üzem felépítése esetén kedvező agglomerációs hatások érvényesülnek: ha az üzemek egymással kooperálnak, a termelésükhöz szükséges félkésztermékek és alapanyagok egy részét régió belüli termelőktől szerzik be, akkor olcsóbban kaphatják, mint külső piacon történő vásárlás esetén, a p_j helyett $p_j T_j^{-\gamma_{ji}}$ egységárért (tehát annál olcsóbban, minél magasabb a j üzemben a termelés szintje). Éppen ezért kikötjük, hogy ha egy üzemet megépítünk, akkor termelésének ki kell elégítenie a régió belüli igényeket:

$$(3.2) \quad \delta_i \left(\sum_{j=1}^I \delta_j a_{ij} T_j \right) \leq T_i,$$

A termelésben felhasznált termékek egy csoportját az i üzemenk természetesen mindenképpen kívülről kell beszereznie, az i termék árából az ezek (egy ségre eső) költségének levonása után maradó rész:

$$(3.3) \quad p_i^b = p_i - \sum_{k=1}^K p_k c_{ki}.$$

A többi terméket csak akkor szerzi be kívülről, ha az azt termelő régióbeli üzem nem épül meg.

Így feladatunk a következő:

$$\min \sum_{i=1}^I \delta_i b_i I_i$$

$$\delta_i p_i^b T_i - \sum_{j=1}^I \delta_j p_j a_{ji} T_j (\delta_j T_j^{-\gamma_{ji}} + 1 - \delta_j) - \delta_i l_i L_i - \delta_i \varrho_i b_i I_i \geq \delta_i \pi_i b_i I_i$$

(jövedelmezőségi korlátok)

$$(3.4) \quad \delta_i \left(\sum_{j=1}^I \delta_j a_{ij} T_j \right) \leq T_i \quad (\text{a (3.2)-beli feltétel})$$

$$\delta_i T_{i0} \leq T_i \quad (\text{minimális termelési szint})$$

$$T_i \geq 0, \delta_i = 0 \text{ vagy } 1,$$

mindegyik feltételben $i = 1, \dots, I$

$$\sum_{i=1}^I \delta_i \geq 1$$

Behelyettesítve a (3.1) összefüggéseket, átrendezés és az egyes feltételekben T_i -vel való osztás után egy geometriai programozási feladatot kapunk, amelyben azonban szerepelnek a δ_i 0,1-es változók is. A δ_i -k minden lehetséges értékegyütteséhez (melyek száma 2^I) tartozik egy folytonos geometriai programozási feladat. Szerencsére a feladat speciális szerkezete miatt megadható egy olyan algoritmus, amely biztosítja, hogy általában csak kis számú ilyen folytonos feladatot kelljen megoldani. Ez az algoritmus kombinatorikai jellegű megfontolásokon alapul, a témához szorosan nem kapcsolódik, ezért most nem közöljük. Az optimális megoldás többnyire olyan, hogy benne nem szerepel 2—3 üzemnél több, de ha az agglomerációs előnyök különösen nagyok, pl. egy vertikálisan egymásra épülő egységekből álló vegyipari kombinátnál, és a megkövetelt jövedelmezőségi szint magas, akkor ez a szám lehet nagyobb is. A feladat módosítható úgy, hogy előírjuk bizonyos üzemek megépítését (ezekre $\delta_i = 1$), tehát arra keresünk választ, hogy adott üzemek megvalósítása esetén azokat milyen méretben építsük fel, s esetleg milyen csatlakozó üzemeket létesítsünk, hogy az előírt jövedelmezőség biztosítva legyen, a beruházásra fordított összeg pedig minimális legyen. Ebben az esetben már nagyobb jelentősége van egy, a δ_i kombinációkat ügyesen „leszámláló” algoritmusnak, mert a megoldandó folytonos geometriai programozási feladatok mérete már nagyobb.

A modellel már végeztem kísérleti számításokat, s jelenleg folyamatban van egy reális adatokon alapuló számítássorozat végrehajtása.

(Beérkezett: 1973. november 21.)

IRODALOM

1. DUFFIN, R. J. — PETERSON, E. L. — ZENER, C.: Geometric programming. Wiley, 1966.
2. KLAFSZKY, E.: Geometriai programozás. MTA Számítástechnikai Központ, Közlemények. 1972. 8. szám. 41—65. o.
3. KLAFSZKY, E.: Geometriai programozás és néhány alkalmazása. Kandidátusi értekezés, 1973.
4. ZENER, C.: Engineering design by geometric programming. Wiley, 1971.
5. NIJKAMP, P.: Planning of industrial complexes by means of geometric programming. Rotterdam, 1972. Universitaire Pers.
6. NIJKAMP, P. — PAELINCK, J. H. P.: An interregional model of environmental choice, an application of geometric programming. Rotterdam, 1972. Netherlands Economic Institute.
7. DINKEL, J. J. — KOCHENBERGER, G. A. — SEPPÁLÁ, Y.: On the solution of regional planning models via geometric programming. Environment and Planning. vol. 5. (1973), 397—408 o.

GEOMETRIC PROGRAMMING AND TWO ECONOMIC APPLICATIONS

Geometric programming is a relatively new branch of mathematical programming. It gives an efficient solution to a special non-linear optimum problem through solving the corresponding dual one. Several practical problems can be formulated in this special form, the method has already been applied efficiently in technical optimum calculations in various cases. Attempts at the application in economic models have begun not earlier than 1—2 years ago but the perspectives are reassuring, the usual technological functions

and also the Cobb-Douglas production function lead to geometric programming problem in case of certain conditions.

In the first model we study the dynamics of a national economy, it computes the production of industrial branches with Cobb-Douglas production functions, the production of other branches is handled as exogenous and the usual input-output model is applied for the description of production connections. The aim is to determine the investment and labour distribution variables ensuring minimum of discounted aggregate investment with given lower limits of net production for a 15-year period. The aim of the second model is to select establishments in an industrial complex for construction. Optimality criterion: minimize investment costs subject to profitability and technological constraints. The operation of a single establishment is described by usual technological functions. The model leads to a geometric programming problem of mixed integer type chat, however, due to its special structure, can be reduced to the solution of a series of continuous problems.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ЕГО ДВА ХОЗЯЙСТВЕННЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Геометрическое программирование является относительно новой областью математического программирования, которое — решением дуальной задачи — эффективно решает специальную нелинейную оптимизирующую задачу.

В такой специальной форме можно составлять много практических проблем, метод пользовался успешно в разных технических оптимизирующих расчетах. Эксперименты его применения в хозяйственных моделях продолжаются всего 1—2 года, но перспективы обнадеживающие. При некоторых условиях обычные технологические функции и Кобб—Даглес производственная функция приводят к задаче геометрического программирования.

Первая фигурирующая в работе модель является динамичной народнохозяйственной моделью, которая рассчитывает производство промышленных отраслей с помощью Кобб—Даглес производственных функций. С производством других отраслей она обращается экзогенно, и употребляет обычную модель затрат и выпусков для описывания производственных связей. Цель — определение инвестиционных переменных и перемены расстановки рабочей силы, которые обеспечивают минимум дисконтированной инвестиционной суммы пятнадцатилетнего периода при нижних пределах, данных для нетто производства. Вторая модель ставит себе целью выбор заводов, которые будут построены в промышленном комплексе, и оптимум-критерием является минимализация капитальных затрат при данных доходных и технологических условиях. Действие отдельных заводов описывается обычными технологическими функциями. Модель приводит к задаче смешанного непрерывного целочисленного геометрического программирования, которую из-за специальной структуры можно свести к решению некоторых непрерывных задач с комбинаторическим методом.

A kétszeresen összekapcsolt lineáris programozási feladatról.*

Bevezetés

A

$$\begin{aligned}
 &D_0 y = b \\
 &A_0 x_0 + B_0 y + \sum_i A_i x_i = a \\
 (1) \quad &D_i y + B_i x_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots) \\
 &x_0, y, x_1, x_2, \dots \geq 0 \\
 &\max (c_0 x_0 + d y + \sum_i c_i x_i)
 \end{aligned}$$

alakú lineáris programozási feladatot szokták kétszeresen összekapcsolt vagy kétszeresen összefüggő lineáris programozási feladatnak nevezni. (A cikkben nagy betűvel a számpéldától eltekintve mindig mátrixot, kis betűvel az indexektől eltekintve vektort, görög kisbetűvel skalárt, félkövér nagybetűvel pedig poliédert jelölünk.)

Ilyen lineáris programozási feladat lehet modellje egy olyan több részből álló gazdasági egységnek, ahol az egyes egységek tevékenységét leíró x_i változók mindegyikével kapcsolatban levő y pl. készletezési vagy valamilyen központilag irányított tevékenységet reprezentál, míg a valamennyi változót tartalmazó feltételek pl. valamilyen közös erőforrás kihasználására vonatkoznak. Ugyancsak ilyen modell adódhat egyetlen gazdasági egység több, egymást követő időszakra vonatkozó tevékenységének leírásánál, mikor az x_i -k az egyes időszakokon belüli tevékenységet reprezentálják, y komponensei szállítási vagy ismét készletezési tevékenységeknek felelnek meg és a valamennyi változót összefogó feltételek pl. kibocsátási kötelezettséget fejeznek ki.

De adódhat ilyen lineáris programozási feladat akkor is, ha a feltételek alkotta mátrix „jobb-alsó” részével kapcsolatban nem éppen részegységeket vagy időbeli dinamizmust kifejező blokkdiagonális szerkezetre gondolunk. Legyen pl. a probléma egy olyan termelési-elosztási kérdés megoldása, ahol a szokásos szállítási feladat jobb oldalai vagy egy részük valamilyen termelési kapacitás szintjétől függ — ezt fejezik majd ki a $D_i y$ -k — és vannak még a termelést és elosztást összekapcsoló további feltételek, amit az $A_0 x_0 + B_0 y + \sum_i A_i x_i = b_i$ feltételek írnak majd le. (Egyébként minden lineáris programozási feladatot tekinthetünk kétszeresen összekapcsoltnak és a következő dekompozíciós eljárást ennek megfelelően is leírhatnánk.)

* A cikk a szerzőnek a Balatonfüreden megrendezett V. Magyar Operációkutatási Konferencián elhangzott hasonló témájú előadása alapján készült.

(1)-t nagyméretű lineáris programozási feladatnak tekintve, megoldására a szokásos két lehetőség valamelyike kínálkozik.

Az egyik utat olyan módszerek jelentik, melyek a szimplex módszernek az adott feladat speciális szerkezetéből adódó egyszerűsítési lehetőségein alapulnak. Egyszerűsítési lehetőségen a szükséges műveletek számának, a szükséges tárolóternek csökkentését vagy a műveletek elvégzésének, a tárolóter kihasználásának jobb megszervezését értjük. Az ilyen, ún. strukturális vagy bázisdekompozíciós eljárások tehát az eredeti feladat valamilyen (pl. primál vagy duál megengedett) bázis megoldásain keresztül jutnak el az optimális megoldásig.

A másik lehetőséget az ún. dekompozíciós eljárások jelentik, melyek az eredeti feladat megoldását több kisebb vagy más ok folytán könnyebben kezelhető feladat rendszerint többszöri megoldására vezetik vissza: ezen, ún. részfeladatok megoldásából „rakják össze” a feladat optimális megoldását.

(1)-re strukturális eljárást ad [6] és [7]. [6] az ún. általánosított felsőkorlátozott technika [3] egy kiterjesztése. Elsősorban ezzel kapcsolatban mondható el az, ami a strukturális eljárások lényegéből adódik, mennél bonyolultabb a feladat mátrixának szerkezete, annál több és esetenként annál nehezebben kezelhető lehetőséget kell megkülönböztetni a feladat mátrixa hatékony kezelésének biztosításához. Ugyanakkor, ha ez sikerül, egy strukturális eljárás hatékony számítástechnikai eszköz, amit a [6]-ban közölt, próbaszámításokat értékelő táblázat is igazolni látszik.

Egy dekompozíciós eljárás nemcsak mint számítástechnikai eszköz érdekes, hanem a lineáris programozási feladatot több, egymáshoz képest alá és mellérendelt részegységből álló gazdasági egység modelljének tekintve egy ilyen eljárás segítségével ezen rendszer működésének vagy irányításának problémája is vizsgálható (pl. [5]). Az (1)-gyel kapcsolatban említett interpretációk bármelyike alapján így érdekes lehet egy olyan dekompozíciós eljárás, mely (1)-et

$$B_i x_i = b_i - D_i y$$

$$x_i \geq 0$$

$$\max (c_i - p A_i) x_i$$

alakú lineáris programozási feladatok ($i = 1, 2 \dots$) vizsgálata alapján oldja meg, ahol p és y a feladatok minden előfordulásánál alkalmasan megválasztott vektorok.

Ilyen részfeladatokhoz pontosabban ezek duálisához jutunk, ha (1)-re a Dantzig—Wolfe eljárást [4] alkalmazzuk olyan formában, hogy a

$$D_0 y = b_0$$

$$(2) \quad D_i y + B_i x_i = b_i \quad (i = 1, 2 \dots)$$

$$y, x_1, x_2 \dots \geq 0$$

feltételeket tekintjük részfeladatnak és ezen részfeladat duálisának megoldására ismét a Dantzig—Wolfe eljárást alkalmazzuk. A Dantzig—Wolfe eljárás ilyen kétszeres alkalmazását azonban számítástechnikai eszközként aligha lehetne figyelembe venni.

Vegyük észre azonban, hogy a kívánt alakú részfeladatokhoz jutunk akkor is, ha (1) duálisából, az ugyancsak kétszeresen összekapcsolt

$$(3) \quad \begin{aligned} pA_0 &\geq c_0 \\ q_0D_0 + pB_0 + \sum_i q_i D_i &\geq d \\ pA_i + q_i B_i &\geq c_i \quad (i = 1, 2 \dots) \\ \min (q_0b_0 + pa + \sum_i q_i b_i) \end{aligned}$$

lineáris programozási feladatból indulunk ki. Nevezetesen, ha (3)-ra a Dantzig—Wolfe eljárást olyan formában alkalmazzuk, hogy a

$$(4) \quad \begin{aligned} pA_0 &\geq c_0 \\ pA_i + q_i B_i &\geq c_i \quad (i = 1, 2 \dots) \end{aligned}$$

feltételeket tekintjük részfeladatnak és ezen részfeladat duálisának megoldására ismét a Dantzig—Wolfe eljárást alkalmazzuk.

Továbbá (1)-et a szóban forgó módon kezelve, az (1)-gyel ekvivalens extrémális feladat

$$(5) \quad \begin{aligned} A_0x_0 + \sum_j \lambda_j(B_0\bar{y}_j + \sum_i A_i\bar{x}_{ij}) + \sum_k \mu_k(B_0\bar{y}_k + \sum_i A_i\bar{x}_{ik}) &= a \\ \sum_j \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j, \mu_k &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\max (c_0x_0 + \sum_j \lambda_j(d\bar{y}_j + \sum_i c_i\bar{x}_{ij}) + \sum_k \mu_k(d\bar{y}_k + \sum_i c_i\bar{x}_{ik}))$$

alakú, ahol az $(\bar{y}_j, \bar{x}_{1j}, \bar{x}_{2j}, \dots)$ ($j = 1, 2 \dots$), illetve $(\bar{y}_k, \bar{x}_{1k}, \bar{x}_{2k}, \dots)$ ($k = 1, 2 \dots$) elemek a (2) feltételek meghatározta poliéder extrémális elemei, illetve extrémális irányai. (Valamivel pontosabban és általánosabban fogalmazva, olyan rögzített vektorokról legyen szó, melyekkel a poliéder tetszőleges eleme a szokott módon előállítható.)

Nyilván (5)-tel ekvivalens feladathoz jutunk akkor, ha (5)-be még (2) tetszőleges $(y, x_1, x_2 \dots)$ elemeinek megfelelő együtthatókat és változókat is bevezetünk, illetve (5) optimumértéke (ha ez létezik) tetszőleges pontossággal megközelíthető minden olyan (5) alakú lineáris programozási feladattal, mely (2) alkalmas elemeinek megfelelő együtthatókból és változókból áll. Ugyanezen megjegyzések érvényesek a duális (7) feladat Dantzig—Wolfe eljárással történő megoldásával kapcsolatban is, amikor az extrémális feladat

$$(6) \quad \begin{aligned} q_0D_0 + \sum_j \alpha_j(\bar{p}_jB_0 + \sum_i \bar{q}_{ij}D_i) + \sum_k \beta_k(\bar{p}_kB_0 + \sum_i \bar{q}_{ik}D_i) &\geq d \\ \sum_j \alpha_j &= 1 \\ \alpha_j, \beta_k &\geq 0 \\ \min (q_0b_0 + \sum_j \alpha_j(\bar{p}_jd + \sum_i \bar{q}_{ij}b_i) + \sum_k \beta_k(\bar{p}_kd + \sum_i \bar{q}_{ik}b_i)) \end{aligned}$$

alakú, ahol a $(\bar{p}_j, \bar{q}_{1j}, \bar{q}_{2j}, \dots)$ ($j = 1, 2, \dots$), illetve $(\bar{\bar{p}}_k, \bar{\bar{q}}_{1k}, \bar{\bar{q}}_{2k}, \dots)$ ($k = 1, 2, \dots$) elemek a (4) feltételek meghatározta poliéder extrémális elemei és irányai.

Mindezek együtt ösztönöznek egy olyan dekompozíciós eljárás vizsgálatára, ahol mindig egy (5), illetve (6) alakú feladat $(\tilde{p}, \tilde{\pi})$, illetve $(\tilde{y}, \tilde{\gamma})$ duális megoldásából adódó $\tilde{p}$ -mal és $\tilde{y}$ -nal oldjuk meg a

$$\begin{aligned} B_i x_i &= b_i - D_i \tilde{y} \\ (7) \quad x_i &\geq 0 \\ \max (c_i - \tilde{p} A_i) x_i \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

részfeladatokat, hiszen ezek mindegyikének $\tilde{x}_i$ megoldását felhasználva az adódó $(\tilde{y}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots)$ megoldása (2)-nek és ugyanígy $(\tilde{p}, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots)$ megoldása (4)-nek, ahol $\tilde{q}_i$ (7) duálisának megoldása. (Feltéve természetesen, hogy az $\tilde{x}_i$ -k és $\tilde{q}_i$ -k léteznek.) (2) és [vagy (4) ezen megoldásaihoz tartozó λ , illetve α változókkal a megfelelő feladatot bővítve új $(\tilde{p}, \tilde{\pi})$ és/vagy $(\tilde{y}, \tilde{\gamma})$ adódik stb.

Dekompozíciós eljárás a feladat megoldására

A továbbiakban feltesszük, hogy az $\mathbf{Y} = \{y : D_0 y = b_0, y \geq 0\}$ és $\mathbf{P} = \{p : p A_0 \geq c_0\}$ halmazok nem üresek és korlátosak. Legyenek $\mathbf{X}_i = \{x_i : B_i x_i = 0, x_i \geq 0\}$ és $\mathbf{Q}_i = \{q_i : q_i B_i \geq c_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$).

Az alábbiakban előbb megfogalmazzuk az eljárást, az eljárás verifikálását a leírását követő tétel bizonyítása tartalmazza. Az eljárás a következő:

1. Legyen $h = 1, \tilde{y}_1$ az $\mathbf{Y}$ -nak, $\tilde{p}_1$ pedig $\mathbf{P}$ -nek tetszőleges eleme. Az y -ra vonatkozó feladat a

$$\begin{aligned} q_0 D_0 &\geq d \\ \min q_0 b_0 \end{aligned}$$

lineáris programozási feladat, a p -re vonatkozó feladat az

$$\begin{aligned} A_0 x_0 &= a \\ x_0 &\geq 0 \\ \max c_0 x_0 \end{aligned}$$

lineáris programozási feladat. Legyen továbbá $\pi_1 = -\infty, \gamma_1 = \infty$.

2. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} B_i x_i &= b_i - D_i \tilde{y}_h \\ (8) \quad x_i &\geq 0 \\ \max (c_i - \tilde{p}_h A_i) x_i \end{aligned}$$

lineáris programozási feladatokat ($i = 1, 2, \dots$).

Ha ezen feladatok mindegyikének van optimális megoldása, folytassuk 3.-tól.

Ha a (8) feladatok között van olyan, amelyiknek nincs lehetséges megoldása, minden ilyen i -re bővítsük az y -ra vonatkozó feladatot egy β -változóval.

A változóhoz tartozó célfüggvény együttható $\tilde{q}_i b_i$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(\tilde{q}_i D_i, 0)$, ahol $\tilde{q}_i$ a Q_i -nek egy olyan extrémális eleme, melyre $\tilde{q}_i(b_i - D_i \tilde{y}_i) < 0$.

Ha a (8) feladatok között van olyan, amelyik nem korlátos, minden ilyen i esetén bővítsük a p -re vonatkozó feladatot egy μ változóval. A változóhoz tartozó célfüggvény együttható $c_i \tilde{x}_i$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(A_i \tilde{x}_i, 0)$, ahol $\tilde{x}_i$ az X_i -nek egy olyan extrémális eleme, melyre

$$(c_i - \tilde{p}_h A_i) \tilde{x}_i > 0.$$

Folytassuk 4.-től.

3. Legyen $\tilde{x}_i$ (7), $\tilde{q}_i$ pedig (7) duálisának egy optimális extrémális megoldása ($i = 1, 2 \dots$).

Bővítsük az y -ra vonatkozó feladatot egy α változóval. A változóhoz tartozó célfüggvény együttható $\tilde{p}_h \alpha + \sum_i \tilde{q}_i b_i$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(\tilde{p}_h B_0 + \sum_i \tilde{q}_i D_i, 1)$.

Bővítsük a p -re vonatkozó feladatot egy λ változóval. A változóhoz tartozó célfüggvény együttható $d \tilde{y}_h + \sum_i c_i x_i$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(B_0 \tilde{y}_h + \sum_i A_i \tilde{x}_i, 1)$.

4. Oldjuk meg az y -ra vonatkozó feladatot, ha az tartalmaz új változót és oldjuk meg a p -re vonatkozó feladatot, ha az tartalmaz új változót.

Ha az y -ra vonatkozó feladat nem korlátos, az eljárás végetér: az (1) feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Ha a p -re vonatkozó feladat nem korlátos, az eljárás végetér: a duális (3) feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Ellenkező esetben legyen $(\tilde{y}_{h+1}, \tilde{\gamma}_{h+1})$ vagy $\tilde{y}_{h+1}$ az y -ra vonatkozó feladat duálisának egy optimális megoldása, γ_{h+1} pedig a feladat optimumértéke vagy ∞ aszerint, hogy a feladat tartalmaz-e már α változót vagy sem $(\tilde{p}_{h+1}, \tilde{\pi}_{h+1})$ vagy $\tilde{p}_{h+1}$ pedig legyen a p -re vonatkozó feladat duálisa egy optimális megoldása és $\tilde{\pi}_{h+1}$ a feladat optimumértéke vagy $-\infty$ aszerint, hogy a feladat tartalmaz-e már λ változót vagy sem.

Ha $\pi_{h+1} \geq \gamma_{h+1}$ az eljárás végetér, (1) egy optimális megoldása a p -re vonatkozó feladat alapján adódik.

Ha $\pi_{h+1} < \gamma_{h+1}$, legyen $h = h + 1$ és folytassuk 2.-től.

Tétel. Az 1—4 eljárás vagy végetér az egyes lépések véges számú alkalmazása után, mikor is a 4.-beli konklúziók helyesek, vagy $\lim_{h \rightarrow \infty} \pi_h = \lim_{h \rightarrow \infty} \gamma_h$ véges érték és ez megegyezik (1) optimumértékével.

Bizonyítás. A következő két megjegyzés helyessége Y és P korlátos voltának következménye.

$$\text{Mivel } \{y : D_0 y = 0, y \geq 0\} = \{0\}$$

$$D_0 y = 0$$

$$D_i y + B_i x_i = 0 \quad (i = 1, 2 \dots)$$

$$y, x_1, x_2 \dots \geq 0$$

ból tehát Y korlátossága folytán $B_i x_i = 0$ ($i = 1, 2 \dots$), tehát (5) [(6)] első feltételcsoportjában a $\mu(\beta)$ változók együtthatóvektorai $A_i \bar{x}_i$ ($\bar{q}_i D_i$) alakúak (nak választhatók), ahol az $\bar{x}_i$ ($\bar{q}_i$)-k X_i (Q_i) extrémális elemei ($i = 1, 2 \dots$).

Másrészt egy

$$(9) \quad \begin{aligned} A_0 x_0 + \sum_j \lambda_j (B_0 \tilde{y}_j + \sum_i A_i \tilde{x}_{ij}) + \sum_{i,k} \mu_{ik} A_i \tilde{x}_{ik} &= a \\ \sum_j \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j, \mu_{ik} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\max (c_0 x_0 + \sum_j \lambda_j (d \tilde{y}_j + \sum_i c_i \tilde{x}_{ij}) + \sum_{i,k} \mu_{ik} c_i \tilde{x}_{ik})$$

alakú (vagy a λ változókat és rájuk vonatkozó feltételeket még nem tartalmazó) p -re vonatkozó feladatnak mindig van lehetséges megoldása, ahol az $\tilde{y}_j, \tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{ik}$ -k az eljárás során meghatározott elemek. Ellenkező esetben ugyanis lenne olyan (p^*, π^*) , melyre

$$\begin{aligned} p^* A_0 &\geq 0 \\ p^* (B_0 \tilde{y}_j + \sum_i A_i \tilde{x}_{ij}) + \pi^* &\geq 0 \\ p^* A_i \tilde{x}_{ik} &\geq 0 \end{aligned}$$

a (9)-ben szereplő j -kre és (i, k) kra továbbá

$$p^* a + \pi^* < 0$$

P korlátossága folytán a fentiekből $p^* = 0$, ami az utolsó egyenlőtlenségnek ellentmond.

Hasonló igaz egy y -ra vonatkozó feladatra is, azaz 4.-ben a p -re és az y -ra vonatkozó feladattal kapcsolatban valóban nincs más eset az ott elmondottakon kívül.

Legyen valamikor 4.-ben egy p -re vonatkozó (9) feladat nem korlátos. Ekkor léteznek olyan nemnegatív μ_{ik}^* -k és x_0^* , hogy

$$A_0 x_0^* + \sum_{i,k} \mu_{ik}^* A_i \tilde{x}_{ik} = 0$$

és

$$c_0 x_0^* + \sum_{i,k} \mu_{ik}^* c_i \tilde{x}_{ik} > 0$$

Feltételezve (4) megoldhatóságát és a (4)-beli egyenlőtlenségeket x_0^* -gag illetve $\mu_{ij}^* \tilde{x}_{ij}$ -vel beszorozva és összegezve ellentmondáshoz jutunk. Így mé, kevésbé oldható meg a (4)-hez képest még további feltételeket tartalmazó (3). Hasonlóan látható be az y -ra vonatkozó feladat nem korlátosságához kapcsolódó 4-beli állítás.

Továbbá lévén a szóba jövő $\tilde{x}_{ik}$ -k és $\tilde{q}_{ik}$ -k száma véges és egy 2.-ben újonnan bevezetendő μ_{ik} vagy β_{ik} változó eddig még nem szerepelt ilyen elemhez tartozik, a p -re, illetve y -ra vonatkozó feladatok előbb vagy utóbb λ , illetve $\tilde{q}$ változót is fognak tartalmazni, hacsak az eljárás nem végződik a most említett esetek valamelyikével.

Ilyen esetben, ha pl. a p -re vonatkozó feladat korlátos, optimális $(x_0^*, \dots, \lambda_j^*, \dots, \mu_{ik}^*, \dots)$ megoldásához tartozó $(x_0^*, y^*, x_1^*, x_2^*, \dots)$, ahol $y^* = \sum_j \lambda_j^* \tilde{y}_j$, $x_i^* = \sum_j \lambda_j^* \tilde{x}_{ij} + \sum_k \mu_{ik}^* \tilde{x}_{ik}$ ($i = 1, 2, \dots$), nyilván olyan megoldása (1)-nek, melyhez tartozó célfüggvényérték a megfelelő π^* és ugyanígy, ha az

y -ra vonatkozó feladatban szerepel α változó és a feladat korlátos, akkor a (3) duális feladat olyan megoldása nyerhető, melyhez tartozó duál-célfüggvényérték az aktuális γ^* .

(Előbbieket alapján az előző konklúziók is némileg kiegészíthetők: ha a p -re (az y -ra) vonatkozó feladat nem korlátos és tartalmaz λ (α) változót, az (1) ((3)) feladat nem korlátos és ugyanakkor az y -ra (a p -re) vonatkozó feladat eddig nem tartalmazott α (λ) változót.]

Mindaddig, amíg π_h és γ_h valamelyike nem véges, $\pi_h \leq \gamma_h$ és az előzőek szerint ez igaz, akkor is, ha mindkettőre véges érték adódik, melynek be kell következnie, ha az eljárás nem fejeződik be másképpen. Továbbá ξ -vel jelölve (1) optimumértékét, mely ekkor szükségképpen létezik, $\pi_h \leq \xi \leq \gamma_h$, amivel igazoltuk a 4.-beli $\pi_{h+1} \geq \gamma_{h+1}$ (pontosabban $\pi_{h+1} = \gamma_{h+1}$) esetre vonatkozó állítást.

Nyilván a π_h -k monoton nem csökkennek és a γ_h -k monoton nem nőnek, hiszen a p -re és y -ra vonatkozó feladatok egymást követő előfordulásaik között új változókkal bővülnek vagy változatlanok maradnak. (Utóbbi esetben $p_{h+1} = p_h$ vagy $y_{h+1} = y_h$ választható 4-ben.) Azt kell már csak belátnunk, hogy $\lim_{h \rightarrow \infty} \pi_h < \lim_{h \rightarrow \infty} \gamma_h$ lehetetlen.

Az adódó $\tilde{p}_h$ -k és $\tilde{y}_h$ -k sorozata P illetve Y -beli elemekből áll. Egy konvergens részsorozatot tekintve és a továbbiakban csak ezen részsorozattal foglalkozva jelöljük (p^*, y^*) -gal ennek limeszpontját.

Elég nagy h -tól kezdve a (8) feladatoknak és duálisuknak is van lehetséges megoldásuk, következésképpen ugyanez igaz a

$$B_i x_i = b_i - D_i y^*$$

$$x_i \geq 0$$

$$\max (c_i - p^* A_i) x_i$$

feladatokra és duálisukra, tehát van optimális megoldásuk is. Jelölje ezeket x_i^* és q_i^* ($i = 1, 2, \dots$).

Minthogy $\tilde{\pi}_h = \pi_h - \tilde{p}_h a$, tetszőleges h -ra és annál nagyobb h' -re ($\tilde{p}_{h'}$, $\tilde{\pi}_{h'}$) optimális voltából

$$\tilde{p}_i (B_0 \tilde{y}_h + \sum_i A_i \tilde{x}_{ih}) + \pi_{h'} - \tilde{p}_{h'} a \geq d \tilde{y}_h + \sum_i c_i \tilde{x}_{ih}$$

azaz

$$(10) \quad \pi_{h'} \geq d \tilde{y}_h - p_{h'} B_0 \tilde{y}_h + \tilde{p}_{h'} a + \sum_i (c_i - \tilde{p}_{h'} A_i) \tilde{x}_{ih}.$$

Ugyanígy

$$(11) \quad \gamma_{h'} \leq d \tilde{y}_{h'} - \tilde{p}_h B_0 \tilde{y}_{h'} + \tilde{p}_h a + \sum_i \tilde{q}_{ih} (b_i - D_i \tilde{y}_{h'}).$$

A két utolsó egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés ismert folytonossági megfontolások alapján elég nagy h -tól kezdve tetszőlegesen közel van

$\zeta^* = d y^* - p^* B_0 y^* + p^* a + \sum_i (c_i - p^* A_i) x_i^* = d y^* - p^* B_0 y^* + p^* a + \sum_i q_i^* (b_i - D_i y^*)$ -hoz, amiből $\lim_{h \rightarrow \infty} \pi_h = \lim_{h \rightarrow \infty} \gamma_h$ következik és ezzel a tétel valamennyi állítását beláttuk.

Kizárólag illusztrációként, illetve esetleg a megértés megkönnyítésére is szolgál a következő számpélda.

Az

$$\begin{aligned}
 y_1 + y_2 &\leq 5 \\
 -2x_0 + 2y_1 - y_2 + x_1 + 4x_2 &\leq 5 \\
 -x_0 - y_1 + y_2 + 2x_1 + x_2 &\leq 20 \\
 y_1 - 2y_2 + 4x_1 - x_2 &\leq 20 \\
 y_1 + 4y_2 + 2x_1 + 2x_2 &\leq 50 \\
 x_0, y_1, y_2, x_1, x_2 &\geq 0 \\
 \max (-4x_0 + 2y_1 + 4y_2 + 8x_1 + x_2)
 \end{aligned}$$

lineáris programozási feladatnál legyen

$$\begin{aligned}
 D_0 &= [1 \ 1], \\
 A_0 &= \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \\
 D_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

tehát az eljárás során egyetlen alfeladat lesz és a fentieknek megfelelően particionálódnak a feladat további paraméterei és változói. (Amit már a cikk többi részétől eltérő jelölések is kifejeznek.)

Az $\{y_1, y_2 : y_1 + y_2 \leq 5, y_1, y_2 \geq 0\}$ és $\{(p_1, p_2) : -2p_1 - p_2 \geq -4, p_1, p_2 \geq 0\}$ halmazok korlátosak és nem üresek és legyen $y_1 = (2, 3)$ és $\tilde{p}_1 = (0, 0)$.
(1.)

A 2.-ban lépésben megoldandó (8) feladat a

$$\begin{aligned}
 4x_1 - x_2 &\leq 24 \\
 2x_1 + 2x_2 &\leq 36 \\
 x_1, x_2 &\geq 0 \\
 \max (8x_1 + x_2)
 \end{aligned}$$

lineáris programozási feladat; melynek optimális megoldása $\tilde{x}_1 = (84/10, 96/10)$, duálisának optimális megoldása pedig $\tilde{q}_1 = (7/5, 6/5)$.

$B_0\tilde{y}_1 + A_1\tilde{x}_1 = (478/10, 274/10)$ és a megfelelő célfüggvény együttható $d\tilde{y}_1 + c_1\tilde{x}_1 = 928/10$, hasonlóan $\tilde{p}_1B_0 + \tilde{q}_1D_1 = (13/5, 2)$ és a megfelelő célfüggvény együttható $\tilde{p}_1a + \tilde{q}_1b_1 = 88$. (3.)

Ennek megfelelően 4.-ben az y -ra vonatkozó feladat a

$$\begin{aligned}
 q_0 + 13/5\alpha_1 &\geq 2 \\
 q_0 + 2\alpha_1 &\geq 4 \\
 \alpha_1 &= 1 \\
 q_0, \alpha_1 &\geq 0 \\
 \min (5q_0 + 88\alpha_1)
 \end{aligned}$$

lineáris programozási feladat, melynek optimális megoldása $q_0^* = 2$, $\alpha_1^* = 1$, optimumértéke $\xi_2 = 98$ és melynek duálisa optimális megoldásából $\tilde{y}_2 = (0, 5)$.

Hasonlóan, a p -re vonatkozó feladat a

$$-2x_0 + 478/10 \lambda_1 \leq 5$$

$$-x_0 + 274/10 \lambda_1 \leq 20$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$x_0, \lambda_1 \geq 0$$

$$\max (-4x_0 + 928/10 \lambda_1)$$

lineáris programozási feladat, melynek optimális megoldása $x_0^* = 214/10$, $\lambda_1^* = 1$, optimumértéke $\pi_2 = 72/10$ és melynek duálisa optimális megoldásából $\tilde{p}_2 = (2, 0)$.

2. iterációs lépés.

$$2. \quad 4x_1 - x_2 \leq 30$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max (6x_1 - 7x_2).$$

Optimális megoldása: $\tilde{x}_1 = (15/2, 0)$.

Duális optimális megoldása: $\tilde{q}_1 = (3/2, 0)$.

$$3. \quad B_0 \tilde{y}_2 + A_1 \tilde{x}_1 = (5/2, 20), \quad d \tilde{y}_2 + c_1 \tilde{x}_1 = 80, \\ \tilde{p}_2 B_0 + \tilde{q}_1 D_1 = (11/2, -5), \quad \tilde{p}_2 a + \tilde{q}_1 b_1 = 40.$$

4. y -ra vonatkozó feladat:

$$q_0 + 13/5 \alpha_1 + 11/2 \alpha_2 \geq 2$$

$$q_0 + 2\alpha_1 - 5\alpha_2 \geq 4$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$q_0, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$

$$\min (5q_0 + 88\alpha_1 + 40\alpha_2)$$

Optimális megoldása: $q_0^* = 9$, $\alpha_1^* = 1$, $\alpha_2^* = 0$,

Optimumértéke: $\xi_3 = 85$.

Duális optimális megoldása: $\tilde{y}_3 = (0, 5)$.

p -re vonatkozó feladat:

$$-2x_0 + 478/10 \lambda_1 + 5/2 \lambda_2 \leq 5$$

$$-x_0 + 274/10 \lambda_1 + 20 \lambda_2 \leq 20$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$\max (-4x_0 + 928/10 \lambda_1 + 80 \lambda_2)$$

$$\lambda_1^* = 1, \lambda_2^* = 0, x_0^* = 0.$$

$$\pi_3 = 80.$$

$$\tilde{p}_3 = (0, 64/37).$$

3. iterációs lépés

2.

$$4x_1 - x_2 \leq 30$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max (168/37 x_1 - 27/37 x_2)$$

$$\tilde{x}_1 = (9, 6)$$

$$\tilde{q}_1 = (39/37, 6/37).$$

3.

$$B_0 \tilde{y}_3 + A_1 \tilde{x}_1 = (18/37, 9/37), d\tilde{y}_3 + c_1 \tilde{x}_1 = 2340/37,$$

$$\tilde{p}_3 B_0 + \tilde{q}_1 D_1 = (28, 29), \tilde{p}_3 a + \tilde{q}_1 b_1 = 98.$$

4.

$$q_0 + 13/5 \alpha_1 + 11/2 \alpha_2 + 18/37 \alpha_3 \geq 2$$

$$q_0 + 2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9/37 \alpha_3 \geq 4$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

$$q_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$$

$$\min (5q_0 + 88\alpha_1 + 40\alpha_2 + 2340/37 \alpha_3)$$

$$q_0^* = 137/37, \alpha_3^* = 1, \alpha_1^* = \alpha_2^* = 0.$$

$$\xi_4 = 3025/37 (\approx 81,7), \tilde{y}_4 = (0, 5).$$

$$-2x_0 + 478/10 \lambda_1 + 5/2 \lambda_2 + 28 \lambda_3 \leq 5$$

$$-x_0 + 274/10 \lambda_1 + 20 \lambda_2 + 29 \lambda_3 \leq 20$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$x_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

$$\max (-4x_0 + 928/10 \lambda_1 + 80 \lambda_2 + 98 \lambda_3).$$

$$\lambda_2^* = 1, \lambda_3^* = 0, x_0^* = \lambda_1^* = 0.$$

$$\pi_4 = 80, \tilde{p}_4 = (0, 2).$$

4. iterációs lépés

2.

$$4x_1 - x_2 \leq 30$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max (4x_1 - x_2)$$

$$\tilde{x}_1 = (9, 6)$$

$$\tilde{q}_1 = (1, 0).$$

$$3. \quad \tilde{p}_4 B_0 + \tilde{q}_1 D_1 = (-1, 0), \quad \tilde{p}_4 a + \tilde{q}_1 b_1 = 60$$

$$4. \quad q_0 + 13/5 \alpha_1 + 11/2 \alpha_2 + 18/37 \alpha_3 - \alpha_4 \geq 2$$

$$q_0 + 2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9/37 \alpha_3 \geq 4$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$$

$$q_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \geq 0$$

$$\min (5q_0 + 88\alpha_1 + 40\alpha_2 + 2340/37 \alpha_3 + 60\alpha_4)$$

$$q_0^* = 4, \alpha_4^* = 1, \alpha_1^* = \alpha_2^* = \alpha_3^* = 0.$$

$$\xi_5 = 80.$$

A feladat optimális megoldása $(0, 0, 5, 15/2, 0)$, duálisának optimális megoldása $(4, 0, 2, 1, 0)$.

Megjegyzések

Első megjegyzésünk, hogy a 3.-ban bevezetett új változók miatt a $\tilde{p}_h \neq \tilde{p}_{h+1}$ és $\tilde{y}_h \neq \tilde{y}_{h+1}$ relációk közül legalább az egyik biztosan teljesül.

Legyen ugyanis

$$\xi_h = d\tilde{y}_h - \tilde{p}_h B_0 \tilde{y}_h + \tilde{p}_h a + \sum_i (c_i - \tilde{p}_h A_i) \tilde{x}_i =$$

$$= d\tilde{y}_h - \tilde{p}_h B_0 \tilde{y}_h + \tilde{p}_h a + \sum_i \tilde{q}_i (b_i - D_i \tilde{y}_h).$$

$$\tilde{p}_h \neq \tilde{p}_{h+1}, \text{ ha}$$

$$\tilde{p}_h (B_0 \tilde{y}_h + \sum_i A_i \tilde{x}_i) + \tilde{\pi}_h < d\tilde{y}_h + \sum_i c_i \tilde{x}_i$$

azaz $\pi_h < \xi_h$ és $\tilde{y}_h \neq \tilde{y}_{h+1}$, ha

$$(\tilde{p}_h B_0 + \sum_i \tilde{q}_i D_i) \tilde{y}_h + \tilde{\gamma}_h > \tilde{p}_h a + \sum_i \tilde{q}_i b_i$$

azaz $\gamma_h > \xi_h$. Minthogy 4.-ből — illetve induláskor 1.-ből — $\pi_h < \gamma_h$, állításunk igaz. Nyilván helyes marad akkor is, ha β vagy μ változó bevezetésével jutunk 4.-hez.

Az előző tétel állítása igaz akkor is, ha 4.-ben az y -ra vonatkozó feladatot csak $\xi_h < \gamma_h$, a p -re vonatkozó feladatot pedig csak $\xi_h > \pi_h$ esetén bővítjük a megfelelő α vagy λ változóval.

Csak a $\lim_{h \rightarrow \infty} \pi_h < \lim_{h \rightarrow \infty} \gamma_h$ egyenlőtlenség lehetetlen voltának bizonyítását kell módosítanunk. Ugyanis most nem feltétlenül teljesül (10) és (11) mindegyike, de előző megjegyzésünk szerint legalább az egyik fennáll. Mindenesetre, ha mindkettő igaz, alkalmazható a korábbi gondolatmenet.

Ha pl. csak (10) írható fel, akkor a h -adik lépésben nem állt fenn $\xi_h < \gamma_h$, amiért is nem vezettük be az $(\tilde{y}_h, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \dots)$ -nak megfelelő α változót az y -ra vonatkozó feladatba.

Tehát

$$\gamma_h \leq d\tilde{y}_h - \tilde{p}_h B_0 \tilde{y}_h + \tilde{p}_h a + \sum_i q_i (b_i - D_i \tilde{y}_h).$$

Mivel itt a jobb oldal ismét tetszőlegesen közel van ξ^* -hoz és $\gamma_{h'} \leq \gamma_h$, $\lim_{h \rightarrow \infty} \pi_h < \lim_{h \rightarrow \infty} \gamma_h$ lehetetlensége már adódik.

Az, hogy mind az y -ra, mind pedig a p -re vonatkozó feladatba minden lépésben bevezetjük a megfelelő α és λ változót, az egy, a gyakorlatban elfogadott, dekompozíciós eljárásoknál alkalmazott taktikának felel meg. A p -re vonatkozó feladatnak a $\xi_h > \pi_h$ esetben történő bővítése annak felel meg, hogy (2) $(\tilde{y}_h, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \dots)$ megoldásához tartozó λ változónak a $(\tilde{p}_h, \tilde{\pi}_h)$ -val számított relatív költség alapján a bővítés előnyösnek látszik. Ugyancsak a dekompozíciós eljárásoknál szokásos stratégiáknak megfelelően (2) további $(\tilde{y}_h, x_1, x_2 \dots)$ megoldásainak megfelelő változókkal is bővíthetjük a p -re vonatkozó feladatot, ha ilyen (8) megoldása során adódik. Ugyanez igaz az y -ra vonatkozó feladattal kapcsolatban is, mindez azonban már attól függ, hogy miképpen oldjuk meg a (8) feladatokat, tehát általában a dekompozíciós eljárás számológépen történő realizálásától.

Az — általában csak közelítő — 1—4. eljárás figyelemre méltó tulajdonságának tartjuk, hogy a p -re és y -ra vonatkozó feladatok sorozatát megoldva, együtt adódik egyrészt egy egyre jobb célfüggvényértékű megoldása (1)-nek, másrészt pedig egy egyre kisebb felső becslés (1) optimumértékére. Valamivel pontosabban fogalmazva, értsük bele 4.-be, hogy $\xi_h \geq \gamma_h$ esetén $\tilde{y}_{h+1} = \tilde{y}_h$ és $\xi_h \leq \pi_h$ esetén $\tilde{p}_{h+1} = \tilde{p}_h$. Egyszerűen adódik, hogy nem lehetséges az, hogy végtelen sokszor egymás után mindig csak az egyik és mindig ugyanazon, pl. a p -re vonatkozó feladatot kelljen újra megoldanunk az eljárás során.

Ez abból következik, hogy rögzített $\tilde{y} = \tilde{y}_h = \tilde{y}_{h+1} = \dots$ mellett a (7) feltételrendszerek meghatározta poliédereknek csak véges sok $\tilde{x}_{ij}$ extrémális elemük és $\tilde{\pi}_{ik}$ extrémális irányuk van, melyeknek megfelelő változókkal a p -re vonatkozó feladat bővíthető. Tehát elég nagy h' -re.

$$\tilde{p}_{h'}(B_0 \tilde{y} + \sum_i A_i \tilde{x}_{ij}) + \pi_{h'} - \tilde{p}_{h'} a \geq d\tilde{y} + \sum_i c_i \tilde{x}_{ij}$$

minden j -re, azaz

$$\pi_{h'} \geq d\tilde{y}_{h'} - \tilde{p}_{h'} B_0 \tilde{y}_{h'} + \tilde{p}_{h'} a + \sum_i (c_i - \tilde{p}_{h'} A_i) \tilde{x}_i = \xi_{h'}$$

Továbbá szeretnénk még egyszer hangsúlyozni, hogy amennyiben (1)-nek nincs optimális megoldása, azt az eljárás véges számú lépés végrehajtása után jelzi, valamint azt, hogy az eljárás tetszés szerinti $\tilde{y}_1 \in Y$ és $\tilde{p}_1 \in P$ -ből kiindulva végrehajtható.

