Ligeti Csák

Egytermékes modell idényszerűen változó feltételekkel

A modellt egy konkrét gyakorlati probléma hívta életre. Nevezetesen az, hogy a sertéshizlaldák alapanyagellátása és a vágósertés iránti igény idényszerűen ingadozik.

I. A feladat megfogalmazása

Az alábbiakban egy olyan termék előállításáról lesz szó, melynél egyféle alapanyagnak meghatározó szerepe van. Az erőforrások közül pedig a termelés és raktározás együttes helyigénye jelenti a szűk keresztmetszetet. Feltételezzük, hogy az alapanyagellátás és a készáru iránti kereslet ismert törvényszerűségek alapján ingadozik.

A gyártási folyamat lényegében a kitüntetett alapanyag feldolgozásának folyamatát jelenti. A gyártási időtartam alatt pedig az alapanyag beszállításától (például a hízóalapanyag beérkezésétől) a készáru (a vágósertés) elszállításáig eltelt időt (a hizlalási időt) értjük. Az egységnyi mennyiségű alapanyag feldolgozása után elérhető nyereség a gyártási időtartam ismert — általában konkáv — függvénye.[1]

A feladat az üzem termelési programjának elkészítése úgy, hogy az egy adott időszakban a maximális nyereséget biztosítsa. A termelési program elkészítése alatt azt értjük, hogy meghatározzuk az alapanyag beszállításának és a késztermék elszállításának ütemtervét, valamint a beszállítási időpont (a gyártás kezdete) függvényében a gyártási időtartamot.

II. Folytonos modell

Az alábbiakban feltételezzük, hogy az alapanyag beszállítása és a készáru elszállítása folyamatosan történik. Tegyük fel, hogy alapanyag és a késztermék olyan egységben adott, hogy az egységnyi alapanyagból egységnyi késztermék lesz.

A be-, illetve az elszállítás folyamatának leírására a be-, illetve az elszállítás intenzitását használjuk, ami az időegység alatt (például naponként) be-, illetve elszállított mennyiséget (malacok, illetve vágósertések számát) jelenti.

Az alapanyagellátás és a késztermék iránti kereslet ingadozását úgy építjük be a modellbe, hogy a be-, illetve az elszállítás intenzitásának alsó és felső korlátját az idő függvényeként kezeljük.

[1] Például a hizlalási idő csökkentése intenzívebb takarmányozást követel, illetve kisebb végsúlyt eredményez, a túlzottan hosszú hizlalásnál pedig romlik a takarmány hasznosulása és a hús minősége.

Vezessük be a következő jelöléseket:

t időparaméter
T a vizsgált időszak (periódus) hossza
$h(t)$ gyártási időtartam az alapanyag beszállítási időpontjának függvényében
h_m a gyártási időtartam alsó korlátja
h_M a gyártási időtartam felső korlátja
$f(t)$ az alapanyag beszállításának intenzitása
$f_m(t)$ a beszállítás intenzitásának alsó korlátja
$f_M(t)$ a beszállítás intenzitásának felső korlátja
$g(t)$ a késztermék elszállításának intenzitása
$g_m(t)$ az elszállítás intenzitásának alsó korlátja
$g_M(t)$ az elszállítás intenzitásának felső korlátja
$c(h)$ az egységnyi mennyiségű alapanyag feldolgozása után elérhető nyereség a gyártási időtartam függvényében
K az üzem kapacitása, vagyis az a maximális alapanyag-, félkész- és késztermékmennyiség, ami az üzemben összesen elfér.

Mivel a nyereség a gyártási időnek általában konkáv függvénye, ezért az optimális megoldás csak olyan lehet, hogy a korábban beszállított alapanyagból készült készterméket hamarabb szállítják el, mint aminek az alapanyaga később került az üzembe. Így a $[0; t]$ intervallumban beérkező alapanyagból készült késztermék a $[h(0); t + h(t)]$ intervallumban kerül elszállításra. A be-, illetve az elszállítás intenzitása közötti kapcsolatot tehát az

$$\int_0^t f(s)\,ds = \int_{h(0)}^{t+h(t)} g(s)\,ds \tag{1}$$

egyenlet írja le.[2] Megjegyezzük még, hogy a $[t; t + h(t)]$ intervallumban elszállított

$$\int_t^{t+h(t)} g(s)\,ds \tag{2}$$

mennyiség éppen a t időpontbeli készlettel egyenlő.