Megjegyezzük, hogy mivel 2. két egymás utáni előfordulása között a (8) feladatok jobb oldala és célfüggvénye is megváltozhat, ezen feladatok megoldása az ún. paraméteres primál-duál simplex módszerrel (pl. [2]) célszerű, amely természetesen alkalmas az eljárás során lehetséges olyan eset kezelésére is, mikor a jobb oldal és célfüggvény közül csak az egyik változik meg.

Közgazdasági alkalmazás szempontjából is van érdekessége az eljárásnak.

Már utaltunk a (8) részfeladatok interpretálhatóságára. Továbbá az y -ra és p -re vonatkozó ún. központi feladatok viszonya most mellérendelt a Dantzig—Wolfe eljárás bevezetőben említett kétszeres alkalmazásával nyerhető algoritmussal szemben. A kétszeresen összefüggő lineáris programozási feladat

általunk is felsorolt gazdasági interpretációira gondolva úgy is fogalmazhatunk, hogy egy központi erőforrásokért felelős egység ezekre különféleképpen árakat határoz meg (a p -re vonatkozó feladat megoldásával) és ugyanakkor egy központi készletekért felelős egység ezek felhasználására különféleképpen szinteket határoz meg (az y -ra vonatkozó feladat megoldásával). Ezt egymással párhuzamosan végzik egyrészt a részegységektől nyert válaszinformációk ($\tilde{x}_i$ és $\tilde{q}_i$), másrészt pedig a másiktól kapott információk alapján. Ezen utóbbiak a valóságos tervezésben mindig meglevő, de ennek az ismert dekompozíciós eljárások nyújtotta modelljeiből kimaradó horizontális információáramlás [5] egyfajta modelljének tekinthetők.

Az eljárás egy speciális esete

Tekintsük végül az 1—4. eljárást abban a speciális esetben, ha (1)-ben $D_1 = D_2 = \dots = 0$, mikor is a feladat mátrixa a Dantzig—Wolfe eljárásnál „szokásos” szerkezetű, azaz a

$$(12) \quad \begin{aligned} A_0 x_0 + B_0 y + \sum_i A_i x_i &= a \\ D_0 y &= b_0 \\ B_i x_i &= b_i \quad (i = 1, 2, \dots) \\ x_0, y, x_1, x_2, \dots &\geq 0 \\ \max (c_0 x_0 + d y + \sum_i c_i x_i) \end{aligned}$$

lineáris programozási feladat megoldásával foglalkozunk.

Az 1—4 eljárás most a következőt adja. (A következő 1'—4' eljárás leírásánál az y -ra vonatkozó feladatnál a $D_0 y = b$, $y \geq 0$ feltételeket megőrizend, a feladat duálisára térünk át. Ez most elvileg semmilyen problémát nem jelent, hogy egy konkrét feladatnál is érdemes-e így eljárni, az az adott feladattól függ.)

1'. Az y -ra vonatkozó, a δ változó maximalizálását előíró feladat a

$$\begin{aligned} D_0 y &= b_0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

feltételeket tartalmazza, $\tilde{y}$ legyen tetszőleges, ezen feltételeket kielégítő vektor. A p -re vonatkozó feladat az

$$\begin{aligned} A_0 x_0 &= a \\ x_0 &\geq 0 \\ \max c_0 x_0 \end{aligned}$$

lineáris programozási feladat. Legyen továbbá $\tilde{\pi} = -\infty$, $\tilde{\delta} = \infty$.

2'. Ha $\tilde{\delta} \leq \tilde{\pi}$, az eljárás véget ér, a p -re vonatkozó feladat utolsó megoldásából származtatható (12) optimális megoldása.

$\tilde{\delta} > \tilde{\pi}$ esetén oldjuk meg a p -re vonatkozó feladatot.

Ha a feladat nem korlátos, az eljárás végetér, (12) duálisának nincs lehetséges megoldása.

Ellenkező esetben legyen $\tilde{p}$ a p -re vonatkozó feladat duálisa egy optimális megoldásának a p -re vonatkozó feladat első feltételcsoportjához tartozó komponenseiből alkotott vektor és legyen $\tilde{\pi}$ a feladat optimumértéke, ha a feladat tartalmaz már λ változót.

3'. Oldjuk meg a

$$B_i x_i = b_i$$

$$x_i \geq 0$$

$$\max (c_i - \tilde{p}A_i) x_i$$

lineáris programozási feladatokat ($i = 1, 2 \dots$).

Ha a szóban forgó feladatok valamelyikének nincs megoldása, az eljárás végetér, (12)-nek sincs lehetséges megoldása

Ha ezen feladatok valamelyike nem korlátos, bővítsük a p -re vonatkozó feladatot minden ilyen i -re egy μ változóval. A változóhoz tartozó célfüggvény együttható $c_i \tilde{x}_i$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(A_i \tilde{x}_i, 0)$, ahol $\tilde{x}_i X_i$ egy olyan extrémális eleme, melyre $(c_i - \tilde{p}A_i) \tilde{x}_i > 0$. Folytassuk 2'-től.

Ha a szóban forgó feladatok mindegyikének van optimális megoldása, legyenek az $\tilde{x}_i$ -k extrémális optimális megoldások és legyenek a $\tilde{q}_i$ -k a feladatok duálisainak extrémális optimális megoldásai ($i = 1, 2 \dots$).

Legyen továbbá

$$\tilde{\xi} = d\tilde{y} - \tilde{p}B_0\tilde{y} + \tilde{p}a + \sum_i \tilde{q}_i b_i = d\tilde{y} - \tilde{p}B_0\tilde{y} + \tilde{p}a + \sum_i (c_i - \tilde{p}A_i) \tilde{x}_i$$

Vezessünk be a p -re vonatkozó feladatba egy λ változót, melynek célfüggvény együtthatója $d\tilde{y} + \sum_i c_i \tilde{x}_i$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(B_0\tilde{y} + \sum_i A_i \tilde{x}_i, 1)$ és bővítsük az y -ra vonatkozó feladat feltételeit a

$$-(d - \tilde{p}B_0)y + \tilde{p}a + \sum_i \tilde{q}_i b_i + \delta \leq 0$$

feltétellel. Ha $\tilde{\xi} < \tilde{\delta}$ folytassuk 4'-től, egyébként folytassuk 2'-től.

4'. Oldjuk meg az y -ra vonatkozó feladatot.

Ha a feladatnak nincs lehetséges megoldása, az eljárás végetér, (12)-nek nincs lehetséges megoldása. Ellenkező esetben legyen $(\tilde{y}, \tilde{\delta})$ a feladat egy optimális megoldása és folytassuk 2'-től.

Ha (12)-t a Dantzig—Wolfe eljárással oldjuk meg oly módon, hogy a

$$D_0 y = b_0$$

$$B_i x_i = b_i \quad (i = 1, 2 \dots)$$

$$y, x_1, x_2 \dots \geq 0$$

feltételrendszert egyetlen — egymástól függetlenül kezelhető részekre szét-eső — alfeladatnak tekintjük az extrémális feladat egyszerű megoldása egy

p -re vonatkozó feladathoz hasonló, az alfeladat egyszeri megoldása pedig egyrészt a 3'-beli másrészt a

$$D_0 y = b_0$$

$$y \geq 0$$

feltételrendszerű lineáris programozási feladatok megoldását igényli.

Hogy az alfeladat, illetve az egyes független részek megoldásáról történő visszatérés pontosan mikor és pontosan hogyan történik, az nagyrészt „taktikai” kérdés, a számológépi realizációtól is függ, esetleg az éppen megoldott feladat viselkedésén keresztül. Így 1'—4' és a Dantzig—Wolfe eljárás ilyen, formailag sem túl érdekes különbözőségét nem érezzük lényegesnek. (Egyébként a p -re vonatkozó feladatot is oly módon írtuk fel, hogy abban az alfeladat minden korábbi megoldását megőriztük, ami szintén egy lehetséges, a gyakorlat alapján jónak tartott taktikát realizál.)

A Dantzig—Wolfe eljárással kapcsolatos tapasztalatok alapján az sem látszik érdekesnek, hogy 1'—4' általában nem véges eljárás. A lényeges különbség az, hogy az egyik rész megkülönböztetett kezelésével el tudjuk érni, hogy a feladat optimumértékére egy monoton csökkenő felső becslés (δ) adódik. (A Dantzig—Wolfe eljárásnál adódó felső becslések sorozata nem monoton.)

Hasonló eljáráshoz és ezt az [1]-beli algoritmussal összevetve hasonló konklúzióhoz juthatunk, ha 1.—4.-et olyan esetre specializáljuk, mikor (1)-ben $A_1 = A_2 = \dots = 0$.

(Beérkezett: 1973. november 22.)

IRODALOM

1. BENDERS, J. F.: Partitioning procedures for solving mixed variable programming problems. *Numerische Mathematik*. 1962. 1. szám. 238—252. o.
2. DANTZIG, G. B.: *Linear programming and extensions*. Princeton, 1963. University Press.
3. DANTZIG, G. B.—VAN SLYKE, R. M.: Generalized upper bounded techniques for linear programs. *Journal of Computer and System Sciences*. 1967. 1. szám. 213—226. o.
4. DANTZIG, G. B.—WOLFE, PH.: The decomposition algorithm for linear programs. *Econometrica*. 1961. 4. szám.
5. KORNAI, J.: Gondolatok a többszintű tervezési rendszerekről. *Közgazdasági Szemle*. 1971. 9. szám.
6. HARTMAN, J. K.—LASDON, L. S.: A generalized upper bounding technique for doubly coupled linear programs. *Naval Research Logistics Quarterly* 1970. 4. szám.
7. RITTER, K.: A decomposition method for linear programming problems with coupling constraints and variables. *Mathematics Research Center, University of Wisconsin*. 1970. Sept. 739. o.

ON THE TWOFOLD CONNECTED LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

The article deals with a decomposition algorithm elaborated for the solution of a so called twofold connected (1) linear programming problem. In each step of the decomposition algorithm a vector $\tilde{p}$ is determined, it corresponds to the „common conditions” as well as an $\tilde{y}$ for the „common variable y ” by solving a linear programming problem; then problems (7) are solved.

Two cases are possible. In the first case the procedure solves problem (1) in steps of finite number. In the second case the procedure is infinite: the optimum values of linear programming problems resulting $\tilde{p}$ and $\tilde{y}$ constitute a monotonous non-decrea-

sing or a monotonous non-increasing series, their common limit is the optimum value of problem (1). (If this does not exist, it is indicated in a finite number of steps.) There are solutions to (1) and its dual, their objective function values are the elements of the series in question.

In the introduction some economic interpretations of (1) are mentioned. The second part of the article contains the algorithm, its verification as well as a numerical problem. In the next part there are some remarks and addenda; the last part contains a special case of the algorithm and its comparison to the Dantzig — Wolfe method.

О ДВУКРАТНО СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Статья занимается декомпозиционным методом, выработанным для решения так называемой двукратно связанной задачи линейного программирования. В каждом шагу декомпозиционного метода решением задачи линейного программирования определяется $\tilde{p}$, удовлетворяющий «общим условиям» $A_0x_0 + B_0y + \sum_i A_ix_i = a$ и $\tilde{y}$ для «общей переменной y », потом решается задача (7).

В общем имеются два случая. Первый случай — задачу (1) решаем в шагах конечной величины.

В другом случае алгоритм бесконечен, и оптимум задач линейного программирования, дающих $\tilde{p}$ и $\tilde{y}$ составляют монотонно не убывающую или монотонно не возрастающую прогрессию, общий предел которых — оптимум задачи (1). (Если такого не существует, то после выполнения шагов метода в конечной величине это проявляется).

В то же время имеются решения (1) и ее двойственной задачи, у которых значения целевых функций являются элементами данных прогрессий.

В ведении упоминаем некоторые экономические интерпретации (1). Вторая часть статьи содержит метод, его верификацию и также числовой пример. В следующей части фигурирует несколько заметок и добавок. Последняя часть содержит специальный случай метода и его сопоставление с методом «Дантциг—Волф».

Egy modell a gazdasági szabályozók tervezéséhez a mezőgazdaságban*

I. Bevezetés

Az új gazdaságirányítási rendszerben a központi tervezőmunka kiemelkedően fontos része a *középtávú terv* és az annak végrehajtását szolgáló *szabályozórendszer* kidolgozása, az egész népgazdaság és az egyes népgazdasági ágak szintjén egyaránt. Közgazdászaink egyre több és tökéletesebb modellt dolgoznak ki főként az első feladat megoldásához (pl. 1.), de több irányú próbálkozás történt a második feladatra vonatkozóan is (pl. 2. 3. 4.).

Az *élelmiszer-gazdaság* középtávú tervezéséhez és árszabályozásához is készítették már modelleket (pl. 5. 6. 7.). Hiányzott azonban egy olyan modell, amely a teljes mezőgazdasági szabályozórendszer variánsainak gyakorlati vizsgálatára alkalmas s a várható jövedelemhatásokon túlmenően a szabályozókra való reagálásról is támpontokat ad. A gazdasági szabályozók modellezésére több lehetőség kínálkozik:

1. A tervezéshez használt programozási modellekből — az optimális volumen-terv mellett — levezethető az *optimális árrendszer* (egyensúlyi árrendszer) is. E módszer alkalmazása ellen két fő érvet lehet felhozni:

- a tervezéshez használt programozási modellek aggregációja rendszerint nagyobb fokú annál, hogy abból termékenkénti árakat vezethessünk le,
- a programozási modellből kapott egyensúlyi árrendszer több okból nem működhet tényleges árrendszerként.

2. Az *ágazati kapcsolati mérlegek* felhasználhatók arra, hogy a termeléshez felhasznált különböző anyagok (ráfordítások) árváltozásainak hatását figyelemmel kísérjük, egészen a mezőgazdasági végtermékek önköltségéig, illetve a termékek jövedelméig. E modell azonban nem ad választ arra a kérdésre, hogy milyen változás várható az egyes termékek kínálatában, vagyis hogyan reagálnának a vállalatok a gazdasági szabályozók változására.

3. A tőkés országokban elterjedt a statisztikai idősorokból számított *kínálati függvények* használata. Ezek a mi szocialista mezőgazdaságunkban kevésbé alkalmazhatók, mert a vállalatok termelése sokoldalú (nem egy-egy termékre specializált), a földterület pedig korlátozott (nem növelhető), ezért az egyes termékek kínálati függvényei nem lehetnek függetlenek egymástól.

4. A kapitalista országokban ugyancsak elterjedt módszer a *parametrikus programozással végzett kínálati elemzés*, amellyel többféle árkombináció hatása

* Az V. Magyar Operációkutató Konferencián (Balatonfüred, 1973. október 1—4.) elhangzott előadás alapján.

vizsgálható a célfüggvény parametrizálása útján, s a kínálat változása mindig függ a többi termék helyzetétől is.*

Miután intézetünk feladatát képezik — többek között — a gazdasági szabályozókkal kapcsolatos számítások is, a 2. és 4. pontban említett módszerek felhasználásával megkíséreltük egy olyan modell kidolgozását, amely eleget tesz az alábbi *kíválmaknak*:

1. Tegye lehetővé az *egész szabályozórendszerrel* (árak, támogatások, adók) kapcsolatos változatok vizsgálatát, illetve *bármely fontos felhasznált vagy termelt termék* árának, támogatásának változtatását.

2. Tegye lehetővé a felhasznált termékek árváltozásainak *továbbgyűrűzését*, s a mezőgazdasági végtermékek önköltségében, jövedelmében bekövetkező változások kiszámítását.

3. Az előbbi változásokat figyelembe véve a modell a *termelési szerkezet optimalizálásával* adjon támpontot a szabályozó rendszerre való várható reagálásáról.

4. Az optimalizálás során az egyes ágazatok a *végtermékek jövedelmezősége* alapján versenyezzenek.

5. A modell nagyságrendje *ne haladja meg az egy 200×200 -as mátrix méretét*, hogy a számítások és az eredmények értékelése gyorsan elvégezhető legyen (figyelembe véve az akkor rendelkezésünkre álló IBM 1130-as számítógép korlátozott lehetőségeit).

6. A modell úgy legyen felépítve, hogy a szabályozórendszerrel kapcsolatos változások *csak a célfüggvény koefficienseit* érintsék, az együttható-mátrixot nem. Ez azért szükséges, hogy az egymás utáni változatok számítása gyorsan, viszonylag kevés gépidőtöbblettel elvégezhető legyen.

II. A modell jellemzése

Mint az előbb felsoroltakból látható, modellünk csupán adott szabályozórendszer hatásának vizsgálatára alkalmas *reagálási modell*, amely önmagában nem teszi lehetővé a szabályozórendszer konzisztens tervezését, mégis úgy tekintjük, mint első lépést a jelenlegi szabályozási gyakorlattól az *anticipatív szabályozás* felé (8., 199—229. o.).

Modellünk egy *lineáris programozási* modell, amelynek belső blokkja olyan felépítésű, mint az ágazati kapcsolati mérleg, s így e blokk külön is használható a mezőgazdasági végtermékek önköltségének, jövedelmének kiszámítására.

E modell fő jellemzői, illetve egyszerűsítései:

1. Bár a modellnek optimalizálási feladata is van, a tervezhető szabályozók közvetlenül nem vezethetők le belőle, mint az árprogramozásnál, hanem főként csak „*mi van, ha*” (what-if) vizsgálatokra alkalmas (mint a szimulációs modellek), tehát a szabályozóknak több változata vizsgálható a modellel.

2. A lehetséges modellek közül (országos, területi és vállalati típusmodellek)** mi eddig csak a legegyszerűbb, *országos szintű* modellt dolgoztuk ki, ennek

* Az utóbbi években egyre nagyobb teret hódít a *szimuláció módszere* is a gazdasági szabályozók modellezésében (15., 16., 17.). E módszer nálunk eddig technikai okból nem kerülhetett alkalmazásra, miután annak feltétele egy 128 K byte központi memória kapacitású számítógép, amellyel 1972-ben még nem rendelkezünk.

** Területi modellekkel végzett számításokat Sebestyén József (9., 66—67. o.), vállalati típusmodellek alkalmazását javasolják többek között Csáki Csaba—Varga Gyula—Vendég Ferenc (10.).

a kínálati reagálásra vonatkozó eredményei viszont csak annak tudatában értelmezhetők, hogy a vállalati reagálások összege nem feltétlenül egyezik meg az országos modellből kapott reagálással, egyrészt mert az ágazatok jövedelmezősége területileg rendkívül differenciált, másrészt mert a kapacitások területi eloszlása is heterogén.

3. A modell feltételezi a *vállalatok racionális viselkedésének elvét*, vagyis azt, hogy a vállalatok termelésszerkezeti reagálása egybeesik optimális termelésszerkezetük megváltozásával.

4. Az előbbieket miatt részletes munkaerő, traktor, épület stb. korlátok helyett a modellben főként csak *termékenkénti alsó és felső korlátokat* szerepeltettünk, — hasonlóan például az USA nemzeti modelljéhez (11.) — így az optimalizálás inkább a kínálati reagálás irányát, nagyságrendjét adja meg, nem pedig annak pontos mértékét.

5. Modellünk — szemben a dinamikus, ill. rekurzív modellekkel (pl. 12.) *statikus*, ezért belőle inkább a termelésszerkezeti reagálások kaphatók meg, a beruházási, fejlesztési reagálások kevésbé.

6. A modellt csak a *termelőszövetkezeti közös szektorra* dolgoztuk ki, az 1970. évi (termésátlagoknál az 1968—1970. évi) reprezentatív adatszolgáltatás alapján, a modell ezért főként a kínálat *rövidtávú (2—3 éves) előrejelzésére* alkalmas.

III. A modell szerkezete

A modell szerkezetét az 1. sz. melléklet, változóinak és korlátozó feltételeinek részletesebb jegyzékét a 2. és 3. sz. melléklet tartalmazza.

A *változók* öt csoportra bonthatók:

- 1.1. A termelés és belső felhasználás változói
- 1.2. A külső eredetű felhasználás változói
- 1.3. Értékesítési változók
- 1.4. Az állami támogatások változói
- 1.5. Egyéb változók (területek, adók és általános költségek változói).

A szokásostól itt főként abban térünk el, hogy a külső eredetű felhasználásokat (1.2. csoport) is *részletes összegző-változókkal* szerepeltettük. Ez lehetővé tette, hogy a külső eredetű ráfordítások (pl. munkabér vagy növényvédőszer) költségét, illetve árát a célfüggvény egy-egy koefficiensének módosításával megváltoztassuk.

A *korlátozó feltételeket* hat csoportra bonthatjuk:

- 2.1. A saját termelésű termékek, illetve ágazatok mérlegei
- 2.2. A külső eredetű ráfordítások mérlegei
- 2.3. Az állatforgók egyenletei
- 2.4. Az állati termékek mérlegei
- 2.5. Az állami támogatások egyenletei
- 2.6. Egyéb egyenletek (területek, adók és általános költségek egyenletei).

A korlátozó feltételek *mérleg-egyenletek* formájában szerepelnek a modellben, így a jobb oldal elemei nullák. A saját termelésű termékek, illetve ágazatok mérlegei (2.1. csoport) pl. előírják, hogy a termelés fedezze a belső felhasználást és az értékesítést, a készletváltozással azonban nem számolnak. A külső eredetű ráfordítások mérlegei (2.2. csoport) pedig kifejezik, hogy az összes fel-

használás az ágazatonkénti felhasználásokból és az általános költségként elszámolt felhasználásból tevődik össze.

Az *állattenyésztés* mérlegei három helyen is szerepelnek: a 2.1. csoportban *állatlétszám-mérlegek* vannak, amelyek azt határozzák meg, hogy adott állattartási ágazat (pl. hízómarha) milyen hányada kerül belső felhasználásra (továbbtartásra) és értékesítésre. A 2.3. csoportban szereplő *állatforgók egyenletei* a különböző állattartási ágazatok közötti arányokat határozzák meg (pl. tehén és borjú között). A 2.4. csoportban levő egyenletek pedig az *állati termékek* mérlegeit képviselik mázsában (egy állattartási ágazattól több termék is származhat).

Külön csoportot jelent a változók *egyedi alsó és felső korlátjai*, amelyek nem az együtttható-mátrixon belül helyezkednek el.

A modell *célfüggvényében* nem jövedelem-koefficiensek szerepelnek, hanem a *jövedelem kiszámítása* is a célfüggvényben történik, így a célfüggvény koefficienseit az értékesített termékek árai, a felhasznált termékek árai és a velük kapcsolatos támogatások alkotják. Ez teszi lehetővé a gazdasági szabályozók egyszerű változtatását, sőt a célfüggvény jellegének egyszerű megváltoztatását is: ha pl. csak az élőmunka-ráfordítások koefficiensének negatív előjelét pozitívvá változtatjuk a célfüggvényben, úgy a modell a nettó jövedelem helyett a bruttó jövedelmet fogja maximálni.

IV. A modell működése

A modell segítségével a gazdasági szabályozók különböző variánsaihoz kiszámíthatjuk:

— a mezőgazdasági végtermékek önköltségét (így vizsgálhatjuk a termékenkénti jövedelmet, a termékek közötti jövedelem-arányokat),

— az *összes jövedelmet*, adott termelési szerkezet esetén,

— a *termelési szerkezet* várható változását, a lineáris programozás alapján,

— és végül a *várható összes jövedelmet* a termelési szerkezet változása (optimalizálása) esetén.

A *végtermékek önköltségének* kiszámítására a szakirodalom (13., 90. o., 14., 225. o.) általában az alábbi formulát adja meg:

$$k^T = c_1^T B(E - A)^{-1} \quad (1)$$

ahol k^T a végtermékek önköltségének sorvektora

c_1^T a külső eredetű ráfordítások árainak sorvektora

B a külső eredetű ráfordítások mátrixa

A a belső felhasználások mátrixa.

Modellünkben a végtermékek önköltségét úgy kapjuk meg, hogy az 1. sz. mellékleten látható *belső négyzetes blokk transzponáltjának inverzét* szorozzuk a *célfüggvény fölötté levő blokkjából* képzett oszlopvektorral (ez a vektor-blokk tartalmazza a külső eredetű ráfordítások árait):

$$k_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -(E - A)Q & 0 \\ BQ & -E \end{bmatrix}^T \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Bebizonyítható, hogy a kétféle számítás azonos eredményre vezet, azzal az eltéréssel, hogy a k_1 vektor a végtermékek önköltségei után még a külső

eredetű ráfordítások árait is tartalmazza, negatív előjellel.* Az eltérő számításnak három oka van:

- az $(E - A)$ mátrixban az előjelmegállapodást nem tartottuk be
- a termelés és belső felhasználás blokkjának koeficiensei nem termékegységre, hanem termelőegységre (1 hektár, 1 db állat) vonatkoznak, ezért van szükség a képletben az átlagos hozamokat tartalmazó Q diagonális mátrixszal való szorzásra,
- külön szerepeltettük a külső eredetű ráfordítások összegző változóit is, emiatt kerül a képletbe a $-E$ egységmátrix.

A termelési szerkezet és az összes jövedelem várható változása *lineáris programozással* vizsgálható, amelyhez az egész modellt használjuk fel. A vizsgálat során a gazdasági szabályozók különböző variánsaihoz *egy-egy célfüggvény-vektort* rendeltünk, és az adott célfüggvénnyel végzett optimalizálás eredménye mutatja az adott variánshoz tartozó termelési szerkezetet és összes jövedelmet. A modellben az ágazatok közötti kapcsolatok biztosítják, hogy az egyes ágazatok a *végtermékek jövedelmezősége* alapján versenyezzenek egymással. Az úgynevezett *posztóptimális elemzéssel* pedig az is megvizsgálható, hogy adott termékeknél a gazdasági szabályozók milyen további módosítására enne szükség, egy kedvezőbb kínálati reakálás eléréséhez.

V. A modell felhasználása

A modellt először 1972-ben használtuk fel a gyakorlatban, a szarvasmarha-ágazat fejlesztésére hozott kormányhatározat előkészítésénél. Ennek során felemelték a tej és vágómarha felvásárlási árát, valamint az ágazatnak jutott állami támogatásokat, viszont felemelték a tejpor és a takarmánytápok beszerzési árát, valamint a gazdaságok által fizetendő földadót, jövedelemadót és nyugdíjárulékot, és az előzetes variánsoknál még felmerült más gazdasági szabályozók módosítása is. Ezek várható hatását együttesen kellett kimutatnunk.

* Legyen $(E - A) = A_1$

Ekkor a transzformáció szabályai szerint

$$k_1^T = [0^T \ c_1^T] \cdot \begin{bmatrix} -A_1 Q & 0 \\ BQ & E \end{bmatrix}^{-1} = [0^T \ c_1^T] \cdot \begin{bmatrix} (-A_1 Q)^{-1} & 0 \\ BQ(-A_1 Q)^{-1} & -E \end{bmatrix}$$

(Ugyanis

$$\begin{bmatrix} -A_1 Q & 0 \\ BQ & -E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-A_1 Q)^{-1} & 0 \\ BQ(-A_1 Q)^{-1} & -E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0_1 & E \end{bmatrix}$$

ahol E_1 n -ed rendű egységmátrix, 0_1 pedig $(m \times n)$ típusú nullmátrix.)

A kijelölt szorzások elvégzése után

$$k_1^T = [c_1^T BQ(-A_1 Q)^{-1}, \ c_1^T(-E)]$$

Fenti sorvektor első blokkja a következőképp alakítható át:

$$c_1^T BQ(-A_1 Q)^{-1} = c_1^T BQQ^{-1}(-A_1)^{-1} = c_1^T B(-A_1)^{-1} = c_1^T - BA_1^{-1},$$

ily módon

$$k_1^T = [-c_1^T BA_1^{-1}, \ -c_1^T E] = [-c_1^T B(E - A)^{-1}, \ -c_1^T E]$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket, eredményül $(n + m)$ elemű sorvektort nyerünk, melynek első n eleme a k^T önköltségvektor komponenseinek (-1) -szeresét szolgáltatja, mégpedig az (1)-ben megformulázott számítás szerint: további m eleme a ráfordítás-árak (-1) -szeresével lesz egyenlő. (A levezetés *Beluszky Pálné* matematikus munkája).

A *végtermékek önköltségére* vonatkozó variánsszámítások eredményeinek illusztrálására bemutatjuk néhány főbb mezőgazdasági termék önköltségének változását az egyes variánsokban, az ugyancsak számított 1972. április 1-i helyzethez képest.

1. táblázat

Néhány mezőgazdasági termék önköltségének
változása %-ban

A termék megnevezése	Az 1972. április- ban érvényes szabályozók alapján	A szabályozók előzetes alternatívái alapján		
		I.	II.	III.
		változat		
Étkezési búza	100,00	100,94	101,78	104,31
Cukorrépa	100,00	101,46	102,07	103,09
Burgonya	100,00	101,15	102,12	103,04
Kukorica	100,00	101,50	103,20	105,53
Tej	100,00	102,40	102,66	103,13
Vágómarha	100,00	101,73	101,96	102,37
Vágósertés	100,00	103,02	103,15	103,40

Az egyes alternatívák önköltségei és az azokból számított jövedelemmutatók alapján lehetővé vált a végleges variáns kiválasztása és elfogadása.

Az optimumszámítások eredményei közül az elfogadott I. változat szabályozóival kapott eredményeket mutatjuk be.

Az optimális megoldást az jellemezte, hogy a termékek többsége a megadott *felső határokon* szerepelt a megoldásban. Ilyen volt a kukorica, az árunövények többsége, valamint a baromfi ágazat. Ezek versenyképessége mutatkozott tehát a legjobbnak.

Az ágazatok másik része a megadott *alsó és felső határok között* helyezkedett el az optimális programban. Ilyen volt a szarvasmarha-ágazat és az őszi búza. Ezek versenyképessége tehát elmaradt az előbbi ágazatokétól, a szarvasmarha-ágazat mérete azonban így is meghaladta a kiindulási alapul választott 1970. évi szintet.

Az ágazatok egy harmadik része a megadott *alsó határon* került csak be az optimális programba. Ilyen volt a cukorrépán, burgonyán, dohányon és zöldségféléken kívüli egyéb szántóföldi árunövények, valamint a sertés- és juh-ágazat. Ezek bizonyultak tehát a legkevésbé versenyképes ágazatoknak.

Az optimális megoldás vizsgálatán kívül az ún. *posztoptimális elemzéssel* vagy *érzékenységvizsgálattal* is foglalkoztunk. A szarvasmarha-ágazat vonatkozásában pl. olyan eredményeket kaptunk, hogy a tervezett árnnövelésekhez képest a tej árának literenként 20 filléres vagy a vágómarha árának kilogrammonként 95 filléres csökkentése az 1970. évi szintre csökkentené az állatállományt az optimális megoldásban (az 1970—71. évi fajlagos hozamok és hatékonyság mellett). Ez bizonyította az áremelések szükségességét. Az is kiderült azonban, hogy ha pusztán gazdasági eszközökkel kívánnánk elérni a szarvasmarha-állomány 1975-re tervezett növekedését (a hatékonyság, illetve a fajlagos hozamok stagnálása mellett), úgy a tervezettnél is nagyobb mértékű áremelésekre lenne szükség. Mindez azt is bizonyítja hogy a gazdasági intézkedések mellett olyan központi és főként vállalati erőfeszítésekre is szükség van, amelyek a *fajlagos hozamok és a hatékonyság növelésére* irányulnak.

A mezőgazdasági végtermékek önköltségére és jövedelmére vonatkozó variánsszámításokat és ezek értékelését gyorsan (egy hetes átfutási idővel) sikerült elvégeznünk, így az eredményeket a Mezőgazdasági és Élelmiszerügyi Minisztérium Közgazdasági Főosztálya hasznosította is a kormányhatározat előkészítésénél. A lineáris programozással kapcsolatos számítások és elemzések jóval hosszabb időt vettek igénybe, s bár ezek is érdekes eredményre vezettek, az alternatívák megszületése és felhasználásuk igénye közötti rövid időszak ezek hasznosítását már nem tette lehetővé. Hozzájárult ehhez az is, hogy a feladat reális mérvű lekorlátozását illetően nem rendelkezünk elegendő tapasztalattal. Jobb híján, az ágazatok lehetséges alsó és felső határaként az elmúlt 5 év során már előfordult és az 1975-re tervezett ágazati méretek közül a maximális, ill. minimális méreteket vettük figyelembe.

VI. A továbbfejlesztés irányai

A modell továbbfejlesztése *három irányban* történhet:

— A 2—3 évnél hosszabb távú vizsgálat érdekében a modell *koefficienseinek előrebecslése* termelési függvények és trendfüggvények segítségével (ezekkel együtt már négyféle matematikai módszer kerül majd felhasználásra).

— A modell *dezaggregálása* területi vagy vállalati típusmodellekre, a homogenitás hiányából eredő hibák csökkentésére, ezzel azonban a számítások és elemzések átfutási ideje lényegesen növekedhet, ami az alternatívák korai kidolgozását, ill. tanulmányozást feltételezi.

— A *korlátozó feltétel-rendszer* tökéletesítése, ami gyakorlatilag csak a dezaggregálással együtt képzelhető el, mivel az erőforrások területi, vállalati eloszlása (sűrűségük) nem egyenletes.

(Beérkezett: 1973. november 18.)

IRODALOM

1. BÁGER G.: A középtávú tervezési modellrendszeréről. A tervezés fejlesztésének új irányai. Gazdaság 1973. 1. sz.
2. TARDOS M.: Az új gazdasági mechanizmus szabályozó rendszerének modellje. Közgazdasági Szemle 1968. 10. sz.
3. SZAKOLCZAI GY.: A hosszú távú növekedés, a szabályozó rendszer és az árak tervezése matematikai módszerekkel. Gazdaság 1972. 3. sz.
4. Szakértői konferencia a hosszútávú, a pénzügyi és ártervezés matematikai módszereiről. Szigma 1972. 3—4. sz.
5. KAZARECZKI K.—SEBESTYÉN J.: Célkitűzés, problémafelvetés és agrárpolitikai követelmények a mezőgazdaság országos tervezésében. Előadás a Keszthelyi Nemzetközi Szemináriumon. 1968.
6. JÓNÁS A.—VAGÓ J.: Programozási eredmények az élelmiszer-gazdaság tervezésében. Közgazdasági Szemle 1971. 3. sz.
7. GLATTFELDER P.—TÓTH B.: Ipari és élelmiszer-gazdasági termékrendszerű ármodellek. Közgazdasági Szemle 1972. 11. sz.
8. NEMÉNY V.: Gazdasági rendszerek irányítása. A gazdasági kibernetika alapjai. Budapest, 1973. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
9. ANDORKA R.—SZABÓ L.: Matematikai módszerek népgazdasági (ágazati) tervezésben való alkalmazása. Budapest, 1971. OT. Tervgazdasági Intézet — OAAH. Számítástechnikai és Módszertani Osztály (Árintézet).
10. CSÁKI CS.—VARGA GY.—VENDÉGH F.: Árhátásvizsgálat matematikai programozással egy mezőgazdasági vállalatban. Közgazdasági Szemle 1971. 7—8. sz.

11. W. N. SCHALER: A National Model of Agricultural Production Response. Agricultural Economics Research Vol. 20. No. 2. 1968.
12. T. HEIDHUES: Entwicklungsmöglichkeiten landwirtschaftlicher Betriebe unter verschiedenen Preisannahmen. 181. Sonderheft der Berichte über Landwirtschaft. Hamburg u. Berlin 1966.
13. SEBESTYÉN J.: Matematikai módszerek alkalmazása a mezőgazdasági termelés vizsgálatában. Budapest, 1962. Akadémiai Kiadó.
14. Autoerenkkollektiv: Operationsforschung in der Landwirtschaft und Nahrungsgüterwirtschaft. Berlin, 1969. VEB. Deutscher Landwirtschaftsverlag.
15. LINS, A. Y.—HEADY E. O.: Simulated markets, farm structure and agricultural policies. Can. J. Agric. Econ. Vol. 19. No. 1. 1971.
16. AGARWALA, R.: A simulation approach to the analysis of stabilisation policies in agricultural markets: a case study. J. Agric. Econ. Vol. 22. No. 1. 1971.
17. RAY E. D.—HEADY E. O.: Government farm programs and commodity interaction: a simulation analysis. American J. Agric. Econ. Vol. 54. No. 4. 1972.

Változók

1.1 *A saját termelés és a belső felhasználás változói*

- 1—5. A szántóföldi árunövénytermelés változói (ha)
- 6—10. A szántóföldi zöldségtermelés változói (ha)
- 11—13. Abraktakarmánytermelési változók (ha)
- 14—16. Szénatermelés változók (ha)
- 17—18. Zöldtakarmánytermelési változók (ha)
19. Növény lédús takarmánytermelési változó (ha)
- 20—21. Ültetvények (ha)
- 22—25. Egyéb földhasznosítási változók (ha)
- 26—29. Szarvasmarhalétszám hasznosítási irány szerint változói
(évi átlag létszám, db)
- 30—32. Sertéslétszám hasznosítási irány szerinti változói
(évi átlag létszám, db)
- 33—37. Egyéb állatlétszám változói (db)
- 38—44. Segédüzemi tevékenységek változói (természetes mértékegység)
- 45—47. Melléküzemi tevékenységek változói (q, Ft)

1.2 *A külső eredetű felhasználás összegző változói*

- 48—49. Élőmunkafelhasználás változói (Ft)
- 50—57. Mezőgazdasági eredetű anyagok és melléktermékek felhasználási változói
(q, hl, Ft)
- 58—78. Állóeszközök amortizációjának változói (Ft)
- 79—80. Egyéb anyagköltségek változói (Ft)
81. Idegeneknek végzett szolgáltatások változói (Ft)
- 82—136. Tápvásárlás (q)
- 137—141. Állatvásárlás (db)
- 142—144. Műtrágyavásárlás (hatóanyag kg)
145. Növényvédőszervvásárlás (Ft)
146. Állatgyógyászati szerszámvásárlás (Ft)
- 147—154. Üzemanyagvásárlás (természetes mértékegységben)
155. Építési anyagvásárlás (Ft)
156. Egyéb anyagvásárlás (Ft)

1.3 *Az értékesítési változók*

- 157—163. A szántóföldi árunövény-értékesítési változók (q)
- 164—168. A szántóföldi zöldségértékesítési változók (q)
169. Abrakértékesítési változó (q)
- 170—172. Szénaértékesítési változók (q)

Feltételek megnevezése	Változók megnevezése	A saját termelés és a belső felhasználás változói	A külső eredetű felhasználás összegző változói	Az értékesítési változók	Az állami támogatások változói	Egyéb változók
		1. 1	1. 2	1. 3	1. 4	1. 5
A saját termelésű termékek és szolgáltatások mérlegei	2. 1	$-(E - A) Q$	$\underline{0}$		$\underline{0}$	
A külső eredetű felhasználások mérlegei	2. 2	$\underline{B} Q$	$-\underline{E}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	
Az állatforgók egyenletei	2. 3		$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$
Állati termékek mérlegei	2. 4		$\underline{0}$		$\underline{0}$	$\underline{0}$
A támogatások egyenletei	2. 5		$\underline{0}$	$\underline{0}$		$\underline{0}$
	2. 6			$\underline{0}$	$\underline{0}$	

Jobb oldal

Célfüggvény

Egyedi alsó korlátok

Egyedi felső korlátok

$\underline{0}$	$-\underline{c}_1^T$	$+\underline{c}_2^T$	$+\underline{c}_3^T$	$-\underline{c}_4^T$

Megjegyzés: A sátozott blokkok nullától különböző koefficienseket tartalmaznak.

- 173—174. Zöldtakarmányértékesítési változók (q)
- 175. Lédus takarmány értékesítési változói (q)
- 176—177. Ültetvények értékesített termékeinek változói (Ft)
- 178—180. Szarvasmarhatenyésztés hústermelésének értékesítési változói (kg)
- 181—183. Sertésenyésztés hústermelésének értékesítési változói (kg)
- 184—185. Baromfihús-értékesítés változói (kg)
- 186—190. Egyéb állati termékek (tej, tojás, gypjú) értékesítési változói (természetes mértékegységben)
- 191—192. Nád és faértékesítési változó (Ft)
- 193. Egyéb termelés értékesítési változója (Ft)

1.4 Az állami támogatások változói

- 194—198. Az állattenyésztési ágazatok üzemviteli állami támogatásának változói (Ft)
- 199—201. Egyéb ágazatokat érintő ár kiegészítések, felárak változói (Ft)

1.5. Egyéb változók

- 202—203. Földterületi összegező változók (ha)
- 204—207. Adó változók (Ft)
- 208—209. Általános költségek változói (Ft)

2. sz. melléklet

Feltételek

2.1. A saját termelésű termékek és szolgáltatások mérlegei

- 1—5. A szántóföldi árunövénytermelés mérlegei (q, Ft)
- 6—10. A szántóföldi zöldségtermelés mérlegei (q)
- 11—13. Abraktakarmánytermelés mérlege (q)
- 14—16. A szénatakarmanýtermelés mérlege (q)
- 17—18. Zöldtakarmánytermelés mérlege (q)
- 19. Lédus takarmánytermelés mérlege (q)
- 20—21. Ültetvények mérlege (q)
- 22—25. Egyéb mezőgazdaságilag hasznosított területek mérlege (természetes mértékegységben)
- 26—29. A szarvasmarhalétszám hasznosítási irányok szerinti mérlege (évi átlag létszám, db)
- 30—32. Sertéslétszám hasznosítási irányok szerinti mérlege (évi átlaglétsszám, db)
- 33—37. Egyéb állattenyésztési ágazatok mérlegei (db)
- 38—44. Segédüzemi mérlegek (természetes mértékegység)
- 45—47. Melléküzemi mérlegek (természetes mértékegységben)

2.2. A külső eredetű felhasználások mérlegei

- 48—49. Élőmunka mérlege (Ft)
- 50—57. Melléktermékek és anyagok mérlegei (q, hl, Ft)
- 58—78. Állóeszközök amortizációjának mérlegei (Ft)
- 79—80. Egyéb anyagjellegű költségek mérlegei (Ft)
- 81. Idegeneknek végzett szolgáltatás (Ft)
- 82—136. Tápvásárlás mérlege (q)
- 137—141. Állatvásárlás mérlege (db)
- 142—144. Műtrágyavásárlás mérlege (hatóanyag kg)
- 145. Növényvédőszervásárlás mérlege (Ft)
- 146. Állatgyógyászatszervásárlás mérlege (Ft)
- 147—154. Üzemanyagvásárlás mérlege (Ft)
- 155. Építési anyagvásárlás mérlege (Ft)
- 156. Egyéb anyagvásárlás mérlege (Ft)

2.3. Állatforgók egyenletei

- 157—159. Szarvasmarhatenyésztés hasznosítási irányok szerinti arányai
 160—161. Sertésenyésztés hasznosítási irányok szerinti arányai
 162—164. Selejtezés és állománynövekedés

2.4. Állati termékek mérlegei

- 165—167. Szarvasmarhatenyésztés hústermelésének mérlege (kg)
 168—170. Sertésenyésztés hústermelésének mérlege (kg)
 171—172. Baromfihústermelés mérlege (kg)
 173. Egyéb állat hústermelésének mérlege (Ft)
 174—176. Egyéb állati termékek (tej, tojás, gyapjú) mérlegei
 (természetes mértékegységben)

2.5. A támogatások egyenletei

- 177—181. A szarvasmarhatenyésztés állami támogatásának egyenletei
 182—184. Egyéb ágazatokat érintő árkiegészítések és felárak egyenletei

2.6. Egyéb egyenletek

- 185—186. Földterületek egyenletei
 187—190. Adók egyenletei
 191—192. Általános költségek egyenletei

A MODEL FOR THE PLANNING OF ECONOMIC REGULATORS IN AGRICULTURE

After the 1968 economic reform it became a predominant task of the central planning activity in Hungary to elaborate, beside the middle range (five-year) plan, the system of economic regulators, stimulating the execution of the plan. Therefore we have tried to establish a model for the Ministry of Agriculture and Food which makes the estimation of changes in the profitability of agricultural products possible and gives viewpoints for the expected changes in the supply of products, in case of different alternatives of economic regulators (prices of produced and utilized goods, subsidies, taxes).

Our model is a static linear program, the inner, quadratic block of which is constructed like an input-output balance (Leontief-type model), and this can be separately used to calculate the change in the profit margin of agricultural products. Optimizing with the whole model will show the expected changes in the production pattern.

Originally we elaborated the model only for agricultural co-operatives, being aware of the fact that the obtained reactions on supply will not undoubtedly correspond to the sum of reactions obtained from a group of not aggregated models. For the first time in 1972 the model was utilized in elaborating the government measures aiming at the development of cattle stock. For the illustration of the results the changes in prime costs of the most important agricultural end products in case of different alternatives of economic regulators are introduced and some results of optimum calculation made by the accepted alternative are shown.

The study deals with the possibilities for further development of the model as well. This can be realized primarily by forecasting the change of coefficients and desaggregating.

МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ

В Венгрии после экономической реформы 1968-го года помимо среднесрочного (пятилетнего) плана, особенно важной задачей центрального планирования является разработка системы экономических регуляторов, служащих толчком для его осуществления. Поэтому мы стремились составить модель для Министерства продовольственной промыш-

шенности и сельского хозяйства, которая с одной стороны способствует оценке изменений, наступающих в рентабельности сельскохозяйственных продуктов, а с другой стороны служит точкой опоры в связи с предполагаемыми изменениями в предложении отдельных продуктов, при различных альтернативах экономических регуляторов (цен произведенных и использованных продуктов, субвенций, налогов).

Наша модель является статичной моделью линейного программирования, внутренний квадрат которой строится как межотраслевой баланс (модель Леонтьева). Этим особо можно пользоваться, когда вычисляем изменения доходов по сельскохозяйственным продуктам. А оптимизация, осуществленная целой моделью, пригодна для обнаружения предполагаемых изменений в структуре производства.

На первом шагу мы вырабатывали эту модель только для комплекса сельскохозяйственных кооперативов, зная, что так полученная реакция предложения не обязательно совпадает с суммой реакций, получаемых из групп меньше агрегированных моделей (областные типовые модели или типовые модели предприятий). Модель использовалась в первый раз в 1972 году, в ходе выработки правительственного мероприятия, служащего развитию поголовья скота.

Для иллюстрации результатов мы показываем изменение себестоимости важнейших сельскохозяйственных конечных продуктов при разных альтернативах экономических регуляторов, и показываем некоторые результаты расчета, произведенного принятой альтернативой.

Статья занимается и возможностями дальнейшего развития модели. Развитие может быть осуществлено предварительной оценкой коэффициентов и решением дезагрегации.

A bizonytalanság, a kockázat értékelése fejlesztések tervezésénél*

Jelen cikk egy Monte Carló módszerű szimulációs számítást mutat be. A számítás célja a bizonytalanság és a kockázatok értékelése volt egy konkrét vállalati döntés esetében. A tárgyalást ezen döntési probléma ismertetésére építjük; az elemzések kapcsán azonban általános kérdéseket is érintünk. Feladatunk vázolója után a Monte Carlo számítások módszereit írjuk le. Ezt követően elemezzük a szimuláció révén kapott eredményeket (döntési ajánlásokat) és rámutatunk munkánk ipargazdasági és gazdaságmatematikai tapasztalataira. Végül kitérünk egy általában ritkán vizsgált speciális módszertani kérdéskörre, nevezetesen foglalkozunk azokkal a problémákkal, melyek az eljárás inputjaként felhasznált mutatószámok összefüggéséből adódnak.

A feladat

A tervek, előkalkulációk, prognózisok bizonytalanságának több oka lehet, hiszen:

- a jövőbeli események soha nem pontosan előreláthatók,
- az előrejelzés céljaira alkalmazott számítási sémák általában torzítanak, és
- a felhasznált információk gyakran pontatlanok.

A gazdaságvezetésben fontos, hogy a döntéshozók információkkal rendelkezzenek a tervekben és a prognózisokban rejlő bizonytalanság szintjéről, a döntések során vállalt kockázatok** mértékéről. A vezetők számára többnyire nem megfelelőek az egyetlen lehetőség figyelembevételével kialakított koncepciók, a mereven rögzített összefüggésrendszer alapján végzett számítások, a valamennyi felhasznált paraméterre egy-egy konstans értéket figyelembe vevő kalkulációk stb. E determinisztikus elemzések eredményeit a bizonytalanság gyakran kérdéssé teszi.

A bizonytalanság, a kockázatok értékelése kiemelkedő jelentőségű a fejlesztési tevékenységek tervezésénél. A fejlesztési koncepciók esetében mindig nagyok a prognózisok hibahatárai, hiszen a fejlesztés, az újítások eredményeiről nem lehetnek előzetesen pontos információk, tapasztalatok. Növeli a kockázat-elemzés indokoltságát, hogy a fejlesztés általában hosszabb távra kiható,

* Az V. Magyar Operációkutatási Konferencián 1973. október 4-én Balatonfüreden elhangzott előadás alapján.

** Jelen cikk szerzői nem kívánnak kitérni a bizonytalanság és a kockázat kérdéskörével kapcsolatos terminológiai vitára. Cikkünkben olyan helyzeteknél beszélünk bizonytalanságról, amikor az eredmény nem biztos; kockázatvállalásról pedig akkor van szó, ha a bizonytalan helyzetben a döntéshozó tudomásul veszi a bizonyos valószínűséggel bekövetkező veszteség lehetőségét a valószínű nyereség reményében.

hosszabb időhorizontú értékelést igénylő tevékenység, mert a kalkulációk bizonytalansága az időtáv növelésével jelentős mértékben fokozódik.

Az elmondottak miatt számos szerző foglalkozott intenzíven a gazdasági bizonytalanság kérdésével, így F. H. Knight, J. Neumann és O. Morgenstern, W. J. Baumol stb. Az elemzések fegyvertárába N. Metropolis és S. Ulam névadó publikációját követően bekerültek a Monte Carlo módszerek* is. A vállalati szintű fejlesztési tevékenység gazdaságosságának értékelésénél azonban csak D. B. Hertz használta először e technikát [2]. Az első módszertani kísérletek sokat ígérőeknek tűntek. Azonban az eljárás problémáit tárgyaló legújabb munkák, pl. L. Kryzanowski, P. Lusztig és B. Schwab [3] publikációja is hangsúlyozzák a további kutatások fontosságát egyes elvi és alkalmazás-technikai kérdések terén.

Cikkünkben — egy kísérleti számítás tapasztalataira építve — arra keressünk választ, hogy miként használható a Monte Carlo technika a bizonytalanság és a kockázatok értékelésére iparvállalataink esetében. Kísérletünk elvi és módszertani tapasztalatait, valamint a felmerült problémákat egy esettanulmány ismertetése során fejtjük ki.

Az ismertetésre kerülő esettanulmány egy ipari nagyvállalat termékszerkezet-fejlesztési problémáit elemzi, a témakör egyik döntési feladata számára ad ajánlásokat. A szóban forgó döntést az tette szükségessé, hogy a vállalat egyik cikkszoportja iránt rohamosan nőtt a belföldi kereslet, s az igények további növekedésére lehetett számítani. A vállalat — a termékek egyetlen hazai előállítója — feladatának tekintette a fogyasztói igények kielégítését. A vezetők három utat láttak a belföldi kereslet kielégítésére:

a) Tekintettel arra, hogy a termék előállítása csak tömeggyártás esetén gazdaságos, szóba jöhetett a teljes időszak szükségleteinek import útján történő fedezése. Bár a cikkszoportban jelentős volumenű választékcseré-forgalmunk van a szocialista országokkal is, a többlet-igények kielégítésére elsősorban \$ viszonylatból számíthatunk.

b) Lehetségesnek látszott a termék és a gyártási technológia azonnali fejlesztése licencvásárlással, a szükséges beruházások 1973—75-ben történő kivitelezésével. Mivel a célszerű minimális termelési volumen magas és a termelés 1975-ben lényegesen meghaladná a belföldi szükségleteket, ezért az alternatíva fontos sajátossága, hogy realizálása esetén jelentős exporttal kell számolni. Ez az export azonban a belföldi kereslet növekedése miatt évről évre csökkenhetne, s 1980-ra meg is szűnhetne.

c) Alternatív döntési variánsnak tűnt a fejlesztés elhalasztása, s a beruházás 1980-ra történő befejezése. Ebben az esetben a növekvő belföldi kereslet kielégítéséhez 1975—1980 között importtal kell számolni.

A vázolt döntési probléma helyes megoldása a vállalat számára alapvető jelentőségű, s népgazdasági szinten is fontosnak tekinthető. Erre mutat például az, hogy a beruházások tervezett költsége jelentősen meghaladta a 3 milliárd forintot; továbbá, hogy a fejlesztés elhagyása esetén az import rohamosan növekszik és 1985-re már 100 millió dollár nagyságrendű éves importigény várható.

A fenti összegek nagysága miatt természetes, hogy a döntéshozók — a vállalat vezetői és a felsőbb szervek — jelentős erőfeszítéseket tettek a fejlesztés

* A cikk szinonímaként használja a „Monte Carlo módszer” és a „szimuláció” kifejezéseket.

gazdasági hatásainak prognosztizálására. Nagyszámú adatot gyűjtöttek össze az alkalmazható technológiákról és várható költségeikről, a beruházások méreteiről. Számos prognózist dolgoztak ki és értékelték a várható igényekről, az árak alakulásáról, a devizaszorozókról stb. Az alternatívák gazdaságosságának egybevetése mégsem volt megnyugtató, mivel a kalkulációkat kidolgozó szakértők véleménye arra utalt, hogy a számítások eredményeiben jelentős bizonytalanság rejlik.

Esettanulmányunk közvetlen cékitűzése a vázolt döntési probléma olyan elemzése volt, mely az ismertetett alternatívákkal kapcsolatos bizonytalanság és kockázatok számszerű értékelését is tartalmazza, ezek figyelembevételével ad döntési ajánlásokat.

Célunkat kétféle megközelítés révén kíséreltük meg elérni.

Az egyik típusú megközelítés segítségével azt a bizonytalanságot jellemeztük, melyet azon két ok eredményez, hogy a jövő nem pontosan előrelátható és hogy az információk pontatlanok. A jellemzésnél feltételeztük, hogy a vállalati szakemberek pontosabb információkat adnak a gazdaságossági számítások kiinduló adataiban rejlő bizonytalanságról, mint az ezen adatokból kiszámítható szintetikus mutatószámok bizonytalanságáról. Ezért e megközelítésnél az alapadatok jellemzőiből indultunk ki. A vizsgálatok során a szakemberektől „hármás becslést” kértünk minden alapadatra vonatkozóan; azt kértük, hogy ezen adatok esetében adják meg a minimális, legvalószínűbb és maximális adatértékeket. Az összegyűjtött adatok értékelését szimulációs algoritmusunk feladatává tettük, tehát eljárásunktól vártuk, hogy az adathármasok felhasználásával kimutassa: az alapadatok bizonytalansága hogyan hat a szintetikus mutatókra (pontosabban, hogy a véletlen adat-értékek valószínűség-eloszlásait megállapítsa és ezen „valószínűségi változók” bizonyos függvényeinek valószínűség-eloszlását megadja).

Másik megközelítési típusunk azt a bizonytalanságot kísérli meg jellemezni, amelyet a gazdaságosságszámítás eredményeiben a számítási sémák esetleges torzításai hoztak létre. Ezen — „szisztematikus” — hibalehetőségek vizsgálatát az indokolta, hogy a felülvizsgált alternatívák gazdaságossága több eltérő módszerrel is értékelhetőnek látszott. A szóban forgó fejlesztés jelentős beruházással járt, így a döntésnél irányadó lehetett a beruházás-gazdaságossági számítás. Úgy tűnt azonban, hogy számolnunk kell az elérhető fedezeti nyereség összegével is; az elemzett fejlesztés révén jelentősen változik ugyanis a vállalat termékszerkezete és a szerkezeti változások célszerűségének elemzésére egyes szerzők e mutatót ajánlják. További kalkulációs elvek is szóba jöhetnek (pl. az alternatívák devizaigényeinek vizsgálata stb.). A vázolt módszerbeli eltérések pedig bizonytalan helyzetet eredményeztek, mert a különböző számítások különböző ajánlásokra vezettek és nem volt egyértelmű, hogy melyik számítási mód határozza meg a jövőben valóban előnyösnek bizonyuló alternatívát.

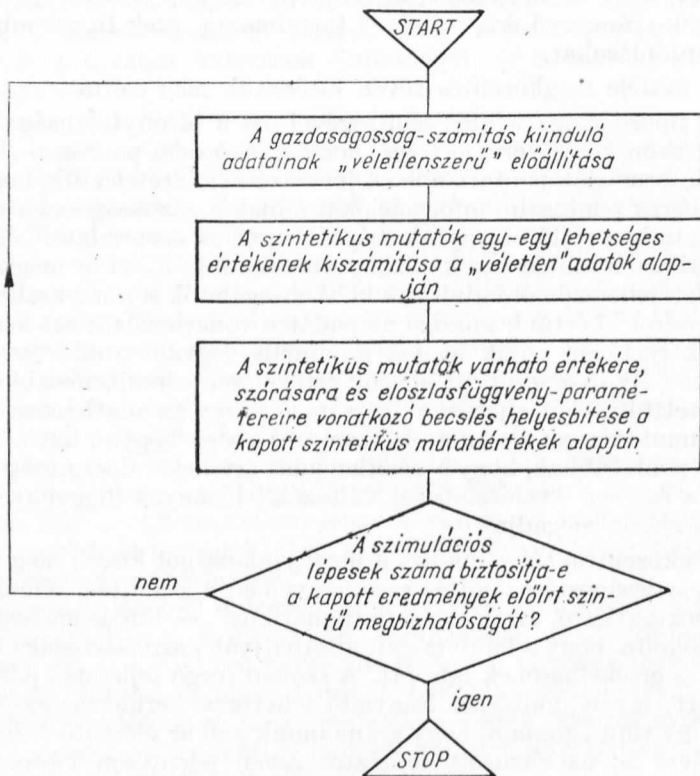
A most tárgyalt szisztematikus hibák elemzésére kialakított — második — megközelítésünk lényegében azt írta elő, hogy valamennyi számítást többféle képlet alapján is elvégezzünk. S ezúttal azt tekintettük szimulációs modellünk feladatának, hogy kimutassa: a különböző mutatószám-képzési elvek hogyan hatnak a számítások eredményeire.

Monte Carlo modellünkben a feladatmegoldás fenti kétféle megközelítését együttesen alkalmazzuk. A következőkben e modellt ismertetjük.

A szimulációs eljárás

Monte Carlo modellünk kidolgozásakor arra törekedtünk, hogy a vállalati szakemberek nehézségek nélkül interpretálhassák mind számításainkat, mind ezek eredményeit. Ezért szimulációs számításaink alapelve viszonylag egyszerű. A legfontosabb három műveletsoportot és kapcsolataikat az alábbi ábra szemlélteti:

1. sz. ábra



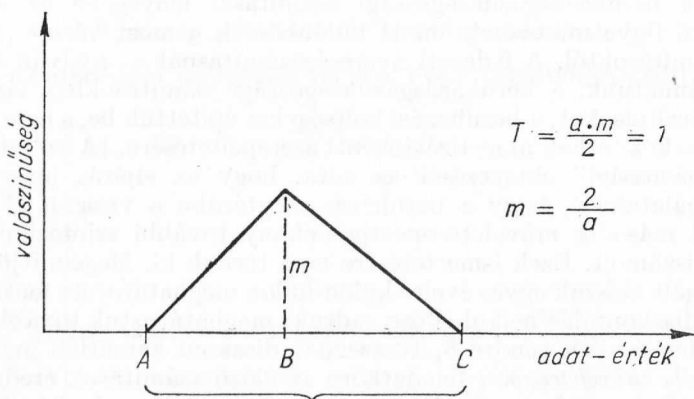
Modellünk — mint ezt az 1. ábra mutatja — iterációs eljárást foglal magában. Az algoritmusok egy-egy véletlenszerűen előállított kiinduló adathalmaz felhasználásával egymás után többször végrehajtják a szintetikus mutatók képzéséhez szükséges számítási műveleteket, s az iterációs lépések eredményei alapján számszerű jellemzést adnak a gazdasági mutatószámok lehetséges „ingadozásairól”.

Az első műveletsoport a gazdaságossági számítás kiinduló adatait képezi, mintegy 300 adatot — 11 évre évenként kb. 30 mutatót — határoz meg véletlenszerűen (ezen „valószínűségi változók” egy-egy véletlen realizációját adja meg). A számításokhoz kiindulásként az adatértékek valószínűségeloszlása szükséges, erről azonban a vállalati szakemberek nem tudtak a már említett „hármas becslésen” túlmenő információkat adni. Ezért feltételeztük, hogy

a vonatkozó sűrűségfüggvények lineárisak és a 2. ábrán bemutatott „háromszög alakúak”. (Az ábrán A jelöli a minimális, B a legvalószínűbb és C a maximális adatértéket.)

Megjegyezzük, hogy egyes szerzők a fenti adatháromszöghöz a béta eloszlás illesztését ajánlják. A [3] publikáció viszont az eloszlásfüggvény linearitását feltételező modellt mutat be. Eljárásunk az esetek többségében könnyebb számítási eljárást tesz lehetővé, mint ezek a megoldások.

2. sz. ábra



„Háromszög alakú” sűrűségfüggvényeink segítségével modellünk első műveletcsoportja olyan véletlen számokat állít elő, melyek a hármas becslésekkel „meghatározott” eloszlásokból származtak. E feladatot algoritmusunk a Monte Carlo technika egyik szokásos eljárása szerint teljesítette; tehát egyenletes eloszlásból származó véletlen számokat generált, majd x -re megoldotta az alábbi integrálegyenletet:

$$V = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

ahol V egyenletes eloszlásból származó véletlen szám

$f(y)$ a vizsgált adatérték valószínűségeloszlásának sűrűségfüggvénye, adott esetben a 2. ábrán feltüntetett háromszögoldal egyenlete.

A vázolt módon meghatározott mintegy 300 „véletlen” kiinduló adat alapján algoritmusunk második műveletcsoportja szintetikus gazdaságossági mutatószámokat számított az 1975—1985 közötti időszakra. E mutatók közt fontosnak tekintettük

— az egyes alternatívák megvalósítása esetén 1975—1985 között elérhető fedezeti nyereség összegét,

— a szokásos beruházás-gazdaságossági számítások elvei alapján összeállított mutatót és

— e mutatók diszkontált értékeit.

A számítások során elsőként az alternatívák fedezeti nyereségtartalmát határoztuk meg a vizsgálati időszak egyes éveire a „véletlen” belföldi egységek és a közvetlen termelési költség fajlagosok alapján. Ezen értéket a meg-

termelt mennyiséggel szorozva hagyományos fedezeti nyereség-hozam mutatók idősorát kaptuk. Majd korrigáltuk a hagyományos mutatókat. Egyrészt szükség szerint helyesbítettük értéküket a belföldi egységártól eltérő export-, illetve importegységeknek megfelelően; e műveletnél speciális devizaszorókat használtunk és figyelembe vettünk bizonyos többlet exportköltségeket is. Másrészt a kiszámolt nyereség-mutatók értékéből egy összegben levontuk a termelés fix költségeit (ezen, a hagyományos „fedezeti” elvtől lényegesen eltérő lépéssel biztosítottuk a számított nyereség-összegnek az egyéb mutatókkal való összehasonlíthatóságát).

Modellünk beruházásgazdaságossági számításai lényegébe az állóeszköz-terhek eltérő figyelembevétele miatt különböztek a most vázolt „fedezeti”^{*} nyereségszámításoktól. A fedezeti nyereségszámításnál — nyilván — amortizációval számoltunk. A beruházásgazdaságossági számításokban viszont mint egyszeri ráfordításokat, a beruházási költségeket építettük be, s nem volt szükség az állóeszköz-terhek amortizációkénti szerepeltetésére. (A számítás „beruházásgazdaságossági” elnevezését az adta, hogy az eljárás interpretálható annak vizsgálataként, hogy a beruházás megtérül-e a vizsgált 11 év alatt.)

A modell második műveletcsoportja néhány további szintetikus mutatószámot is kiszámolt. Ezek ismertetésére nem térünk ki. Megemlítjük viszont, hogy a vizsgált időszak egyes éveire külön-külön meghatározott fenti nyereség-összegeket diszkontálás nélkül is összeadtuk; meghatároztuk továbbá a 11 évi nyereség jelen értékét rendre 5, 10 és 20% diszkont-kamatláb mellett.

A harmadik műveletcsoport feladatköre az előző számítások eredményeinek rögzítése (nyilvántartása) volt. Ennek során az iterációs számítások többszöri megismétlésével kapott szintetikus mutatószám-sorozatokból a mutatóértékek tapasztalati eloszlásfüggvényének paramétereit becsültük meg. A hagyományos képleteket felhasználó eljárásokat nem részletezzük. Utalunk viszont arra, hogy — Ju. A. Srejtgyer és szerzőtársai ajánlásai értelmében [5] — a számítások pontosságának ellenőrzésekor a tapasztalati eloszlásfüggvény-paraméterek megbízhatóságát vizsgáltuk meg.

Eredményeink

Szimulációs eljárásunk a vizsgált termékszerkezet-fejlesztési alternatívák révén elérhető nyereségértékekről és ezek elérésének valószínűségéről adott információkat; az említett gazdaságossági mutatók (az így értelmezett valószínűségi változók) tapasztalati sűrűségfüggvényeinek jellemzőit becsülte meg. A becslés alapja a szimulációs kísérletekkel kapott „véletlen” nyereségértékek gyakorisági eloszlása, melynek paraméterei nagyszámú kísérlet esetén a keresett valószínűségek közelítésének tekinthetők [5]. Ilyen módon például az 1975—1985 között elérhető „fedezeti” nyereség bruttó összegével kapcsolatosan a 3. ábrán szemléltetett eredményeket kaptuk.

A 3. ábra tartalmi elemzése során elsőként arra kell rámutatnunk, hogy a „fedezeti” nyereségszámítás az alternatívák igen határozott minősítését adta. Az adatok szerint ugyanis az azonnali fejlesztés a legkedvezőbb alter-

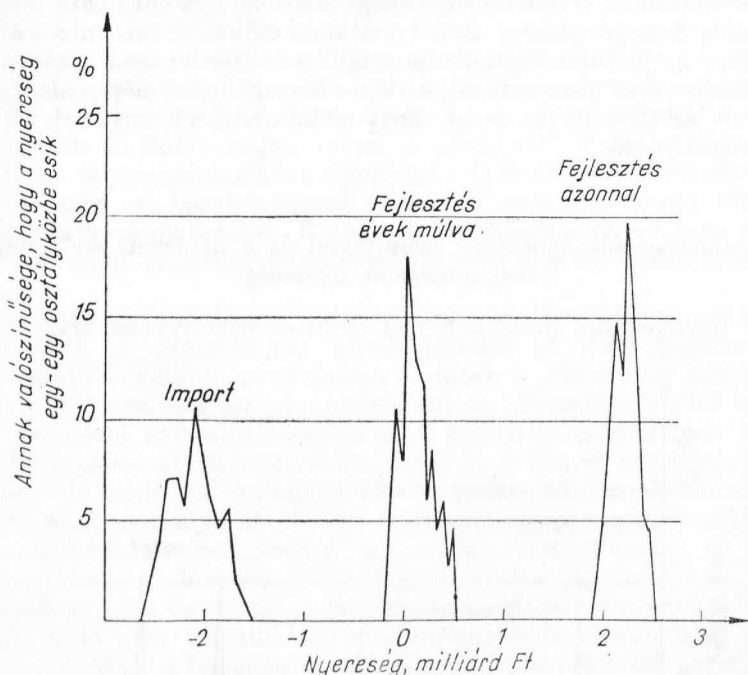
^{*} A továbbiakban a „fedezeti nyereség” és a „beruházásgazdaságossági számítások” szavakat idézőjelbe tesszük, ha hangsúlyozni kívánjuk, hogy a vázolt módon korrigált értékekről van szó.

natíva, melynek realizálása jelentős nyereséggel kecsegtet. A fejlesztés elhatalasztatásával a várható nyereség szerény összeggé törpül, az import alternatívája pedig nagy veszteséggel járna. Fel kell hívnunk továbbá a figyelmet arra, hogy a számítás szerint a várható nyereség (veszteség) összege mindhárom alternatívánál igen bizonytalan. A nyereségértékek lehetséges ingadozása valamennyi alternatíva esetén nagyobb félmilliárd forintnál. Ez az összeg csaknem egy-negyede az azonnali fejlesztéssel elérhető nyereségnek.

3. sz. ábra

Nyeresség „fedezeti elv” szerint számítva

(Gyakorisági poligonok 60 000 Ft-os osztályközökkel)



Lehet, hogy a 3. ábra nem győzi meg az Olvasót a szimuláció hatékonyságáról. Az ábrán bemutatott, jelentős gazdasági különbségeket tükröző poligonok alapján úgy tűnhet, hogy egy jó közgazdász „józan ész” segítségével is megbecsülheti az alternatívák gazdasági sajátosságait. Természetesen e felvetés vitatható. Ezúttal azt hangsúlyozzuk, hogy a „fedezeti” nyereségmutatókból levont fenti következtetéseket a további szintetikus mutatószámokkal kapcsolatos szimulációs eredmények jelentősen módosítják. Úgy véljük, hogy az ismertetésre kerülő — vagy ehhez hasonló — több oldalú értékelések hagyományos módszerekkel nem végezhetők el kielégítő pontossággal. Kiemeljük a „fedezeti” nyereségre és a „beruházásgazdaságossági” elvekre alapozott kalkulációk különbözőségét. Az eredményeket a 4. ábrán hasonlítjuk össze.

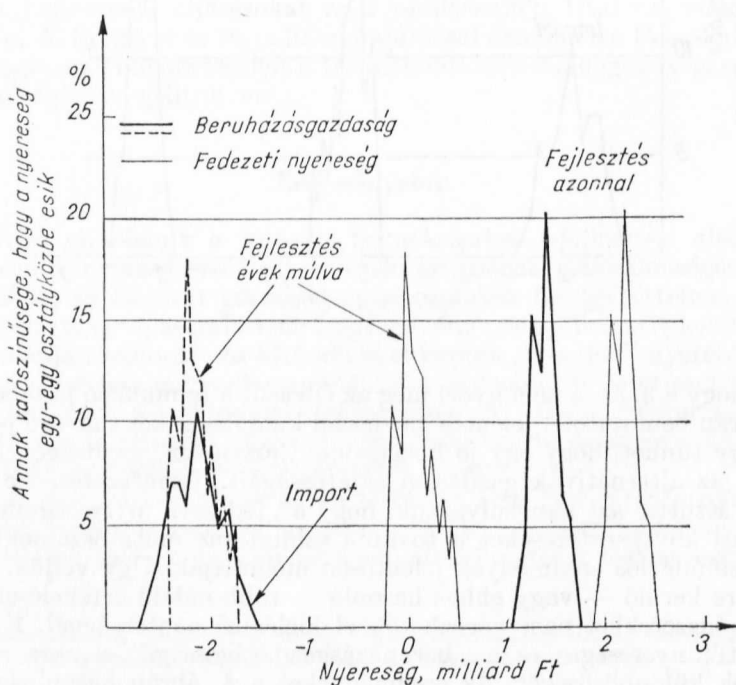
A 4. ábra valóban igen jelentős eltéréseket mutat ki a különböző gazdaságossági számítások eredményeiben. Az azonnali fejlesztéstől várható nyereség a „beruházásgazdaságossági” számítás szerint alig több a „fedezeti” elv alapján meghatározott nyereség felénél, a különbség csaknem 1 milliárd forint. Ennél is nagyobb eltérés adódik az elhalasztott fejlesztés gazdaságosságánál, ahol módosul az alternatívák értékelési sorrendje is. Bár a legkedvezőbb döntés a „beruházásgazdaságossági” számítás szerint is az azonnali fejlesztés, azonban a fejlesztés elhalasztása ezúttal az import alternatívájánál is kedvezőtlenebbnek tűnik.

Megemlítjük, hogy véleményünk szerint a 4. ábrán bemutatott különbségek jelentős részben a vizsgált fejlesztési alternatívák vállalati és népgazdasági értékelésének különbözőségét tükrözik. „Fedezeti” nyereségszámításunk ugyanis — az amortizáció figyelembevételével — a vállalat pénzügyi-számviteli elszámolásainak elveit követte, megközelítően úgy határozta meg a várható nyereség összegét, ahogy ez a vonatkozó előírások szerint a vállalatnál képződni fog. A „beruházásgazdaságossági” számítás viszont a szóban forgó nagyberuházás végső finanszírozójának — lényegében a népgazdaságnak — szempontjait érvényesítette azzal, hogy a beruházások egyszeri ráfordítás-jellegét hangsúlyozta.

4. sz. ábra

A „beruházásgazdaságossági” számítással és a „fedezeti elv” alapján meghatározott nyereség

(Gyakorisági poligonok 60 000 Ft-os osztályközökkel)



Vizsgálataink folytatásához diszkontálást is tartalmazó számításokat használtunk. (A diszkontálás — az $\frac{1}{(1+i)^t}$; $t = 0, 1 \dots 10$ szorzótényezők —

elhagyása ugyanis annak a teljesen irreális feltételezésnek elfogadását jelentette volna, hogy „ i ”, a kamatláb zérus.) Kapott eredményeink sajátosságait az 5. ábrán az egyik alternatíva „beruházásgazdaságossági” típusú nyereségmutatójának alakulásával szemléltetjük. Az ábra alapján két általános megállapítást tehetünk:*

— a diszkontálás a beruházások gazdaságossági mutatóit „rontja”. (Ennek az az oka, hogy a diszkontálás az azonnali ráfordítások értékét alig változtatja meg, a beruházástól várható bevételek összegét viszont — a realizálás idejéig eltérő idő hosszával arányosan növekvő mértékben — csökkenti.)

— a diszkontálás során alkalmazott kamatláb növekedésekor csökken a számítási eredmények bizonytalansága. (Ez annak a következménye, hogy a kalkulációkban kisebb súlyt kapnak a távoli jövő igen bizonytalan adatai.)

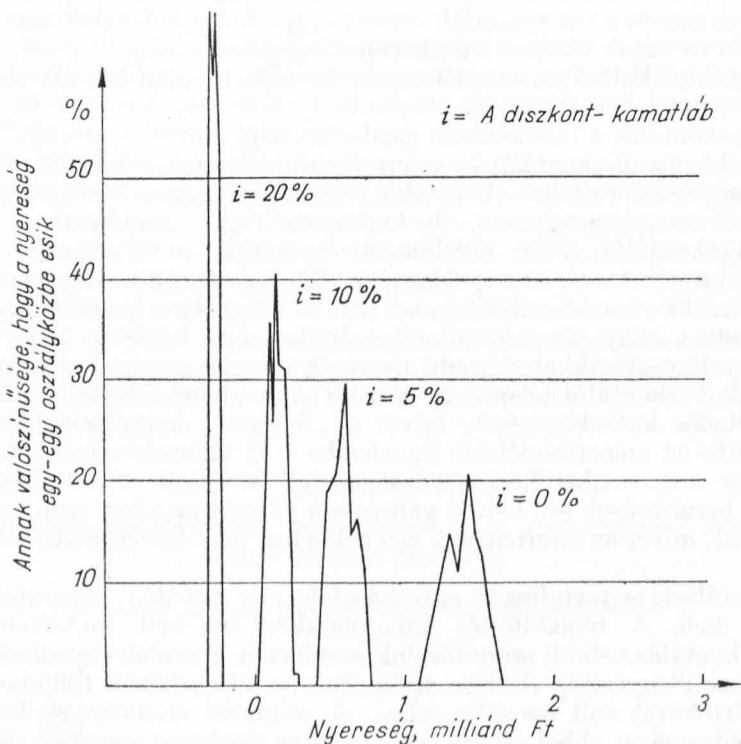
Természetes, hogy vizsgálatunknál a diszkontálás hatására is módosultak a vizsgált alternatívákkal elérhető nyereségösszegek egymáshoz viszonyított arányai. A diszkontálás jelentősen növelte pl. a „népgazdasági” és a „vállalati” értékelés különbözőségét, mivel a „fedezeti” kalkulációkban tovább csökkentette az amortizációként figyelembe vett állóeszközterheket, de nem változtatta meg a „beruházásgazdaságossági” számítás kezdő időpontjánál elszámolt beruházások értékét. E változások jellegét azonban nem szemléltetjük ábrával, mivel az alternatívák értékelésében nem következett be rangsorváltozás.

Diszkontálást is tartalmazó számításaink egy további tapasztalatára is utalnunk kell. A témakifejtés kiindulásaként rá kell mutatnunk arra, hogy diszkontálás nélküli számításaink esetében a „beruházásgazdaságossági” és a „fedezeti” nyereség eltérése elsősorban az állóeszközök 1985-ben még le nem írt értékével volt összefüggésben. A számítási eredmények különbsége ugyanis lényegében abból származott, hogy az érvényes amortizációs kulcsokat felhasználó „fedezeti” kalkulációk az új épületekkel kapcsolatos ráfordításokat csak részben számolták el 1975—1985 között, az egyszeri ráfordításokat értékelő „beruházásgazdaságossági” számítások viszont ezeket az összegeket teljes egészükben tartalmazták.** S fel kell hívnunk a figyelmet arra, hogy megállapításunk alapján úgy tűnik: számítási eredményeinket jelentősen befolyásolta egy, a le nem írt állóeszközérték nagyságát determináló szubjektív tényező; konkrétan: a figyelembe vett időszak hossza. Ki kell emelnünk azonban, hogy a diszkontálás alkalmazásával jelentősen — és a számításban figyelembe vett időtartam hosszával arányos mértékben — csökken az ezen időtartam megválasztásával a számítási eredményekre gyakorolt hatás (hiszen csökken a le nem írt állóeszközérték jelentősége). Ez ugyanis arra enged követ-

* Megállapításaink természetesen összhangban vannak a diszkontálási módszer ismert sajátosságaival. Éppen e sajátosságokon alapul pl. a beruházás gazdaságosságát értékelő „belső kamatláb” módszer, valamint a kalkuláció bizonytalanságát „figyelembe vevő” ún. „kockázati diszkont” módszer.

** Az 1985-ig, tehát az általunk vizsgált időszak végéig nem amortizálódott beruházási értéket azért nem vontuk le a „beruházásgazdaságossági” számítások állóeszköz-költségeiből, mert úgy éreztük, hogy ezzel éppen azokat a különbségeket csökkentenénk, amelyeket vizsgálni kívánunk. Ezúttal is az összehasonlíthatóság szempontjai vezettek tehát ahhoz, hogy eltértünk a hagyományos (előírt) beruházásgazdaságossági metodikától.

Az azonnali fejlesztés diszkontált nyereségértékei
(Gyakorisági poligonok 60 000 Ft-os osztályközökkel)



keztetni, hogy a számítási időtartam — az úgynevezett „időhorizont” — megfelelő megválasztásával a diszkontálást tartalmazó számításokban hibahatáron belülivé tehető a le nem írt állóeszközzérték hatása, kiküszöbölhető az eredményeket torzító szubjektivitás.

Esettanulmányunk ezidáig részletezett elemzéseit összefoglalva azt állapíthatjuk meg, hogy az elmondottak alapján — és feltételezve a felhasznált információs bázis realitását* — az azonnali fejlesztés alternatíváját kell a legjobbnak értékelnünk a vázolt döntési problémakörben. Hangsúlyoznunk kell továbbá, hogy vizsgálataink az alternatívától várható nyereség összegét meglehetősen nagy bizonytalansággal becsülhették csak meg. Rá kell mutatnunk arra, hogy a fejlesztés „vállalati” és „népgazdasági” szintű gazdaságossági jellemzői jelentősen eltérnek számszerű nagyságuk tekintetében. S utalnunk kell arra is, hogy a bemutatott számítási eredményeket jelentősen torzította a következőkben részletezett módszertani probléma.

* Kísérleti számításaink kiinduló adatait torzíthatta például az aggregáció és a „három becsléseket” adó szakemberek szubjektivitása. (Az utóbbi torzítás az ún. Delphi-módszerrel csökkenthető.)

Összefüggés a felhasznált véletlenszám-sorozatok tagjai között

További elemzéseink során arra törekedtünk, hogy feltárjuk: milyen torzításokat okoznak eredményeinkben a „véletlen” számítási kiindulóadatok képzéséhez felhasznált véletlenszám-sorozatok tulajdonságai, a véletlen számok közti sztochasztikus összefüggések vagy ezek hiánya. Nyilvánvaló ugyanis, hogy pl. a hosszabb távú idősorprognózisokban számolni kell az adatok időben összefüggő voltával (az idő-sorok „autokorrelációjával”). Ismert sztochasztikus összefüggés van a termékek ára és a termék kereslete között, gyakran korrelálnak bizonyos gyártási költségfajlagosok stb. Ezen összefüggések modellezési gyakorlata azonban a Monte Carlo módszerek esetében kialakulatlan, a témakörre vonatkozóan alig vannak módszertani tapasztalatok.

A gyakorlatban alkalmazott szimulációs eljárások többnyire független valószínűségi változókat alkalmaznak. Azaz: bizonyos értékekről feltételezik, hogy valamely adott időszakban a vizsgált „véletlen” mutatószámok konkrét értékei lesznek, majd az időbeli és egyéb összefüggések figyelmen kívül hagyásával „független” prognózisokat adnak a következő időszakokra vonatkozóan is. Csak kezdeti kísérletek ismeretese a véletlen adatok közt összefüggéseket teremtő számítások terén. Egyes szerzők ezen összefüggések modellezésénél determinisztikus függvényeket használtak fel [3]. Más publikációk viszont a sztochasztikus folyamatok elméletéből ismert úgynevezett átmenet-valószínűségi mátrix felhasználását javasolták.

A kérdéskör vizsgálatára készített algoritmusunkat nem a szakirodalom fenti eljárásait követve állítottuk össze. Úgy tűnt ugyanis, hogy esetünkben a szóban forgó összefüggések jellegére reálisnak látszó munkahipotézist fogadhatunk el, ha a számítások során a Bayes-tételt alkalmazzuk. A modellezni kívánt összefüggés ugyanis sztochasztikus volt, így determinisztikus összefüggések nem látszottak megfelelőnek a leíráshoz. S esetünkben az átmenet-valószínűségek mátrixa is nehezen volt értelmezhető, hiszen folytonos eloszlásokkal dolgoztunk, ahol az adatok közti összefüggések az időben nem voltak állandóaknak tekinthetők. A feltételes valószínűségekkel való számolás viszont megfelelt a probléma természetének.

Számításaink során — kísérletként — a véletlen kiinduló adatok időbeli összefüggéseinek reprezentálását kívántuk biztosítani. Célunk érdekében módosítottuk szimulációs eljárásunk első műveletcsoportját (az algoritmus további lépéseit változatlan formában hajtottuk végre). A változás a gazdaságosság-számítási kiinduló adatok véletlen értékeit előállító transzformációs integrálegenletet érintette. Módosításunk során a kiinduló adatok $t + 1$ -edik évi értékének valószínűségeloszlását a t -edik évi adatértéktől függő feltételes eloszlásként értelmeztük; transzformációs integrálegenletünk általános formája tehát az alábbi volt:

$$\int_{-\infty}^x h(y|\eta = u^*) dy = V$$

ahol η a szóban forgó adat t -edik évi értékének valószínűségi változója,
 u^* a t -edik évi adat-érték (az η valószínűségi változó egy véletlen realizációja),
 y a $t + 1$ -edik évi adat-érték valószínűségi változója,
 h a feltételes sűrűségfüggvény.

Algoritmusunk a most felírt integrálegyenlet megoldásához használta fel a Bayes-tételt. E tétel értelmében ugyanis

$$\int_{-\infty}^x h(y/\eta = u^*) dy = \int_{-\infty}^x \frac{g(\eta = u^*/\xi = y) \cdot f(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta = u^*/\xi = t) \cdot f(t) dt} dy$$

ahol f az ún. „a priori” valószínűségek eloszlásának sűrűségfüggvénye (modelünkben a $t + 1$ -edik évi adat-értékek „háromszög alakú” sűrűségfüggvénye),

g a $P(\eta = u^*/y = k) \quad k \in [A, C]$ valószínűségek eloszlásának sűrűségfüggvénye, melyről azt feltételeztük, hogy az u^* értéknél van a maximuma és szintén „háromszög alakú” függvény.

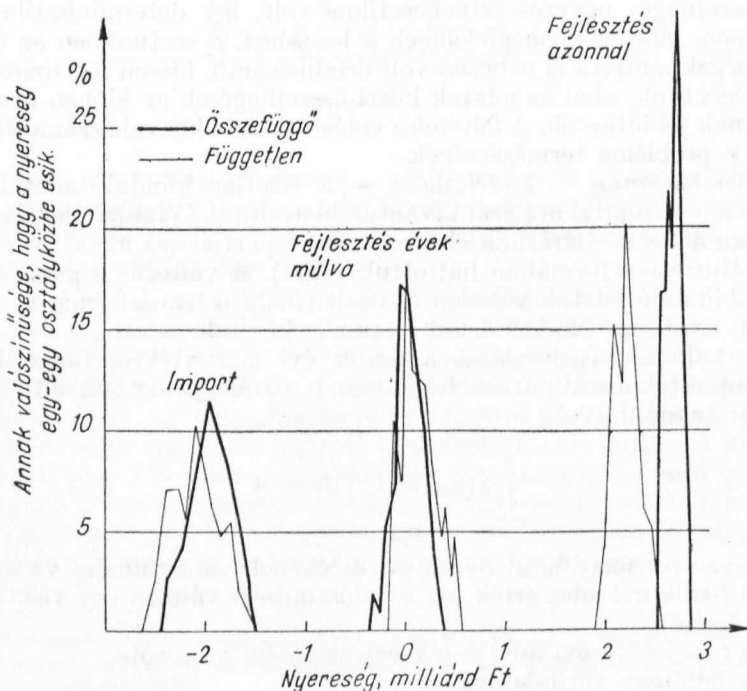
Integrálegyenletünk megoldása során jól hasznosíthatónak bizonyult a sűrűségfüggvények lineritására vonatkozó feltevezésünk. A sűrűségfüggvények szorzatát — a „háromszög”-csúcsok miatt szakaszonként — integrálva ugyanis harmadfokú függvényt kaptunk, transzformációs egyenletünk megoldása tehát egy harmadfokú egyenlet megoldását jelentette.

Számítási eredményeinket a 6. ábrán foglaljuk össze.

6. sz. ábr.

„Fedezeti” nyereség összefüggő- és független valószínűségi változók esetén

(Gyakorisági poligonok 60 000 Ft-os osztályközökkel)



Az ábra alapján úgy tűnik, hogy alternatíváink esetében nem okoznak alapvető változásokat a szintetikus gazdaságossági mutatók értékében a véletlen kiinduló adatok közti időbeli összefüggések.*

Befejező megjegyzések

Iparvállalataink többsége alig foglalkozik a bizonytalanság, a kockázat kérdéseivel. A döntéselőkészítésben gyakran ismeretlenek a témakör főbb megfontolásai, elvei és szempontjai is. Bemutatott gazdaságosság-számítási kísérletünk során például — elsősorban a módszertani kutatás indítékai alapján — meg kívántuk vizsgálni a fejlesztési alternatívák közti választás elhalasztásának gazdasági hatásait is. Célkitűzésünk az adott esetben reálisnak tűnt, mivel a szóban forgó fejlesztéssel kapcsolatosan két év múlva már kisebb volumenű gyártás megindulása volt várható, s feltehető volt, hogy a gyártás révén kapott információk jelentősen csökkenthetik az adatok bizonytalanságából fakadó döntési problémákat. Az illetékes szakemberek azonban (őszinte segítőkészségük ellenére) nem tudtak határozott véleményt kialakítani a pótlólagos információk várható hatásairól, nem tudták a számításokhoz szükséges információkat megadni. Ez okból vonatkozó terveinket el kellett vetnünk. Számos vállalatnál ennél egyszerűbb problémák megoldása is nehézségeket okoz és nem ritkán a kockázatelemzés igénye sem jelentkezik [1].

Az elmondottak miatt megemlíjtük, hogy a bemutatott szimulációs számítás számítógépi időigénye kicsi, egy iteráció (az összes szintetikus mutató egy-egy realizációjának meghatározása) 4—5 másodperc az Akadémia CDC 3300-as számítógépén. A modellépítés, a gépi program elkészítése, az elemzés egy fő mintegy két havi munkája. Így aligha vonható kétségbe, hogy sok milliós, olykor milliárdos fejlesztési tervek kidolgozásánál a hasonló — hasonló célú — számítások felhasználása indokolt lenne.

(Beérkezett: 1973. december 5.)

IRODALOM

1. BOTOS B.: A bizonytalanság figyelembevétele az iparvállalatok beruházási döntéseiben. Ipargazdasági Szemle, 1972. 3. sz.
2. HERTZ, D. B.: Risk Analysis in Capital Investments. Harvard Business Review, Jan—Febr. 1964. pp 95—106.
3. KRYZANOWSKI, L.—LUSZTIG, P.—SCHWAB, B.: Monte Carlo Simulation and Capital Expenditure Decisions — A Case Study. The Engineering Economist, Vol. 18. No. 1. (1972)
4. PAPANEK G.: Utilisation of the Monte Carlo Simulation in the Long-Range Planning of Industrial Enterprises. Tanulmány az Ökonometriai Társaság 1972. évi Európai Konferenciájára (Bp. 1972. szept.)
5. JU. A. SREJGYER (Szerk.): Monte Carlo módszerek. Budapest, 1965. Műszaki Könyvkiadó.

* Fenti megállapításunk — természetesen — a konkrét esetre vonatkozik és nem teszi feleslegessé a hasonló vizsgálatokat.

ESTIMATION OF UNCERTAINTY AND RISK IN DEVELOPMENT PLANNING

The article deals with the problems of uncertainty of economic plans and prognoses. The theme is set forth in a case study. A simulation calculation by the Monte Carlo method serves the analyses.

The decision under consideration emerged in a large industrial enterprise and is connected with the introduction of a new product. The estimates of the rentability of extending the product mix in question were uncertain. This was caused by the facts that future events cannot be seen well beforehand, the calculation schemes, applied for forecasting, operated with errors and available informations were inaccurate.

The authors have made an attempt to obtain information on the uncertainty of economic indices by simulation. They supposed that the probability distribution of data of calculations (i.e. random variables) can be given by „triangular” density functions. The algorithm produced numbers derived from these probability distributions; then the authors calculated synthetic economic indices from the „accidental” values for the period 1975—1985. With several repetitions of the calculation they could estimate the parameters of empirical distribution function of economic indices.

The results of the simulation showed that the rentability of the examined decision alternatives can be forecasted with major uncertainty only. Especially large deviations can come about among different calculation procedures. Therefore, in the authors' view, simulation can give essential information to economic leaders.

ОЦЕНКА НЕТОЧНОСТИ И РИСКА ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ РАЗВИТИЯ

Эта статья занимается проблемами неточности экономических планов и прогнозов. Авторы развешивают тему путем изложения очерка-события. В анализах помогает симуляционный расчет «Монте-Карло».

Необходимость решения, являющегося предметом изучения, возникла у одного крупного промышленного предприятия и связана с внедрением нового продукта. Неточность предварительных расчетов, связанная с рентабельностью вышеупомянутого расширения структуры продуктов, показали искажения расчетных схем, примененных в целях прогноза, неточности наличных информации и то, что будущие события не предвидимы. Авторы пытались получить информации о неточности показателей рентабельности путем симуляционного расчета. Они предполагали, что распределение вероятности исходных элементов расчета рентабельности (этих переменных вероятностей) задаваемое «треугольнообразной» функцией плотности вероятности. Алгоритм показал такие величины, которые произошли из этих распределений вероятности, потом он вычислял из этих «случайных» величин синтетические показатели рентабельности для периода 1975—95 годов. После многократного повторения расчетов можно было оценить параметры функции распределения опытов показателя рентабельности.

Результаты симуляционных расчетов показывали, что рентабельность исследованных альтернатив решения можно прогностизировать только со значительной неточностью. Особенно значительные различия получаются среди рекомендаций разных методов расчетов рентабельности. Поэтому показалось, что симуляционные расчеты могут дать важные информации экономическому управлению.

Az egészértékű programozás egy alkalmazási lehetősége a mezőgazdasági vállalatok tervezésében

A matematikai programozás alkalmazásának a gyakorlati tervezésben való széles körű elterjesztése megkívánja, hogy a valóságot mindinkább hűen kifejező modelleket dolgozzunk ki. A mezőgazdasági vállalatok tervezése során — a biológiai folyamatok, a természeti tényezők, a munka idényszerűsége, az ágazatok közötti sokoldalú komplex kapcsolatok, a föld korlátozott területe és minőségi differenciáltsága stb. következtében — különösen sok megoldandó probléma merül fel.

A mezőgazdasági gyakorlatban ez ideig leginkább a lineáris programozást alkalmazták, amelyet egyszerűen a

$$\max. \{p^* x \mid A x \leq b\}$$

és

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^* \in E_n^+$$

formában fogalmaztunk meg, ahol

x a termelési (szolgáltatási, piaci, pénzügyi stb.) tevékenységek vektora,

A technológiai mátrix,

b kapacitások vektora,

p^* a tevékenységek hatékonysági koefficienseinek (sor) vektora,

E_n^+ az n dimenziós Euklidészi-tér nem negatív vektorainak halmaza

Az így megfogalmazott lineáris programozási modellből nem következik ugyan, hogy a termelési kapacitások előre eleve meghatározottak, mégis a mezőgazdaságban a gyakorlati tervezési modelleket általában úgy építették fel, hogy a termelési kapacitásokat eleve meghatározottnak tekintették, s e feltételek mellett optimalizálták a termelési szerkezetet (a termelési, szolgáltatási, piaci és pénzügyi tevékenységeket). A lineáris programozási modellek ilyen formában történő alkalmazása különösen két szempontból bírálható [7].