A feladat lényegében az, hogy az idő függvényében úgy *határozzuk meg a be- és az elszállítás intenzitását és a gyártási időtartamot, hogy azok az adott korlátok között mozogjanak, elégítsék ki az* (1) *egyenletet, az üzem K befogadóképességét sohasem haladja meg a mindenkori készlet, és a* $[0; T]$ *időszakban elérhető nyereség maximális legyen.*

A feladat matematikai modellje tehát az alábbi formában adható meg:

Adottak az $f_m(t)$, $f_M(t)$, $g_m(t)$, $g_M(t)$ nem-negatív függvények, a $c(h)$ konkáv függvény, valamint $0 \leq h_m \leq h_M$ és K valós számok. *Határozzuk meg a* $h(t)$,

[2] Amennyiben $h(t)$ differenciálható, úgy (1) helyett az

$$[1 + h'(t)]\,g(t + h(t)) = f(t)$$

differenciálegyenlet írható, amelynek a $h(t)$-re vonatkozó, $h(0)$ kezdeti értékhez tartozó általános implicit megoldása éppen (1).

$f(t)$ és $g(t)$ függvényeket úgy, hogy a

$$h_m \leq h(t) \leq h_M, \tag{3}$$

$$f_m(t) \leq f(t) \leq f_M(t), \tag{4}$$

$$g_m(t) \leq g(t) \leq g_M(t), \tag{5}$$

$$\int_0^t f(s)\,ds = \int_{h(0)}^{t+h(t)} g(s)ds, \tag{6}$$

$$\int_t^{t+h(t)} g(s)\,ds \leq K \tag{7}$$

feltételek t minden valós értéke mellett teljesüljenek, és a

$$J = \int_0^T c(h(t))f(t)\,dt \tag{8}$$

funkcionál maximumot adjon.[3]

A modell teljes általánosságban nem oldható meg. Különböző gyakorlati esetekben azonban leegyszerűsíthető vagy átalakítható úgy, hogy a megoldást klasszikus feltételes szélsőérték-feladatra vagy folyamatvezérlési feladatra, vagy esetleg — diszkrét modellre áttérve — lineáris programozásra vezethessük vissza.

III. Diszkrét modell

A diszkrét modell lényege, hogy a vizsgált időszakot felosztjuk egyenlő hosszúságú intervallumokra. A be-, illetve az elszállításokat úgy tekintjük, mintha azok kizárólag az intervallumok kezdő-, illetve végpontjaiban történnének.

Véges folyamat modellje

Feladatunk legyen a $[t_1; t_2]$ intervallumban a termelési folyamat optimálása úgy, hogy a beszállításra vonatkozó feltételek az ezt tartalmazó $[0; t_2]$, a kiszállításé pedig $[t_1; t_3]$-ban teljesüljenek, ahol

$$t_1 = t_3 - t_2 \geq h_M$$

Osszuk fel $[0; t_3]$-at τ hosszúságú intervallumokra. Tételezzük fel, hogy $[0; t_1]$ és $[t_2; t_3]$ pontosan n, $[t_1; t_2]$ pedig N intervallumból áll. Az i-edik inter-

[3] Természetesebb követelmény lenne a $[0; T]$ intervallumban elszállított késztermék utáni

$$J_1 = \int_{t_1}^{t_2} c(h(t))\, f(t)\,dt, \ t_1 + h(t_1) = 0, \ t_2 + h(t_2) = T$$

nyereség maximálása. Ha viszont T elég nagy akkor J_1 gyakorlatilag helyettesíthető J-vel.

vallumban be-, illetve elszállított mennyiségeket

$$F_i = \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} f(s)\,ds, \quad \text{illetve} \quad G_i = \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} g(s)\,ds \tag{9}$$

jelölje. Hasonlóan értelmezzük az $F_i^{(m)}$, $F_i^{(M)}$, $G_i^{(m)}$, $G_i^{(M)}$ alsó és felső korlátokat.