Egyrészt különösen középtávú vagy távlati tervezés során nem tudhatjuk előre, hogy például a különböző gépekből (a különböző traktorokból, betakarítógépekből stb.) mennyi áll majd rendelkezésre a terv megvalósításának időpontjában. A meglevő gépek (és más állóeszközök) egy része ugyanis addigra elhasználdik, s mind az elhasználdott gépek amortizációs alapjából, mind a felhalmozott fejlesztési alapokból beruházásokra fordítható pénzeszközök felhasználásával gépek és más állóeszközök szerezhetők be. Nem volna célszerű már a tervezés kezdeti szakaszában a matematikai modell összeállítás előtt vagy azzal egyidejűleg eldönteni, hogy a felhalmozott pénzüsszegekből milyen géptípust, milyen mennyiségben szerezzünk be. Így ugyanis eleve egy

meghatározott — és egyáltalán nem biztos, hogy optimális — gépparkhoz optimalizálnánk a gazdálkodás szerkezetét.

A mezőgazdasági vállalatok nem azt kívánják a tervezőktől, hogy például az adott gépparkhoz optimalizálják a termelés szerkezetét (különösen távlati tervezés során), hanem azt, hogy készítsék el az optimális vállalatfejlesztési tervet. Tekintve, hogy a termelési szerkezet és a termelési források (például géppark) között kölcsönös összefüggés, egymásrahatás áll fenn, a feladat megoldása a termelési (szolgáltatási, piaci, pénzügyi tevékenységek) szerkezet* és a termelési források egyidejű, egymással kölcsönös összefüggésben történő optimalizálását igényli.

Másrészt az állóeszközökkel kapcsolatos költségek két részre bonthatók fel. A költségek egy része változó költség és függ (többé-kevésbé lineárisan) az adott állóeszköz felhasználásától, azaz lényegében a termelési tevékenységek méretétől, vagyis a termelési szerkezettől. (Például üzemanyag, kenőanyag, a javítási költség egy része.) E költségek egyszerűen ráterhelhetők a termelési tevékenységekre. A költségek másik része az úgynevezett állandó vagy fix költségek viszont akkor is felmerülnek, ha az adott eszközt egyáltalán nem használjuk (például amortizáció, a tárolóhely költségei, a javítási költségek egy része). E költségek tehát adott állóeszköz kapacitás esetén függetlenek a termelés szerkezetétől, adott időszakra (például egy évre) meghatározottak.

Ha a költségeket egységnyi termelésre vonatkoztatjuk, akkor azt látjuk, hogy a termeléssel arányosan változó költségek — éppen arányos változásuk miatt — egységnyi termelésre adottak, míg a fix költségek a termelés méretétől és szerkezetétől függenek. Az állóeszközök kihasználásának ismerete nélkül tehát az egységnyi termékre jutó fix költségeket nem ismerjük.**

A gyakorlatban általában azt az eljárást követik, hogy az állóeszközök fix költségeit az eszközök átlagos kihasználtságát feltételezve vetítik egységnyi termelésre vagy egységnyi munkavégzésre.

Az állóeszközök kihasználása azonban a termelési szerkezettől függ. Ha például adva van egy gép, amelynek évi amortizációs költsége 10 000 Ft és feltételezzük, hogy az adott gép 200 műszak munkát végez, akkor egy munkanapot 50 Ft amortizációs költség terhel. Ha azonban az optimumszámítások során olyan termelési szerkezetet kapunk, amely az adott gépre évi 150 vagy évi 250 műszak kihasználást biztosít, akkor valójában az egy munkanapra jutó amortizációs költség nem 50 Ft, hanem 66 Ft, illetve 40 Ft lesz. A modellben tehát a célfüggvény — 50 Ft amortizációs költséget számolva — nem reális, sőt nagyon félrevezető lehet.

A termelési tevékenységek, valamint a termelési források kölcsönös összefüggése a termelési szerkezet és a termelési források egyidejű, egymással kölcsönös összefüggésben történő optimalizálását teszi szükségessé. Ilyen modellt dolgozott ki és alkalmazott a gyakorlatban is több termelőszövetkezet komplex vállalatfejlesztési tervének kidolgozásában Dr. Tóth József, majd felvetette a modell továbbfejlesztésének, az egészértékű programozás alkalmazásának szükségességét [8]. E modellből kiindulva és felhasználva a modellt

* A továbbiakban a rövidség érdekében általában csak termelési tevékenységet vagy termelési szerkezetet írunk, de azt tágabb értelemben, szolgáltatási, piaci, pénzügyi tevékenységekre is értelmezzük.

** E helyen csak az állóeszközökkel kapcsolatos költségeket vizsgáljuk, mivel módszertani szempontból jelenleg csak ezek érdekesek számunkra. A közvetett költségek és általános költségek vizsgálatától tehát eltekintünk.

illusztráló egyszerű számadatokat a továbbiakban ismertetjük az egészértékű programozás alkalmazásának egy lehetőségét és eredményességét. Nem térünk ki az ott ismertetett és a gyakorlati alkalmazás során felmerülő problémák megoldására, csupán a modell vázlatos ismertetését tűzzük ki feladatul, rámutatva az alkalmazás eredményességére.

Vezessük be a következő jelöléseket:

- x az éves termelési (szolgáltatási, piaci, pénzügyi stb.) tevékenységek n_1 elemű vektora: j -edik eleme (x_j) a j -edik tevékenység szintjét ábrázolja.
- y a termelési források n_2 elemű vektora; h -adik eleme (y_h) megmutatja a h -adik termelési forrásból jelentkező szükségleteket.
- A^i technológiai mátrix, amelynek a_{hj}^i eleme megmutatja, hogy a j -edik termelési tevékenység egységének megvalósításához mennyi erőforrás szükséges a h -adik forrásból az i -edik figyelembe vett időszakban (illetve az i -edik számba vett minőségből). Megjegyezzük, hogy az igénybevétel idényszerűsége miatt pl. gépek esetében legalább havi időszakokra kell az évet bontani. A műtrágyafelhasználást pedig célszerű fajtanként vizsgálni stb.
- b^i a termelési források egységének kapacitása az i -edik időszakban. $\langle b^i \rangle$ a b^i vektorból képezett diagonálmátrix.
- f a tevékenységek fajlagos területigény vektora.
- F az összes rendelkezésre álló földterület.
- t a tevékenységekkel elérhető fajlagos termelési érték vagy árbevétel vektora.
- c a tevékenységeket közvetlenül terhelő és a tevékenységek mértékével arányos költségek fajlagosai.
- $p_1 = t - c$.
- p_2 a termelési források fix költségeinek a vektora.

Fenti szimbólumokat felhasználva modellünk a következőképpen fogalmazható meg:*

$$\max \{p_1^*x - p_2^*y \mid f^*x = F; -A^i x + b^i y \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ x \in E_{n_1}^+; y \in I_{n_2}^+\}$$

ahol $E_{n_1}^+$ az n_1 dimenziós euklidészi tér nem negatív ortánsa; az $I_{n_2}^+$ pedig az n_2 dimenziós euklidészi tér azon nem negatív vektorainak a halmaza, amelyeknek a koordinátái egész számok.

A lehetséges programok L halmazát tehát (x, y) vektorpárok alkotják. Olyan nem negatív (és y esetén egészértékű) vektorok, amelyek kielégítik a föld felhasználására vonatkozó $f^*x = F$ korlátot,** valamint minden egyes számba vett időszakban (illetve számba vett minőségre vonatkozóan) nem igényelnek több erőforrást, mint amennyit a beállított termelési források biztosítanak. Ezt fejezi ki az a k darab reláció, amit a feltételrendszerben definiáltunk.

* Az egészértékű programozásról bővebben lásd Krekó B.: Optimumszámítás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó Budapest, 1972. valamint az 1, 2, 3, 4, 5, 9 sorszám alatt felsorolt irodalmat.

** Ha nem ragaszkodunk a földterület teljes felhasználásához, akkor az $f^*x \leq F$ feltelt alkalmazzuk.

Általában nyugodtan feltehetjük, hogy az L halmaz nem üres és általában azt is, hogy korlátos; valamint, hogy $p_1^*x + p_2^*x$ korlátos az L halmazon.

A fentiek értelmében egy olyan vegyes egészértékű matematikai programozási modellel állunk szembe, amelyben az x vektorok komponensei (a termelési tevékenységek vektora) folytonos, az y vektor komponensei (a termelési források vektora — vagy a termelési források egy részét képező vektor —) egészértékű változók.

A modell gazdasági tartalmát a következőképpen foglalhatjuk össze röviden:

A modell változóit képezik mind a termelési (szolgáltatási, piaci, pénzügyi stb.) tevékenységek, mind pedig a termelési források. A változókat azonban két csoportra bontjuk, s az x vektor a termelési tevékenységeket, az y vektor pedig a termelési forrásokat jelöli, az előbbieket folytonos, az utóbbiakat pedig egészértékű változókként kezeljük. (Természetesen annak nincs akadálya, hogy a termelési tevékenységeket reprezentáló változók egy részét szintén egészértékű, illetve a termelési forrásokat reprezentáló változók egy részét (műtrágya, öntözővíz stb.) szintén folytonos változókként kezeljük. Többnyire azonban a forrás változóknál merül fel az egészértékűség követelménye (például: gépek, eszközök vagy dolgozók, amennyiben létszámuk változtatható.)

A modell mérlegfeltételeiben csupán azt írhatjuk elő, hogy a termelési források kapacitása nem lehet kevesebb, mint az irányukban felforruló szükséglet, de a kapacitásokat nem adjuk meg eleve, hanem azt a modell megoldása szolgáltatja.

A célfüggvény a jövedelem maximalizálását írja elő, azonban a termelési tevékenységekre csak a közvetlen költségeket (ideértve most az állóeszközökkel kapcsolatos, termeléssel arányosan változó költségeket is) terheljük, s a termelési források viselik fix költségeiket.* Ezzel megszabadultunk attól a feladattól, hogy a fix költségeket előre — mielőtt a termelési szerkezetet és a gépek kihasználását ismernénk — osszuk fel a különböző tevékenységek között, amit amúgy sem lehet reálisan megoldani. A fix költségeknek a termelési változókra való terhelése modellünkben a számítások elvégzése során folyamatosan oldódik meg [7, 8]. A továbbiakban egyszerű példa alapján mutatjuk meg az egészértékű programozás alkalmazásának eredményességét. Tegyük fel, hogy egy olyan termelőszövetkezet fejlesztési tervét kell elkészíteni, amely (a problémát leegyszerűsítve) 100 ha területtel rendelkezik, azon 4 féle terméket termelhet (eltekintethünk most a szolgáltatási, piaci, pénzügyi stb. tevékenységektől) és a termelésre kétféle termelési forrást, mondjuk kétféle gépet használnak. Tekintsünk el most a munkaerő, az anyagfelhasználás a talajtípusok, a gépek és eszközök részletes vizsgálatától, valamint a gépi munka felhasználásának részletesebb, legalább havi bontásában való vizsgálatától. Az egyszerűség kedvéért tehát csupán a földterületet, valamint két géptípus felhasználását kísérjük figyelemmel, s a gépi munkát csak két időszakra bontva vagy csak két csúcsideőszakban vesszük szemügyre.

Tételezzük fel, hogy az első terméket 1 hektáron termelve az első gép iránt az első időszakban 2, a második időszakban 4 műszakigény merül fel, a második gép iránt pedig az első időszakban 1, a második időszakban 3 műszakigény adódik. Ugyanezen sorrendben a gépi munka iránti igény a második termék 1 hektárjára 3, 2, 2, 1, a harmadik termék egy hektárjára 3, 1, 2, 2, a negyedik termék egy hektárjára pedig 2, 5, 2, 4.

* Az általános (igazgatási, szociális, kulturális) költségeket adottnak vesszük és a modellben általában nem szerepeltetjük, vagy külön változóval reprezentálhatjuk.

Tegyük fel még, hogy mindkét gép egy egysége az első időszakban 20, a második időszakban 30 műszak teljesítésére képes, s az első gépet évi 5000 Ft, a másodikat pedig évi 6000 Ft fix költség terheli.

A termékeket egy hektáron termelve a várható árbevétel legyen az első terméknél 2000, a másodiknál 1900, a harmadiknál 2100, a negyediknél pedig 2700 Ft. Sorrendben a termékeket terhelő változó költség 500, 600, 1100, 1000 Ft.

A fentiek alapján az árbevétel és a változó költség különbsége tehát

$$p^* = t^* - c^* = [1500, 1300, 1000, 1700]$$

Ha a feladatot folytonos lineáris programozással oldjuk meg a következő eredményt kapjuk.

Az	I. termékből termelendő	71,43 ha
A	II. termékből termelendő	28,57 ha
A	III. termékből termelendő	0 ha
A	IV. termékből termelendő	0 ha
Összesen:		100,00 ha

A gépszükséglet:

Az első gépből	11,43 db
A második gépből	8,10 db

A jövedelem 38 536 Ft, hiszen $71,43 \cdot 1500 + 28,57 \cdot 1300 - 11,43 \cdot 5000 - 8,1 \cdot 6000 = 38\,536$ Ft.

Ez a jövedelem azonban csak akkor lenne igaz, ha az első gépből 11,43 db, a másodikból 8,1 db állna rendelkezésre. Azonban 0,43 db vagy 0,1 db traktor nem lehetséges, a traktorlétszám csak egész értékkel adható meg. Ha a feltételeket szigorúan vesszük, akkor az első gépből 12 db, a másodikból pedig 9 db a szükséglet az adott termelési szerkezet esetén. A jövedelem pedig $71,43 \cdot 1500 + 28,57 \cdot 1300 - 12 \cdot 5000 - 9 \cdot 6000 = 30\,286$ Ft, vagyis a géplétszám felkerekítése jelentősen csökkenti a jövedelmet. Azzal a feltételezéssel is élhetünk, hogy a két gép — ha például két traktorról van szó — helyettesítheti egymást, ezért az első gépből 12 db-ot, a másodikból 8 db-ot véve adjuk meg a feladat megoldását. A jövedelem ekkor 36 286 Ft, vagyis még mindig jelentős a kerekítésből adódó jövedelemcsökkenés. De ez egyben hamis eredmény is, hiszen a változó költségeket az adott traktortípussal végzett munkára terveztük meg, s ha a munkák egy részét a másik traktortípussal végezzük más lesz a változó költség is. Különben is helyettesítési lehetőségünk csak esetenként adódik és nem helyettesíthető például traktor vetőgéppel vagy kombájnnal és viszont. A mezőgazdasági vállalatok igen sokféle géppel dolgoznak, s az egészértékre történő utólagos kerekítések nem vezethetnek eredményre.

Ha a feladatot megoldjuk az előbbieken megfogalmazott vegyes egészértékű modellel, akkor a következő eredményt kapjuk.

Az	I. termékből termelendő	40 ha
A	II. termékből termelendő	40 ha
A	III. termékből termelendő	0 ha
A	IV. termékből termelendő	20 ha
Összesen:		100 ha

A gépszükséglet:

Az első gépből	12 db
A második gépből	8 db

A jövedelem 38 000 Ft

Érdekes megfigyelni, hogy a géplétszám most is ugyanannyi, mint amikor utólag az első gépet 11,43 db-ról 12 db-ra, a másodikat 8,1 db-ról 8 db-ra kerekítettük (természetesen ez nincs mindig így), azonban a termelési szerkezet egészen más, és a jövedelem 36 286 Ft helyett 38 000 Ft, vagyis az egészértékű programozás alkalmazásával sokkal jobb — és egyben reális — eredményhez jutottunk. A jövedelem a folytonos modellhez képest az adott példában alig csökkent.

Modellünkben nem foglalkoztunk piaci, pénzügyi és egyéb korlátokkal, sem pedig a belső vállalati összefüggések vizsgálatával, amelyeket azonban a gyakorlati tervezés során mindig figyelembe kell venni.

Egyszerű példánk alapján is kitűnik, hogy a vegyes egészértékű modellek alkalmazása a mezőgazdasági vállalatok komplex tervének elkészítése során szükséges és eredményes. A gyakorlati célú vállalati modellekben természetesen sokféle tevékenység fordul elő, s ezek komplex kapcsolatát kell biztosítani, alkalmazkodva számos külső és belső feltételhez. A feladat azonban megoldható és az eddigi tapasztalatok azt bizonyítják, hogy modellünkkel gyakorlatilag is jól alkalmazható eredményes fejlesztési terv készíthető. A gyakorlati alkalmazás ismertetésére egy későbbi tanulmányban kerül sor.

(Beérkezett: 1973. december 8.)

IRODALOM

1. BOD P.: Bevezetés a gazdasági programozásba. Budapest, 1966. Tankönyvkiadó.
2. DANTZIG G. B.: On the significance of solving linear programming problems with some integer variables. *Econometrica*. 1960.
3. DANTZIG G. B.—FULKERSON D. R.—JOHNSON S. M.: Solution of a large scale traveling salesman problem. *JORSA* 1954. No. 2.
4. GOMORY R. E.: An algorithm for integer solutions to linear programs. Princeton — IBM Math. Res. Project. Techn. Rep. No. 1. 1958.
5. KRAJCSOVITS M.—LAMP T.—STAHL J.: Operációkutatás. Felsőfokú Technikumi Jegyzet. Budapest, 1965. Műszaki Könyvkiadó.
6. KREKÓ B.: Optimumszámítás. Budapest, 1972. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
7. TÓTH J.: A mezőgazdasági vállalatok tervezése célrealisztikus modell alapján. (Vezetés a mezőgazdaságban, az élelmiszeriparban, az erdőszet- és faiparban.) Budapest 1972. 2. sz.
8. TÓTH J.: A termelési tényezők felhasználásának optimalizálása a mezőgazdaságban. Budapest, 1973. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
9. VARGA J.: Gazdasági programozás. Budapest, 1966. Tankönyvkiadó.

A CASE FOR INTEGER PROGRAMMING IN AGRICULTURAL ENTERPRISE PLANNING

As mathematical programming is widespread in practical planning we have to elaborate models reflecting reality more and more faithfully.

So far in agricultural practice linear programming has been applied at most for elaborating complex enterprise plans. It can be formulated as follows:

$$\begin{aligned} \max \{p^* x \mid Ax \leq b\} \quad \text{and} \\ x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^* \in E_n^+ \end{aligned}$$

It does not follow from the linear programming problem formulated above, that production capacities are predetermined, still in agricultural practice the linear programming models have been built so that production capacities have been considered as predetermined.

On the one hand and especially in enterprise planning it is unknown how many machines and instruments will be available and the cumulated depreciation and development fund makes it possible to change machinery and other instruments. So it is not expedient to optimize production pattern for predetermined machine and instrument capacities.

On the other hand, costs, connected with fixed capital, can be divided into two groups: changing costs and fixed costs. As it is manifest from the simple problem above, it may be quite misleading to calculate fixed costs per unit of production, if the production pattern and the capacity demand of machines are unknown.

It is, however, expedient to optimize production pattern and production resources at the same time, depending on each other. In such a model it is necessary to treat resources (or part of them) as variables. The study introduces such a problem and illustrates its solution by a simple example, comparing the result with that of the model prescribing fixed capacities. In a further study the authors will publish the results of practical model computations.

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ПЛАНИРОВАНИИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Широкое распространение математического программирования в практике планирования требует, чтобы мы разработали модели, все более и более отражающие действительности.

До сих пор в сельском хозяйстве линейное программирование использовали для разработки комплексного плана предприятия и это имеется в следующей форме:

$$\begin{aligned} \max \{p^* x \mid Ax \leq b\} \\ x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^* \in E_n^+ \end{aligned}$$

Из задачи линейного программирования, составленной в вышеизложенной форме, не следует, что производственные мощности заранее определенные, но в сельскохозяйственной практике модели линейного программирования считали производственные мощности определенными.

С одной стороны, особенно при долгосрочном планировании, не знаем заранее, что сколько имеется разных машин и инструментов. Кроме того накопленный амортизационный фонд, а также фонд развития делают возможными изменение машинного парка и других инструментов. Следовательно не целесообразно оптимизировать структуру производства при определенных мощностях машин и инструментов.

С другой стороны расходы, связанные с основным фондом, можно разбить на две группы, постоянные расходы и переменные расходы. Постоянные расходы, приходящиеся на единицу мощности, прежде чем мы знали бы производственную структуру и на основе ее использования мощностей, могут привести к ложным результатам, как это выясняется на основе представленного простого примера.

Значит, целесообразно одновременно и совместно оптимизировать структуру производства и производственные мощности. Но при такой модели возникает необходимость, чтобы переменные мощности (или часть их) фигурировали как целочисленные переменные. Статья показывает формулирование задачи такого характера и простой пример иллюстрирует решение, сравнивая результат с результатом модели определенной мощности. В следующей статье показываем результаты расчетов на практических моделях.

Vállalati célok és vállalati viselkedés

Alábbiakban a vállalati gazdálkodás céljai és az adott célnak megfelelő optimális vállalati magatartás jellemző vonásai közötti kapcsolatot a vállalati viselkedés matematikai modelljei alapján vizsgáljuk. Célunk nem a matematikai modell kialakítása, hanem a közgazdasági elemzésben hagyományosan használatos, általános jellegű modellek alapján azt vizsgáljuk, hogyan viselkedik az adott célfüggvény szerinti optimumra törekvő vállalat.

A vállalati viselkedés jellemző vonásainak áttekintése mellett ily módon képet kaphatunk arról is, mennyire reális feltételezni, hogy egy vállalat következetesen az adott célfüggvény optimalizálására törekszik.

Három vállalati célfüggvényt vizsgálunk. Először áttekintjük a polgári közgazdaságtanban alapvető jelentőségű nyereség maximalizáló vállalati magatartást, majd a nyereség korlát mellett az árbevétel maximalizálására, végül pedig az eszközarányos nyereség maximalizálására törekvő vállalatot vizsgáljuk. A nyereség korlát mellett árbevételét maximalizáló vállalat minden olyan vállalat reprezentánsának tekinthető, amely egy bizonyos nyereségszintet biztosítani akar, de ezen túl már valamilyen más célt tart a legfontosabbnak, az eszközarányos nyereséget maximalizáló vállalat pedig a nem a nyereség volumenét, hanem annak valamilyen más mutatóra vetített értékét (fajlagos szintjét) maximalizáló vállalatokat is reprezentálja.

A vállalati modellben a célfüggvény kiválasztása mellett az erőforrás felhasználás és a termékkibocsátás közötti kapcsolatot kell modellezni. A közgazdasági elemzési gyakorlat erre a célra két — a valóságot ellenkező irányból közelítő — megoldást használ. (A gyakorlati célokra talán leginkább megfelelő szimulációs megközelítés nem ad lehetőséget általánosítható elméleti következtetésekre, hangsúlyozzuk azonban, hogy adott vállalat esetén valószínűleg ez a módszer ad legtöbb lehetőséget a modell eredményeinek a vállalati gazdálkodásban való hasznosítására.)

A lineáris modellek feltételezik, hogy valamennyi termelési eljárás rögzített erőforrás fajlagosokkal jellemezhető és a vállalat termelési lehetőségei véges számú termelési eljárásnak a rendelkezésre álló erőforrásmennyiség által lehetővé tett kombinációival írhatóak le. A másik — elméletitörténetileg korábbi — megközelítés nem különböztet meg termelési eljárásokat, hanem feltételezi, hogy az erőforrás felhasználás és a termékkibocsátás kapcsolata egy folytonos, differenciálható függvénnyel közelíthető.

A továbbiakban a különböző célfüggvények szerinti vállalati viselkedés jellemző vonásait mindkét modell alapján áttekintjük.

1. A nyereségmaximalizáló vállalat

A termelés és az erőforrás felhasználás kapcsolatát az

$$F(q, x) = 0$$

folytonos termelési függvény írja le, ahol q a termelés, x az erőforrás felhasználás vektora. (x tehát nem a rendelkezésre álló, hanem a ténylegesen felhasznált erőforrásmennyiségeket mutatja.)

Jelölje a q_i termék árát p_i , az x_j erőforrás árát pedig r_j .

A vállalat a $p'q - r'x$ nyereség maximalizálására törekszik, az $F(q, x) = 0$ feltétel mellett. A megfelelő Lagrange függvény:

$$p'q - r'x + \lambda F(q, x) \quad (1)$$

Jelöljük az $F(q, x)$ függvény q_i szerinti deriváltját F_i -vel, x_j szerinti deriváltját pedig F_{n+j} -vel.

F_i az i termék termelésének egységnyi növeléséhez szükséges erőforrás követelményt adja meg, F_{n+j} pedig a j erőforrás használatának egységnyi növelésével elérhető termelés növekményeket írja le. (Nem zártuk ki az ikertermékeket és az „iker” erőforrásokat, így ezek a deriváltak az ikertermék és iker erőforrás-növekményeket is megadják.)

Az optimális λ érték egy általánosított kapacitásnövekmény költségnek vagy alternatív módon egy általánosított termelés bevétel növekménynek tekinthető. (Az $r'x$, ill. $p'q$ érték változása az $F(q, x) = 0$ feltétel $F(q, x) = 1$ feltétellel való helyettesítése esetén.)

Ha a Lagrange függvénynek van maximuma, az optimális vállalati gazdálkodás a következőkkel jellemezhető:

— az i termék termelési szintjét az a pont határozza meg, ahol a költség-növekmény egyenlő az árral:

$$p_i = -\lambda F_i \quad (2)$$

— a j erőforrásból felhasznált mennyiség szintjét az a pont határozza meg, ahol a termelés (bevétel) növekmény egyenlő az erőforrás árával:

$$r_j = \lambda F_{n+j} \quad (3)$$

— az optimális termelési arányokat az jellemzi, hogy bármely két termék helyettesítési aránya megegyezik a megfelelő termékek árának arányával. (A helyettesítési arány a j termék termelésének egységnyi csökkentése esetében változatlan nyereséghez a k termékből szükséges mennyiséget mutatja):

$$-\frac{\partial q_k}{\partial q_j} = \frac{F_j}{F_k} = \frac{p_j}{p_k} \quad (4)$$

— Az erőforrás felhasználás optimális arányai azzal jellemezhetőek, hogy bármely két erőforrás helyettesítési aránya megegyezik áraik arányával:

$$-\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \frac{r_j}{r_k} \quad (5)$$

— Az optimális erőforrás felhasználás és termelés további jellemző vonása, hogy valamennyi erőforrás — termék pár esetén az egységnyi erőforrás növekményre jutó termelésnövekmény értéke megegyezik a megfelelő erőforrás árával

$$p_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = r_j \quad (6)$$

Ha a rögzített árak helyett az árakat a mennyiség függvényének tekintjük, fenti megállapításokban az árakat mindenütt a bevétel növekmény kifejezésével kell helyettesítenünk, közelítőleg azt is mondhatjuk, hogy változó árak esetén mindig az adott árak esetén kell fenti arányoknak teljesülniök. (Hangsúlyozzuk, hogy egyrészt az optimum nem feltétlenül létezik, másrészt fenti arányok minimuma esetén is teljesülnek, a nyereségmaximumot ezek az arányok ebben a modellben mindig jellemzik, de az arányok teljesülése nem biztosítja feltétlenül, hogy a nyereség maximális.)

Foglaljuk most össze az optimális termelési és erőforrás felhasználási szerkezet jellemzőit a

$$\begin{aligned} q &\geq 0 \\ Aq &\leq x \\ (p - c)'q - C &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (7)$$

nyereségmaximáló lineáris programozási modellben, ahol q_j jelöli a j tevékenység alkalmazásának mértékét, a_{ij} a j tevékenység egységnyi alkalmazása esetén az i erőforrásból szükséges mennyiséget, p_j a j tevékenység hozamát (árbevételét), c_j a j tevékenységhez kapcsolható változó költséget, C az állandó költségek összegét, x_i pedig az i erőforrásból rendelkezésre álló mennyiséget.

A linearitás miatt ebben a modellben természetesen nincs olyan termelési volumen, amely mellett az ár és a termelési költségek megegyeznek, így ha a rendelkezésre álló (vagy elérhető) erőforrások mennyiségét az előző modellhez hasonlóan továbbra is korlátlan nagyságúnak tekintenénk, a modellnek nem volna maximális nyereséget adó megoldása, miután a nyereség a termelés monoton növekvő függvénye.

A korlátozottan rendelkezésre álló erőforrások miatt viszont a modell az ilyen erőforrások használatáért az optimális duál megoldásból adódó járadékkal terheli meg az egyes tevékenységeket és az ilyen értelemben számított költségekre vonatkozóan már igaz lesz, hogy a termelési volument az a pont szabja meg, ahol az ár (bevételnövekmény) és a termelési költség megegyeznek.

$$p_j = c_j + u^* a_j \quad (8)$$

ahol u_i az i erőforráshoz tartozó optimális duális érték (járadék), amelynek értéke egyébként megegyezik az egységnyi erőforrás növekményre jutó nyereségnövekmény értékével.

Miután ebben a modellben az erőforrások ára (tényleges költség) szerepét az optimális megoldásból adódó duális értékek veszik át, az optimális erőforrás felhasználásra vonatkozóan triviálisan teljesül, hogy az erőforrás költség és az egységnyi erőforrás növekményre jutó nyereségnövekmény megegyeznek.

Az optimális termelési arányokra és erőforrás felhasználási arányokra vonatkozó összefüggésekkel kapcsolatosan szem előtt kell tartanunk, hogy ez a termelési modell a korlátozott erőforrás kapacitások és a rögzített erőforrás faj-

lagosok miatt, a helyettesítést nem mindig teszi lehetővé, de a helyettesítési arányokra vonatkozóan ebben a modellben triviálisan teljesülnek a folytonos termelési függvénnyel jellemzett modellből kapott összefüggések (ám míg abban a modellben a helyettesítés mindig realizálható, a lineáris programozási modellben ezt nem állíthatjuk):

$$-\frac{\partial q_k}{\partial q_j} = \frac{p_j - c_j}{p_k - c_k}, \quad (9)$$

$$-\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial u_k}, \quad (10)$$

$$(p_i - c_i) \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = u_j. \quad (11)$$

2. Az árbevétel maximalizáló vállalat

A polgári irodalomban Baumol [1] vizsgálta a nyereség helyett — egy bizonyos nyereség korlát mellett — az árbevétel maximalizálására törekvő vállalat viselkedését. Ez a célfüggvény tükrözi azt a tényt, hogy távlati célok érdekében, újabb piacok megszerzésére vagy a meglévő piacok megőrzésére törekvedve, kapacitásaik kihasználása érdekében a vállalatok sokszor átmenetileg veszteséges tevékenységeket is folytatnak. A progresszív nyereségadó, minden fajta bázisszemléletű jövedelemszabályozás, az eredmények tervesítése ugyancsak arra vezethet, hogy bizonyos nyereségértéken túl a vállalat már nem törekszik a nyereség további növelésére.

Jelölje N a vállalati nyereség korlátot. Az $F(q, x) = 0$ folytonos termelési függvénnyel közelítve a termelés—erőforrás kapcsolatot, az árbevételét az N nyereség korlát mellett maximalizáló vállalat optimális termelési és erőforrás felhasználási politikájának jellemzőit a

$$V = p'q + \mu_1 F(q, x) + \mu_2 (N - p'q + r'x) \quad (12)$$

Lagrange függvény megoldása adja.

A μ_1 szorzó optimális értéke ebben az esetben a kapacitás növekményre (és termelésnövekményre) jutó árbevételnövekményt adja meg, míg a μ_2 szorzó optimális értéke a nyereség korlát egységnyi változására jutó árbevétel változást adja meg.

μ_2 értéke 0 és $-\infty$ között változhat, ha $\mu_2 = 0$, a feladat ekvivalens a nyereség korlátozás nélküli árbevétel maximalizálási feladattal, míg ha $\mu_2 = -\infty$, a nyereség korlát megegyezik a maximálisan elérhető nyereséggel, így a feladat a nyereség maximalizálási feladattal lesz ekvivalens.

Az elsőrendű szélső érték feltételek a következők (a másodrendű feltételekkel ezúttal nem foglalkozunk):

$$p_i + \mu_1 F_i - \mu_2 p_i = 0 \quad (13)$$

$$\mu_1 F_{n+j} + r_j \mu_2 = 0 \quad (14)$$

$$F(q, x) = 0 \quad (15)$$

$$N = p'q - r'x \quad (16)$$

Miután bármely adott N esetén V maximum pontja megegyezik a

$$Z = \frac{V}{-\mu_2} - N = \left(1 - \frac{1}{\mu_2}\right) p'q - r'x - \frac{\mu_1}{\mu_2} F(q, x) \quad (17)$$

függvény maximum pontjával, a nyereség korlát melletti árbevétel maximalizálási feladatnak megfeleltethető egy olyan nyereségmaximalizálási feladat, amelyben valamennyi termék ára azonos százalékkal nagyobb. Az áremelés mértékét az eredeti feladatbeli nyereség korlát határozza meg: minél közelebb van a korlát a maximális nyereséghez, annál kisebb az árnövelés.

Az optimális politika a következőkkel jellemezhető:

— valamennyi termék esetén az optimális termelési szint mellett a költség-növekmény nagyobb, mint a termék ára, miután

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} F_1 = \left(1 - \frac{1}{\mu_2}\right) p_1 > p_1 \quad (18)$$

Osborne megmutatta [6], hogy a nyereség korlát melletti árbevétel maximalizálás esetén a vállalat egészére vonatkozó növekmény költség nagyobb lesz, mint a bevétel növekmény, így (18) ezen eredmény általánosításának tekinthető.

A költségfüggvények elméletében általános az a feltételezés, hogy a növekmény költségek — egy bizonyos termelési szint esetén — a termelési volumen növekvő függvényei. Ebben az esetben a nyereség korlát melletti árbevétel maximalizálásra törekvő vállalatban az egyes termékekből optimálisan termelt mennyiségek nagyobbak, mint a nyereség maximalizálás esetén termelendő mennyiségek. A termelési szint különbsége a nyereség korlát és a profit maximum különbségétől és a növekmény költség görbe meredekségétől függ. Minél nagyobb a maximális nyereség és a nyereség korlát különbsége, annál nagyobb lesz a növekmény költség és a bevétel növekmény hányadosa $\left(1 - \frac{1}{\mu_2}\right)$. E hányados adott szintje mellett a termelési szintek különbsége

a növekmény költség görbe meredekségétől függ, minél „laposabb” ez a görbe annál nagyobb mértékben lesz a nyereség korlát melletti árbevétel maximalizáló vállalat termelési szintje nagyobb a nyereség maximalizáló vállalat termelési szintjénél az adott termékből.

(13)-ból következik, hogy (9) továbbra is teljesül, így a nyereség maximalizáló vállalati politikának ez a szabálya árbevétel maximalizálás esetén változatlan marad.

Az erőforrás felhasználás mértékére vonatkozóan induljunk ki a (14)-ből adódó

$$r_j = - \frac{\mu_1}{\mu_2} F_{n+j} \quad (19)$$

összefüggésből. Miután $-\frac{\mu_1}{\mu_2}$ a (17) célfüggvényből adódó Lagrange szorzó,

és így értéke $\left(1 - \frac{1}{\mu_2}\right)$ -szerese a kapacitásnövekményre jutó nyereségnövekmény értékének, amilyen arányban valamennyi termék növekményköltsége

nagyobb a termék áránál, ugyanolyan arányban valamennyi erőforrás esetén a bevételnövekmény kisebb lesz, mint az erőforrás ára.

A termelési függvények elméletének általános feltevése, hogy egy bizonyos erőforrás alkalmazási szinttől kezdve az adott erőforrás növekményre jutó termelésnövekmény az erőforrás alkalmazás mértékének csökkenő függvénye. Ha mind a nyereségmaximumot, mind pedig az árbevétel maximumot biztosító optimális értékek ebbe az erőforrás felhasználási tartományba esnek — ami a másodrendű maximum feltételekből általában következik —, megállapíthatjuk, hogy a nyereség korlát mellett árbevétel maximalizálásra törekvő vállalat valamennyi erőforrást nagyobb mértékben alkalmazza, mint a nyereség maximalizáló vállalat. Az erőforrás alkalmazás különbsége a két célfüggvény esetén ismét a nyereség korlát és a nyereség maximum „közelségétől” valamint a termelés növekmény függvények meredekségétől függ. A bizonyítást az olvasóra bizzuk.

A nyereség és az árbevétel maximalizáló vállalat viselkedésének eltérését összefoglalóan azzal jellemezhetjük, hogy az árbevétel maximalizáló vállalat a termelési lehetőségeket nagyobb mértékben használja ki, mint a nyereség maximalizáló vállalat. Ez az alapvető eltérés tükröződik mind a nagyobb termelési szintben, mind pedig a nagyobb mértékű termelési tényező felhasználásban. A termék árak és növekmény költségek, valamint az erőforrás árak és bevétel növekmények arányai mindkét célfüggvény mellett valamennyi termék és erőforrás esetén azonosak lesznek, míg azonban ez az arány a nyereség maximalizáló vállalatban 1, az árbevétel maximalizáló vállalatban — ha a nyereség korlát effektív — 1-nél nagyobb lesz. Az egyes termékek termelésének és az egyes erőforrások felhasználásának különbsége a két célfüggvény esetén még egy további tényezőtől, a megfelelő növekmény költség és bevétel növekmény görbék meredekségétől függ.

Az erőforrás helyettesítés (5)-ben megfogalmazott szabálya (14)-ből következően árbevétel maximalizálás esetén is teljesül, ugyanakkor (6) már módosul, miután (13)-ból és (14)-ből

$$p_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = r_j \frac{\mu_2}{\mu_2 - 1} < r_j \quad (20)$$

árbevétel maximalizálás esetén valamennyi termék—erőforrás pár esetén az erőforrás növekményre jutó termelésnövekmény kisebb, mint az erőforrás ára. Ez a tény szintén tükrözi az árbevétel és nyereségmaximalizálás alapvető különbségét, a termelési lehetőségek kihasználási mértékében mutatkozó eltérést: árbevétel maximalizálás esetén a termelés és így az erőforrás felhasználás is nagyobb, mint a nyereség maximalizálásakor.

Fisher felvetette [3], hogy a nyereség korlát mellett árbevétel maximalizálás helyett sok esetben jobban kifejezi a vállalati gondolkodást az árbevétel korlát mellett nyereség maximalizáló célfüggvény. Lényegében véve azonos indokok magyarázhatják mindkét célfüggvény alkalmazását, utóbbi esetben a célfüggvényben kifejezésre jut az a tény is, hogy a távlati célok érdekében a jelen nyereség terhére a vállalat csak a feltétlenül szükségesnek ítélt áldozatokat hajlandó meghozni — tehát bizonyos árbevételi szint, piaci szerep elérés után már nem kívánja piaci részesedését veszteségek árán is fokozni. Az előző célfüggvény viszont azt a feltevést fejezi ki, hogy bizonyos nyereségszint biz-

tosítása után a vállalat már nem törekszik pillanatnyi nyereségének fokozására hanem jövőbeli piaci helyzetének erősítését helyezi előtérbe.

A két célfüggvény hasonlósága alapján várható, hogy a megfelelő optimális vállalati stratégiák is hasonló vonásokat mutatnak. A hasonlóság, amelyre Osborne már felhívta a figyelmet, azonnal észrevehető a megfelelő Lagrange függvényből:

$$W = p'q - r'x + v_1 F(q, x) + v_2 (S - p'q) \quad (21)$$

ahol S jelöli az árbevétel korlátot, v_1 és v_2 pedig a megfelelő Lagrange szorzókat. Nyilvánvaló, hogy W megegyezik V -vel, ha $-v_2 = \frac{1}{\mu_2}$. A q és x szerinti

parciális deriváltakból származtatott elsőrendű szélsőérték feltételek jellegükben teljesen megegyeznek a két célfüggvény esetén, így a belőlük származtatott optimum feltételek jellegükben ugyancsak azonosak lesznek. Ha S megegyezik V optimális értékével, a két optimális megoldás is azonos lesz (hasonló módon, ha (12)-ben N megegyezik W optimális értékével].

A két célfüggvény szerinti vállalati viselkedés jellemzői így teljesen azonosak, eltérést csak az okoz, hogy azt a szerepet, amelyet a nyereség korlát melletti árbevétel maximalizáláskor a nyereség maximum és a nyereség korlát különbsége játszik, az árbevétel korlát melletti nyereség maximalizáláskor az árbevétel korlát és a nyereség maximalizálásakor realizálható árbevétel különbsége veszi át

Osborne rámutatott arra, hogy a nyereség korlát melletti árbevétel maximalizálásra törekvő vállalat viselkedésének jellemző vonása, hogy az állandó költségek szintje ármeghatározó szerepet játszik. Osborne az árat tekinti a vállalati politika által meghatározott változónak, ha a termelési volument tekintjük ilyen változónak, az állandó költségek szintjének termelési volumen meghatározó szerepet tulajdoníthatunk. Mindez következik abból a tényből, hogy az állandó költségek változása megváltoztatja a vállalati nyereséget, tehát változásuk ugyanolyan hatású, mint a nyereség korlát változtatása: ha az állandó költségek nőnek, a nyereség korlát melletti árbevétel maximalizálásra törekvő vállalat növelni fogja termékei árait (vagy csökkenti a termelést, vagy megteszi mindkettőt, döntési lehetőségeinek megfelelően).

Az árbevétel korlát mellett nyereség maximalizálásra törekvő vállalat viselkedését az állandó költségek változása nem érinti. Vegyük azonban észre, hogy az ilyen vállalat termékei árának kívülről (akár hatósági, akár piaci úton) adódó változásaira reagál a termelési volumen változtatásával: csökkenti termelését, ha termékei árai nőnek és növeli, ha az árak csökkennek. A nyereség korlát mellett árbevétel maximalizálásra törekvő vállalat ellenkező módon reagál: egy termék árának növelésekor növeli annak termelését, míg az árcsökkenésre termeléscsökkenéssel reagál. Hangsúlyozzuk, hogy ezek a szabályok az adott célfüggvények merev elfogadásából következnek és csak abban a tartományban érvényesek, ahol a megfelelő nyereség, ill. árbevétel korlát az optimális megoldás esetén egyenlőség formájában teljesül. Éppen ezek a származtatott viselkedési szabályok utalnak arra, hogy nem célszerű egyetlen célfüggvényt sem a vállalati viselkedés mindenkor magyarázójának tekinteni, a valósághoz közelebb áll egy olyan feltételezés, hogy adott vállalat céljai különböző helyzetekben különböző célfüggvényekkel közelíthetők.

Vizsgáljuk most meg a nyereség korlát mellett árbevétel maximalizálására törekvő vállalat viselkedését a termelés lineáris programozási modelljében.

Könnyen belátható, hogy enben a modellben is minden ilyen feladatnak megfeleltethető egy árbevétel korlát melletti nyereség maximalizáló feladat. (Az ekvivalens feladatokban a megfelelő optimum értékek lesznek a korlátok.) Így a két célfüggvény szerinti optimális magatartás jellemzői azonosak és így elegendő az egyik változatot megvizsgálnunk. Tekintsük most az árbevétel korlát melletti nyereség maximalizálás feladatát. A (7) feladat ekkor a $p'q \geq S$ feltétellel bővül. A nyereség maximalizáló optimális programtól e feladat megoldása akkor tér el, ha a nyereség maximalizálásakor realizált árbevétel nem éri el az árbevétel korlátot. Triviálisan adódik, hogy ekkor a nyereségét árbevétel korlát mellett maximalizáló vállalatban a termelés nagyobb lesz, mint nyereség maximalizálásakor volna, pozitív árak mellett ugyanis csak akkor adódhat nagyobb árbevétel, ha legalább egy termék termelése nagyobb (bár egyes termékek termelése csökkenhet). A nagyobb árbevétel általában az erőforrások fokozottabb felhasználását is szükségessé teszi, a lineáris programozás modellből azonban ez nem szükségszerűen következik.

A (8) összefüggés ebben a modellben a

$$p_i = c_i + w'a_i + vp_i \quad (22)$$

formájában teljesül az optimálisan alkalmazandó tevékenységekre, ahol w az erőforrások új árnyékárainak vektora, míg v az árbevétel korláthoz tartozó optimális duális érték. Miután a vizsgált esetben (amikor az árbevétel korlát egyenlőség formájában teljesül), v negatív, az egyes tevékenységek korábbiak szerint definiált termelési költsége mindig nagyobb lesz, mint az általuk realizálható árbevétel:

$$p_j < c_j + w'a_j \quad (23)$$

(23) tekinthető így (18) megfelelőjének a termelés lineáris modelljében.

Miután a modellből adódó erőforrás költség és az erőforrás növekményre jutó nyereségnövekmény definíció szerint azonosak, a (19)-ben kifejezett összefüggés megfelelőjét csak az erőforrások összköltsége és összhozamuk közötti kapcsolatban mutathatjuk ki. A primál és duál célfüggvény egyenlőségéből következik a

$$(p - c)'q - vS = w'x \quad (24)$$

egyenlőség. Miután v negatív, látható, hogy az erőforrások árnyékárakon számított költségeinek összege ($w'x$) nagyobb az alkalmazásuk révén elért összes nyereségnél $(p - c)q$ -nál.

A termékek és erőforrások közötti helyettesítési arányokra vonatkozó összefüggések lényegében megegyeznek a nyereség maximalizáló modellből származtatott optimalitási szabályokkal.

Összefoglalva megállapítható, hogy a nyereség maximalizáló és a nyereség korlát melletti árbevétel maximalizáló optimális vállalati politika közötti különbségek alapvetően azonosnak adódnak, akár folytonos függvénnyel közelítjük a termelés—erőforrás kapcsolatot, akár lineáris programozási termelési modellből vezetjük le ezeket a különbségeket. Ha a maximalizálandó nyereség szerepét az árbevétel veszi át és a nyereség csak korlátként szerepel, az optimális vállalati politika a termelési lehetőségek nagyobb mértékű kihasználását követeli meg. Ez megmutatkozhat termelés növelésben, az erőforrás felhasználás fokozásában és mindenképpen jelentkezik a termelés és erőforrás felhasználás gazdaságosságát megítélő minimum követelményekben.

3. Az eszközarányos nyereséget maximalizáló vállalat

A polgári irodalomban Gabor és Pearce vetette fel [4], hogy a vállalati döntéseket nem a nyereség maximalizálására, hanem az egységnyi tőkebefektetésre jutó nyereség maximalizálására való törekvés vezérli. Azzal érvelnek, hogy nincs értelme a vállalati tevékenységet a maximális eszközarányos nyereséget biztosító szintnél tovább fokozni, hiszen a további tőkebefektetés nagyobb nyereséget biztosíthat, ha más tevékenységekbe (más vállalatba) fektetik be. Matematikai elemzés nélkül is érezhető, hogy egy ilyen célfüggvény a nyereség maximalizáló vállalati politikát éppen ellenkező irányba befolyásolja, mint az árbevétel maximalizálási törekvés, míg utóbbi esetben a vállalat átmeneti veszteségeket is vállal a termelési lehetőségek jobb kihasználása érdekében, az eszközarányos nyereséget maximalizáló vállalat nyereséget biztosító lehetőségekről is lemond, ha az rontja a tőkebefektetés hatékonyságát. Ebben a cikkben nem kívánunk állást foglalni egyetlen vállalati célfüggvény kizárólagos alkalmazása mellett sem, bizonyos esetekben azonban elfogadhatónak látszik Gábor és Pearce feltevése. Megjegyezzük, hogy a jelenlegi magyar jövedelemszabályozási rendszer a vállalati gazdálkodás fontos céljává teszi a jellegében az eszközarányos nyereség mutatójához hasonló, az eszközök és a bérszorzóval súlyozott bérek összegére jutó nyereségmutató maximalizálását. A következetesen az eszközarányos nyereség maximalizálására törekvő vállalati viselkedés optimalitási szabályainak elemzése minden képpen segíthet egy ilyen viselkedési kritérium realitásának megítélésében.

Jelölje a vállalati eszközállományt $E(q, x)$, tehát feltesszük, hogy a termelés és az erőforrás felhasználás határozza meg a tőkeigényt. Az eszközarányos nyereséget maximalizáló vállalati politika jellemzőit az

$$U! = \frac{p'q - r'x}{E(q, x)} + \pi F(x, q) \quad (25)$$

Lagrange függvény elsőrendű szélsőérték feltételeiből származtathatjuk.

Jelölje az $E(q, x)$ függvény q_i szerinti deriváltját E_i , x_j szerinti deriváltját E_{n+j} . A megfelelő szélsőérték feltételek így a következők lesznek:

$$\frac{p_i E(q, x) - E_i(p'q - r'x)}{E^2(q, x)} + \pi F_i = 0 \quad (26)$$

$$\frac{-r_j E(q, x) + E_{n+j}(p'q - r'x)}{E^2(q, x)} + \pi F_{n+j} = 0 \quad (27)$$

$$F(x, q) = 0 \quad (28)$$

(26)-ból következik, hogy

$$p_i = -E(q, x)\pi F_i + \frac{E_i}{E(q, x)}(p'q - r'x) \quad (29)$$

Miután bármely $E(q, x)$ értékre a $-E(q, x)\pi F_i$ érték az i termék növekményköltsége, következik, hogy ha az optimum környezetében az i termék eszközszükséglete a termelt mennyiség növekvő függvénye (ami a másodrendű

maximum feltételekből általában következik), a termék növekményköltsége kisebb, mint a termék ára. (29)

$$\frac{p_i + E(q, x)\pi F_i}{E_i} = \frac{p'q - r'x}{E(q, x)} \quad (30)$$

formában is írható, tehát a nyeresőgnövekmény és az eszköz-növekmény aránya valamennyi termék esetén megegyezik az átlagos nyereség-eszköz aránnyal. (30)-at Gábor és Pearce-nek a teljes termelésre vonatkozó hasonló eredménye általánosításának tekinthetjük. Másik eredményük, amely szerint az aggregált termelés növekményköltsége egyenlő az átlagköltséggel, ha a növekményköltség az eszköz-igény növekmény lineáris függvénye, szintén általánosítható minden egyes termékre.

Ha ismét a volumen függvényében növekvő növekményköltséget tételezünk fel, fenti eredményekből következik, hogy az eszközarányos nyereséget maximalizáló vállalat termelése valamennyi termékből kisebb lesz, mint a nyereség maximalizáló (és még inkább, mint az árbevétel maximalizáló) vállalaté. A termelési szint eltérés a növekményköltség függvények meredekségétől függ; minél meredekebben nő ez a függvény attól a ponttól kezdve, hogy értéke nagyobb az átlagköltség függvény értékénél, annál nagyobb a nyereség maximalizáló és az eszközarányos nyereséget maximalizáló termelési volumen eltérése. Ha a növekményköltség nem tekinthető az eszköz-igény lineáris függvényének, a megfelelő szabályozó szerepet a nyeresőgnövekmény és az eszköz-igény növekmény hányadosa játssza.

Vegyük még észre, hogy ez a termelési volumeneltérés az optimális eszközarányos nyereség értékének is növekvő függvénye, azaz, ha minden egyéb tényező változatlan, annál kisebb lesz a termelés, minél nagyobb a maximalizálendő mutató optimális értéke. Ez a körülmény fontos szerepet kaphat az eszközarányos nyereség maximalizálására törekvő vállalati magatartás realitásának megítélésében.

(26)-ból következik, hogy

$$-\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \frac{p_j + \frac{E_j}{E}(p'q - r'x)}{p_i + \frac{E_i}{E}(p'q - r'x)} \quad (31)$$

A termékek közötti helyettesítési arány így nem az árak, hanem az átlagos nyereség-eszköz arány alapján folyó költségre átszámított eszköz-igény növekményköltséggel csökkentett árak arányával egyezik meg, így csak abban az esetben lesz azonos a nyereség maximalizálásra és az árbevétel maximalizálásra jellemző aránnyal, ha a megfelelő termékek eszköz növekmény igénye megegyezik. Közelítőleg azt mondhatjuk, hogy meglevő kapacitásokon való termelés esetén ez a helyzet, bár az egyes termékek forgóeszköz igénye még ekkor is különböző lehet.

(27)-ből következik, hogy

$$r_j = E(q, x)\pi F_{n+j} - \frac{E_{n+j}}{E(q, x)}(p'q - r'x) \quad (32)$$

A j erőforrás növekményre jutó bevétel növekmény nagyobb, mint a megfelelő erőforrás ára, ha a kérdéses erőforrás alkalmazásának fokozása növeli az eszközigényt. Ebben az esetben, ha elfogadjuk, hogy az optimum környezetében az erőforrások hozadéka csökkenő, következik, hogy az eszközarányos nyereséget maximalizáló vállalat általában kisebb mértékben használja ki az erőforrásokat, mint a nyereség maximalizáló vállalat. Az erőforrás alkalmazás mértékében mutatkozó különbségek a bevétel növekmény függvények merekségétől, valamint az optimális eszközarányos nyereségszinttől függenek, hasonlóan a termelési szintbeli eltérésekhez.

Ugyancsak (27)-ből következik, hogy az erőforrások közti helyettesítési arány nem az erőforrás árak arányával, hanem a folyó költségre átszámított eszköznövekmény költség és az árak összegének arányával lesz egyenlő.

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \frac{r_j + \frac{E_{n+j}}{E} (p'q - r'x)}{r_k + \frac{E_{n+k}}{E} (p'q - r'x)} \quad (33)$$

(32)-ből megkaphatjuk újabb eszközök alkalmazásának a kritériumát is: az olyan erőforrások esetén, amelyek alkalmazása az eszközállomány azonos értékű növelését eredményezi $E_{n+j} = 1$. Újabb eszközöket tehát akkor alkalmaz az eszközarányos nyereség növelésére törekvő vállalat, ha az új eszközre jutó nyereség eléri az átlagos eszközarányos nyereség szintjét.

$$E(q, x)\pi F_{n+j} - r_j = \frac{p'q - r'x}{E(q, x)} \quad (34)$$

26)-ból és (27)-ből kapjuk, hogy

$$r_j = \frac{\partial q_i}{\partial x_j} p_i + \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \frac{E_i}{E(q, x)} (p'q - r'x) - \frac{E_{n+j}}{E(q, x)} (p'q - r'x) \quad (35)$$

A szokásos

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_j} > 0, E_i \geq 0, E_{n+j} \geq 0$$

feltevések mellett (35)-ből következik, hogy valamennyi erőforrás—termék pár esetén az erőforrás növekményre jutó termelés növekmény nagyobb, mint az erőforrás ára. Az eszközarányos nyereség maximalizálása megköveteli, hogy az újabb erőforrások hozama költségükön kívül fedezze az eszközszükséglet növekmény $-\frac{\partial q_i}{\partial x_j} E_i + E_{n+j}$ — költségeit is.

Újabb jele ez annak, hogy az eszközarányos nyereség maximalizálása magasabb követelményt támaszt a termelési lehetőségek kihasználásával kapcsolatban, mint a nyereség maximalizálás, és így a termelési lehetőségek kihasználása kisebb mértékű lesz az eszközarányos nyereségének maximalizálására törekvő vállalatban.

A termelés—erőforrás kapcsolat lineáris programozási modelljéből lényegében hasonló következtetések vonhatók le. Az eszközarányos nyereség maxima-

lizálása esetén a (7) programozási feladat feltételrendszere változatlan lesz, a célfüggvényt viszont a

$$\frac{(p-c)'q - C}{e'q + E} \rightarrow \max. \quad (36)$$

célfüggvény váltja fel.

Jelölje t a (7) feladat optimális duális megoldásának vektorát az $e'q \rightarrow \max$ célfüggvény mellett. Vezessük még be a $z_j = p_j - c_j - u'a_j$ és $y_j = c_j - t'a_j$ jelöléseket és legyen h_0 az eszközarányos nyereség optimális értéke. A (36) feladat egy megoldása optimális, ha a programban nem szereplő tevékenységekre (q_j -kre) teljesül, hogy

$$\frac{z_j}{y_j} \leq h_0, \quad \text{ha } y_j > 0,$$

$$\frac{z_j}{y_j} \geq h_0, \quad \text{ha } y_j < 0,$$

és

$$z_j < 0, \quad \text{ha } y_j = 0.$$

Miután a nyereség maximalizáló modellben az optimális megoldásban nem alkalmazandó tevékenységekre vonatkozóan $z_j < 0$, ha a két célfüggvény szerinti optimális megoldások nem azonosak, következik, hogy az eszközarányos nyereséget maximalizáló vállalat kevesebb eszközt használ, mint a nyereség maximalizáló vállalat. Ez általában azt is jelenti, hogy utóbbi vállalat termelési szintje és erőforrás felhasználása is nagyobb lesz, szükségszerűen azonban csak az eszközfelhasználás eltéréseben jelentkezik az eszközarányos nyereség maximalizálásának a termelési lehetőségek kisebb mértékű kihasználására vezető hatása.

Vegyük ugyanis észre, hogy az olyan tevékenységeket, amelyekhez pozitív z_i és pozitív y_i tartozik, a nyereség maximalizáló vállalat alkalmazni fogja, ugyanakkor az eszközarányos nyereség maximalizálása esetén nem kerülnek alkalmazásra. A pozitív y_j -ből viszont következik, hogy e tevékenységek alkalmazása nagyobb eszközmennyiség felhasználást jelent. Ugyanakkor az eszközarányos nyereség maximalizálására törekvő vállalat alkalmazni fogja azokat a nyereségmaximalizálás esetén nem alkalmazott, negatív z_j -vel rendelkező tevékenységeket, amelyekhez negatív, de z_j/h_0 -nál nagyobb y_j tartozik. Miután az ilyen tevékenységek alkalmazása a negatív y_j -ből következően csökkenti a felhasznált eszközök mennyiségét, megállapíthatjuk, hogy az eszközarányos nyereséget maximalizáló vállalat — ha a két optimális megoldás nem azonos — kevesebb eszközt alkalmaz, mintha a nyereség maximalizálása volna a célja.

A két optimális program eltérése részben az állandó költségek és az állandóan lekötött eszközállomány nagyságától függ — egyéb feltételek azonossága esetén az eltérés mértéke ezek nagyságával ellentétes irányban alakul —, részben pedig a z_j -vel, ill. y_j -vel definiált nyereségnövekmény és eszközigény növekmény arányok terén az egyes tevékenységek közötti különbség mértéke — amit a megfelelő függvények meredekségének feleltethetünk meg — játszik szerepet: minél nagyobbak ezek a különbségek, annál nagyobb mértékű lehet az eltérés. Így ha az A vállalat állandó költségeinek összege és állandóan lekötött eszközértéke nagyobb, mint B vállalaté, lesznek olyan beruházási lehetőségek, amelyeket A kihasznál, B viszont nem. Hasonlóan, ha az aktuális

eszközarányos nyereségszint A-ban kisebb, mint B-ben, A ki fog használni olyan beruházási lehetőségeket, amelyeket B elvet. A következetesen az eszközarányos nyereség maximalizálására törekvő vállalati magatartás ilyen jellemzői alapján úgy érezzük, hogy ha bizonyos helyzetekben jellemezhető is a vállalati gazdálkodás fő célja ezzel a célfüggvénnyel, nehezen elfogadható, hogy mindig ez a vállalati gazdálkodás alapvető célja.

Nem térünk itt ki részletesen az eszközarányos nyereséget maximalizáló vállalat viselkedésére vonatkozóan a megfelelő duális feladat optimális megoldása alapján levonható következtetésekre, miután [5] hasonló kérdésekkel foglalkozott.

Amint az várható, a megfelelő összefüggések a nyereség maximalizáló modellből levont következtetések ellenkező irányú módosulását mutatják, mint az árbevétel maximalizáló modellből következő szabályok. Így az erőforrások árnyékárainak figyelembevételével definiált termelési költségsszint valamennyi tevékenység esetén kisebb lesz, mint a tevékenység árbevétele — a különbség a lekötött eszközök utáni járadék —, az erőforrások összköltsége — ismét árnyékárakon mérve — kisebb, mint az alkalmazásuk révén elért összes nyereség.

Fentiekben azt vizsgáltuk, milyen jellemzői vannak a három vizsgált célfüggvény típus szerinti optimális vállalati magatartásnak. Hangsúlyozzuk, hogy a lehetséges eltéréseket emeltük ki, mindez távolról sem jelenti azt, hogy a három célfüggvény minden esetben eltérő viselkedéshez vezet. A termelési függvények, ill. az egyes tevékenységek technikai együtthatóinak ismerete nélkül nem dönthető el, létezik-e maximum az egyes célfüggvények mellett, azonos-e vagy nem a három optimális megoldás. Nem tértünk ki az optimum elégséges feltételeire, így bizonyítás nélkül jegyezzük meg, hogy ezekből sokszor következik, hogy a három célfüggvénytípus eltérő vállalati politikához vezet. Am éppen az így kialakuló vállalati magatartás egyes jellemzői irreálisakkal arra hívják fel a figyelmet, hogy a vállalat az adott helyzetben valószínűleg vagy más célfüggvény szerint viselkedik — tehát a vállalati célfüggvény nem tekinthető a körülményektől függetlennek —, vagy pedig nem teljesülnek az optimum létezésének elégséges feltételei, tehát például a termelési lehetőségek jobb kihasználása mindhárom célfüggvény szerint javulásra vezet.

Befejezésül ismét megjegyezzük, hogy nem törekedtünk az adott gazdasági környezet, jövedelemszabályozási rendszer stb. figyelembevételével a vállalati viselkedés alapvető céljait leginkább tükröző célfüggvény kialakítására, hanem az általánosítható célfüggvényváltozatok várható hatásainak bemutatása volt csak a célunk.

(Beérkezett: 1974. január 14.)

IRODALOM

1. BAUMOL: Business Behavior, Value and Growth, Harcourt, 1967. Brace World.
2. BROWN-RAVENKAR: A Generalized Theory of the Firm: an Integration of the Sales and Profit Maximization Hypotheses. Kyklos, 1971.
3. FISHER: Review of Baumol's Business Behavior, Value and Growth. JPE, 1959.
4. GABOR and PEARCE: A New Approach to the Theory of the Firm. OEP, 1952.
5. KOVÁCS Á.: Az $\frac{N}{sB + E}$ mutató szerinti optimalizálás egyes kérdései. SZIGMA, 1972. 4. sz.
6. OSBORNE: On the Goals of the Firm. QJE, Nov. 1964.

ENTERPRISE GOALS AND ENTERPRISE BEHAVIOUR

We examine the characteristic features of enterprise management in the case of three basic enterprise objective functions — maximization of profit, maximization of sales with a profit-constraint and maximization of the rate of profit on assets. The optimal production pattern and resource allocation are shown on the example of two different kinds of modelling the connection between resource allocation and output. We describe this connection by a continuous production function on the one hand, and by a linear production model (fixed resource-specifities, production steps of finite number) on the other hand. We prove that — compared to the profit maximizing enterprise, — the sales maximizing enterprise is characterized in both models by utilizing the production possibilities in a greater extent. In the case of the optimal production level the increment of costs is higher than the price of the product, the increment of the income, falling to the individual resources is lower than the price of the resources, and at the same time the proportion of the prices of the products and the costs of increment as well as that of the prices of the resource and the increments of the income are equal in the case of each product and resource. The behaviour of the enterprise, striving to maximize profit rate on assets, is characterized by the fact that compared to the enterprise, maximizing income, the former makes a better use of the possibilities of production, in each case of the optimal production level the increment of costs of the individual products is lower than the price of the product, yet the increment of the income, falling to the increment of the resources, is higher than the price of the corresponding resources.

The individual objective functions may lead to an enterprise policy which proves in an indirect way that the enterprise does not aim at the maximization of a given objective function in each case.

ЦЕЛИ И ПОВЕДЕНИЕ ПРЕДПРИЯТИЯ

Мы изучаем характерные черты экономики предприятия в случае трех основных целевых функций — максимализации прибыли, максимализации дохода при ограничении прибыли и максимализации дохода. Оптимальная политика производства и использования ресурсов изучаются с помощью двух разных моделирований связи между производством продукта и использованием ресурсов. Мы описываем эту связь, с одной стороны, непрерывной производственной функцией, а с другой стороны линейной моделью производства (зафиксированные удельные веса ресурсов, производственный метод конечной величины). Мы доказываем, что по сравнению с предприятием, максимизирующим прибыль, предприятие, максимизирующее доход, характеризуется в обеих моделях тем, что оно пользуется возможностями производства в большей мере. При оптимальном уровне производства приращение расходов больше цены продукта; приращение дохода, относящегося к отдельным ресурсам меньше, чем цена ресурсов и в то же время пропорции цен продуктов и расходы приращения, так же как цен ресурсов и приращений доходов равнозначны, в случае всех продуктов и ресурсов. А поведение предприятия, стремящегося к максимализации прибыли, характеризует, что по сравнению с предприятием, максимизирующим прибыль, оно употребляет возможности производства в меньшей мере. При оптимальном производственном уровне расходы приращения отдельных продуктов меньше, чем цена продукта, а приращение доходов, приходящееся на приращение ресурсов больше цены соответствующих ресурсов.

Отдельные целевые функции могут приводить к такой политике предприятия, которая косвенно доказывает, что предприятие не стремится в каждом случае к максимализации данной целевой функции.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

GÁCS PÉTER

Próbálgatással megoldható feladatokról

Bevezetés

Van néhány feladat az operációkutatásban (kombinatorikában, algebrában, topológiában és a logikában), melynek már régen keresik megoldási algoritmusát, de egyik eddig javasolt eljárás se működik nagyságrendekkel gyorsabban, mint az összes lehetőségek végigpróbálgatása. Operációkutatók számára legismertebb ezek közül az általános egészértékű programozási feladat. Kisebb jelentőségű, de népszerű az utazó ügynök problémája, a „hátizsák” probléma, és még néhány rokon feladat. Egyes kutatókban felmerülhetett már a *gyanú*, hogy a feladatot, mellyel foglalkoznak talán nem is lehet lényegesen kevesebb lépésben megoldani. *Ilyen jellegű állítások bizonyításához — látszólag — még teljesen hiányoznak az eszközeink.* Az utóbbi egy-két év igen érdekes fejleménye, hogy kiderült: egyszerű kombinatorikus eszközökkel sok híres feladatról olyasmit állapíthatunk meg, ami valamennyire *helyettesíti* és ugyanakkor erősen valószínűsíti azt a kijelentést, hogy nincs rövid megoldó algoritmus.

Az összes szóban forgó feladat ugyanis egy jól definiálható viszonylag tág feladatcsaládba tartozik. Mármost

sok, egészen egyszerű feladatról kiderült, hogy ezen a családon belül univerzális, a család minden feladata őrá visszavezethető, és így ő ezek között a lehető legnehezebben oldható meg.

Ismertető cikkünk első két részében meghatározzuk a szóban forgó feladatcsaládot. A 3. részben a visszavezethetőség és az univerzális fogalmait definiáljuk, a 4. részben megmutatjuk, hogy *van* univerzális feladat, végül az 5. részben példákon mutatjuk be, hogyan lehet egy feladatról bebizonyítani, hogy ő univerzális. A Függelék a technikai részletek iránt érdeklődő olvasóknak kiegészítő információkat ad.

A közölt eredményeket az USA-ban Cook [2] és Karp [1], a Szovjetunióban tőlük függetlenül L. A. Levin [3] érte el.

1. Egy példa

Egy példa elemzésén keresztül jutunk el az általános definícióhoz.

1. *Példa:* Az utazó ügynök problémája.

Adva van

(i) egy n pontból álló halmaz, V , (a városok), és

(ii) a V -beli p_1, p_2 pontpárok közül bizonyosakat összekötő irányítatlan $\{p_1, p_2\}$ élek (útvonalak) A halmaza. V és A meghatároz egy G gráfot.

(iii) minden $a \in A$ útvonalnak van egy $t(a)$ költsége, ahol $t(a)$ nemnegatív valós szám.

(iv) Adott még egy c valós szám, az utazásra számítható összeg felső határa.

Az ügynöknek be kell járnia minden várost úgy, hogy az egész utazás költsége minél kisebb legyen. Ezzel kapcsolatban négy lehetséges matematikai feladat vetődik fel.

I.a) Megvalósítható-e az utazás *c-nél kisebb* költséggel?

I.b) Találjunk egy ilyen útitervet.

II.a) Mennyi az utazás *minimális* költsége?

II.b) Találjunk egy legolcsóbb útitervet.

1. Első észrevételünk, hogy a feladat még nincs pontosan definiálva. Miután mi igazi számolási eljárásokat készülünk vizsgálni, mégpedig elsősorban a végzendő elemi (aritmetikai) műveletek száma szempontjából, adataink nem lehetnek tetszőleges valós számok, csak olyanok, amelyek korlátozott terjedelmű adatmennyiséggel vannak megadva. Megelégedhetünk most a következő definícióval.

1. *Definíció:* k hosszúságú valós számnak nevezzük a kettes számrendszerben $\pm a_1 a_2 \dots a_i, a_{i+1} \dots a_k$ „kettedestört” alakban felírható számokat ($a_j = 0$ vagy 1). A feladatot úgy kell pontosítani, hogy $t(a)$ -ról és c -ről felteesszük, hogy k hosszúságú valós számok, ahol k egy adott természetes szám.

2. Második észrevételünk is a valós számok hosszúságára vonatkozik. Ha azt akarjuk vizsgálni, hogy a szükséges megoldó algoritmus hosszúságán hogyan tükröződik e speciális feladat természete, akkor meg kell akadályoznunk, hogy a szükséges műveletszám nagyságrendekkel növekedhessen egy triviális ok, az adatokban szereplő valós számok irtózatossága miatt. Tegyük ezért, például, még a következő kikötést

(v) $t(a)$, c legfeljebb n hosszúságú valós számok.

3. Egy G gráf sincs nyilván azonnal „gépre vihető” formában megadva, de itt a kódolás lehetősége triviális. Mindenesetre, hogy a feladatot formálisan kezelni tudjuk, feltesszük, hogy adva van

(vi) egy kódolás, melynek segítségével feladatunk összes adata egyetlen, 0-kból és 1-esekből álló sorozattal (bináris sorozattal) írható fel.

2. *Definíció:* Egy feladat adatai *terjedelmének* az őket kódoló bináris sorozat hosszát nevezzük.

Könnyű látni, hogy az utazó ügynök problémájában G -t egy n^2 hosszúságú, $t(a)$ -t egy $n^2 \cdot n = n^3$, c -t egy n hosszúságú, és így az összes adatot egy legfeljebb $2n^3$ hosszúságú bináris sorozattal kódolhatjuk, $2n^3$ tehát az adatok terjedelme.

4. Ennek a feladatnak van egy kézenfekvő megoldási eljárása — a próbálgatás. A négy feltett kérdés közül bármelyikre válaszolni tudunk akkor, ha végignézzük az összes szóban forgó útvonalakat és kiválasztjuk a legkisebb költségűt.

Nyilvánvaló, hogy elég olyan útvonalakra szorítkozni, melyeknek hosszúsága legfeljebb n^2 , de az is megmutatható, hogyha van egy útvonal, mely minden pontot bejár, és költsége c -nél kisebb, akkor van legfeljebb $2n$ hosszúságú ilyen útvonal is.

Próbálgatási eljárásunk tehát a következő lehet. Valamilyen rendszer szerint sorra vesszük az összes $2n$ hosszúságú útvonalat, és kiválasztjuk közülük azt, amely (A): minden ponton keresztülmegy és (B): minimális költségű.

Legyen az összes $2n$ hosszúságú vonalak halmaza U . Akkor U elemszáma, $|U| = n^{2n} = 2^{2n \log n}$. Az egyes útvonalak sorravétele és költségük kiszámítása egyenként legfeljebb konst. n^2 lépést vesz igénybe. Ezért az egész eljárás

munkaigényének nagyságrendje $n^2 \cdot 2^{2n \log n}$ lépés. Ez már egészen kis n -ek esetén is csillagászati szám. A próbálgatáson persze még sokat lehet racionalizálni, de a lényegen, az *exponenciális* nagyságrendű lépésszámon így nem változtathatunk. Exponenciálisnál sokkal kevesebb lépésben dolgozó eljárást erre a feladatra, és még sok távoli rokonára, nem ismer a tudomány. Az összes feladatnál, amiről a továbbiakban szó lesz, ez a tét: exponenciális vagy jóval kisebb lépésszám. Ilyen lépték mellett érthető a következő definíció.

3. *Definíció:* Egy feladat *könnyen megoldható*, ha van egy k konstans és egy eljárás, amely, ha az adatok terjedelme n , a megoldást n^k lépés alatt szolgáltatja. Az ilyen algoritmust néha *jónak*, ill. *hatékony* is nevezzük. (Exponenciálshoz képest az n -hatvány mennyiségű lépésszám valóban gyerekjáték!)

Ha $f(n)$ és $g(n)$ nemnegatív függvények, akkor írjuk:

$$f \lesssim g$$

(g *majorálja* f -et), ha van egy olyan k , hogy minden elég nagy n -re

$$f(n) \leq (g(n) + 1)^k$$

(Rendezésünk ugyanazt a hozzáállást tükrözi: Hatvány nagyságrendű különbségektől eltekintünk.) $f \approx g$ (f *ekvivalens* g -vel), ha $f \lesssim g$ és $g \lesssim f$.

5. Ha $n-k$ hatvány nagyságrendű különbségektől eltekintünk, akkor az I.a) és II.a) feladatok ekvivalensek egymással. Ugyanez vonatkozik a b) jelű feladatokra is.

Nyilvánvaló ugyanis, hogy a II. jelű feladatok többet kívánnak. Viszont az I. feladatokat n -szer egymás után megoldva, mindig feleakkora intervallumba szoríthatjuk a keresett minimum értékét. Így a II. feladatok követelte lépésszám csak n -szerese az I. feladatokhoz szükségesnek, ami jelenlegi álláspontunkon elhanyagolható különbség.

A feladatok I. formája alkalmasabb az általánosításra, ezentúl csak erről lesz szó.

Megjegyzés: Eddig arra építettünk, hogy az olvasónak van intuitív elképzelése arról, mi egy számítási eljárás, és egy-egy konkrét eljárásnál mi lehet az adatok terjedelme, a lépésszám és a memóriaigény. A következőkben még pontosítani fogjuk ugyan ezeket a fogalmakat, de formális definíciók csak a Függelékben találhatók.

Most arra hívjuk fel a figyelmet, hogy ha korábban nem is lett volna jogos egy eljárás megvalósításához szükséges $f(n)$ „lépésszámról” beszélni (annyira függ ez attól, milyen gép áll rendelkezésünkre, és mi számít egy lépésnek), a 3. Definícióban bevezetett ekvivalencia erejéig már minden józanul definiált lépésszám megegyezik.

Lépésszámról mindig csak egy *eljárás* (algoritmus) kapcsán lehet szó. Ha néha egy feladat megoldásához szükséges lépésszámról beszélünk, ez sohase érthető szó szerint; az összefüggésből kell kiderülnie, mit mondunk a lehetséges megoldó eljárások lépésszámáról.

2. Kereső feladatok

Az Ia—b) feladatok lényegét így foglalhatjuk össze:

- (i) Minden adott n -re egy n^3 terjedelmű x adatösszesség adja a feladat felteteleit. (x egy bináris sorozat, mely G -t $t(a)$ -t és c -t kódolja.)

- (ii) Minden x feltétel meghatároz egy U véges halmazt (a $2n$ hosszú útvonalak halmazát), melynek minden elemét egy n^2 hosszúságú y bináris sorozattal kódolhatjuk. U neve: *a szóba jövő megoldások halmaza*.
- (iii) Az U halmaznak adva van egy A_x részhalmaza, azon útvonalak, melyek minden várost érintenek, és összköltségük legfeljebb c .

Számunkra az A_x halmaz leglényegesebb tulajdonsága a következő: minden $u \in U$ -ra könnyen eldönthető (egy n^2 lépésben dolgozó eljárással), benne van-e A_x -ben vagy sem? Ha kezünkben van egy útvonal, akkor könnyű eldönteni, megfelel-e vagy nem? A probléma csak az, hogyan lehetne *találni* egy megfelelő útvonalat, viszonylag kevés számolás árán? A_x neve: *a megoldások halmaza*.

Az U halmazra formálisan nincs szükség, (ii)' és (iii)' helyett egyszerűbben így fogalmazhatunk.

- (ii) Minden x feltételhez tartozik az n^2 hosszúságú bináris sorozatoknak egy A_x részhalmaza:

$A_x = \{y \mid y \text{ egy } u \text{ utat kódol, mely minden } V\text{-beli ponton keresztülmegy és összköltsége legfeljebb } c\}$,

és van egy *eljárás*, mely minden x -re és y -ra *könnyen eldönti* (n^2 lépés alatt), igaz-e $y \in A_x$?

Az I.a) feladat mármost annak *eldöntését* követeli, hogy az A_x halmaz *üres-e*? Az I.b) feladatot akkor oldjuk meg, ha találunk egy $y \in A_x$ -et.

Az utazó ügynök problémájának számunkra fontos vonása tehát a következő.

Egy véges halmazban bizonyos tulajdonsággal rendelkező elemet keresünk. A halmaz minden eleméről könnyű eldönteni, rendelkezik-e az adott tulajdonsággal, de a halmaz elemszáma túl nagy ahhoz, hogy a végigpróbálgatás eljárásával megelégedhetnénk.

Ennyi előkészítés után áttérhetünk a formális definíciókra.

4. *Definíció:* Legyen $\mathfrak{D} = \{0, 1\}$, $\mathfrak{D}^n$ az n hosszúságú bináris sorozatok halmaza, $\mathfrak{D}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}^n$ az összes véges bináris sorozatok halmaza.

Egy $\mathcal{A}$ *kereső feladat* a következőkkel van adva.

- (i) Egy k szám.
- (ii) Minden n -re, $x \in \mathfrak{D}^n$ -re egy $A_x \subset \mathfrak{D}^{n^k}$ halmaz, az x feltétel melletti megoldások halmaza.
- (iii) Egy *eljárás*, mely minden n -re, $x \in \mathfrak{D}^n$ -re és $y \in \mathfrak{D}^{n^k}$ -ra legfeljebb n^k lépésben eldönti az $y \in A_x$? kérdést.

Egy eljárás az $\mathcal{A}$ feladat *krázimegoldását* adja, ha minden x -re eldönti, A_x üres vagy nem.

Egy eljárás az $\mathcal{A}$ feladat *megoldását* adja, ha kiszámol egy $f(x)$ függvényt, melyre

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } A_x = \emptyset \\ A_x \text{ egy eleme,} & \text{ha } A_x \neq \emptyset \end{cases}$$

(Azaz minden x -hez *talál* egy x feltétel melletti megoldást, illetve közli, ha ilyen nincs.)

Rengeteg példa győz meg minket arról, milyen széles feladatosztályt definiáltunk.

Példák:

2.a) A lineáris programozás feladata lényegében a valós lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldásának feladatát jelenti.

Adott egy $n \times n$ -es A mátrix és egy n hosszú b vektor.

Keresendő olyan x n hosszú vektor, melyre

$$Ax \leq b.$$

Ha A , b n hosszú valós számokból áll, akkor, ha van megoldás, van n^2 hosszú megoldás is. Úgy pontosíthatjuk tehát a feladatot, hogy keresendő egy x , n^2 hosszú valós számokból álló vektor, mely az egyenlőtlenséget kielégíti.

A lineáris programozás feladatára sok olyan algoritmus van, ami a gyakorlatban jól működik (pl. a szimplex módszer), de egyes patológikus ellenpéldákon exponenciális lépésszámot követel (Klee mutatott ilyet). Mégis, az az általános vélemény, hogy előbb-utóbb lesz minden esetre kiterjedő „jó” (a 3. Definíció értelmében) algoritmus.

b) Az *integer programozás* feladata csak annyiban tér el az előbbitől, hogy A , b , x -től megköveteljük: egész számok legyenek. Erre már „gyakorlatilag jó” algoritmust sem ismer az irodalom.

Az *integer programozás* feladatának vannak nagyon speciális esetei is, amelyek nehezeknek bizonyultak, de olyanok is, amik fontosak, és jó algoritmus is van rájuk. Nehéz speciális eset a

3. Hátizsák probléma

Adott a_i ($i \leq n$), és b n hosszú egész számok. Keresendő a_i -knek egy olyan $\{a_i | i \in I\}$ részhalmaza, amelyre

$$\sum_{i \in I} a_i = b$$

Könnyű, (de nem triviális) algoritmus ismeretes a következő, ugyancsak kereső típusú feladat megoldására.

4. Hozzárendelési probléma (A „szállítási probléma” speciális esete)

Adottak az A és B n elemű halmazok. A bizonyos pontjaiból élek vezetnek B bizonyos pontjaiba. Feleltessük meg A minden a pontjának B egy *vele összekötött*, $\varphi(a)$ pontját úgy, hogy ha $a_1 \neq a_2$, akkor $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$.

5. Prímszámprobléma

A számelméletben régóta nehéznek ismert feladat: eldönteni egy számról, prímszám-e? Itt a következő kereső feladról van szó:

Adott egy n hosszú egész szám. Keressük ennek egy nemtriviális osztóját. További példákat még a kifejtés során említünk, mások [1]-ben találhatók.

3. A visszavezethetőség fogalma

Gyakran úgy sikerül egy feladatra hatékony megoldási eljárást találni, hogy visszavezetjük egy másik, ismert feladatra, amelyre már van algoritmusunk. Az ilyen visszavezetések mindennaposak, hosszúságuk különösebb magyarázat nélkül nyilvánvaló.

De a visszavezetéseknek más funkciója is lehet. Ha egy gráfelméleti problémáról kiderül, hogy megoldása egyben a híres „négyzínsejtés” megoldását is jelentené, (tehát ha őrá sikerül a négyzínsejtést „visszavezetni”), akkor ez fontos információ a probléma nehézségéről. A kétféle visszavezetés között csak abban van a különbség, *mire használjuk őket?* Bemutatunk egy egyszerű példát a visszavezetések utóbbi típusára, mely az átlag alkalmazó matematikus számára szokatlanabb lehet.

6. Példa

A pontos fedés problémája és visszavezetése a hátizsák problémára.

Adott egy n elemű halmaz, H , és részhalmazainak egy $S_i (i \leq k)$ rendszere ($k \leq n$).

Válasszunk ki ebből egy olyan $\{S_i | i \in I\}$ részrendszert, mely H -nak egy *partícióját* adja (azaz $\bigcup_{i \in I} S_i = H$, és $i, j \in I, i \neq j$ esetén $S_i \cap S_j = \emptyset$), illetve állapítsuk meg, ilyen rendszer kiválasztható-e?

Ez egy elég általános, kereső típusú kombinatorikai feladat, melynek a „hozzárendelési probléma” pl. egyszerű speciális esete. Erős alapunk van feltelezni, hogy ezt a feladatot „nehéz” megoldani. (L. az 5. részt.) Ezért nem haszontalan a következő gondolatmenet, amellyel megmutatjuk, hogy a feladat visszavezethető a hátizsák problémára; hiszen így kiderül, hogy utóbbi is legalább annyira nehéz, mint a pontos fedés problémája.

Ha adott a H halmaz és az $S_i (i \leq k)$ halmazrendszer, akkor meg fogunk feleltetni ezeknek $a_i (i \leq k)$, b számokat úgy, hogy $\{S_i\}$ partíciót adó részrendszereinek $\{a_i\}$ olyan részrendszerei feleljenek meg, melyek elemeinek összege b . Ezt pl. a következőképpen tehetjük.

Legyen $d = k + 1$, és térjünk át a számok d alapú számrendszerbeli felírására. (Azaz $x = \sum_{j=1}^n x_j d^j$, ahol $x_j < d$.)

Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$. Az S_i halmaznak feleltessük meg az

$$a_i = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} d^j \quad \text{számot, ahol} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } h_j \in S_i \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$\{S_i | i \in I\}$ nyilván épp akkor lesz pontosan fedő részrendszer, amikor

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j=1}^n d^j$$

Ezért $b = \sum_{j=1}^n d^j$ választással sikerül tetszőleges teljes-fedés feladatot alkalmas hátizsákfeladatra visszavezetni. Minden algoritmus, ami megoldja az általános hátizsákfeladatot, e fogás segítségével jelentéktelen többletmunkával már arra is használható lenne, hogy megoldja az általános teljes-fedés feladatot.

Figyeljük meg az ilyen típusú visszavezetés jellegzetességét: (látszólag) bonyolultabb feladatot ügyel-bajjal „belekódolunk” egy egyszerűbbe.

Ha $\mathcal{A}$ feladatot visszavezetjük a $\mathcal{B}$ -re, akkor vagy azt akarjuk megmutatni, hogy $\mathcal{A}$ -t könnyű, vagy azt, hogy $\mathcal{B}$ -t nehéz megoldani.

5. *Definíció:* Legyen adott egy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ kereső feladat, a 4. Definíció (ii) részében szereplő A_x és B_x halmazokkal.

Akkor mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ visszavezethető $\mathfrak{B}$ -re (írjuk $\mathcal{A} \prec \mathfrak{B}$), ha adva van-
nak $p(x)$, $q(x, y)$, $r(x, y)$ könnyen kiszámítható (a 3. Definíció értelmében) függ-
vények, melyekkel

$$y \in A_x \Rightarrow q(x, y) \in B_{p(x)} \quad (1)$$

és

$$y \in B_{p(x)} \Rightarrow r(p(x), y) \in A_x \quad (2)$$

Mit fejez ki ez a definíció? Azt, hogy bármilyen x bemenő adatokkal kell megoldani az $\mathcal{A}$ feladatot, ezeket átalakíthatjuk a $\mathfrak{B}$ feladat számára olyan $p(x)$ bemenő adatokká, hogy azokra a $\mathfrak{B}$ feladatnak épp akkor van meg-
oldása, amikor A -nak az x -re. Sőt, (1) azt fejezi ki, hogy $\mathcal{A}$ -nak minden x fel-
tétel melletti y megoldását átalakíthatjuk B -nek $p(x)$ feltétel melletti $q(x, y)$
megoldásává, míg (2) azt, hogy $\mathfrak{B}$ -nek minden $p(x)$ feltétel melletti y meg-
oldását átalakíthatjuk $\mathcal{A}$ -nak x feltétel melletti $r(p(x), y)$ megoldásává, és
ezek az átalakítások kis lépésszámban valósíthatók meg (polinomiális idő
alatt, a 3. Definíció értelmében). Ezért, ha $\mathfrak{B}$ feladatra van jó eljárásunk,
akkor a visszavezetés révén $\mathcal{A}$ -t is jól meg tudjuk oldani.

Hogy az előbbi példában mi $p(x)$, $q(x, y)$ és $r(x, y)$, annak kitalálását az
olvasóra bizzuk. Megjegyezzük, hogy ez esetben $q(x, y)$ és $r(p(x), y)$ inverzei
egymásnak a következő értelemben:

$$q(x, r(p(x), y)) = y, \quad r(p(x), q(x, y)) = y \quad (3)$$

azaz az y -ok között olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést lehet létesí-
teni, hogy y akkor és csak akkor megoldása x feltétel mellett az $\mathcal{A}$ feladatnak,
amikor a neki megfelelő $q(x, y)$ megoldása $p(x)$ feltétel mellett a $\mathfrak{B}$ feladatnak.
Az ismert visszavezetések legtöbbjénél (3) fennáll, nekünk azonban erre
a tulajdonságra nem lesz szükségünk.

Konkrét visszavezetések végigvitelénél nem szoktuk használni a vissza-
vezethetőség formális definícióját. Helyességük vagy helytelenségük forma-
lizálás nélkül is általában olyan evidens, mint a matematikai bizonyításoké.

1. *Lemma.* $\mathcal{A} \prec \mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B} \prec \mathcal{C}$ -ből következik $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$.

Bizonyítás. Az olvasóra hagyjuk, egyszerűsége miatt.

Az 1. Lemmából következik, hogy $\prec$ egy parciális rendezést létesít a kereső
feladatok között. Írjuk: $\mathcal{A} \sim \mathfrak{B}$, ha $\mathcal{A} \prec \mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B} \prec \mathcal{A}$. ($\mathcal{A}$ ekvivalens $\mathfrak{B}$ -vel.)
A következő fejezetből kiderül, hogy e rendezésben van *maximális* elem, azaz
olyan $\mathcal{A}_0$ feladat, melyre minden más feladat visszavezethető. Az ilyen fel-
adatokat *univerzális kereső feladatnak* nevezzük. (Angolul „complete combina-
torial problem”, oroszul „unyiverszálnaja perebórnaja zadácsa” a terminus.)
Nyilván bármely két univerzális feladat ekvivalens egymással, azaz, ha $\mathcal{A}_0$,
 $\mathfrak{B}_0$ univerzálisak, akkor $\mathcal{A}_0 \sim \mathfrak{B}_0$.

A 2. Lemmában azt az állítást fogalmazzuk meg pontosan, hogy az univer-
zális feladatokat a *lehető legnehezebb megoldani*.

6. *Definíció:* Tekintsünk egy $f(x)$ függvényt. A $t(x)$ függvényre azt mondjuk,
hogy f idő-bonyolultságának *alsó becslése*, ha bármely olyan algoritmus, mely
 f -et kiszámolja, végtelen sok x szám esetén legalább $t(x)$ lépést végez.

2. *Lemma.* a.) Legyenek $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$ kereső feladatok; $s(x)$ egy függvény, $\mathcal{A} \prec \mathfrak{B}$,
és tegyük fel, hogy van egy eljárás, mely $\mathfrak{B}$ -nek minden x -re legfeljebb $s(x)$
lépésben (kvázi) megoldását adja.

Ekkor van egy $\tilde{s}(x) \approx s(x)$ függvény (ekvivalencia a 3. Definíció értelmében), és egy olyan eljárás, mely az $\mathcal{A}$ -nak legfeljebb V lépésben (kvázi) megoldását adja.

b.) Legyen $t(x)$ egy függvény, $\mathcal{A}_0$ egy univerzális kereső feladat. Tegyük fel, hogy *van egy olyan* $\mathcal{B}$ kereső feladat, melynél $t(x)$ a (kvázi) megoldás időbonyolultságának alsó becslése.

Akkor van egy olyan $\tilde{t}(x) \approx t(x)$ függvény, mely az $\mathcal{A}_0$ feladat (kvázi) megoldása időbonyolultságának alsó becslése.

Bizonyítás. A definícióból nyilvánvaló.

Ha egy univerzális feladatra van $s(x)$ lépésben dolgozó megoldási algoritmusunk, akkor ennek segítségével rögtön minden más kereső feladatot is meg tudunk közel $s(x)$ lépésben oldani. Nagyon meglepő volna épp ezért, ha az univerzális feladatokat az exponenciális lépekszámnál sokkal gyorsabban is meg lehetne oldani. *Ez mindenesetre nyitott kérdés.*

4. Univerzális feladatok

A Függelékben megmutatjuk, hogy az általános kereső feladat gondos megfogalmazása szinte automatikusan kezünkbe ad egy univerzális kereső feladatot. Most azonban egy, az előzőkhöz hasonlóan egyszerű, kombinatorikai jellegű univerzális kereső feladatot adunk meg. Ezzel a feladattal mindenki találkozott már, aki a matematikai logika elemeivel ismerkedett.

Legyenek $x_1, x_2, \dots, y$ stb. *kijelentésváltozók*, melyek 0 (hamis) vagy 1 (igaz) értékeket vehetnek fel. Ezek között műveleteket (Boole-operációkat) definiálunk a következőképpen

$\neg x$ (tagadás, „nem x ”):

$$\neg x = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = 1 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$x \vee y$ (diszjunkció, „ x vagy y ”)

$$x \vee y = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \text{ és } y = 0 \\ 1 & \text{különben} \end{cases}$$

$x \& y$ (konjunkció, „ x és y ”)

$$x \& y = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ és } y = 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

azaz

$$x \& y = \neg(\neg x \vee \neg y)$$

$x \rightarrow y$ (implikáció, „ha x , akkor y ”)

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = 1 \text{ és } y = 0 \\ 1 & \text{különben} \end{cases}$$

azaz

$$x \rightarrow y = \neg x \vee y$$

$x \leftrightarrow y$ (ekvivalencia, „ x akkor és csak akkor, ha y ”)

$$x \leftrightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ és } y \text{ ugyanazt az értéket veszik fel} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

azaz

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$$

Ezek a műveletek tehát tulajdonképpen igazságfüggvények.

Egy $F(x_1, \dots, x_n)$ kifejezést, melyet ezekből a függvényekből építettünk fel szuperpozícióval, [pl. $(x_1 \rightarrow x_2) \& (\neg x_1 \vee x_3)$] *logikai formulának* nevezzük. A formula meghatároz egy függvényt, mely 0-t vagy 1-et vesz fel aszerint, milyen igazságértékeket adtunk a változóknak.

[Pl. ha $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow x_2) \& (\neg x_1 \vee x_3)$, akkor $F(0, 1, 0) = (0 \rightarrow 1) \& \neg(0 \vee 0) = 1$.] Azt mondjuk, hogy az $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ($\varepsilon_i = 0$ vagy 1) n -es *kielégíti* az $F(x_1, \dots, x_n)$ formulát, ha $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1$. F *kielégíthető*, ha van olyan $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sorozat, amit őt kielégíti. Egy F formula *hosszának* a benne szereplő logikai jelek számát nevezzük. A kereső feladat a következő.

7. Példa: A kielégíthetőség problémája.

Adott egy $F(x_1, \dots, x_n)$ legfeljebb n hosszúságú logikai formula. Keresendő olyan $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ értékrendszer, mely F -et kielégíti.

Az előbbiekből nyilvánvaló, hogy adott $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ -re *könnyű eldönteni*, kielégíti-e F -et? Tehát valóban kereső feladattal van dolgunk.

1. Tétel. A kielégíthetőség problémája univerzális feladat.

Bizonyítás. A tétel bizonyítása nem szükséges a továbbiak megértéséhez. A Függelék elolvasása után látható, hogyan pontosítható az alábbi vázlatos gondolatmenet.