Jelölje A_i az i-edik intervallumban beszállított alapanyag mennyiségének azon részét, amely a t_1 időpillanatban még feldolgozás alatt áll, x_{ij} pedig azon részét, amelyből készült terméket a j-edik intervallumban szállítanak el.

Legyen $j \geq i$ esetén $c_{ij} = c\big((j - i + 1)\tau\big)$.

A modell az alábbi lineáris programozási feladattal adható meg:

$$x_{ij} \geq 0; \qquad i = 1, 2, \ldots, n + N, \quad j = n + 1, n + 2, \ldots, 2n + N; \tag{10}$$

$$x_{ij} = 0; \qquad \text{ha } (j - i + 1)\,\tau < h_m, \text{ vagy ha } (j - i + 1)\,\tau > h_M; \tag{11}$$

$$\sum_{j=n+1}^{2n+N} x_{ij} = \mathrm{A}_i; \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{12}$$

$$F_i^{(m)} \leq \sum_{j=n+1}^{2n+N} x_{ij} \leq F_i^{(M)}; \qquad i = n + 1, n + 2, \ldots, n + N; \tag{13}$$

$$G_j^{(m)} \leq \sum_{i=1}^{n+N} x_{ij} \leq G_j^{(M)}; \qquad j = n + 1, n + 2, \ldots, 2n + N; \tag{14}$$

$$\sum_{i=k-n+1}^{k} \sum_{j=k}^{i+n-1} x_{ij} \leq K; \qquad k = n + 1, n + 2, \ldots, n + N; \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n+N} \sum_{j=n+1}^{n+N} c_{ij} x_{ij} \to \text{maximum}. \tag{16}$$

A folytonos modellel összehasonlítva láthatjuk, hogy a (3)-nak itt (10) és (11), (4)-nek (13), (5)-nek (14), (7)-nek (15), (8)-nak (16) a tartalmi megfelelője. A (6) feltétel tartalmának teljesülése a diszkrét modell szerkezetéből már eleve következik.

Periodikus folyamat modellje

Az előzőektől eltérően most nem rögzítjük a kezdő állapotot, de megköveteljük azt, hogy a vezérelt folyamat (a feltételek periodicitásának megfelelően) időben periodikus legyen.

Legyen T a folyamat periódushosszának az a legkisebb egész számú többszöröse, amely nagyobb, mint h_M.

Az előzőekben bevezetett jelöléseket annyiban módosítjuk, hogy most a $[0; T]$ intervallumot osztjuk fel

$$\tau = \frac{T}{n}$$

hosszúságú részintervallumokra.

A folyamat periodicitásából következik, hogy

$$x_{ij} = x_{i^*j^*},$$

ha i és i^*, illetve j és j^* kongruensek egymással az n modulusra nézve. Ezért elegendő az x_{ij} változókat $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ indexekre meghatározni. Megállapodhatunk abban, hogy amennyiben az x_{ij} indexei nem esnek a fenti indexhalmazba, úgy azok kongruens megfelelőire térünk át.

Az optimális periodikus folyamatot az alábbi lineáris programozási feladat megoldása szolgáltatja:

$$(17) \qquad x_{ij} \geqq 0; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \text{ és } j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$(18) \qquad x_{ij} = 0; \qquad \begin{array}{l} \text{ha } (j^* - i + 1)\tau < h_m, \\ \text{vagy ha } (j^* - i + 1)\tau > h_M, \\ \text{ahol } j^* = j, \text{ ha } j \geqq i, \\ \text{különben } j^* = j + n; \end{array}$$

$$(19) \qquad F_i^{(m)} \leqq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq F_i^{(M)}; \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$(20) \qquad G_j^{(m)} \leqq \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqq G_j^{(M)}; \qquad j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$(21) \qquad \sum_{i=k-n+1}^{k} \sum_{j=k}^{i+n-1} x_{ij} \leqq K; \qquad k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$(22) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \text{maximum}.$$