A kereső feladat definíciójában az $A_x \subset \mathcal{D}^n$ feltevést helyettesíthetjük $A_x \subset \mathcal{D}^n$ -nel is. Ugyanis semmi akadálya, hogy bemenő adatainkat formálisan n^k hosszúságúra hosszabbítsuk. (És n -nek nevezzük, ami eddig n^k volt.) Így a lépésszáma tett követelményben is írhatunk n -et n^k helyett. Mostantól feltesszük, hogy kereső feladataink ilyen formában vannak adva.

Megmutatjuk, hogy minden $\mathcal{A}$ kereső feladathoz van olyan l szám, valamint minden n -re egy $F_{\mathcal{A},n}(x, y, z)$ formula ($x, y \in \mathcal{D}^n, z \in \mathcal{D}^{n^l}$), melynek hosszúsága legfeljebb n^l , hogy minden x, y, z 0—1 sorozatra

$$(i) \quad F(x, y, z) = 1 \Rightarrow y \in A_x$$

(ii) Van egy olyan $q(x, y)$ egyszerűen kiszámolható függvény, hogy

$$y \in A_x \Rightarrow F(x, y, q(x, y)) = 1$$

(iii) Maga az F formula is n -ből *könnyen* kiszámolható.

Ez nyilván azt jelenti, hogy $A \prec \mathbb{S}$.

A formula megadásához alaposan szemügyre kell vennünk azt az eljárást, mely adott x -re y -ről n lépésben eldönti, megfelelő-e?

Egy n hosszúságú eljárásról a következőket tételezzük fel, arra támaszkodva, hogy minden eddig ismert, és racionálisan definiált lépésszámú eljárás e feltételeket kielégíti.

1. Az eljárás t -edik lépésében az összes adat egy n^r nagyságú (r konstans) „memóriában”, tehát z_{it} ($t \leq n, i \leq n^r, z_{it} = 0$ vagy 1) változókkal írható le.

2. Az eljárás egy lépése egy *elemi* művelet végzését jelenti a $\{z_{it}\}$ adattömegben, így kapjuk a következő lépésben rendelkezésre álló $\{z_{i,t+1}\}$ adatokat.

3. Egy elemi műveletet *erősen korlátozott* mennyiségű változón lehet csak végrehajtani. Tegyük fel, hogy a felhasználható változók száma legfeljebb

olyan nagyságrendű, hogy egy tetszőleges z_{it} adat „helyére”, i -re való hivatkozás befejező, tehát $s \cdot \log_2 n$ (s konstans).

Elemi művelet tehát egy $\Phi: \mathfrak{D}^{\log n} \rightarrow \mathfrak{D}$ függvény. Ehhez pedig található olyan G , $c \cdot n^s$ hosszú formula, hogy

$$G(z, z_1, \dots, z_{s \log n}) = 1 \Leftrightarrow \Phi(z_1, \dots, z_{s \log n}) = z$$

További részletezés nélkül, ennyiből is sejthető, hogy sok ilyen típusú formula összekapcsolásával kaphatunk egy olyan

$$F_{\mathfrak{A}, n}(x, y, \{z_{it}\})$$

formulát, mely akkor és csak akkor „igaz”, ha eljárásunk n lépésben az $y \in A_x$? kérdésre pozitív választ ad, és a részeredmények azaz a számolás „jegyzőkönyve” éppen $\{z_{it}\}$.

Ez a formula eleget tesz (i)-nek és (ii)-nek, és meghatározása is „könnyen” ment.

Ezzel vázlatos bizonyításunkat befejeztük.

A kielégíthetőség problémájának nem domborodik ki eléggé egyszerű kombinatorikai jellege. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{S}$ visszavezethető egy jól áttekinthető speciális esetre.

8. *Példa: Kielégíthetőség legfeljebb 3 tagú diszjunkciókkal.*

$\mathfrak{S}_3$ a következő kereső feladat. Legyen

$$F(x_1, \dots, x_n) = D_1 \& \dots \& D_k \quad (k \leq n)$$

ahol

$$D_i = \tilde{x}_{i_1} \vee \tilde{x}_{i_2} \vee \tilde{x}_{i_3} \quad (\tilde{x}_j = x_j \text{ vagy } \neg x_j).$$

Az ilyen F -et *speciális formulának* nevezzük.

A feladat: keresni olyan $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ értékrendszert, mely F -et kielégíti.

2. *Tétel.* $\mathfrak{S}_3$ univerzális kereső feladat.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $G(x_1, \dots, x_n)$ legfeljebb n hosszú formulához található olyan $F(x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n)$ speciális formula, melynek tagszáma legfeljebb $4n$, hogy

$$(i) \quad F(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n) = 1 \Rightarrow G(x_1, \dots, x_n) = 1$$

(ii) Van egy $q(G, x)$ könnyen kiszámolható függvény, hogy

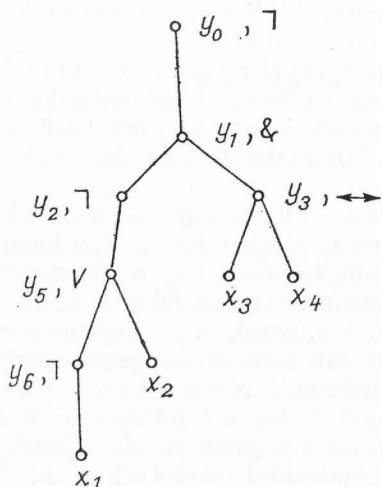
$$G(x_1, \dots, x_n) = 1 \Rightarrow F(x_1, \dots, x_n, q(G, x_1, \dots, x_n)) = 1$$

Ebből állításunk nyilván következik.

G -ben a logikai jelek száma $k \leq n$. G -hez felrajzolhatunk egy *fát* a következőképpen (l. 1. ábra arra az esetre, ha $G = \neg(\neg(\neg x_1 \vee x_2) \& (x_3 \leftrightarrow x_4))$).

A fa minden pontjában a legsókat kivéve, egy logikai jel van. A legsó pontok $x_1, \dots, x_n$ -nel, a többiek különböző $y_0, \dots, y_k$ szimbólumokkal vannak megjelölve. Az ábráról látható, hogyan felel meg a fa a formula konstrukciójának. Ha a fa y_i pontja mellett $\vee$ jel van, alatta y_j, y_l , akkor legyen

$$C_i = y_i \leftrightarrow (y_j \vee y_l) = (\neg y_i \vee y_j \vee y_l) \& (\neg y_j \vee y_i) \& (\neg y_l \vee y_i)$$



$$C_0 = y_0 \leftrightarrow \neg y_1 \quad C_1 = y_1 \leftrightarrow (y_2 \& y_3) \\ C_2 = y_2 \leftrightarrow \neg y_5, \dots, C_3 = y_3 \leftrightarrow (x_3 \leftrightarrow x_4)$$

1. Ábra

Hasonlóan definiálható C_i más logikai jelekhez is. Könnyű belátni, hogy ha $F = C_0 \& \dots \& C_k$, akkor F a követelményeknek megfelel.

5. Egyszerű univerzális feladatok

S_3 a következőképpen fogalmazható át:

Adott $F = D_1 \& \dots \& D_k$, ahol

$$D_i = \tilde{x}_{s_{i1}} \vee \tilde{x}_{s_{i2}} \vee \tilde{x}_{s_{is}}.$$

A feladat: találni egy olyan

$$\tilde{x}_{r_1}, \dots, \tilde{x}_{r_k}$$

sorozatot, hogy $\tilde{x}_{r_i}$ benne van D_i -ben, és egyik $\tilde{x}_{r_i}$ se tagadása egy másiknak. (Ha ilyen $\tilde{x}_{r_1}, \dots, \tilde{x}_{r_k}$ van, akkor ezeket 1-nek választva elégíthetjük ki F -et.)

Ilyen $\tilde{x}_{r_1}, \dots, \tilde{x}_{r_k}$ sorozatra is azt mondjuk, hogy *kielégíti* F -et.

Következő példánk egy igazán jól ismert kombinatorikai probléma, melyről belátjuk, hogy univerzális.

9. Példa: Maximális független pontrendszer.

Adott egy n pontú G gráf és egy m szám. Az M feladat: keresendő G -ben m össze nem kötött pontból álló rendszer.

3. Tétel. $S_3 \prec M$.

Bizonyítás. Adott $F = D_1 \& \dots \& D_k$ -hez ($k \leq n$) megkonstruálunk egy G gráfot. G pontjai $\{a_i^1, a_i^2, a_i^3 \mid i = 1, \dots, k\}$ a_i^j össze van kötve a_p^j -val, ha $\tilde{x}_{s_{ij}}$ és $\tilde{x}_{s_{pj}}$ egymás tagadásai vagy $i = p$.

Világos, hogy G -ben m elemű független pontrendszer épp akkor lesz, amikor F -et kielégítő $\tilde{x}_{r_1}, \dots, \tilde{x}_{r_k}$ sorozat.

Ez az első, már mindenféle logikai szólásmódtól megszabadított kombinatorikai feladat, melyről beláttuk, hogy univerzális.

Ahogy sejthető is, azok az eljárások, melyekkel rengeteg további feladatról megmutatható, hogy univerzális, teljesen az elemi kombinatorika szintjén maradnak. Ezek az elvileg egyszerű, technikailag néha „trükkös” eljárások nem tartoznak elvi mondanivalónkhoz. A részletek iránt érdeklődőket [1]-re és [4]-re utaljuk.

A kereső feladat fogalma nagyon általános. Olyan nehéz feladatok is kereső típusúak, mint annak eldöntése, van-e egy tételnek n hosszúságú bizonyítása. (Valamilyen axiomatikus, formalizált elméletben.) Ez, a *bizonyításkeresés problémája*, természetesen univerzális feladat. Kereső feladat az is, ha két adott gráfról el akarjuk dönteni, izomorfak-e. Erről, az *izomorfizmusproblémáról*, nem ismeretes, univerzális-e? Ugyancsak nem ismeretes ez a prímszám-problémáról és a lineáris programozás feladatáról, ismeretes viszont az integer programozásról, a pontos fedés feladatáról és így a korábban bizonyítottak értelmében a hátizsákproblémáról is, az utazó ügynök problémájáról, és még sok igen egyszerűen fogalmazható kombinatorikai feladatról, pl. arról, hogy adott G gráf kiszínezhető-e 3 színnel?

Ha egy kereső feladatról kiderül, hogy univerzális, akkor nyugodtan levonhatjuk azt a következtetést, hogy a feladat általános, jól használható megoldó algoritmusát nem érdemes tovább keresni. Nem állítható viszont az, hogy egy-egy feladat speciális természetét kihasználva, ne találhatnánk olyan eljárásokat, melyek a feladatot a gyakorlat számára kielégítő pontossággal megoldják.

Vannak olyan fontos feladatok az operációkutatásban, melyekről kiderült, hogy univerzálisak, ugyanakkor azt is megmutatták, hogy a legegyszerűbb stratégiák is elvisznek az optimum konstansszorosáig. Optimista befejezésül ilyen szituációt mutatunk be egy triviális példán.

A „hátizsákprobléma” következő módon is fogalmazható.

Adott egy b alapterületű raktárunk és $a_1, \dots, a_n$ alapterületet elfoglaló n darab áru. Az a feladatunk, hogy olyan árukat helyezzünk el a raktárban, melyek az alapterületet a lehető legjobban kitöltik.

Ennek a feladatnak pontos megoldása — az előbbieket értelmében — univerzális kereső feladat megoldását jelentené. Milyen stratégiát alkalmaznánk, ha nem ér meg sok fejtörést a dolog? Talán a következőt.

Előbb elhelyezzük a lehető legnagyobb árut, ami elfér, aztán a maradékból megint a legnagyobbat, ami elfér stb.

Könnyű belátni, hogy így is legalább feleannyi területet sikerül kitölteni, mint az optimális elhelyezésnél.

Egyik mentési lehetőség tehát ez: elégedjünk meg nem pontos optimummal. Másik, ami a lineáris programozás jelenlegi helyzetére jellemző: elégedjünk meg olyan eljárásokkal (illetve olyanokat keressünk), melyek a feladatot az esetek *túlnyomó többségében* (ez a szimplexmódszer esetén még csak empirikusan, nem matematikailag bizonyított) rövid idő alatt oldják meg.

FÜGGELÉK

A) Algoritmus és annak lépésszáma

Algoritmusok, azaz effektív, mechanikus (számolási) eljárások mindig is fontosak voltak a matematika és alkalmazásai számára. De e század 20-as, 30-as éveig nem vetődött fel az igény az algoritmus fogalmának általános definíciója iránt. Ha valaki egy probléma megoldására algoritmust mutatott, akkor soha sem volt vitás, vajon ez tényleg algoritmus-e? Megváltozott a helyzet, amikor egyes feladatoknál az volt valószínű, hogy *nem létezik* megoldó algoritmus. (Történelmileg első ilyen feladat a bizonyításkeresés feladata volt. Egy formalizált, axiomatikus elmélettel kapcsolatban felmerülhet a kérdés, hogy tetszőleges állításról hogyan dönthető el, van-e formális bizonyítása?)

Ilyen kijelentések nyilván nem értelmesek, amíg nem mondjuk meg pontosan, mit nevezünk algoritmusnak. Gödel, Church, Turing, Post, Kleene munkája nyomán az algoritmus fogalmának sok alternatív definíciója született melyekről kiderült, hogy ekvivalensek (minden alkalommal ugyanazok a függvények bizonyultak algoritmikusan kiszámolhatónak). Minden azóta született eredmény is azt támasztja alá, hogy kezünkben tartjuk az algoritmus általános fogalmának egyetlen lehetséges definícióját.

Amióta az elektronikus számítógépek elterjedtek, a mechanikus eljárások iránti érdeklődés megnőtt. Ugyanakkor, az algoritmus általános fogalmának megértése sokkal egyszerűbbé vált, ugyanis az algoritmus nem más, mint számítógépen megvalósítható eljárás.

Azt kell tehát csak matematikailag definiálni, *mi egy számítógép?* Szerencsére ehhez nem kell valamilyen nagy számítógépet minden részletében leírunk, és attól se kell tartani, hogy ha jobb, korszerűbb számítógépek épülnek akkor tágulni fog az algoritmus fogalma. Utóbbi teljesen meghatározzák a számítógépek működésének legáltalánosabb elvei. Az egyes számítógépek nem abban különböznek egymástól, *mit* lehet rajtuk kiszámítani, csak abban, *milyen gyorsan*: milyen utasítások azok, amiket „megértenek”, milyen műveleteket végeznek el tanítás nélkül, stb. Ezért megelégedhetnénk egy nagyon primitív felépítésű számítógéppel is az algoritmus általános definíciójához, mi azonban inkább olyant ismertetünk, melynek lehetőségei rendkívül gazdagok. Ezzel megtakarítjuk az érvelést definíciónk általánossága mellett.

Aki az alább leírt számítógépet irreálisan hatékonynak, korlátozás nélkülinek tartja, nem értette meg annak rendeltetését. Olyan gépet akarunk definiálni, ami mindent tud, ami valaha is számolásnak lesz tekinthető. Ebbe a gépbe természetesen minden korlátozás beépíthető (pl. a programba).

Az ismertetett gépmoddell a Turing-féle gép ([5]) egy Kolmogorov–Uszpenzkij-féle változata ([6]), Ja. M. Barzgyiny által általánosítva.

Számítógépünk *diszkrét időben* dolgozik, tehát a számítási eljárás elkülöníthető lépésekből áll. Az eljárás teljesen *determinisztikus*. Minden időpontban a számítógép akkori állapota teljesen meghatározza a következő időpontbeli állapotot.

A gép sok egységből áll, ezek két különböző típusba tartoznak: aktívak és passzívok. Az aktív egységek szerepe a vezérlés, lebonyolítás, utasításvégrehajtás. A passzív egységek képezik a memóriát.

Minden egyes egység csak *korlátos* mennyiségű információt képes hordozni. Ezt matematikailag úgy fejezzük ki, hogy minden egységnek csak korlátos

sok *állapota* van. Legyen a t -edik időpontban a passzív egységek (véges) halmaza M_t , az aktívaké V_t .

Minden aktív egység minden időpillanatban „rajta áll” egy passzív egységen, (megfigyeli azt), azon t -ről $t + 1$ -re áttérve egy műveletet hajt végre, majd átlép egy másik passzív egységre.

Az M_t és V_t halmazok nem állandóak, *nővekedhetnek*. Az aktív egységek elemi műveletei között szerepelni fog ugyanis újabb aktív vagy passzív egység létrehozása.

Amint mondtuk, minden egység véges sok állapotban lehet. Legyen a lehetséges állapotok halmaza Q . Q végig ugyanaz, tulajdonképpen még azt is feltehetnénk, hogy csak 5—10 elemből áll. Ha $m \in M_t$ ill. $v \in V_t$ egy egység, akkor jelölje $s_t(m) \in Q$ ill. $s_t(v) \in Q$ az állapotukat a t időpontban.

A gép szervezésének legérdekesebb kérdése az, hogy ha egy v aktív egység a t időpontban egy m passzív egységen áll — jelöljük ezt a szituációt így:

$$\varphi_t(v) = m$$

— akkor hogyan választja ki azt a passzív egységet, melyre áttér a következő lépésben?

A probléma a következő. Az egységek halmaza egyre növekszik. Ha v az összes passzív egység közül választhatná ki, melyikre lép át, ellentétbe kerülnénk azzal a követelménnyel, hogy a v által végrehajtott művelet csak *egészen elemi* lehet. v minden időpontban csak korlátos mennyiségű egységet tekinthet át.

A következő megoldást választjuk. Rögzítünk egy k pozitív egész számot. Minden passzív m egységhez tartozik, minden t időpontban a passzív egységeknek egy

$$\mu_t^1(m), \dots, \mu_t^k(m)$$

sorozata, azok, amelyek a t időpontban m -ből *elérhetőek*. Minden v aktív egységhez is tartozik egy

$$\{\mu_t^i(v)\}_{i \leq k}$$

sorozatot, ugyancsak passzív egységekből. Ezek a v -ből elérhető egységek.

Ezek után megadhatjuk, mit nevezünk egy elemi műveletnek, (melyet v hajt végre t -ről $t + 1$ -re áttérve azon az m -en, amit megfigyel a t időpontban).

Az elemi művelet csak attól függ, mi m és v *állapota* a t időpontban: azaz $s_t(m)$ -től és $s_t(v)$ -től.

Az elemi művelet a következő négyféle operáció *együttes* végrehajtását jelenti.

1. m és v új állapotának (azaz $s_{t+1}(m)$ -nek és $s_{t+1}(v)$ -nek) meghatározása.
2. v új helyének (azaz v által a $t + 1$ -edik időpontban megfigyelt passzív egységnek, $\varphi_{t+1}(v)$ -nek) meghatározása.

Kikötjük, hogy v új helye csak olyan passzív egység lehet, mely m -ből elérhető. Tehát ez a művelet a $\mu_t^i(m)$ egységek közül választja ki v új helyét.

3. Azon egységek meghatározása, melyek m -ből és v -ből a $t + 1$ -edik időpontban elérhetőek lesznek (tehát $\mu_{t+1}^i(m)$ és $\mu_{t+1}^i(v)$ új értékei).

Itt kikötjük, hogy *mindkét sorozat csak olyan egységeket tartalmazhat, melyek vagy m -ből, vagy v -ből elérhetőek voltak*. Azaz

$$\mu_{t+1}^i(m), \mu_{t+1}^i(v) \in \{\mu_t^j(m) \mid j \leq k\} \cup \{\mu_t^j(v) \mid j \leq k\}$$

Tehát egy elemi művelet hatására az m -ből (ill. v -ből) elérhető egységek összessége csak úgy változhat, hogy a v -ből (ill. m -ből) elérhető egységek közül újak kerülnek be, és régiek kimaradnak.

4. Egy új aktív vagy passzív w egység esetleges létrehozása, állapotának meghatározása. Az új egységből elérhető passzív egységek is csak az m -ből és v -ből elérhetők közül kerülhetnek ki.

További megállapodások a gép működésével kapcsolatban

Ha egy passzív egységen éppen nem áll aktív, akkor állapota is, a belőle elérhető egységek sorozata is t -ről $t + 1$ -re áttérve változatlan marad.

Ha egy passzív egységre 1-nél több aktív egység „érkezik”, (azaz a t -edik időpontban még nem volt ilyen kollízió, de a $t + 1$ -edik időpontra lenne), akkor a gép leáll.

Az egyik Q -beli állapot, q_f a végállapot. Ha valamelyik egység ilyen állapotba kerül, a gép leáll.

Ezekután a gép működési módját teljesen meghatározza, ha megadjuk az 1—4-ben értelmezett elemi műveleteket.

Az 1. művelet egy

$$\sigma_M : Q \times Q \rightarrow Q \text{ és } \sigma_V : Q \times Q \rightarrow Q$$

véges függvénnyel írható le, a következő módon:

$$s_{t+1}(m) = \sigma_M(s_t(m), s_t(v)), \quad s_{t+1}(v) = \sigma_V(s_t(m), s_t(v)).$$

A 2. művelet egy

$$\gamma = Q \times Q \rightarrow \{1, \dots, k\}$$

véges függvénnyel adható meg, a következő képlet szerint:

$$\varphi_{t+1}(v) = \mu_t^{\gamma(s_t(m), s_t(v))}(m)$$

azaz γ megadja, v az m -ből elérhető egységek közül sorrendben *hányadikra* lép át?

A 3. művelet két darab,

$$\alpha_M, \alpha_V : Q \times Q \times \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, 2k\}$$

függvénnyel adható meg a következő képletek szerint.

$$\begin{aligned} \mu_{t+1}^i(m) &= \begin{cases} \mu_t^j(m) & \text{ha } \alpha_M^i(s_t(m), s_t(v)) = 2j - 1 \\ \mu_t^j(v) & \text{ha } \alpha_M^i(s_t(m), s_t(v)) = 2j \end{cases} \\ \mu_{t+1}^i(v) &= \begin{cases} \mu_t^j(m) & \text{ha } \alpha_V^i(s_t(m), s_t(v)) = 2j - 1 \\ \mu_t^j(v) & \text{ha } \alpha_V^i(s_t(m), s_t(v)) = 2j \end{cases} \end{aligned}$$

A 4. művelet egy

$$\delta : Q \times Q \rightarrow \{0, 1, 2\}, \quad \varrho : Q \times Q \rightarrow Q$$

és

$$\beta : Q \times Q \times \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, 2k\}$$

véges függvénnyel adható meg így:

Nincs új egység, ha $\delta(s_t(m), s_t(v)) = 0$.

Az új egység w , passzív, ha $\delta(s_t(m), s_t(v)) = 1$, aktív, ha 2. Ez esetben

$$s_{t+1}(w) = \varrho(s_t(m), s_t(v))$$

és

$$\mu_{t+1}^i(w) = \begin{cases} \mu^j(m) & \text{ha } \beta^i(s_t(m), s_t(v)) = 2j - 1 \\ \mu^j(v) & \text{ha } \beta^i(s_t(m), s_t(v)) = 2j. \end{cases}$$

A

$$\sigma_M, \sigma_V, \gamma, \alpha_M, \alpha_V, \delta, \varrho, \beta$$

véges függvények gépünk működését teljesen meghatározzák. Ezek képezik, ha úgy tetszik, a gép „hardware”-jét. Aszerint kapunk más és más gépet, ahogy ezeket másképp választjuk. Ezért azt is mondhatjuk, hogy egy gép *nem más*, mint egy $T = (Q, k, \sigma_M, \sigma_V, \gamma, \alpha_M, \alpha_V, \delta, \varrho, \beta)$ összesség.

A számolás t -edik időpontjában a *pillanatnyi szituációt* teljesen meghatározzák

$$M_t, V_t, \varphi_t : V_t \rightarrow M_t, s_t : M_t \cup V_t \rightarrow Q \quad \text{és}$$

$$\mu_t : (M_t \cup V_t) \times \{1, \dots, k\} \rightarrow (M_t)^k.$$

Ezért a t időpontbeli pillanatnyi szituációt azonosíthatjuk a

$$D_t = (M_t, V_t, \varphi_t, s_t, \mu_t)$$

összességgel.

Az, hogy a gép működése teljesen determinisztikus, azt jelenti, hogy D_{t+1} a D_t -ből egyértelműen kiszámolható.

Hogyan használhatjuk a gépet számolásra? Mindenekelőtt megadjuk D_0 -at, az induló szituációt. Választunk egy alkalmas nagyságú M_0 induló memóriát, azaz megfelelő számú passzív egységet. A memóriában elhelyezzük kiinduló adatainkat, és a szükséges programokat. Ez a passzív egységek állapotainak meghatározását jelenti. (pl. ha kettes számrendszerben kell dolgoznunk, akkor $s_0(m) = q_0$ vagy q_1 , Q -beli elemek. Q -t általában valamilyen ábécének képzelhetjük el).

Ezután „megszervezzük” a memóriát a kívánt módon, azaz megadjuk, hogy a számolás kezdetén melyik passzív egységből melyik legyen elérhető. Ez $\mu_0^i(m)$ megadását jelenti.

Végül meghatározzuk az induláskor szükséges végrehajtó egységeket, azok induló helyét, állapotát és az induláskor belőlük elérhető passzív egységeket. Ez $V_0, s_0(v)$ és $\mu_0^0(v)$ megadását jelenti.

Beindítjuk a gépet. Az számolni kezd, sorban létrehozza a $D_1, D_2, \dots$ szituációkat a fent megadott szabályoknak megfelelően. Ha megáll, akkor a memóriából, azaz a passzív egységek állapotaiból előre megállapított módon kiolvashatjuk a számolás végeredményét.

A számolás *lépésszáma* a megállásig eltelt időegységek száma. Előfordulhat, hogy a gép nem áll meg, a gép által megvalósított eljárás nem ér véget véges sok lépésben, eljárásunk nem alkalmazható a betáplált kiinduló adatokra, tehát *nem általánosan alkalmazható*. Mi csak általánosan alkalmazható eljárásokkal fogunk foglalkozni.

Miután meghatároztuk, mit értünk számítógép alatt, rátérhetünk az algoritmus (eljárás) fogalmának pontosítására.

Mindenekelőtt meg kell állapítani, hogy *eljárásról* sohasem egyetlen feladatnak csak egy *feladatcsaládnak* a megoldásánál értelmes beszélni. (Amit a cikk főrészében „kereső feladatnak” neveztünk, az se egyetlen feladat, hanem

minden n -re és $x \in \mathfrak{D}^n$ -re egy külön feladatból álló feladatcsalád). Vagy azt is mondhatjuk, hogy *egyetlen feladatnak változó bemenő adatokkal* való megoldásánál.

Ismét megállapodhatunk, hogy a bemenő és kimenő adatokat bináris sorozatokkal kódoljuk. Korábban az összes bináris sorozatok halmazát $\mathfrak{D}^*$ -al jelöltük. Olyan feladatokról lesz szó, ahol *ki kell számolni* valamit.

Egy feladat tehát, ahogy mi értjük, mindig egy

$$f(x) : \mathfrak{D}^* \rightarrow \mathfrak{D}^*$$

függvénnyel adható meg. Egy eljárás *megadja* az f függvénnyel adott feladatot, ha minden lehetséges x bemenő adathoz kiszámolja $f(x)$ -et, *ezaz* a megoldást.

Egy eljárást akkor nevezünk mechanikus eljárásnak, *algoritmusnak*, ha egy az előbbieken ismertetett T gépen elvégezhető. Mit jelent ez? Ami most következik, az egy eléggé esetleges szabványosítási megállapodás arról, mit tekintünk a gép kezdő- és végszituációjának.

Az egységek állapotainak Q halmazából a q_f végállapoton kívül tüntessünk ki még egy q_b állapotot, amit kezdő állapotnak nevezünk, valamint két további, q_0 és q_1 állapotot.

A gép *kezdő szituációban* van, ha

- (i) egyetlen m_0 passzív egység van a q_b állapotban.
- (ii) m_0 -ból egyetlen m_1 egység érhető el, m_1 -ből egyetlen m_2 , m_2 -ből egyetlen m_3 , stb. valamilyen m_n -ig, $m_1, \dots, m_n$ mind különbözők.
- (iii) $m_1, \dots, m_n$ mind q_0 vagy q_1 állapotban vannak.

A gép a *végszituációban* akkor van, ha ugyancsak a fenti feltételek teljesülnek q_b helyett q_f állapotot írva.

Egy gép kezdő szituációját tehát két egymástól független adatösszességgel írhatjuk le. Egyik, hogy milyen állapotban vannak az $m_1, \dots, m_n$ egységek, (és hány van belőlük), azaz mi van az adatszalagon? Ezt az információt egy $x = x_1, \dots, x_n$ sorozattal adjuk meg, ahol $x_i = 0$ vagy 1 ha $s_0(m_i) = q_0$ vagy q_1 .

A gép összes többi aktív és passzív egységei, ezek egymáshoz és m_0 -hoz való viszonya (m_{i+1} nem érhető el belőlük a 0 . időpillanatban) lesz a másik adatösszesség. Ez képezi a *számolás programját*, P -vel jelöljük. Az adatszalaiag kezdő szituációbeli állapota adja a számolás *bemenő adatait*, a végszituációban ugyanez a *megoldás*.

Egy kezdő szituáció tehát a

$$D_0 = (P, x)$$

összességgel jellemezhető. A gép akkor valósít meg valamilyen *számolási eljárást*, ha míg x végigfut az összes lehetséges bemenő adatokon, *minden* számoláshoz *ugyanazt* a P -t használjuk.

7. *Definíció:* Azt mondjuk, hogy a T gépen az $f(x)$ függvény kiszámolható, ha van olyan P program, mellyel a gép minden (P, x) kezdő szituációból olyan végszituációhoz jut el, ahol az adatszalagon $f(x)$ van. A T gép és a P program együtt megad egy *algoritmust* f kiszámolására. *f algoritmikusan kiszámolható*, ha van olyan T gép, melyen kiszámolható. A kiszámolható függvényeket *rekurzív függvényeknek* is szokták nevezni.

Rögtön megjegyezzük: vannak olyan gépek melyeken minden függvény kiszámolható, ami egyáltalán valahol kiszámolható. Az ilyen gépek nem is feltétlenül bonyolult felépítésűek. Univerzálisnak nevezzük őket. A gyakorlatban használt nagyméretű számítógépek mind univerzálisak. Nem elvi nehézségek, csak a bizonyítás körülményessége miatt tekintünk el a következő tétel bizonyításától.

4. Tétel. Vannak univerzális gépek.

A bizonyítás azon alapszik, hogy egy egészen egyszerű géppel is képesek lehetünk minden más gép működését utánozni.

A leírt géptípus sok olyan lehetőséggel rendelkezik, amivel a mai számítógépek nem. Legfontosabb ezek közül az, hogy az aktív egységek száma korlátlanul növekedhet. Nem nehéz belátni, hogy ilyen géppel az utazó ügynök problémája is nagyon gyorsan megoldható volna. Ugyanis a gép aktív részei n lépés alatt 2^n -felé oszthatódnak, és minden lehetőséget egyszerre kipróbálhatnak. Ezért aki úgy véli, hogy a próbálgató megoldás exponenciális mennyiségű időt vesz igénybe, nyilván olyan gépre gondol, melynek korlátos számú aktív egysége van. A cikk főrészében mi is mindig ilyen gépet tartottunk szem előtt.

Egy $f(x)$ függvényről tehát akkor mondjuk, hogy $t(x)$ lépésben kiszámolható, ha van olyan T gép, és P program hogy ezek $t(x)$ lépésben kiszámolják $f(x)$ -et, és számolás közben új aktív egység nem keletkezik.

Az olyan gépet, melyen számolás közben nem keletkezik aktív egység, *végesejűnek* hívjuk. (Az aktív egységeket szokták „fej”-nek is nevezni).

Megjegyzés: Van végesejű univerzális gép.

Kifogásolható az is, hogy a memória struktúrája időben változhat, tehát változhat egy-egy passzív egységből elérhető más passzív egységek halmaza.

Itt sokféle megkötést fogadhatunk el, de még a legszigorúbb értelmes megkötés se korlátozza a kiszámolható függvények körét. Sőt, a főrész 3. Definíciójában adott ekvivalencia (azaz hatványozás) erejéig még a számolás lépésszámát sem.

Egyfejű Turing-gép az olyan, melyben a passzív egységek egy egyenesen helyezkednek el egymás mellett. Egyetlen aktív egység van, ebből csak az az egység érhető el, melyet megfigyel. A passzív egységekből csak szomszédjaik érhetők el.

Az egyfejű Turing-gép már lényegesen kevesebbet „tud” mint a mai számítógépek. De van univerzális egyfejű Turing-gép!

Még mindig megmaradhatott az a kifogás, hogy a gép memóriája korlátlanul növelhető.

8. *Definíció:* A (P, x) indulószituációjú eljárás *memóriaigénye* nem más, mint a számolás befejezéséig keletkezett egységek száma (az induló egységekkel együtt).

Erre az ellenvetésre azt válaszoljuk: semmi akadály a minden alkalommal csak olyan eljárásokat venni figyelembe, melyeknek lépésszáma és memóriaigénye előre adott $t(x)$ és $l(x)$ függvényekkel van korlátozva. De ilyen korlátozást az algoritmus általános fogalmába beépíteni nem célszerű.

Az ebben a részben bevezetett fogalmak minden, cikkünk 1—3. pontjában szereplő definíciót pontos matematikai definícióvá változtattak.

B) Univerzális kereső feladatok

Az univerzális gépekről tulajdonképpen többet tudunk, mint hogy rajtuk minden kiszámolható függvény előállítható.

Egy T gép leírása nyilván kódolható egyetlen $\lceil T \rceil$ bináris sorozatba. Ugyanez vonatkozik T -nek egy P programjára is, melynek kódját $\lceil P \rceil$ -vel jelöljük.

Ha $x = x_1, \dots, x_n$ egy 0–1 sorozat, akkor legyen $\bar{x} = x_1x_1x_2x_2 \dots x_nx_n01$. Ezekután az x, y sorozatpárt, az x, y, z sorozathármast kódolhatjuk egyetlen $\bar{x}y, \bar{x}y\bar{z}$, stb. sorozattal, melyből az eredeti összetevők egyértelműen kiolvashatók.

Egy x bináris sorozat hosszát $|x|$ -el jelöljük.

5. *Tétel.* Van egy olyan végesfejű T_0 gép, és ennek egy P_0 programja, mely bármely (T, P) gép-programpárra és x bináris sorozatra a következőket hajtja végre.

1. A

$$(P_0, \lceil T \rceil \lceil P \rceil x)$$

kezdő szituációból legfeljebb akkora lépésszám alatt, mint $(|\lceil T \rceil| + |\lceil P \rceil|)^2$, előállít egy

$$(\Pi_{T,P}, x)$$

kezdőszituációt.

2. A $(\Pi_{T,P}, x)$ kezdőszituációból kiszámolja ugyanazt, amit a T gép a (P, x) kezdőszituációból, és ha T végesfejű, akkor ehhez nem követel több lépést, mint a T gép lépésszámának $|\lceil T \rceil|^2$ -szerese.

Ezt a tételt nem bizonyítjuk, de aki jól megérti az állítást, az belátja, hogy a bizonyítás csak türelem kérdése.

A T_0 géppel kapcsolatban definiálunk egy $\mathcal{U}$ kereső feladatot, melyről aztán bebizonyítjuk, hogy univerzális. A kereső feladat a következő.

Adott x n -hosszúságú 0–1 sorozat. Keresendő y legfeljebb n hosszúságú olyan 0–1 sorozat, hogy a T_0 gép a

$$(P_0, xy)$$

kezdőszituációból legfeljebb n lépés alatt 0-t számoljon ki.

Hogy ez kereső feladat, az a definícióból világos. (Adott x -re a megoldások U_x halmaza azon y -ok halmaza, melyekre T_0 legfeljebb n lépésben 0-t számol ki).

6. *Tétel.* Az $\mathcal{U}$ feladat univerzális.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $\mathcal{A}$ kereső feladatot. Ehhez van egy eljárás, mely minden n hosszú x -re és y -ra legfeljebb n lépésben eldönteni az $y \in A_x$? kérdést. Azaz van egy T gép és P program, hogy T minden n hosszú x, y sorozatpárra a $(P, \bar{x}y)$ kezdőszituációból legfeljebb n lépés alatt 0-t számol ki, ha $y \in A_x$, 1-et, ha $y \notin A_x$.

Nézzük mit csinál ekkor T_0 a

$$(P_0, \lceil T \rceil \lceil P \rceil \bar{x}y)$$

kezdőszituációban? A tétel szerint legfeljebb

$$(|\lceil T \rceil| + |\lceil P \rceil|)^2 + |\lceil T \rceil|^2 \cdot n$$

lépésben 0-t számol ki, ha $y \in A_x$, 1-et, ha $y \notin A_x$. Tehát az A feladatnak x bemenő adat melletti megoldását visszavezettük az U feladat

$$\lceil T \rceil \lceil P \rceil \bar{x}$$

bemenő adat melletti megoldására.

Ha az olvasó most még egyszer megnézi a bizonyításvázlatot, amit a 4. pont 1. Tételére adtunk, láthatja, hogy könnyen szabatos bizonyítássá tehető, például úgy, hogy belátjuk:

$$\mathcal{U} < \mathcal{S}$$

Ehhez T_0 működésének „jegyzőkönyvét” kell olyan módon kódolni, hogy a kód egyértelműen adódjék, mint egy bizonyos logikai formulát kielégítő sorozat. Mi inkább közvetlenül bizonyítjuk $\mathcal{S}$ univerzalitását.

Ha $\mathcal{A}$ egy kereső feladat, akkor nyilván minden n -re lesz egy T_n gép, mely n lépés alatt eldönti az n hosszú x, y sorozatokra az $y \in A_x$ kérdést, és a következő formájú.

(i) T_n -nek $c_1 n$ passzív egysége van, melyek q_0 -t vagy q_1 -et vehetnek fel, és 1 aktív egysége, mely $c_2 n$ különböző állapotot vehet fel (c_1, c_2 konstansok).

(ii) Új egység a számolás során nem keletkezik.

(iii) Minden egységből minden másik egység elérhető.

A T_n gép nyilván elég általános ahhoz, hogy minden n lépéses eljárás ilyen gépen elvégezhető legyen.

Legyenek T_n passzív egységei $m_1, \dots, m_{c_1 n}$, az aktív egység v , log mindig 2-es alapú logaritmust jelent.

A D_t t -időpontbeli szituációt nyilván egyértelműen meghatározzák a következő adatok.

$$z_{t1}, \dots, z_{t, c_1 n}$$

ahol

$$z_{ti} = \begin{cases} 0 & \text{ha } s_t(m_i) = q_0 \\ 1 & \text{ha } s_t(m_i) = q_1 \end{cases}$$

továbbá

$$\lambda_{1t}, \dots, \lambda_{t \log c_2 n}$$

melyek együtt egy bináris számot adnak, ami v állapotát kódolja, és a

$$\chi_{1t}, \dots, \chi_{t \log c_1 n}$$

bináris szám, ami v helyét kódolja. A 3. Tétel bizonyításában szereplő F formulát most már tényleg fel lehet írni a

$$z_{ti}, \lambda_{tj}, \chi_{tk}$$

változókra.

Tudjuk, hogy ha v a t -edik időpontban m_i -n van, akkor új helyét egy

$$\gamma : \{0, 1\} \times \{1, \dots, c_2 n\} \rightarrow \{1, \dots, c_1 n\}$$

függvény adja meg.

Ha x egy logikai változó, akkor legyen

$$x^0 = \neg x, \quad x^1 = x$$

Ha j egy természetes szám, akkor legyen

$$[j]_n$$

a j 2-es számrendszerbeli felírásának n -edik számjegye.

Minden t -re; minden i -re, j -re, és ε -ra ($\varepsilon = 0$ vagy 1) írjuk fel a következő formulát.

$$G_{t,i,j,\varepsilon}(z_{ti}, \{\lambda_{tk}\} \{\chi_{tk}\}, \{\chi_{t+1,k}\}) = z_{ti}^{\varepsilon} \& \chi_1^{[i]_n} \& \dots \& \chi_{\lceil \log c_1 n \rceil}^{[i]_n} \& \lambda_1^{[j]_n} \& \dots \& \lambda_{\lceil \log c_2 n \rceil}^{[j]_n} \rightarrow \\ \rightarrow \chi_{t+1,1}^{[\gamma(\varepsilon,j)]_1} \& \dots \& \chi_{t+1, \lceil \log c_1 n \rceil}^{[\gamma(\varepsilon,j)]_1}.$$

Ha minden $G_{t,i,j,\varepsilon}$ formulát $\&$ jellel összekapcsolunk, akkor még mindig csak egy n^c hosszúságú formulánk lesz (c konstans). Ez a G_γ formula fejezi azt ki, mit csinál a γ függvény.

Ugyanígy kell venni

$$G_{\sigma_M} \text{ és } G_{\sigma_Y}$$

formulákat. Végül a 3. Tétel bizonyításában szereplő formula a következő.

$$F = G_{\sigma_M} \& G_{\sigma_Y} \& G_\gamma \& (z_{01} \leftrightarrow x_1) \& \dots \& (z_{0n} \leftrightarrow x_n) \&$$

$$\& (z_{0n+1} \leftrightarrow y_1) \& (z_{02n} \leftrightarrow y_n) \& z_{n0}.$$

Az utolsó tag azt fejezi ki, hogy a számolás végén a memória első pozíciójában 1 van, amit az $y \in A_x$? kérdésre adott pozitív válaszként értékelhetünk.

IRODALOM

1. R. KARP: Reduceibility among combinatorial problems. Complexity of computer computations, ed. R. E. Miller and J. W. Thatcher, N. Y., 1972. Plenum Press. 85–104. pp.
2. COOK, S.: The complexity of theorem-proving procedures, Conf. Record of Third ACM Symp. on the Theory of Computing (1970) 151–158. pp.
3. Л. А. ЛЕВИН: Универсальные переборные задачи. Доклады Академии Наук.
4. A. R. MEYER—L. J. STOCKMAYER: Word problems requiring exponential time. Proc. of Fifth Annual ACM Symp. on Th. of Computing Austin, Texas, April 3–May 2, 1973. 1–9. pp.
5. PÉTER RÓZSA: Rekursive Funktionen. Budapest, 1951. Akadémiai Kiadó.
6. А. Н. КОЛМОГОРОВ—В. А. УСПЕНСКИЙ: К определению алгоритма. Успехи М. Н. 82 3–28. стр.

ON PROBLEMS SOLVABLE BY SEARCH

Hopeless as it seems to find an algorithm with an acceptable number of steps for some problems (as e. g. the problem of the travelling salesman), still no theoremes exist that could give some non-trivial lower bounds for the necessary time, number of steps, memory etc. for the solution of such problems. Of course, for stating such a theorem the exact definition of an algorithm is essential. This notion has been applied in mathematical logics in so far.

A research trend „computer science” deals with these difficult questions. This research verges on mathematical logics and practical operations research. In the last couple of years new results have been emerging creating a widespread echo. A very broad scale of problems can be determined, and it can be proved about quite a few problems that

their solution is — within their group — the most difficult. We are considering problems that are evidently, absolutely solvable but every solution contains trials with steps of exponential number (as e. g. the problem of the travelling salesman).

The main part of the article makes an attempt to clarify the intuitive contents of the notions and statements. The appendix makes it theoretically possible to formalize the whole main part.

О ЗАДАЧАХ, РАЗРЕШИМЫХ ПЕРЕБОРОМ

Каким бы безнадежным ни казалось найти алгоритм с приемлемым количеством шагов к некоторым задачам (например, к проблеме коммивояжера), не имеем еще таких теорем, которые дают нетривиальную нижнюю оценку для времени, количества шагов, памяти и т. п. необходимого к решению данной задачи. Конечно, для установления такой теоремы надо дать точное определение понятия алгоритма. До сих пор, в первую очередь математическая логика использовала это понятие. Возникающими трудными вопросами занимается так называемый «Computer Science», стоящий на границе математической логики и практического исследования операций. В последних годах родились интересные результаты. Можно определить широкую категорию задач и можно доказать о много известных задачах, что они являются внутри категории самыми трудными. Здесь речь идет о таких задачах, о которых знаем, что разрешимые, но каждое известное решение содержит экспоненциальное количество шагов (например, проблема коммивояжера).

Основная часть статьи освещает интуитивное содержание понятий и определений. Приложение в принципе допускает формализацию основной части.

KÖNYVEKRŐL

R. J. BALL (szerk.): *The international linkage of national economic models* Amsterdam, 1973. North Holland Publishing Co. 467 p.

A kiadvány első ízben foglalja össze mindazt, ami különálló országmodellek egységes ökonometriai „világkereskedelmi modellé” való összekapcsolásának programjáról („link project”) mindeddig csak elszórt cikkek, ENSZ-anyagok vagy Ökonometriai Konferenciák előadásainak szövege alapján vált ismeretessé, ill. volt hozzáférhető az utóbbi években. A könyv a kiadóvállalat közismert „Contributions to economic analysis” c. sorozatának egyik tagjaként jelent meg. Szerkesztője, J. Ball, egyike azoknak, akik 1961-ben Anglia első ökonometriai modelljét (az Oxford-modellt) készítették. A szerzők egyébként (pl. L. R. Klein, R. R. Rhomberg, B. G. Hickman, J. Waelbroeck, C. Moriguchi, hogy csak a legnevezetesebbeket említsük), különböző ökonometriai szakemberei, akiket a közösmunka egy kutatócsoportba kapcsol össze.

A megjelent kötet voltaképpen annak a fogalmi keretnek, illetve rendszernek részletes bemutatását és elemzését kívánja nyújtani, amely az egyes országok modelljeit összekapcsolja — abból a célból, hogy ezáltal a világkereskedelem alakulásának jobb előrejelzését, valamint a világgazdasági konjunktúra továbbgyűrűző hatásainak hűségesebb nyomon követését meg tudják valósítani. Ezt az első kötetet a tervek szerint egy második fogja követni, mely a programban résztvevő országok ökonometriai modelljeinek részletesebb bemutatását előozza majd. Ennek ellenére az első kötet is sok értékes tény-anyagot és több ökonometriai modellt (becslési eredményeket is) mutat be. A program ismertetésekor elsősorban a fogalmi kereteket és elképzeléseket, elveket szükséges bemutatni. A mű 5 részből (összesen 13 fejezetből) áll. A fentieket tartva szem előtt, a mondani-

való lényegét az I., II. és V. rész tartalmazza; a III. és IV. rész inkább illusztratív jellegű.

A Bevezetés a terv létrejöttének körülményeit, előzményeit ismerteti 1968-ig visszamenően. Az eredeti terv alap gondolata az volt, hogy az országmodellek kapcsolatait csupán külkereskedelmi egyenletek segítségével biztosítsák; másrészt elismerést nyert az az elv, hogy minden ökonométer a saját országa gazdasági viszonyait ismeri a legjobban, tehát az a legmegfelelőbb megoldás, ha már meglevő, különálló modelleket igyekeznek egységes és standard elvek és módszerek alapján összekapcsolni, semmint szigorúan azonos alakú modellt készíteni a programban szereplő valamennyi ország számára. Ez az indítás nem nélkülöz bizonyos merészséget; a terv megvalósítása azonban különféle egyszerűsítéseket követel meg. Problémát okoz az is, hogy a modell realitása megkívánja a reálszféra változóiin kívül tőkeáramlások, pénzügyi változók, költségvetési és fizetési mérlegváltozók, valamint hitel-változók specifikációját is. A „link project”-ben egyébként a következő országok szerepelnek: Ausztria, Belgium, Kanada, Finnország, Nyugatnémetország, Olaszország, Hollandia, Japán, Svédország, az Egyesült Királyság és az Egyesült Államok. Minden egyes országban általában több tudományos intézmény tevékenykedik a témában; a munka elsősorban egyetemeken és iszke alatt folyik.

Az országmodellek egységes „kereskedelmi modellé” való összekapcsolását, illetve ennek egyik módozatát a II. rész mutatja be. A világgazdaság kölcsönösen összefüggő rendszerének egyetlen modellé való aggregálása, mindazokkal a részletekkel együtt, amelyek a mechanizmus funkcionálását kifejezésre juttatnák: a jelenlegi adottságok mellett lehetetlenség. Az egyszerűsítés szükségzerűen abba az irányba vezet, hogy olyan változókat, amelyeket értelem szerint endogénnek kellene tekin-

teni, exogénnek feltételeznek; más szóval: nem magyarázzák meg azokat, amelyeket jelenleg nem tudnak függvényalakban magyarázni (a központi jegybank szerepe, a kormányzat gazdaságpolitikája, valutaátszámítási kulcsok stb.) Ezek az exogén változók az egyes országok belső gazdasági változásait, így az export és import volumenét, a külkereskedelmi árák és mérleg alakulását befolyásolják („national models”). A szűkebb értelemben vett „kereskedelmi modell” a nemzetközi kereskedelem tárgyát tevő árucikkek ill. termékek volumenét és árát magyarázza („trade model”).

A világkereskedelem modellje az egyes világ gazdasági régiók között végbemenő termékcseréket veszi elsősorban figyelembe. A nehézség nem is a régiók számában, hanem a megfigyelt árucikkek számában, vagyis a modell dezaggregáció-fokának a meghatározásában van. A probléma lényege, hogy akár négy, akár húsz árucsoportra bontják fel az exportot és az importot, nem érhető el, hogy a megfigyelések homogén árukra vonatkozzanak. Ennek természetesen többféle előnye volna: elsősorban az, hogy — ha eltekintünk a szállítási és egyéb járulékos költségektől — a homogén árucikk egyetlen világpiaci árával is számolhatnánk. Eszerint minden egyes régióban minden homogén árucsoportra fel kellene írni egy keresleti összefüggést az áruvolumenre és az árra, valamint egy kínálati összefüggést ugyanerre a két jelenségre. A keresleti összefüggések summája az összes keresletet (world demand), a kínálati összefüggéseké az összes kínálatot (world supply) adná, aminek alapján az áru egyensúlyi árát is meg lehetne határozni. Attól függően, hogy az illető árucikkből az egyes régiók kereslete vagy kínálati nagyobb, függne importáló vagy exportáló szerepük. Természetesen, a valóságban a dolgok nem ilyen egyszerűek. A legtöbb ország (jóformán valamennyi árucsoportban) exportőr és importőr is; nemcsak a nyersanyagok vonatkozásában, hanem pl. gépek, textíliák vonatkozásában is. Nem is beszélve a különböző szállítási és vámköltségekről, amelyek ugyanannak az árunak az árát régióként különbözőképpen alakítják. Mindez oda vezet, hogy a különböző régióban gyártott, bár azonos árucsoportba tartozó árukat különböző termékeknek kell tekinteni. Ez a felfogás viszont azt eredményezi, hogy különbséget kell tenni az árucikkek (goods) és a termékek (products) között: az árucikk ebben az esetben az árucsoportot jelenti, míg a meghatározott régióban előállított árucikk a termék. Minden régióra nézve figyelembe

kellene tehát venni valamennyi régió terméke iránt megnyilvánuló keresletet (n régió és m termék esetében nm termék van és n^2m számú keresleti függvényre volna szükség, míg a kínálati egyenletek száma nm lenne). Ez volna az „ideális” világkereskedelmi modell.

A részletesebb bemutatás annak a demonstrációját szolgálta, hogy a gyakorlatban ez az út nem járható, hanem további egyszerűsítésekre is szükség van. A szerző ezek közül különösen kettőt hangsúlyoz: hogy a helyettesítési elaszticitás az egy árucsoportba tartozó áruk között mindenütt konstansnak, és két-két termék között azonosnak vélelmezendő. Valamely régióknak meghatározott termék iránti kereslete tehát úgy fejezhető ki, mint a régió árucsoportja iránt megnyilvánuló kereslet konstans részaránya. Lényegesen egyszerűbb az exportképességen kifejezésre jutó kínálat meghatározása. Ha a modell a tiszta versenyt feltételezi, a termék kínálati legcélzerűbben termelési függvények vagy exportár-egyenletek segítségével írható le. Így válik képessé a modell a belföldi gazdasági tevékenység és a külkereskedelmi összefüggések szimultán vizsgálatára, ill. a kettő összekapcsolására: a világpiaci keresletet a régiók kereslete adja, figyelembe véve ezeknek a piaci volumenben viselt részarányát és relatív export-árakat. A világpiaci kereslet és a kínálati ár ugyanakkor az exportvolumen és implícite az import-árakat (az export-árakon keresztül) határozza meg.

A mű következő két fejezetében a modellek összekapcsolásának néhány módszertani kérdését tárgyalják. Ha az elméleti alapok már tisztázottak, a főfeladat az adatbázis biztosítása, illetve a számítások elvégzése, ami — tekintve a modell változóinak igen nagy számát — számítógépek alkalmazásával sem csekély feladat. Az alkalmazott módszer ebben az esetben a „trial and error” és az iteráció volt.

A világkereskedelmi modell építőkövei tehát a „link project”-ben résztvevő országoknak a modelljei. A fejlődő országokra az UNCTAD dolgoz ki modelleket, amelyek ugyancsak integráns részét képezik a világkereskedelmi modelleknek. Az egyes országmodellek az alábbi gazdasági szférákat vizsgálják: fogyasztás, állóeszköz-beruházások, lakásépítés, termelés és foglalkoztatottság, jövedelem és árák, valamint a pénzügyi szektor összefüggései. Bár a modellek eszerint hasonló elgondolások alapján épültek, egyenleteik és változók számát, egyéb strukturális-morfológiai sajátosságait tekintve azonban (így időhorizontjukat is), erősen különböznek egymás-

tól. Ezek a sajátosságok a mű 5. fejezetében táblázatos formában szemlélhetők.

Különös érdeklődésre tarthat számot a könyv hatodik fejezete, mely az UNCTAD által kísérletképpen három fejlődő országra kidolgozott modellt tartalmazza: Argentínára (1955—1969) 101 egyenlettel; Indiára (1951—1969) 71 egyenlettel és Nigériára (1955—1966) 37 egyenlettel. Az egyöntetű megoldás érdekében az a javaslat született, hogy a fejlődő országokat négy régióba sorolják (Latinamerika; Afrika Líbia nélkül; Nyugatázsia és Líbia; Dél- és Keletázsia), s mind a négy régióra azonos típusú (20 egyenletes) modellt dolgozzanak ki. Egy másik javaslat (7. fejezet, G. B. Taplin tollából) a világot 27 régióra osztja fel (25 kapitalista ország, a KGST-országok és a világ többi része), s a 27 régióra nézve különböző összefüggéseket meg is becült. Ezek táblázatos formában láthatók is. A modellre szimulációs kísérleteket, sőt 1970-re előrejelzést is végeztek.

A munka III—IV. része különböző modellkísérletekről számol be: árucsereforegalmi egyenletek (export és import), a nemzetközi tőkeáramlás egyenletei, a szolgáltatások árucseréje, a láthatatlan export és import egyenletei képezik ennek a résznek az anyagát, — amely minden érdekessége mellett csupán kísérletnek tekinthető, bár nem elméleti összefüggésekről, hanem statisztikailag verifikált egyenletekről van szó. Módszertani szempontból nem kevésbé fontos a 11—12. fejezetek anyaga, amely különböző nemzetgazdaságok bilaterális összehasonlításának, illetve összekapcsolásának módját írja le, és két gyakorlati példa segítségével illusztrálja: az Egyesült Államok és Japán, valamint Kanada és az Egyesült Államok példáján keresztül.

A mű V. része (a 13. fejezet) végül röviden azokról a kísérletekről számol be, amelyek a meglevő adatbázis és az aggregáció három különböző szintjén az eddigi modellek alapján a világkereskedelem alakulásának előrejelzését célozzák. Figyelemre méltó, hogy a leginkább dezagregált változat blokk-rekurzív sémát követ, ami a modell kezelését, illetve a számításokat lényegesen megkönnyíti.

NYÁRY ZSIGMOND

HALABUK L.—HULYÁK K.—NYÁRY Zs.—KOTÁSZ GY.: *A magyar népgazdaság M-2. ökonometriai modellje*. Budapest 1973. Akadémiai Kiadó, 224. o.

A Központi Statisztikai Hivatal Ökonometriai Laboratóriuma az elmúlt évek során úttörő munkát végzett mind az elméleti,

mind a gyakorlati ökonometria terén. A Laboratórium munkatársai kettős célt tűztek maguk elé: egyrészt kutatják az ökonometria gyorsan fejlődő módszertanát, másrészt pedig adaptálják ezeket a módszereket, vizsgálják gyakorlati alkalmazásuk lehetőségeit és konkrét, numerikus modelleket dolgoznak ki. Ezzel a tevékenységükkel egyedül állnak a hazai matematikai-közgazdászok között és következetes kutatási irányvonalukkal szinte iskolát teremtettek maguk körül.

A Laboratórium szocialista viszonylatban elsők között dolgozott ki népgazdasági szintű ökonometriai modellt (M—1) és ennek szerves folytatásaként készítette el a részletesebb módszertani szempontból megalapozottabb, kidolgozottabb M—2. modellt. Az M—2. modell kidolgozása során a Laboratórium munkatársai meghonosítottak egy sor korszerű — nálunk korábban alig ismert — módszert, sőt kidolgoztak is alkalmaztak új módszereket is. Az M—2. modell jelentős mérföldkő az ökonometria magyarországi fejlődésében: az első numerikusan kimunkált, gazdaságpolitikai következtetések levonására is alkalmas népgazdasági szintű ökonometriai modell és ugyanakkor a korszerű ökonometriai módszerek elterjedésének elősegítője és egyben gyakorlati próbaköve is. Az M—2 modell ezen túlmenően ösztönzője és kiindulópontja volt más hasonló modellek — egyebek közt egy a népgazdasági tervezés céljait szolgáló modell — kidolgozásának is.

A Laboratórium munkatársaiból alakult szerzőkollektíva ebben a könyvben jól érzékelteti a modellnek ezt a kettős szerepét. Bár a hangsúly a konkrét modellen van, így a könyv szerkezete követi a modellépítés fázisait, ugyanakkor az egyes elméleti kérdések megtárgyalásánál a szerzők bepillantást engednek az ökonometria módszertanába is. A könyv szerkezetét tekintve tehát egy esettanulmány, amely a modellezés egyes lépésein végighaladva részletekbe menően ismerteti az adott modellt és érinti az egyes fázisok módszertani vonatkozásait is.

A bevezető részben a szerzők a modellezés előzményeivel és környezetével foglalkoznak. Az ökonometria rövid történeti áttekintése után megadják azokat a speciális jellemvonásokat, amelyek az ökonometriai modelleket megkülönböztetik más gazdasági modellektől. Ismertetik a szocialista országokban folyó modellezési munkát különös tekintettel az ökonometriai modellezésre. Így vázlatosan bemutatják a Lengyelországban, az Ukrán SzSzK-ban és Csehszlovákiában készült ökonometriai

modelleket és említést tesznek a magyarországi ökonometriai kutatások irányairól is.

Az ökonometriai modellek alkalmazási lehetőségeiről a szocialista gazdaság körülményei között régóta vita folyik. A szerzők tulajdonképpen ebben a vitában foglalnak állást konstruktív módon, hiszen a második fejezet éppen ezekkel a kérdésekkel foglalkozik. A modell három fontos alkalmazási területét említik meg: a báziselemzést, a prognóziskészítést és a szimulációs vizsgálatokat. Foglalkoznak azzal a kérdéssel is, hogy az adott időszakban vizsgálható-e a népgazdaság ilyen modell segítségével és erre a kérdésre óvatos pozitív választ adnak. Bár csak érintőlegesen foglalkoznak a statisztikai adatok gyűjtésével, az olvasó számára érzékelhetővé válik, hogy ez a gyakorlati modellezés egyik igen nehéz kérdése. Kiemelten tárgyalják az időjárás hatását kifejező mutató elkészítésének módját, mivel ennek a módszernek a kidolgozása a szerzők nevéhez fűződik.

A modellkészítés érdemi szakasza a specifikáció kialakításával kezdődik. A specifikációval foglalkozó fejezet terjedelme és részletessége tanúsítja, hogy a szerzők milyen fontos szerepet tulajdonítanak a helyes specifikáció kialakításának. Az induló specifikáció leírásánál válaszolják azokat a főbb közgazdasági célkitűzéseket, amelyek alapján a modell egyenletrendszerét kialakították. Ennél már természetesen figyelembe vették az információs bázis adottságait is. A specifikációs elemzés során a modellkészítők arra keresnek választ, hogy a kiinduló hipotézisek helytállóak-e, a modell konform-e a gazdasági valósággal. Az elemzés során megvizsgálják a legfontosabb specifikációs hibákat és ennek megfelelően módosítják az induló elképzeléseket, illetve választják meg a paraméterbeeslő eljárást. Vizsgálják az egyes változók szignifikanciáját, a magyarázó változók közti multikollinearitást, a zavarok autokorrelációját. Itt térnek ki a szimultán egyenletekből álló modellek fontosabb tulajdonságaira, röviden érintik a strukturális, a redukált és a végső formák viszonyát, és foglalkoznak az indentifikáció alapvető kérdéseivel is.

Az induló specifikációnak az elemzés eredményei alapján történt módosításaival alakul ki a modell végső specifikációja, mely szerint az M-2. modell 26 egyenletet (ebből 23 sztochasztikus) és 58 változót (ebből 26 endogén) tartalmaz. A modell középpontjában a nemzeti jövedelem mérlege áll; ennek egyes tételeihez kapcsolódnak a modell változói. A végleges specifikációban 8 ágazat termelési egyenlete sze-

repel, jobbra a hagyományos termelési függvény változókkal. A lakosság fogyasztását 6 árucsoportra vizsgálják, külön kezelik az összes fogyasztást, valamint a takarékbetét állományának növekedését. A foglalkoztatott munkaerő létszámát 4 ágazatos bontásban kezelik, egy egyenlet írja le a reáljövedelem képződését, kettő pedig az export, illetve az import alakulását. A modell adatbázisát a változók 1950–1967-ig terjedő idősorai alkotják, így a modell a régi irányítási rendszernek megfelelő szerkezetet tükrözi. Mivel a modellel az 1970–75-ös évekre kívánnak előrejelezni, a modellel nem szerepelnek pénzügyi folyamatok, hiszen ezek jellege a két időszakban eltérően alakul. Szerkezetét tekintve a modell egy nagyméretű, dinamikus, túlidentifikált szimultán egyenletekből álló ökonometriai modell.

Bár az ökonometriai modellezés leglényegesebb eleme a paraméterbecslés, a szerzők viszonylag kis terjedelemben foglalkoztak ezzel a kérdéssel. A becslésmódot alapvető kategóriáinak tisztázása után bemutatják az ökonometria fontosabb becslési eljárásait. Így röviden érintik a klasszikus, az általánosított és a közvetett legkisebb négyzetek módszerét. A korlátozott információ alululó becslések közül a kétfokozatú legkisebb négyzetek módszerét fejtik ki részletesebben, a többi módszerrel csak érintőlegesen foglalkoznak. Bár az M-2. számításai során nem alkalmazták a teljes információ alululó módszereket, a fontosabb eljárásokról említést tesznek. A gyakorlati modellezés számára különösen érdekes az a rész, amely a nagyméretű modellek speciális becslési eljárásaival (instrumentális változók, főkomponensek módszere) foglalkozik. A modellszámítás során a különböző egyenletek becsléséhez a klasszikus és az első differenciákon alapuló legkisebb négyzetek, valamint az instrumentális változók és a főkomponensek módszerét alkalmazták. A numerikus becslési eredményeket jól áttekinthető, szemléletes táblázatokban közlik. Az egyes becslési eljárásokat főként a számítástechnikai kezelhetőség és a paraméterek szignifikanciája alapján értékeli.

A numerikus modell első fontos — a gyakorlat számára is közvetlenül felhasználható — eredménye a paraméterek számszerű értéke. A szerzők egyenletenként vizsgálják a megfelelő paraméterek közgazdasági jelentését, azokból figyelemre méltó következtetéseket vonnak le. Különösen értékesek az egyes paraméterek számszerű értékei, amelyek a hagyományos regressziós együtthatókhoz hasonlóan értelmezhetők, de értékeikben tükröződnek

a modell más egyenletei által kifejezett hatások is.

A könyv legterjedelmesebb fejezete az előrebecslés kérdéseivel foglalkozik. Mivel az elméleti ökonometriai könyvnek viszonylag kevesebb figyelmet fordítanak az előrebecslésre, teljes mértékben érthető, hogy a szerzők az ezzel kapcsolatos kérdéseket alaposabban tárgyalják. Az előrebecsléssel foglalkozó fejezet súlyát az is indokolja, hogy a szerzők a modellkészítés során főként a gyakorlat igényeit tartották szem előtt; a gyakorlat számára pedig — figyelembe véve a tervezésben betöltött fontos szerepet — a modell legfontosabb információs eredménye az előrejelzés. Részletesen foglalkoznak az előrebecslés hibáinak megállapításával; az előrebecslés pontosságának jellemzésére felhasználják az információelmélet kidolgozott módszereket is. A modell numerikus tulajdonságainak vizsgálatára az 1968 és 1969 évekre ex post vizsgálatokat készítettek, amelyek eredményei alapján módosították a modell struktúráját. A vizsgálatok fő eredménye abban foglalható össze, hogy a módosított struktúra a változók nagy része esetében jó becslést szolgáltat, így alkalmas ex ante előrebecslésre.

A modellszámítás mádik fontos — az M—2. modell esetében legfontosabb — felhasználási területe a prognózisok készítése. Az M—2. modellel a szerzők az 1970—1975 időszakra készítettek prognózist két fő változatban. Az egyik változatnál a predeterminált változók előrebecslésénél úgy jártak el, hogy fő kritériumként a minta-időszaki illeszkedés jóságát tekintették. Ez a változat tehát a megfigyelési időszak tendenciáit vetítik ki. A második változatnál a predeterminált változók előrebecslését a IV. ötéves terv nyilvánosságra hozott számaihoz igazították. A változatok egymástól, illetve a tervtől való eltéréseit összehasonlító táblázatokban elemzik.

A könyvet gazdag, és a legújabb eredményeket is tartalmazó irodalomjegyzék zárja.

A könyv elsősorban olyan közgazdászok számára íródott, akik korábban a matematikai modellezés más területeivel már foglalkoztak. Ezek száma nem kicsi, hiszen egyéb matematikai módszereket (pl. programozás, input-output technika) széles körben alkalmaznak közgazdasági kutatásokban, ugyanakkor az ökonometria művelőinek táborába igen szűk. A modellezés általános kérdéseiben, a lineáris algebraiban és a valószínűségszámításban valamelyest járatos olvasó számára igen hasznos útmutatást ad az ökonometriai modellek kidolgozásához. Így ez a jól olvasható, a fölösleges

szakmai zsargonokat és a vulgarizálást egyaránt elkerülő mű elsősorban a gyakorlati szakemberek munkájához nyújthat segítséget, ugyanakkor felkeltheti az érdeklődést az ökonometria elméleti kérdései iránt is.

Végül két kritikai megjegyzést teszek a könyvvel kapcsolatban. Az egyik alapja az, hogy Magyarországon köztudomásúan hiány van ökonometria elméleti munkákban; magyar nyelven még nem jelent meg ilyen és a külföldi kiadású munkákhoz nehéz hozzájutni. Ismerve a szerzők alapos és mélyreható elméleti kutatásait bizonyos, hogy igen színvonalas összefoglaló, rendszerező fejezetet tudtak volna összeállítani az ökonometria elméletének fontosabb kérdéseiről. Sajnos egy ilyen fejezet hiányzik a könyvből, bár igaz, hogy ez megbontotta volna a mű igen logikus szerkezetét. A másik megjegyzés inkább formai jellegű: a könyv talán túlságosan tagolt; a sok fejezet, alfejezet, rész, számozott bekezdés néha megnehezíti az áttekintést.

A fenti két megjegyzés természetesen nem csökkenti a könyv érdemeit, amelyről el kell még mondani, hogy az első olyan összefoglaló mű, amely a klasszikus ökonometria tárgykörében magyar szerzők tollából napvilágot látott és az ökonometriai modellezés hazai gyakorlatát és eredményeit magas színvonalon reprezentálja.

HUNYADI LÁSZLÓ

HARROD, R.: *Economic Dynamics*. London, 1973. MacMullan-St. Marin's Press, 195 p.

Roy Harrod nagy érdeklődést kiváltó könyve „A dinamikus közgazdaságtan felé” 1948-ban jelent meg első ízben. Az elmúlt negyedszázad folyamán a könyv számos újabb kiadást ért meg, és több nyelvre is lefordították. A szerző eredeti szándéka az volt, hogy az érdeklődésre való tekintettel elkészíti az eredeti mű átdolgozott és bővített kiadását. A közgazdaságtudomány legújabb fejleményei azonban arra késztették, hogy az átdolgozás helyett egy egészen új könyvet írjon. Az új könyv megírásával az volt a célja, hogy a statikus közgazdaságtan alpmunkáihoz hasonlóan mintegy kézikönyvet készítsen a dinamikus közgazdaságtan problémái iránt érdeklődők számára. Véleménye szerint ugyanis az elmúlt száz év során a közgazdászok figyelmüket elsősorban a statikus közgazdaságtan alapelvei tökéletesítésére koncentrálták. Nem kivétel ez alól J. M. Keynes sem, aki nem foglalkozott dinamikus elmélettel, bár néhány új gondolatnak ő volt az elindítója.

tója. Ezért Harrod Keynest olyan átmeneti személyiségnek tekinti, aki csak történeti szempontból jelentős a közgazdaságtan elmélete számára. Továbbá Harrod hangsúlyozza azt is, hogy a dinamikus közgazdaságtan elvei kifejtéséért Adam Smithig, David Ricardóig és követőikig kell visszamenni.

Ezen szerzők művei, elméletei, nagyfokú elnagyoltságuk következtében az idők folyamán háttérbe szorultak és velük együtt a tartó pillérül szolgáló dinamikus elmélet is. Tulajdonképpen ez a fejlemény vezetett oda, hogy a dinamikus közgazdaságtan alapelveinek, axiómáinak kidolgozása, a statikus közgazdaságtannal ellentétben, nem történt meg. Ez a magyarázata annak is, hogy a jelenlegi oktatás alapját képező közgazdaságtan, a Keynesi tanokkal együtt alapvetően statikus. Harrod véleménye szerint az a tétel miszerint Keynes elmélete dinamikusabb, mint Ricardóé, teljesen hibás. A dinamikus szemlélet háttérbe szorulását az a körülmény is elősegítette, hogy Walras, Pareto és Alfred Marshall munkáiban kifejtett határhaszon és határtermelékenység elmélet igen nagy hatással volt a korabeli közgazdászok gondolkodására.

A közgazdasági elmélet fejlődése jelenlegi szakaszában is számos tényező fékezi a dinamikus szemlélet elterjedését. Az elmúlt évek során a növekedés-gazdaságtan igen népszerűvé vált. Az ilyen szellemben készült elemzések ma már egyre inkább nemcsak az anyagi javak bővülésére koncentrálnak, hanem a jólét (welfare) olyan elemeire is, amelyeket a GNP nem tükröz. Éppen ezért fennáll annak a veszélye, hogy a további kutatás elsősorban ebben az irányban fókuszódik, a dinamikus szemlélet elhanyagolásával. Nem segíti a dinamikus szemlélet kibontakozását Keynes és a neoklasszikusok szembeállításai sem. Ez Harrod véleménye szerint értelmetlen dolog, hiszen a két iskola külön területtel foglalkozik. Ugyanígy nem segíti a tisztánlátást a mikro- és makroközgazdaságtan megkülönböztetése, hiszen ez a felosztás semmit nem mond a megközelítés dinamikus vagy statikus jellegéről. Hasonló következményekkel jár Keynes és a monetaristák szembeállításai.

A dinamikus szemlélet az utóbbi időben mindezek ellenére egyre inkább tért nyert. A statikus és dinamikus megközelítés különbségét Harrod a következőkben látja. A statikus közgazdaságtan a nyugalmi állapotot vizsgálja, pontosabban azt, hogy ha egy gazdaságban a termelő erőforrások, a technikai színvonal és az egyének preferenciái adottak, hogyan történik az erő-

források felosztása az egyes felhasználási kategóriák között, milyen árak alakulnak ki az erőforrások és késztermékek vonatkozásában. A feltételezések szerint az egyensúlyi állapotot a piac teremti meg. Bizonyos esetekben több egyensúlyi állapot is létezhet. Más kérdés az, hogy a létrejövő egyensúlyi állapot a gazdasági optimumot képviseli-e, amit Pareto optimumnak szokás nevezni.

Igen fontos leszögezni azt, hogy két egyensúlyi állapot közötti átmenet nem tartozik a dinamikus közgazdaságtan körébe. A dinamikus közgazdaságtan mikro szinten az egyes árak iránti keresletváltozás ütemével, makro szinten pedig a fontosabb keresleti tényezők, beruházás, export stb. változásának ütemével foglalkozik. Ezekre a kérdésekre a szerző szerint Keynes sem adja meg a választ.

A következőkben a szerző a dinamikus közgazdaságtan alapegyenleteivel foglalkozik.

Az első egyenlet $G = \frac{s}{c}$, ahol a G a növekedési ütemet, s a megtakarítási hányadot, és C a növekmény tőke/termelés hányadot jelöli, nem más mint annak a ténynek a dinamizált változata, hogy a beruházás szükségyszerűen mindig egyenlő a megtakarítással.

A második egyenlet az úgynevezett garantált növekedési ütem, G_w meghatározására szolgál: $G_w = \frac{s_d}{C_r}$. Ez annyiban

tér el a fenti egyenlettől, hogy az s_d olyan megtakarítási hányadot jelöl, amelyet az emberek önszántukból vállalnak.

Ennek értelmében az egyenlet a magára hagyott (laissez-faire) kapitalista gazdaság feltételeit írja le, ahol a növekedési ütemet a lakosság önkéntes megtakarítása határozza meg.

A harmadik egyenlet a társadalmilag optimális növekedési ütemre, a G_n -re vonatkozik. A G_n a „természetes” növekedési ütem, ami a gazdasági potenciál alakulását jelzi két tényező, a munkaképes népesség és a technikai haladás függvényében alakul. A fenti összefüggés ebben az esetben:

$$G_n = \frac{s_0}{C_r}$$

Az egyenlet az alábbi formára átrendezve $s_0 = G_n C_r$, hűen kifejezi azt a koncepciót, amely szerint nem a megtakarítás határozza meg a növekedési ütemet, mint a fenti esetben, hanem fordítva. A növekedési ütemet a népességnövekedés és a technikai haladás, a megtakarítási hányadot viszont a növekedési ütem határozza meg. Ez a megfogalmazás már utal arra, hogy a

gazdaságpolitika nagymértékben hozzájárulhat a növekedési ütem gyorsításához a megfelelő megtakarítás biztosításával. Ebből a szempontból a költségvetési politikának központi szerepe van.

A szerző véleménye szerint a statikus közgazdaságtan képtelen megbirkózni olyan problémákkal, mint hogy mi történik a garantált növekedési ütemmel, ha a megtakarítás nő. Számos közgazdász úgy érvelne, hogy ilyen esetben az emelkedő megtakarítások következtében süllyedő kamatláb hatására emelkedne a tőke-termelés hányadosa és következésképpen a Gw értéke változatlan maradna. Ez a válasz azonban nem fogadható el.

A következőkben a szerző éppen az ő nevével kapcsolatban híressé vált instabilitási elvvel foglalkozik, amelyet gyakran „késél” (knife edge) problémának is neveznek. Ennek értelmében a fenti egyenletek által leírt gazdaság csak akkor marad dinamikus egyensúlyban, ha a paraméterek éppen megfelelnek az egyensúlyi értékeknek. Ellenkező esetben a belső erők abba az irányba hatnak, hogy a gazdaság minél távolabb kerüljön az egyensúlyi pályától. Tehát az egyensúlyi pályán való haladás a „kés élén” történő haladáshoz hasonlítható. A probléma részletes kifejtése során a szerző annak a meggyőződésének ad hangot, hogy a beavatkozás vagy irányítás nélküli, laissez-faire tőkés gazdaságban a „garantált” növekedési ütem instabil és éppen ez a konjunktúraviklusok alapvető oka.

Ezt követően Harrod a dinamikus közgazdaságtan alapegyenleteinek változóival foglalkozik. Így külön fejezetet szentel a tőke/termelés hányadossal kapcsolatos problémákra. Részletesen elemzi a kamat szerepét is a növekedési folyamatban, hiszen a klasszikus elmélet szerint éppen a kamat biztosítja a tőke iránti kereslet és a tőkekinálat egyensúlyát. Véleménye szerint azonban ma a gazdasági életben a kamatnak igen kis hatása lehet a tőkeintenzitásra, valamint a termelési technológiák kiválasztására.

Az inflációval foglalkozó 6. fejezetben igen érdekesen történelmi perspektívában mutatja be az árszínvonal alakulását. Hangsúlyozza, hogy napjaink folytonos inflációja csak a második világháború utáni időszakban tapasztalható. Példaként megemlíti, hogy Angliában az árszínvonal még 1933-ban sem volt magasabb az 1660 évi árszínvonalnál. Harrod állásfoglalása igen határozott és egyértelmű: az infláció elítélendő, rossz dolog és megfékezésére új fegyverre, hatékony jövedelempolitikára van szükség.

A továbbiakban a szerző részletesen és külön fejezetekben foglalkozik a külkereskedelem és a nemzetközi tőkemozgás problémáival. Ezt követi a 10. fejezet, amelyben Harrod általános áttekintést ad a dinamikus közgazdasági elmélet néhány axiómájáról. Elemzése középpontjában azok a feltételek állnak, amelyek teljesülése esetén a természetes és a garantált növekedési ütem egybe esnek,

$$\text{azaz } G_n = G_w.$$

Az általános áttekintést és egyben a könyvet is Harrod a közgazdászok előtt álló jövőbeni feladatok megfogalmazásával zárja. Az első és legfontosabb feladat szerinte a dinamikus közgazdaságtan axiómarendszerének kidolgozása, legalább olyan szinten, ahogy Alfred Marshall és Pareto a mikrostatika axiómáit kidolgozták. Második fontos feladat az, hogy a dinamikus megközelítésből kiindulva meg kell fogalmazni az egyes országok gazdaságpolitikái intézkedéseinek rendszerét. Harmadik feladatként Harrod a folyó események elemzésére szolgáló olyan módszerek kidolgozását és gyakorlati felhasználását tartja, amelyek a közgazdaságtan dinamikus elméletén alapszanak. Véleménye szerint ugyanis a gazdaságpolitikái intézkedések eddigi indokolása meglehetősen elégtelen.

NAGY SÁNDOR

Ekonométriceszkaja model razvitija narodnogo hozjajsztva Ukrainskoj SzSzsZr. Kiev, 1972. Ukrainszkij Filial Naucsnogo-Isszledovatelszkogo Insztituta Planirovanija i Normativov pri GOSZPLANE SzSzsZr. 131 p.

A Szobjetunió Állami Tervhivatala mellett működő Tudományos Kutatóintézet Ukrainszkij Filialjának 1972-ben A. Jemljanov és N. V. Kusnyirszkij vezetésével kidolgozták az Ukrán Köztársaság ökonometriai makromodelljét, az UKR-2-t. Ez a modell a köztársaság aggregált 15 egyenletből álló modelljét az UKR-1-et és a 13 egyenletből álló szövetségi modellt követően arra vállalkozott, hogy a népgazdaság bonyolult kölcsönkapcsolatait a tervezés igényeinek figyelembevételével foglalja egyenlet=rendszerbe. A népgazdaság tervezés igényeinek megfelelő modellrendszer a három szintű modellek képeznek. Az első szintet egy aggregált modell képviseli, amely a jellemző alapvető mutatók meghatározására szolgál. Ennek a fázisnak felel meg az 1970-ben készített UKR-1 modell, mely az Ukrán SzSzk népgazdaságát jellemző 15 mutató alakulását magyarázza

(társadalmi termék, megtermelt és felhasznált nemzeti jövedelem, felhalmozási alap, fogyasztási alap, termelő állóalapok volumene, beruházások, alkalmazottak létszáma, a köztársaság lakosságának száma, stb.) Az elmúlt időszakra kapott eredmények statisztikai vizsgálatát és közgazdasági elemzését követően meghatározták a modell eredményváltozóinak előrejelzett értékeit az 1971–1981 időszakra. Az 1971–75-ös időszakot átfogó kilencedik ötéves terv előirányzatai és a modellel kapott előrejelzések megegyezése azt igazolta, hogy a modell a fejlődés fő irányait nemcsak az elmúlt időszakra, hanem a jövőre nézve is helyesen ragadta meg.

Az UKR–1 modell kidolgozása során nyert tapasztalatok alapján 1971-ben elkészült a népgazdasági terv mutatói kiszámítására szolgáló modell-rendszerek második szintje, az UKR–2 modell. Ez a modell az UKR–1 modellel szembepló mutatókat ágazati bontásban tartalmazza, ugyanakkor magyarázza és speciális módon figyelembe veszi az összesített mutatókat is.

Végül, a harmadik szintet képviselő — a jövőben kidolgozásra kerülő — leginkább dezaggregált modellnek a második szint mutatóin kívül tartalmaznia kell az alapvető naturális mutatókat, a nem-anyagi szféra fejlődését jellemző mutatókat, továbbá a köztársaság lakosságának anyagi és kulturális életszínvonala emelését jellemző részletes mutatói rendszerét is.

Az UKR–2 modell 101 egyenletből áll, ezek hét kölesönösen összefüggő blokkra tagolódnak. A blokkok a következők: 1. ipar (12 egyenlet), 2. mező- és erdőgazdaság (14), 3. építőipar (13), szállítás és hírközlés (15), 5. kereskedelem és vendéglátóipar (13), 6. az anyagi termelés egyéb ágazatai (12), 7. a köztársaság összesített mutatói (22).

E felépítésből is látható, hogy a modell szerkezete az ágazati mutatók számításához kapcsolódik, ugyanakkor az összesített blokk mutatóinak segítségével — melyek számos esetben az ágazatoknál számított mutatók összegezésével állnak elő — lehetőség nyílik a népgazdasági szintű számítások elvégzésére is. Az egyes ágazati blokkok mutatói: a megfelelő ágazati termékek termelése (társadalmi termék, anyagi ráfordítások, nemzeti jövedelem, beruházások, nyereség), az állóalapok és beruházások (termelő állóalapok évközepe értéke, beruházások összege, amortizációs leírás), munkaerő (munkabérlap, alkalmazottak létszáma).

Az összesített blokk mutatóinak egy része a megfelelő ágazati mutatók aggregá-

lásából nyerhető, más részüket sztochasztikus egyenlet vizsgálja, melyek magyarázó változói maguk is népgazdasági szintű mutatók.

Az ágazati blokkokban az ipar és a mezőgazdaság kivételével a termelési függvények magyarázó változói között az ágazatban alkalmazott munkaerő volumene és a termelő állóalapok értéke szerepelnek. E változókon kívül az ipar termelési függvénye tartalmaz még egy trend tényezőt, amely a tudományos-technikai haladást képviseli, a mezőgazdaság termelési függvényében magyarázó változóként még a vetésterület szerepel.

A termelési függvényeken kívül szerepelnek az egyes blokkokban az anyagi ráfordítást, a termelő állóalapok értékét, az üzembehelyezett új állóalapokat, a beruházásokat, az amortizációt, a munkabérlapot és a létszámot, a nyereséget és a rentabilitást magyarázó egyenletek.

Ezenkívül az egyes blokkokban az ágazati sajátosságok kifejezésre-juttatására más változókra is szerepelnek sztochasztikus egyenletek. Így:

a mezőgazdaság blokkjában külön egyenlet magyarázza a vetésterület volumenét és a mezőgazdaság rendelkezésre bocsátott műtrágya volumenét;

az építőipari blokkban az építési-szerelési munkák volumenére felírt egyenlet jellemzi az ágazat sajátosságait;

a szállítás és hírközlés blokkjában a szállítás teherforgalmát, a szállítás utasforgalmát, továbbá a hírközlés termékvolumenét magyarázza sztochasztikus egyenlet;

a kereskedelmi és vendéglátóipar blokkjában a kiskereskedelmi áruforgalom egyenlete szerepel.

Az UKR–2 modell egyenleteinek együtthatóit a legkisebb négyzetek klasszikus módszerével, illetve ennek korlátozó feltételeket is alkalmazó változataival becsülték. Az utóbbi módszer alkalmazására akkor van szükség, amikor az elméleti közgazdaságtanból tudjuk, hogy a magyarázó változó értékének növekedése a függő változó értékének növekedéséhez kell hogy vezessen, például tudjuk, hogy a beruházás és a munkaerő növekedése (természetesen csak ésszerű növekedése) a termelés növeledéséhez kell, hogy vezessen. Ilyenkor az együttthatók lehetséges értékeinek tartományát le kell szűkíteni olyan módon, hogy kiköti a nemnegativitás feltételét. Ezt a becslési módszert alkalmazták például a társadalmi termék, a beruházások és a foglalkoztatottság egyenleteiben.

Módszertani szempontból említést érdemel még a paraméterek együttes feljavitásának módszere. Ennek az eljárásnak az al-

kalmazása a jövőre történő számítások javítása érdekében történt. Ekkor a regressziós együtthatóknak teljesíteniük kell azt a feltételt, hogy az egyenletrendszer megoldása eredményeképpen kapott értékek maximálisan közelítsék a mutatók tényleges értékeit.

Az 1959-től 1969-ig terjedő mintaidőszak adatai alapján a modell 101 egyenletére vonatkozóan kiszámították a determinációs együtthatókat, a paramétereket a hozzájuk tartozó standard hibákkal, a becslések százalékos hibáját és az autokorrelációs együtthatókat.

A determinációs együttható értéke az esetek többségében 90% felett van, tehát a kapcsolat szorosságát mutatja. Sikertelennek mondható viszont a mezőgazdaság blokkjában a nyereség alakulását magyarázó egyenlet, ahol az $R^2 = 4\%$.

A paraméterek standard hibái elfogadható intervallumokban mozognak, csak egyes esetekben fordul elő, hogy a hiba meghaladja a paraméter nagyságát.

A becslés százalékos hibája a vizsgált időszak folyamán a beruházások volumenének és az üzembehelyezett állóalapot volumenének kiszámításánál — amelyek inkább ki vannak téve a véletlen tényezők hatásának — a legnagyobb.

Érdekes megjegyezni, hogy az UKR—1 modellnél a becslés %-os hibáját kétféleképpen számították ki: először független változók tényadatai alapján, másodszer pedig a független változóknak a megelőző egyenletekből nyert értékei alapján. Amennyiben az első esetben kapott %-os hibákból az egyenletrendszer egészére számított átlag megközelíti azt az átlagos értéket, amelyet a második esetben kapunk és mindkét érték kicsi, akkor elfogadható, hogy a kiválasztott összefüggések helyesen tükrözik a mutatók alakulásának törvényszerűségeit. Az UKR—2 modell nagy mérete következtében csak a második változat szerint, vagyis a független változók regresszióértékei alapján történt a paraméterbecslés és a vonatkozó %-os hibák kiszámítása is. E hibák viszonylag nagy értékeit tartalmazó egyenletekben a reziduumok autokorrelációjára vonatkozó vizsgálatot is elvégezték és ha ezt jelentősnek találták, elvégezték a kiinduló adatsorok autoregresszív átalakítást.

Ez a transzformáció lehetővé tette, hogy csaknem mindegyik egyenletben a regresszióértékek és a tényleges értékek közötti eltérés csökkenjen, amellett, hogy az autokorreláció értéke is a megengedett határok között mozog.

Érdeklődésre tarthat számot az egyenletek egymástól függetlenül való becslésé-

vel és az előbbieken említett együttes becsléssel — ill. feljavitással — nyert eredmények összehasonlítása. Az összehasonlítás tárgyát itt is a becslés %-os hibája képezi, amelyet mind az évek átlagában, mind pedig a mutatók átlagában kiszámítottak. Néhány mutatóra az évek szerint számított átlagos hiba az együttes becslésénél kisebb, mint a független becslésnél, ugyanakkor a mutatók átlagában számított hiba nagyobb. Mivel az együttes becslésnél a szórások összege kisebb lett, az átlagos hibaszázalék növekedésének ténye vagy a vizsgált időszak végén jelentkező hiba csökkenéséről tanúskodik, vagy pedig azt jelzi, hogy a hiba a nagyobb abszolút értékű mutatókra helyeződött át. Az együttes becslésnél a hibák értéke az 1961—63 évekre viszont kisebb, mint a független becslés esetében, azaz a hiba időben csökkenése megy végbe.

Ez a tény arról tanúskodik, hogy az együttes becsléssel nyert koefficienseket tartalmazó makromodell jó előrejelzési tulajdonságokkal rendelkezik, ugyanakkor ha a modell az elmúlt időszak elemzésére készült a független becslést célszerű alkalmazni.

Az elmúlt időszakban végbement fejlődés elemzése mellett az URK—2 modell 10—15 éves időszakra vonatkozó perspektivikus számítások céljaira szánták. A kiadvány konkrét eredményeket csak az 1971—75. évekre közöl. A modell dinamikus jellegének köszönhető, hogy ezeket a számításokat évről-évre végzik el, vagyis a t -edik év mutatóinak kiszámítására való áttérés az előző lépésben a $t-1$. évre vonatkozó számítások elvégzése után valósítható meg. A modell inputjai a késleltetett változók. Ezért a kezdetben a t -edik év mutatóinak kiszámításához szükséges az összes blokkok késleltetett változói a termelő állóalapvolumenek, a beruházások, továbbá az időtényező. A továbbiakban az inputok szerepét átvesszik az előző lépésben nyert mutatók számított értékei.

A modellel való előrejelzés jelenlegi variánsa az 1971—1973-as évekre vonatkozó számításokra használható. A továbbiakban minden 2—3 éves időszakot követően szükséges a modell paramétereinek az új statisztikai bázis figyelembevételével történő átszámítása (anélkül, hogy a modellt újra specifikálnák). A számításokat a soronkövetkező 10—15 évre az így nyert új struktúrával végzik el.

Az endogén változók perspektivikus számításának folyamatát a terv kidolgozásának analógiájára szervezték meg. A modell különböző blokkjaiban szereplő mutatók között a kapcsolatok szerteágazó rendszere látható. Közülük legegyszerűbben azok a

kapcsolatok határozhatók meg, amelyek az ágazati blokkokból az összesített mutatók felé irányulnak és amelyeket az ágazati mutatók aggregálása útján kapunk. A kapcsolatok második csoportja az ágazat fejlődését jellemző mutatóknak a modell többi blokkjában kapott számítások eredményeitől való függőségét tükrözi. A visszavezethető kapcsolatok hatása miatt a tervezés iteratív jellegű. Ezek a kapcsolatok azt jelentik, hogy nem csak az összesített mutatókat kell az ágazati mutatók függvényében, s az utóbbiakat egymás függvényében kiszámítani, hanem már a tervezés kezdeti fázisában az ágazati mutatók értékének meghatározásánál szükség van arra, hogy néhány népgazdasági mutató értékének alakulásáról tájékozódva legyenek.

Ezért a tervezésben először — a célkitűzésekből kiindulva — az összesített mutatók kontroll értékei és az ehhez szükséges ágazati mutatók kerülnek meghatározásra. Majd a többi ágazati mutató ezek segítségével történő kiszámítását követően meghatározzák az összesített mutatók új értékeit, amelyek pontosabbá teszik az elsődleges kontroll értékeket. Ezt a változást újra beviszik az ágazati tervbe, amely az aggregált mutatókra ismét új értékeket ad. Az előzetesen meghatározandó mutatók sorába tartozik a felhalmozási alap, a népességszám mutatója az összesített blokkból, ezektől függenek a beruházások és a

foglalkoztatott létszám, amelyeket ezek alapján kell meghatározni, mielőtt kiszámítjuk a többi ágazati mutatót. Függetlenül csak a népességszámra lehet számításokat végezni a megfelelő demográfiai függvény segítségével. A felhalmozási alap értéke a köztársaság területén felhasznált nemzeti jövedelemtől függ, amelyet a megtermelt nemzeti jövedelem figyelembevételével határoznak meg. Az utóbbi mint az anyagi termelés ágazatai blokkjaiban kiszámított tiszta termékeknek volumenösszege jelenik meg. Ezért — e kölcsönhatások együttes figyelembe vétele céljából — kezdetben minden ágazati blokkban kiválasztják az egyenletek azon csoportját, amelyet a tiszta termék volumenének meghatározása céljából együttesen kell megoldani.

A késleltetett változókat az előző lépésben meghatározták, így az ágazati tiszta terméknek az összesített köztársasági blokkba való behelyettesítése után a felhalmozási alap révén fejezik ki a nemzeti jövedelem mutatóját is. A köztársasági blokk megfelelő egyenletrendszerének megoldása eredményeképpen határozható meg a megtakarítás, amelyet az ágazati blokkok mutatóinak kiszámítására használnak fel. Majd a megváltozott kiinduló feltételekkel ismétlődnek a számítások a következő lépésben.

KOTÁSZ GYULÁNÉ

TUDOMÁNYOS ÉLET

Operational Research '72.

Az IFORS — az Operációkutatási Társaságok Nemzetközi Szövetsége — 1972 augusztusában Dublinban megtartott 6. konferenciáján nem az operációkutatási problémák, hanem az operációkutatás mint tudományág problémái álltak az érdeklődés középpontjában.¹ Az operációkutatás a modellezési lehetőségek közül eddig meglehetősen szűk kört ölelt át: jobbra csak skalár célfüggvénnyel és kvantifikálható változókkal jellemezhető alternatívák közti — a kihozatalok értékelésén keresztül történő — választásra alkalmas. Ilyen problémák jellemzik a középszintű gazdasági vezetők döntéseit. Konfliktusos célokat és nem számszerűsíthető változókat is tartalmazó kérdések — például komplex stratégiák kidolgozása — vizsgálatát elhanyagolták.

Az eddig kidolgozott módszerek — mint ezt a konferencián ismételten megállapították — a gyakorlati alkalmazás során nem mindenben váltották be a hozzájuk fűzött reményeket. A konferencia elnöke, H. Müller-Merbach szerint az országokat fejlettségük szerint három csoportba sorolva csak a középső szinten álló országok profitálnak az operációkutatás alkalmazásából. A fejlett országokban a fejlődés jelenlegi szakaszában felmerült új kérdéseket — a gazdasági növekedés ütemének fokozása helyett égetőbbé vált annak társadalmi feltételeit és hatásait lemérni — a hagyományos modellekkel nem lehet elemezni. A hatvanas évek végén az operációkutatásban új — a II. világháború alatti katonai célú és az ötvenes évek ipari alkalmazása után — harmadik szakasz kezdődött el.

Hogyan tükröződik ez a változás a konferencián elhangzott előadásokban? Az új áramlat egyik jellemzője az, hogy az operációkutatási módszerek téra egyre bővül: a programozási, sorbanállási, készletgazdálkodási stb. módszerek mellett egyre nagyobb hangsúlyt kapnak új típusú problémafelismerő modellek és problémaorientált technikák. Így megfigyelhető a rendszer-szemléletmód elterjedése; döntések és magatartások modellezése, ahol a döntést befolyásoló tényezők konfliktusai és a döntésfolyamat matematikai algoritmizálása okoz nehézséget; a bizonytalanság figyelembevétele a tervezésben és az ehhez igazodó adaptív tervek kidolgozása; valamint a fenti modellek megoldását elősegítő szimulációs módszerek kialakulása.

Az operációkutatás eddig inkább technikák, mint modellek gyűjteménye volt, nem különböztették meg eléggé a formalizálást a megoldási módszerektől. A. Jensen véleménye szerint jövőben a feladatok megfogalmazása fontosabb lehet mint a megoldásuk. Ez tekinthető az új irányzat másik jellemvonásának. Az elméleti előadások azt elemzik, miként közelíthetők meg a megoldásra váró kérdések, a gyakorlati alkalmazásként bemutatott példák ezeket erősen leegyszerűsítve — és ezáltal éppen a komplexitást elhanyagolva — tárgyalják.

Egy rövid ismertetésben nem vállalkozhatom a konferencia anyagának még tartalomjegyzékszerű felsorolására sem. A kiemelés szándékosan egyoldalú lesz: olyan előadásokat említek meg, amelyek témái az operációkutatást az elkövetkező időszakban feltehetően jellemezni fogják.

A konferencia munkája négy szakaszra tagolódott: az első központi részt a *három főreferátum* képezte. Ch. Goodeve a kritikus növekedési pálya meghatározásával foglalkozott: úgy definiálta mint a társadalmi konfliktusokat elkerülő utat, nem határozható meg valamilyen szempont szerinti optimalizálással, hanem ehhez interdiszciplináris

¹ A konferencia anyaga könyvben is megjelent. Lásd Operational Research '72 edited by Michael Ross; Amsterdam-London 1973. North-Holland Publishing Co.

kutatásokra van szükség. Ch. J. Hitch a környezetnek mint az operációkutatás új, még feltáratlan területének szerepéről beszélt. N. N. Moiseev a szovjet operációkutatás eddigi fejlődéséről és perspektíváiról tartott áttekintő jellegű előadást.

A Szovjetunió először vett részt az IFORS tagjaként annak konferenciáján, így érthetően az érdeklődés középpontjába került N. N. Moiseev összefoglalása. A tudományág a harmincas évek végén alakult ki, amikor Kantorovics lerakta a lineáris programozás alapjait. A háború után a matematikai programozásban több iskola alakult ki, ezek mind az elmélet fejlesztésében, mind a gyakorlati alkalmazásban komoly eredményeket értek el. A szabályozáselméletben — amelyet a műszaki tudományokból vettek át — először a stabilitás, majd az optimális szabályozás vizsgálata állt a kutatás középpontjában. Pontrjagin a maximumelv megalkotásával a szabályozáselméletet egységes keretbe foglalta.

Amíg a matematikai programozás és a szabályozáselmélet az operációkutatás technikai eszköztárát alakította ki, ideológiai háttérét a hatékonyságmérés elmélete képezte. Ezen a területen elsősorban D. A. Ventsel nevét emeli ki N. N. Moiseev: a bizonytalanságra és a célok ellentmondásaira hívta fel a figyelmet. Az ilyen típusú feladatok formalizálásával jelent meg a játékelmélet az operációkutatásban. Az ötvenes évek vége felé a szekvenciális analízis elvére épülő eljárásokat dolgoztak ki: Bellman a dinamikus optimalizálási kritériumot és Mikhalevitch a branch and bound technikát is átfogó variánsszámítási elméletét.

A tudományág jövőbeni helyzetét — az előadó szerint — döntően az fogja megszabni mennyire sikerül a szigorú matematikai módszereket az emberi gondolkodást leíró heurisztikus módszerekkel kombinálni. A gyakorlati alkalmazásnál az egyes izolált kérdések vizsgálatáról áttértek komplex rendszerek szociológiai, társadalmi és gazdasági elemzésére. A megoldáshoz felhasználható eljárás-sorozatok — „imitator rendszerek” — kialakításának elvi és gyakorlati kérdései még nem mindenben tisztázottak, de bizonyos, hogy az az alábbi elemeket tartalmazni fogja: modellek rendszere, szakértők és azok döntéseit leíró logikai sémák, valamint közös formalizált nyelv.

A konferencia második fő témakörét az operációkutatás jelenlegi helyzetét bemutató *elméleti előadások* képezték. H. Zemanek a rendszerek formalizálásával és szerkesztésével foglalkozott. A számítógépek felépítéséből kölcsönzött analógiából kiindulva a rendszert olyan azonos funkciókat végző elemekre bontotta, amelyeknek három tulajdonságot kell kielégíteniük: ortogonalitás, jellegzetesség és általánosság. A rendszerépítés az operációkutatásban két helyen is szerepet játszik: a kutatás, mint problémamegoldás folyamatában, és az ennek eredményeként kapott modellek megszerkesztésénél.

G. J. Klir a rendszerelmélet szerepéről, kutatási irányairól beszélt. Ő, Mesarovic és Wymore deduktív — struktúrák illetve állapotváltozások alapján definiált — módszereivel szemben a rendszerek osztályozását intuitív úton határozza meg. Th. H. Naylor a szimulációs modellek kiértékelését az alábbi lépésekre bontja: kísérletek tervezése, mintanagyságok meghatározása, a kapott eredmények statisztikai feldolgozása, végül a modell és a valóság összevetése.

A komplexitás kezelése mellett új — de ezzel sok tekintetben összefüggő — irányzatot képviselnek azok a törekvések, amelyek stratégiai tervek formalizálását kísérik meg. H. I. Ansoff és R. L. Hayes a stratégiai, operatív és integráló testületi — például vállalati — döntési problémákat, a döntésfolyamatot és a döntésfolyamat egyes lépéseinél elvégzett tevékenységeket logikailag rendszerezi. D. B. Hertz a tervkészítésnél fellépő bizonytalansághoz való alkalmazkodásra három lehetőséget sorol fel: feltételezett valószínűségek eloszlás mellett optimális tervválasztás meghatározása, a kockázat minimalizálása, változó körülményekhez alakítható, adaptív tervek kidolgozása.

A harmadik témakört alkotó korreferátumok az operációkutatás *gyakorlati alkalmazását és technikai kérdéseit* illusztrálták az egyes országokban. A felhasználás területe kiszélesedett: az ipari alkalmazásokkal szemben előtérbe került új témák a közlekedés, az energiaellátás, az egészségügy, az oktatás és a kutatás vizsgálata. Szellemes ötlet a Forrester féle ipari dinamika felhasználása a japán egyetemi szervezet működésének feltérképezésére: a tanítási idő, az oktatói létszám, az állami támogatás stb. változtatásának hatását elemzi.

A matematikai és számítástechnikai módszereket ismertető előadások között megtaláljuk mind a hagyományos, mind az új irányzatot. Az előbbieik közül G. Zoutendijk nevével kell megemlíteni, nemcsak a matematikai programozás terén elért eredményei miatt, hanem azért is, mert a lehetőségek mellett egyben a nemlineáris programozási módszerek alkalmazásának korlátaira — a konvexitás feltételezése, a számítógépi programok idő és pénzigénye stb. — is felhívta a figyelmet. A jó kompromisszumnak tekinthető lineáris

mellékfeltételekkel és nemlineáris célfüggvénnyel felírt feladatok két úton oldhatók meg: szimplex módszerre, vagy feltétel nélküli szélsőérték meghatározására visszavezetve. P. L. Hammer a 0–1 programozási eljárás hatékonyságát a három alapeljárás — a leszámolási, a metszési módszerek és a Boole algebra — kombinálásával fokozta.

Az újabb módszerek közül érdekes a Simscript szimulációs nyelvben a modellező és a modell közti „beszélgetés” lehetőségét bemutató előadás, valamint a Markov folyamatra épülő dekomponálható folyamatok vizsgálata, ahol minden időszakaszban az automatikus és az irányítás által befolyásolt fejlődést különválasztva lehet elemezni.

A programbizottság a résztvevők között a személyes információcserét — amit az is indokolt, hogy az új problémaorientált kutatási irányzatok több kreativitást igényelnek — azzal is elő kívánta segíteni, hogy a konferencián — az előadások mellett — a *munkacsoportokban* folyó vitáknak különösen nagy szerepet szántak. Az alkalmazási területek szerint tagolt 8 munkacsoport beszámolója azt tükrözi, hogy egyelőre még a verbális modellek — a komplex problémák mint az oktatási rendszer, a várostervezés, az egészségügyi és szociális ellátottság — egzakt megfogalmazása a soronkövetkező megoldandó kérdés. Ehhez több tudományág képviselőinek aktívabb együttműködésére és új operációkutatási szemlélet kialakítására van szükség.

A konferencia azzal a reménnyel zárult, hogy a jövőben az operációkutatás elmélete és alkalmazása közelebb kerül egymáshoz, hiszen közöttük a különbség — kissé vulgárisan fogalmazva — annyi, hogy amennyiben a vizsgált kérdés a valóságban is előfordul, akkor azt az operációkutatók alkalmazásnak, ha nem, akkor elméletnek nevezik.

HÜTTL ANTÓNIA

Új nemzetközi kutatóközpont

(A Nemzetközi Alkalmazott Rendszerelemzési Intézetéről)

1972. október 4-én — a Szovjetunió, Egyesült Államok és Anglia képviselőinek elképzelései alapján — öt évig tartó előkészítő tárgyalások után, Londonban aláírták a Nemzetközi Alkalmazott Rendszerelemzési Intézet (International Institute for Applied Systems Analysis) alapokmányát. Az alapító konferencián 12 ország képviselői vettek részt: Anglia, Bulgária, Csehszlovákia, Egyesült Államok, Franciaország, Japán, Kanada, Lengyelország, NDK, NSZK, Olaszország és Szovjetunió. Az intézet kormányoktól teljesen független, autonóm, tudományos szervezetként jött létre. Tagjai az egyes országok részéről belépő szervezetek (az ún. nemzeti tag-szervezetek), ami több esetben az ország tudományos akadémiáját jelenti (mint pl. a Szovjetunió, az NDK, az Egyesült Államok és Lengyelország esetében), más országoknál az akadémiákhoz hasonló tudományos intézményeket (mint pl. az NSZK-beli Max Planck Társaság), míg néhány ország nemzeti tag-szervezetként önálló bizottságot hozott létre (Csehszlovákia, Franciaország, Kanada és Japán).

Az új intézet létrehozását az indokolta, — amint azt az alapokmány is megfogalmazza —, hogy az ipar a tudomány és technika eredményeinek folyamatos alkalmazása révén egyre összetettebb természetű problémák elé állítja a modern társadalmakat. A problémák megoldásához a meglévő kutatási és elemzési módszerek alapvető tökéletessítésére van szükség, hogy azok alkalmasabbak legyenek a tudományos és technikai fejlődés társadalmi és egyéb hatásainak előrejelzésére, kiértékelésére és irányítására. Ezt a célt egy olyan — kutatási és elemzési módszerek alkalmazásával és fejlesztésével foglalkozó — nemzetközi együttműködés révén lehet elérni, amely felhasználja a számítástechnikát, a rendszerelemzés módszertanát és az irányítás modern alapelveit. Az együttműködés szervezeti kereteit a létrehozott új nemzetközi intézet hivatott biztosítani.

Az intézet alapokmányának értelmében az intézet vezető szervezete a nemzetközi tudományos tanács, amely felelős az intézet kormányokkal, illetve más nemzetközi szervezetekkel kialakított kapcsolatairól, szervezési, pénzügyi feltételekért, meghatározza és jóváhagyja a főbb kutatási területeken folyó programokat és biztosítja az intézet tag-szervezetei érdekeinek megfelelő működését. A tanács első ülésén D. Gvisianyit a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának levelező tagját választották elnökké, alelnökké pedig H. Kozióleket (NDK) és M. Levit (Franciaország) választották. Ugyanez az ülés elfogadta azt a határozatot, amelynek értelmében 3 évre az intézet igazgatói tisztségére az ismert amerikai tudóst, a Harvard Egyetem professzorát, H. Raiffát, az igazgatóhelyettesi tisztre pedig A. Letovot, a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának levelező tagját választották meg.

Az intézet helyül Ausztriát választották. Az osztrák kormány megfelelő elhelyezést biztosított az intézet részére azzal, hogy felajánlotta a Bécs közelében levő Laxenburg (volt Habsburg nyári rezidencia) egyik kastélyát. A renoválás munkálatai 1972-ben indultak meg és 1973. nyaratól a kastély egyes részeit folyamatosan bocsátják az intézet rendelkezésére.

D. Gvisiany 1972. decemberi magyarországi látogatását követően — amelynek során tájékoztatást adott a magyar tudományos és műszaki élet vezetői részére az új intézet tervezett működési területéről — megindultak az előkészületek a magyar tagság kérdésével illetően. Az előkészítő munkák elvégzésére a kormány létrehozta a magyar nemzeti bizottságot, amely 1973. májusában 1974-től kezdődően kérte a magyar nemzeti bizottság tagként való felvételét. Az intézet 1973. novemberi ülésén hozott határozata értelmében Magyarország 1974. július 1-től teljes jogú tagként részt vehet az intézet munkájában. Ugyanakkor sikerült az intézet vezetőivel megállapodni abban is, hogy magyar

munkatársak már a közbenső időszakban is tevékenyen részt vegyenek az intézet munkájában. Ennek megfelelően az intézet kutatási stratégiáját előkészítő, 1973-ban tartott konferenciasorozatra rendszeresen meghívták a magyar tag-szervezet képviselőit is. (Őt fő hat különböző konferencián vett részt, az energiarendszerek, vízgazdálkodási rendszerek, szervezeti rendszerek, számítógéprendszerek, ipari rendszerek és nagyrendszerek optimalizálása kutatási témákban.) A konferenciák képet adtak az egyes kutatási területeken kialakuló kutatási feladatokról. Az intézet kialakulatlansága miatt azonban célszerűnek látszott egy hosszabb tartózkodás keretében tisztázni, hogy milyen témákban és milyen formában a leghasznosabb Magyarország számára a közös kutatás. Ennek érdekében jelen sorok írói az intézet meghívására két hónapot töltöttek az intézetben Magyarországon intézetbe való belépésének előkészítése és az 1974. évben folyó kutatási munkákra vonatkozó javaslat kidolgozása céljából.

Az intézet 1973. novemberi tudományos tanácsülésén elfogadott kutatási stratégia értelmében három kiemelt módszertani kutatással kíván foglalkozni:

- matematikai kutatások,
- kutatások a számítógép tudományok területén,
- szervezeti rendszerek tervezésével és irányításával kapcsolatos kutatások.

Az alkalmazott kutatások terén a következő fontosabb programokat tervezik:

- ipari rendszerek,
- városi rendszerek,
- ökológiai rendszerek,
- biológiai és orvosi rendszerek,
- energia rendszerek és
- vízgazdálkodási rendszerek kutatása.

Az egyes kutatási programokra részletes javaslatokat dolgoztak ki az intézetben dolgozó kutatók, azonban ezek részleteinek kidolgozása és a kutatómunka konkrét megszervezése a következő időszak feladata. Az alábbiakban az egyes kutatási területeken az eddig kialakult helyzetet ismertetjük röviden.

A matematikai kutatások vezetője ez év közepéig G. Dantzig, a Stanford Egyetem professzora. Személye önmagában is biztosíték arra, hogy ezen a területen magas-színvonalú tudományos kutatás induljon. A csoport egyik jelentős munkája a következő évekre a nagyméretű feladatok megoldásához szükséges dekompozíciós módszerek vizsgálata. Ehhez a munkához a későbbiekben egy nagykapacitású számítógép beszerzését tervezik, az átmeneti időszakban pedig bérelt vonalon kívánnak csatlakozni a Bécsben működő nagyobb számítógépekhez.

A számítógép tudományok terén folyó kutatás körvonalait J. A. Feldman alakította ki, aki ugyanesak a Stanford Egyetem professzora. E kutatási szorosan összefonódnak azzal a szolgáltató tevékenységgel, amelyet az intézet saját számítóközpontjának kell majd nyújtania a többi kutatócsoport részére. A számítástechnikai program nemcsak egy üzembé gépek a rendelkezésre bocsátásából és a szokásos programozói segítségéből áll, hanem a jövőben hálózatfejlesztési feladatokat, egy nagy információátviteli és visszakeresési rendszer kialakítását is tartalmazza — az ehhez fűződő kutatási feladatokkal együtt. Ilyenek a különböző nyelvek, adatbázis rendszerek és modellek szemantikai problémáinak vizsgálata, a számítási eljárások hatékonyságának vizsgálata és a heurisztikus technika kombinálása az egzakt eredményeket hozó matematikai eljárásokkal. Az ezen a területen folyó kutatásba való magyar bekapcsolódás minden szempontból indokolt, s ennek megfelelően sikerült is elérni, hogy a számítóközpont vezetőjét a magyar fél adja.

A szervezeti rendszerek tervezésével és irányításával kapcsolatos kutatások még nem indultak meg. Az ehhez szükséges kutatócsoportot nem alakították meg és vezetőjét sem választották ki. Nem döntöttek még arról sem, hogy a téma a többi intézeti kutatási program szervezeti aspektusainak vagy egy mintaszervezetnek a vizsgálatával, vagy esetleg egy szervezet-kutatásokat áttekintő tanulmány készítésével kezdődik-e meg.

Hasonlóképpen áll a városi rendszerekkel, valamint a biológiai és orvosi rendszerekkel kapcsolatos kutatási program is, amelynek kutatóit és a program irányítóját ebben az évben fogják kiválasztani, illetve meghívni.

A kutatások közül az energiarendszerek kutatása indult meg az intézetnél a legnagyobb intenzitással. A téma vezetője W. Häfele (NSZK, Karlsruhe), aki általános érvényű, globális modellek kialakítására törekszik, amelyek azt vizsgálják, hogy az emberiség

hosszútávú energiaigénye milyen szervezetben fedezhető és hogyan biztosítható az átmenet ehhez a szerkezethez. A kutatás Häfele „Reaktorstratégia és energiaválság” című tanulmányára támaszkodva indult meg, amely azt vizsgálta, hogy a gyors-szaporító reaktorokra való áttérés milyen közbenső energiapolitikát követelne.

A tervek szerint a vízgazdálkodási rendszerekkel foglalkozó csoport először egy folyóvölgy modellezésével foglalkozna. A csoport vezetője A. Letov, az intézet igazgatóhelyettese. A tervezett modell tartalmazná a vízminőség biztosításához szükséges feltételrendszert és a vízigények várható szerkezetének gazdasági értékelését. A tervek szerint foglalkozik a folyóvölgy vízgazdálkodásának döntési rendszerével, a különböző szinteken hozott döntések konzisztenciájának kérdésével és a döntési rendszer azon feszültségeivel, amelyek onnan származnak, hogy a folyóvölgy földrajzi határai a politikai határokkal nem esnek egybe. Magyar részről, tekintettel a Tisza vízgyűjtőjén már eddig is végzett vizsgálatokra, a Tisza figyelembevételét javasoltuk. Az 1974. évi terv szerint a Tiber folyót és a Tiszát fogadnák el, mint mintafolyót.

Az ökológiai rendszerek területén egy látszólag tőlünk távoli témával foglalkozik az intézet. A kanadai őserdőkben levő egyik hernyófajta és az erdők faösszetételének egyensúlyát vizsgálják. Ez a részprobléma azonban olyan módszertani eredményeket ígér, amelyekkel a zárt ökológiai rendszerek egyensúlyi feltételeit általában tudják majd modellezni és megközelíteni.

Az ipari rendszerek kutatásai 1974. évben egy felmérő munkával kezdődnek, amelyek a CAD (számítógépes tervezés) és a számítógépes termelés-programozás és -irányítás helyzetét vizsgálja meg a világon. Ebben a munkában ugyancsak közvetlenül résztvesznek a magyar kutatók.

A magyar bizottság folyamatosan figyelemmel fogja kísérni az új területeken kialakuló kutatási témákat és azoknak megfelelően fogja javasolni a magyar részvételt. A magyar tagságot nem egyetlen szervezet, hanem egy szervezetek felett álló bizottság fogja képviselni és koordinálni. A bizottság tervei között szerepel az is, hogy a hasonló témakörrel foglalkozó, Moszkvában dolgozó nemzetközi kutatókollektíva (amely az Irányítási Problémák Intézete mellett működik) munkáját is figyelemmel kísérje és az abban való részvételt koordinálja a Nemzetközi Alkalmazott Rendszerelmzési Intézet munkáival.

KISS ISTVÁN—RABÁR FERENC

II. Matematikai Programozási Téli Iskola Mátrafüred, 1974. február 1—7.

A Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet 1974 február 1—7-ig Mátrafüreden, a Magyar Tudományos Akadémia üdülőjében Matematikai Programozási Téli Iskolát rendezett. Az első Téli Iskolát a Bolyai János Matematikai Társulattal közösen szervezte az Intézet 1973 februárjában. Megrendezésével az Intézet kettős célt kívánt szolgálni; egyrészt neves külföldi és hazai szakemberek meghívásával, előadások tartásával a résztvevők szakmai továbbképzésére adott lehetőséget, másrészt a résztvevők viszonylag kis létszáma (90 fő) és az üdülőben együtt eltöltött egy hét nagyon jó körülményeket biztosított a résztvevők kutatási területeinek megismerésére, vélemény és tapasztalatcserére, a további együttműködés megalapozására.

A Téli Iskola vezetője és tudományos programjának kialakítója Dr. Prékopa András egyetemi tanár, az MTA SZTAKI Operációkutatási Osztályának vezetője volt, a szervezési teendőket pedig e sorok írója látta el az Intézetben működő szervező iroda közreműködésével.

A Téli Iskolán meghívott előadók tartottak összefoglaló jellegű előadásokat, melyek az előadók saját eredményein kívül a témakör mások által elért fontos eredményeit is tartalmazták. Az előadások időtartama egy óra volt, nyelve angol és német.

Sajnálatos tény, hogy a szocialista országokból meghívott előadók közül öt annak ellenére, hogy az Intézet meghívását elfogadta, a Téli Iskolán nem tudott megjelenni.

Az Iskolán tizenhét előadás hangzott el a matematikai programozás különböző területeiről elméleti, algoritmikus és számítástechnikai problémákról. A külföldi előadók száma tizenhárom volt.

Az alábbiakban rövid áttekintést nyújtunk az egyes előadások tartalmáról. A felsorolás azt a sorrendet követi, amelyben az előadások elhangzottak.

Dantzig, G. B. (USA), „On the Need for System Optimization Laboratories” előadásában elmondta, hogy véleménye szerint a nagyméretű gazdasági — élelmezési, energia gazdálkodási stb. — problémák modellezésének és megoldásának elengedhetetlen feltétele olyan rendszer-optimalizálási laboratóriumok szervezése, amelyek speciális test-modellek, számítógépes programok és a nagy rendszerek megoldásához szükséges software problémák vizsgálatával foglalkoznak. Javasolta, hogy a laboratóriumokban kidolgozott software anyagot a gyakorlatból származó nagyméretű problémákon próbálják ki és államigazgatási, tudományos és ipari problémák megoldására ezek díjtanulmányok használhatók legyenek.

Wets, R. (USA), „Constraint Qualifications: A Fundamental Analysis” előadásában a matematikai programozási problémák lokális szélsőértékeire vonatkozó Lagrange-tétel különböző változataival foglalkozott. Ezek két osztályba sorolhatók attól függően, hogy a problémára vonatkozó megszorítás a feltételekre vonatkozó regularitási követelményt ír elő, vagy perturbációs vizsgálaton alapuló követelményt támaszt a problémával szemben. R. Wets és M. Dempster közös eredménye a két különböző osztályba tartozó változatok kapcsolatának megalapozása és a problémára vonatkozó legenyhébb előírás megadása, amely mellett még érvényes a Lagrange-tétel.

Rockafellar, R. T. (USA), „Stochastic Convex Programming: Duality and Optimality” egy általánosított kétlépcsős sztochasztikus programozási problémával foglalkozott. Erre vonatkozóan ismertetett egy R. Wets-szel közösen elért elméleti eredményt: a Kétlépcsős sztochasztikus programozási probléma bizonyos feltételek teljesülése esetén ekvivalens egy olyan problémával, amelyben egy függvény integráljának értékét minimalizáljuk egy speciális halmazon. A feladatban szereplő egyenlőtlenség feltételek pertur-

bánciós vizsgálata alapján az előadó definiálta a feladat Langrange függvényét, majd a feladat duálját és dualitási tételt bizonyított.

Prékopa A. (MTA SZTAKI), „Discrete Unimodal Functions”. Az előadó a folytonos valószínűségeloszlásokra néhány évvel ezelőtt nyert tételei analógjait keresi diszkrét valószínűségeloszlásokra. A kutatás jelenlegi állásáról tartott beszámoló mellett összefoglaló a logkonkáv és a kvázikonkáv számsorozatokkal kapcsolatban az irodalomban fellelhető eredményeket, továbbá megfogalmazott nemlineáris diszkrét programozásra visszavezethető sztochasztikus programozási modelleket. Ellentétben a diszkrét programozás szokásos feladataival, az ezekben a modellekben szereplő diszkrét függvények kizárólag az R^n tér rácspontjain vannak értelmezve (tehát nem egy R^n -beli konvex halmazon). A diszkrét függvények logkonkavitására (kvázikonkavitására) háromféle definíciót ismertetett, vizsgálta ezek kapcsolatait és nagy figyelmet szentelt az ilyen sorozatokkal vett konvolúció tulajdonságainak. A konvolúcióval kapcsolatos tételekre támaszkodva elemezte a megfogalmazott diszkrét sztochasztikus programozási modellek matematikai tulajdonságait.

Hartmann, K. (NDK), „Ganzzahlige lineare Quotientenoptimierung nach dem Schnittpunktverfahren von Gomory” az alábbi problémára adott egy megoldási módszert:

$$\max \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$Ax = a$$

$$x \geq 0, x \in R^n, x_j \text{ egész, } j = 1, 2, \dots, k,$$

ahol $u(x) = c'x - c_0$, $v(x) = d'x - d_0$ és $k \leq n$. A módszer a következő: először megoldjuk a feladatot az egészértékűségi megkötés nélkül. Legyen az optimális megoldás x^* . Ekkor $u_0 = u(x^*)$, $v_0 = v(x^*)$, a célfüggvény linearizálható: $\min(u_0 d' - v_0 c')x$. Alkalmazzunk egy Gomory vágást. Ha az egészértékűségi feltételek teljesülnek, akkor fejezzük be az eljárást. Ellenkező esetben az új u_0, v_0 értékkel ismételjük meg az eljárást.

Kovács L. B. (MTA SZTAKI), „Dynamic Programming and Group Decomposition for the Solution of Discrete Programming Problems” az általános lineáris diszkrét feladatok dinamikus programozási megoldásait tekintette át. A már hagyományosnak tekinthető, a dinamikus programozás optimalitási elvén alapuló módszerből kiindulva a cél a feltételek számának csökkentése volt, ugyanis az ilyen típusú módszerek hatékonyságát elsősorban ez befolyásolja. Az előadó röviden kitért saját eredményeire is. Ezek közül részletesebben ismertette módszerét, mely véges Ábel csoportoknak ciklikus csoportokra való tényleges felbontását adja meg. Ezen a felbontáson alapul az egyik ismertett dinamikus programozási eljárás.

Oettli, W. (NSZK), „Einzelschrittverfahren zur Lösung konvexer und dual — konvexer Minimierungsprobleme” — speciális nemlineáris programozási probléma megoldására adott algoritmust. A probléma a következő: $\min\{F(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, ahol $X_i \subset R^{n_i}$ konvex, zárt halmazok. A megengedett tartomány ezek direkt szorzata, F konvex és differenciálható. Nevezzük az $x_i \in R^{n_i}$ vektorokat ($i = 1, 2, \dots, n$) az $x = (x_1, \dots, x_n)$ vektor komponenseinek. Az előadó által javasolt eljárásban egy x_0 megengedett pontból kiindulva minimalizál egy-egy komponensre vonatkozóan, a további komponensek rögzítése mellett. A minimalizálások sorrendjét előre rögzíti, és így a minimalizálás az egyes komponensekben ciklikusan ismétlődik. A módszer speciális esete a szokásos koordinátánkénti minimalizáló eljárás, — ez akkor adódik, ha a komponensek egydimenziósak. Az előadó az eljárás konvergenciáját bizonyította, megfelelő feltételek teljesülése mellett.

Hollatz, H. (NDK), „Über Verfahren der zulässigen Richtungen in der Nichtlinearen Optimierung” előadása ügyes összefoglalása volt a megengedett irányok módszerében és alkalmazásában eddig elért eredményeknek. A módszerben szükséges iránykeresésre nyolc különböző eljárást ismertetett, a lépéshossz meghatározására és a cikk-cakkozás elkerülésére öt módszert mutatott. Az iránykereső és lépéshossz meghatározó problémák különböző kombinációiból az irodalomból már jól ismert eljárások nyerhetők. H. Hollatz a diszkrét optimális szabályozás és diszkrét minimax probléma megoldásával foglalkozott. Az általa javasolt algoritmus is a fenti iránykereső és lépéshossz meghatározó módszerek egy kombinációját alkalmazó megengedett-irány módszer.

Robinson, S. M. (USA), „Determination of rates of convergence for classes of nonlinear programming problems” előadásában néhány kvadratikusan konvergens algo-

ritmus új értelmezését adta. A leírás alapjául egy érzékenységi vizsgálat szolgál, amelyben egy p paramétertől függő nemlineáris programozási feladat $Z(p)$ Kuhn-Tucker pontjának variációjára kapunk becslést. (Kuhn-Tucker ponton most a duálváltozókkal kiegészített vektort értjük.) Eztán olyan algoritmusokat építünk fel, amelyben a p paraméter maga is egy Kuhn-Tucker pont közelítése, és optimalitási kritérium a $p^* = Z(p^*)$ egyenlőség teljesülése. Ilyen algoritmus a Wilsontól illetve Robinsontól származó korábbi algoritmus. Az algoritmus kvadratikus konvergenciája a $p_{n+1} = Z(p_n)$ iterációból kiindulva bizonyítható.

Lovász, L. (Eötvös Lóránd Tudományegyetem), „On the Structure of Networks” előadása megmutatta, hogy a gyakorlat számára oly fontos hálózati folyamatok vizsgálata igényli a kombinatorika eszközeit is, sőt, a hálózatok struktúrájára vonatkozó igen mély eredmények nyerhetők ezen az úton.

Szimmetrikus folyamfüggvényű hálózathoz létezik folyamekvivalens fa (azaz nagyon egyszerű struktúrájú hálózat). Nagyon lényeges ezért Lovásznak az az eredménye, amely a kapacitásokkal jellemzi a szimmetrikus folyamfüggvényű hálózatot. A nevezetes „Edmonds-branching” problémára Lovász egyszerű konstruktív bizonyítást adott. A Ford-Fulkerson tétel szerint gráffban két pont között az összes út lefogható a független (éldiszjunkt) utakon keresztül. Két pont helyett pontthalmazt tekintve és megkísérelve a pontthalmaz pontpárjai között húzódó utak blokkolását, egyszerű példa adható, hogy itt a független utak számánál több élre van szükség. Lovász László bebizonyította, hogy ennek négyesere elegendő.

Elster, K. H. (NDK), „Über konjugierte Fenchel-Operatoren” a $T: E \rightarrow F$ konvex operátorok tulajdonságait vizsgálta, ahol E lineáris vektortér, F pedig feltételeken teljes vektorháló. Megfogalmazta a Hahn-Banach tételt ilyen operátorokra, a szokásos technikával elválasztási tételeket kapott. A konjugált konvex funkcionál analógiájára definiálta a konjugált konvex operátor fogalmát. Ezek az operátorok a funkcionálokhoz hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek. Az előadást a Fenchel-féle dualitástétel operátoros alakja zárta.

Kall, P. (Szécs), „Discrete Approximation of the Probability Distribution in Stochastic Linear Programming with Complete Fixed Recourse” a kétlépesű sztochasztikus programozási problémával foglalkozott. R. Wets 1964-ben javasolta, hogy a Dantzig és Madansky által megalkotott programozási feladatban egy alkalmas véges, diszkrét eloszlással „közelítsük” a benne szereplő folytonos valószínűségi eloszlást és az így keletkező nagyméretű lineáris programozási feladatot a dekompozíciós szerkezet előnyeinek a kihasználásával oldjuk meg. P. Kall olyan nem túl erős feltételeket fogalmazott meg, amelyek mellett a fent említett „közelítés” elméleti szempontból értelmesnek tekinthető. Elhangzottak az előadásban konvergencia tételek és bizonyos speciális feladatok esetére az előadó hibabecslést is tudott adni.

Lommatzsch, K. (NDK), „Quadratische Optimierung mit Hilfe der linearen parametrischen Optimierung” a következőket: $\min_{x \in M} f(x, x)$ matematikai programozási probléma

megoldásához, — ahol $f(x, x) = x^T C x + 2p^T x$ és M zárt, konvex halmaz — a $\min_{x \in M} f(x, \lambda)$,

$\lambda \in R^n$ lineáris parametrikus programozási problémát használta, ahol $f(x, \lambda) = x^T C x + p^T x + p^T \lambda$. A lineáris parametrikus programozás eredményeinek felhasználásával K. Lommatzsch szükséges és elegendő feltételeket adott a kvadratikus programozási probléma lokális optimumára. Az eredményhez a

$$K_M^x = \{ \lambda \in R^n \mid f(x, \lambda) \geq f(\bar{x}, \lambda), x \in M \}, \bar{x} \in M$$

halmazok tulajdonságainak vizsgálata vezetett.

Weinert, H. (NDK), „On Parametric Linear Programming Problems with Fixed Matrix of Constraints” a $\max_x x^T c, (u) Ax = b(v), x \geq 0$ lineáris parametrikus programozási problémával foglalkozott. Ilyen problémákkal foglalkozik a Nozicka, F., Guddat, J., Hollatz, H., Bank, B.: Theorie des parametrischen Optimierung, Akademie-Verlag, Berlin (nyomtatás alatt), könyv abban az esetben, ha $c(u)$ és $b(v)$ olyan lineáris vektorfüggvények, melyek a véges dimenziós R^p ill. R^q terek R^n ill. R^m -re képezik le. Az előadás célja annak megmutatása volt, melyek azok az eredmények az említett könyvben, amelyek abban az esetben is igazak, ha $c(u)$ és $b(v)$ lineáris Hausdorff terek U, V részhalmazait R^n ill. R^m -be leképező folytonos függvények.

Evers, J. J. M. (Hollandia), „Linear Infinite Horizon Programming” előadásában összefoglalta a lineáris végtelen-horizontú programozás fő eredményeit. Egy speciális

végtelen horizonú lineáris programozási problémát vizsgált, majd megmutatta, hogy a Hansen-Koopmans féle von Neumann típusú technológiájú gazdasági modell a vizsgált feladatcsoportozathoz tartozik. Láttuk, hogy a Lemke-féle komplementaritási algoritmus alkalmazható a LP probléma egyensúly-pontjának meghatározására. Érdeklődésre tarthat számot az előadó fenti témáról most megjelent könyve: J. J. M. Evers: Linear programming over an infinite horizon, Tilburg University Press, 1973.

Gerencsér L. (MTA SZTAKI), „Two Methods of Parametrization in Nonlinear Programming” előadása első részében az alábbi feladattal foglalkozott:

$$\min f(x)$$

$$g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

ahol az $f(x)$, $-g_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ folytonosan differenciálható kvázikonvex függvények voltak. Ilyen típusú feladatoknál az optimum közelében egy általánosabb extrapolációs eljárást javasolt. Ennek lényege, hogy egy olyan görbesereget definiál, hogy az optimum közelében minden megengedett pontból vezessen egy görbe az optimumba. Az extrapoláció folyamán meghatározza, hogy melyik görbén van, s ennek érintője irányában lép tovább. Az előadás második részében

$$\min f(x)$$

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1 \dots m,$$

feladattal foglalkozott, ahol $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, 2 \dots m$ folytonosan differenciálható függvények voltak. A feladat megoldása során definiálja az ún. Ljapunov felületeket, amelyek az eredeti feladat feltételei által meghatározott felülettel azonos állású felületek serege. Az eredeti feladatot feltétel nélküli minimalizálásra vezeti vissza, s a minimalizálási irányt úgy választja, hogy az az eredeti felület irányában történő lépés és az aktuális Ljapunov feltétel mentén a minimum irányában történő lépés összege lesz.

Schoch, M. (NDK), „Beziehungen zwischen dem Erweiterungsprinzip und dem allgemeinen Schnittprinzip” a diszkrét programozásban alkalmazott metszési módszereknek elvi megalapozását és egy általános formáját megadó munkának, V. A. Emelichev egy munkájának hiányosságát küszöböli ki. Ez a munka az algoritmusok végességét nem bizonyítja. Az előadó egy általánosított metszési elvet ismertetett, majd megmutatta, hogy ezt az általa korábban kidolgozott kibővítési elv speciális esetének tekinthetjük.

A tervezett program szerint a felsoroltakon kívül a következők tartottak volna előadást:

Finkelstein, Yu. Yu. (Szovjetunió), „The E-Approach for the Approximate Solution of Discrete Linear Programming Problems”.

Poszpelov, G. Sz. (Szovjetunió), „Discrete Programming Methods and Models in Planning of Scientific Research Work and Choosing of Projects”.

Orchard-Hays, W. (USA), „Prospects for Iterative M. P. Systems”.

Hamala, M. (Csehszlovákia), „The Trivial Duality in Convex Programming and its Applications”.

Dragan, I. (Románia), „Optimal Flows in Network with Gains”.

Korbut, A. A. (Szovjetunió). — előadásának címét nem közölte.

Fenti előadók azonban a Téli Iskolán nem tudtak résztvenni és ezek az előadások elmaradtak.

Orchard-Hays, W. előadáskivonata szerint a nagyméretű feladatok megoldásának problémájával akart foglalkozni. Nagyon fontosnak tartja és tapasztalatai szerint igen hatékony az ilyen feladatok megoldására interaktív programrendszer kidolgozása.

Nagy érdeklődést váltott ki az a témakör is, amelyről Poszpelov, G. Sz. tartott volna előadást. A témakörhöz kapcsolódó kerekasztalbeszélgetés szerint hasznos lett volna a fenti előadás megtartása, konkrét modell és tervezési módszer valamint tapasztalatok megismerése.

Az előadásokon kívül a tudományos program három kerekasztalbeszélgetést tartalmazott. Ezek témája:

1. A matematikai és az operációkutatás kapcsolata
(vezetője: G. B. Dantzig).
2. A tudományos munka tervezhetőségéről
(vezetője: Kunszt György, Építéstudományi Intézet).

3. A matematikai modellek szerepe komplex rendszerek leírásában és optimalizálásában (vezetője: Jándy Géza, Budapesti Műszaki Egyetem).

Mindhárom beszélgetésen élénk vita alakult ki, — a beszélgetések témakörei ezek alapján igen aktuálisak voltak. A hozzászólások között egymásnak teljesen ellentmondó nézetek és javaslatok is elhangzottak

A Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete a Téli Iskola munkáját eredményesnek tartja. Úgy véli, hogy a részvétel mindeki számára hasznos volt. Az Intézet tervezi a Téli Iskola évenkénti megszervezését — azonban a nagy érdeklődés ellenére sem kívánjuk növelni a résztvevők létszámát. Véleményünk szerint a létszám emelése a Téli Iskola céljainak megvalósítását nem a kívánt irányban befolyásolná.

STRAZICKY BEÁTA

СОДЕРЖАНИЕ

Иштван Сабо: Использование сетевой техники в задаче программирования смешенного характера	1
Чак Лигети: Модель одного продукта с переменными условиями по сезону	11
Шандор Кадаш: Геометрическое программирование и его два хозяйственных применения	17
Янош Штал: О двукратно связанной задаче линейного программирования	25
Шандор Месарош—Ференц Медери: Модель планирования экономических регулиляторов в сельском хозяйстве	41
Габор Папанек—Балаж Ботош: Оценка неточности и риска при планировании развития	53
Йозеф Тот—Карой Варга: Об одном применении целочисленного программирования в планировании сельскохозяйственных предприятий	67
Алмош Ковач: Цели и поведение предприятия	75

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

Петер Гач: О задачах, разрешимых попыткой	89
---	----

О КНИГАХ

Р. Й. Балл (ред.): Международное соединение моделей народных хозяйств (Жигмонд Няри)	111
Л. Халабук—К. Хуяк—Ж. Няри—Д. Котас: Эконометрическая модель «М—2» венгерского народного хозяйства (Ласло Хуняди)	113
Р. Херод: Эконометрическая динамика (Шандор Надь)	115
Эконометрическая модель развития народного хозяйства Украинской ССР (Дюлане Котас)	116

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Антония Гюттл: "Operation Research '72"	121
Иштван Киш—Ференц Рабар: Новый международный центр исследования	125
Бэата Штрацики: Вторая зимняя школа математического программирования	129

CONTENTS

1. The Application of computers to the modelling and simulation of systems	1
2. The Computer model with stochastic elements of continuous systems	11
3. The Application of computers to the modelling and simulation of systems	21
4. The Application of computers to the modelling and simulation of systems	31
5. The Application of computers to the modelling and simulation of systems	41
6. The Application of computers to the modelling and simulation of systems	51
7. The Application of computers to the modelling and simulation of systems	61

THE EDITORIAL BOARD

1. The Editorial Board of the Journal	1
---------------------------------------	---

THE EDITORIAL BOARD

1. The Editorial Board of the Journal	1
2. The Editorial Board of the Journal	11
3. The Editorial Board of the Journal	21
4. The Editorial Board of the Journal	31
5. The Editorial Board of the Journal	41
6. The Editorial Board of the Journal	51
7. The Editorial Board of the Journal	61

THE EDITORIAL BOARD

1. The Editorial Board of the Journal	1
2. The Editorial Board of the Journal	11
3. The Editorial Board of the Journal	21
4. The Editorial Board of the Journal	31
5. The Editorial Board of the Journal	41
6. The Editorial Board of the Journal	51
7. The Editorial Board of the Journal	61

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
 Műszaki szerkesztő: Sós Attila
 A kézirat nyomdába érkezett: 1974. III. 13 Terjedelem: 11,9 (A)5 ív
 77.158 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

ISTVÁN SZABÓ: Application of networks in a programming problem of mixed character	1
CSÁK LIGETI: One-product model with seasonally fluctuating conditions	11
SÁNDOR KÁDAS: Geometric programming and two economic applications	17
JÁNOS STAHL: On the twofold connected linear programming problem	25
SÁNDOR MÉSZÁROS—FERENC MEGYERI: A model for the planning of economic regulators in agriculture	41
GÁBOR PAPANEK—BALÁZS BOTOS: Estimation of uncertainty and risk in development planning	53
JÓZSEF TÓTH—KÁROLY VARGA: A case for integer programming in agricultural enterprise planning	67
ÁLMOSS KOVÁCS: Enterprise goals and enterprise behaviour	75

CONCEPTS AND METHODS

PÉTER GÁCS: On problems solvable by search	89
--	----

BOOK REVIEWS

R. J. BALL (ed.): The international linkage of national economic models (<i>Zsigmond Nyáry</i>)	111
LÁSZLÓ HALABUK—KATALIN HULYÁK—ZSIGMOND NYÁRY—MRS. GYULA KOTÁSZ: The econometric model "M-2" of the Hungarian national economy (<i>László Hunyadi</i>)	113
R. HARROD: Economic dynamics (<i>Sándor Nagy</i>)	115
Econometric model of the development of Ukraine's national economy (<i>Mrs. Gyula Kotász</i>)	116

SCIENTIFIC LIFE

ANTÓNIA HÜTTL: Operational research '72	121
ISTVÁN KISS—FERENC RABÁR: A new international research centre	125
BEÁTA STRAZICKY: The second winter school in mathematical programming	129

TARTALOM

SZABÓ ISTVÁN: Hálótechnika alkalmazása egy kevert jellegű programozási feladatban	1
✓ LIGETI CSÁK: Egytermékes modell idényszerűen változó feltételekkel	11
✓ KÁDAS SÁNDOR: A geometriai programozás és két gazdasági alkalmazása	17
✓ STAHL JÁNOS: A kétszeresen összekapcsolt lineáris programozási feladatról	25
✓ MÉSZÁROS SÁNDOR—MEGYERI FERENC: Egy modell a gazdasági szabályozók tervezéséhez a mezőgazdaságban	41
✓ PAPANEK GÁBOR—BOTOS BALÁZS: A bizonytalanság, a kockázat értékelése fejlesztések tervezésénél	53
TÓTH JÓZSEF—VARGA KÁROLY: Az egészértékű programozás egy alkalmazási lehetősége a mezőgazdasági vállalatok tervezésében	67
KOVÁCS ÁLMOS: Vállalati célok és vállalati viselkedés	75

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

GÁCS PÉTER: Próbálgatással megoldható feladatokról	89
--	----

KÖNYVEKRŐL

R. J. BALL (szerk.): The international linkage of national economic models (Nyáry Zsigmond)	111
HALABUK LÁSZLÓ—HULYÁK KATALIN—NYÁRY ZSIGMOND—KOTÁSZ GYULÁNÉ: A magyar népgazdaság M-2. ökonometriai modellje (Hunyadi László)	113
R. HARROD: Economic Dynamics (Nagy Sándor)	115
Ekonometriczeszkaja model razvitija narodnogo hozajaszta Ukrainszkoj SZSZR (Kotász Gyuláné)	116

TUDOMÁNYOS ÉLET

HÜTTEL ANTÓNIA: Operational Research '72	121
KISS ISTVÁN—RABÁR FERENC: Új nemzetközi kutatóközpont (A Nemzetközi Alkalmazott Rendszerelemzési Intézetéről)	125
STRAZIČKY BEÁTA: II. Matematikai Programozási Téli Iskola	129