A modell általánosítása

A fenti modellben több erőforrás kapacitáskorlátját is figyelembe vehetjük. Jelölje K_{mk} az m-edik erőforrásból a k-adik intervallumban rendelkezésre álló mennyiséget. Ha egy termék előállítása $p\tau$ ideig tart, akkor $q\tau$ idő elteltével az m-edik erőforrás iránti fajlagos igény legyen a_{mpq}. Így véges folyamat modelljének (15)-ös feltétele, illetve a periodikus (21)-es feltétele helyett az alábbi feltételt írhatjuk:

$$(23) \qquad \sum_{i=k-n+1}^{k} \sum_{j=k}^{i+n-1} a_{m,j-i+1,k-i+1} \, x_{ij} \leqq K_{m,k}$$

ahol $m = 1, 2, \ldots, M$ és $k = n + 1, n + 2, \ldots, n + N$.

A modell méretének csökkentése

Végezetül megjegyezzük, hogy a véges folyamatnál a (11), a periodikusnál a (18) feltétel alapján általában igen jelentős méretcsökkentésre nyílik lehetőség. Ugyanis mindazon változók, melyekre (11), illetve (18) vonatkozik, a modellből kihagyhatók. (Ilyenkor természetesen a többi feltételben csak a megmaradt változókra kell az összegezést elvégezni.) Ez a redukálás a feltételek számát csak ritkán érinti.

Legyen például az általános periodikus folyamat modelljében $n = 50$, s minden i-re legfeljebb 5 olyan j index, amire (18) nem vonatkozik. Ekkor a változók száma 2500-ról 250-re csökkenthető. Ha a modellben $M = 5$ különböző erőforrással számolunk, akkor a feltételrendszer $n(4 + M) = 450$ egyenlőtlenségből áll.

(Beérkezett: 1973. november 15.)

ONE - PRODUCT MODEL WITH SEASONALLY FLUCTUATING CONDITIONS

The scheduling of large-scale pigfarms can be described by a one-product model in which material supply and product delivery fluctuate seasonally. We suppose that the lower limits $f_m(t)$ and $g_m(t)$ and the upper limits $f_M(t)$ and $g_M(t)$ of the intensity of supply $f(t)$ and delivery $g(t)$ are known. These limits are given as functions of time. Turnover time of production (fattening) $h(t)$ can fluctuate between the given values h_m and h_M. Profit $c(h)$, after processing (fattening) of per unit of basic material is a function of the turnover time production (fattening). It is known and generally concave. Optimal scheduling is determined by those functions $f(t)$, $g(t)$ and $h(t)$ for which the functional (8) attains its maximum subject to the conditions (3)—(7). The solution of the model can be well approximated by linear programming. The period under examination is devided into intervals of length τ. x_{ij} denotes that part of material that was supplied and the end product of which is dispatched in the j-th interval. If, furthermore, notation (9) is introduced, then the finite model is given by the linear programming problem (10)—(16), and that of the periodical one is given by the linear programming problem (17)—(22).

МОДЕЛЬ ОДНОГО ПРОДУКТА С ПЕРЕМЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ ПО СЕЗОНУ

Осуществление ритмичности производства крупных свиноферм можно описать моделью одного продукта, где колебается, по сезону, потребность удовлетворения сырьем и готового продукта. Предполагаем, что знаем нижние $f_m(t)$ и $g_m(t)$, а также верхние $f_M(t)$ и $g_M(t)$ пределы, по функции времени, интенсивности удовлетворения сырьем $f(t)$ и транспортировки готового продукта $g(t)$. Срок откармливания $h(t)$ может изменяться между значениями h_m и h_M. После откармливания единицы сырья, достигаемая прибыль $c(h)$, — есть известная функция срока откармливания (в общем вогнутая). Оптимальный график определяют те $f(t)$, $g(t)$ и $h(t)$ функции, на которые функционал (8) дает максимум при условиях (3) — (7). Решение модели, хорошим приближением, можно привести к линейному программированию. В этом случае рассматриваемый период разбиваем на интервалы длиной τ, и обозначим через x_{ij} ту часть транспортируемого сырья в $i^{\text{м}}$ интервале, из которого изготавливаемый продукт транспортируют в $j^{\text{й}}$ интервал. Кроме того, если ведем обозначение по (9), модель конечных процессов можно решить по (10) — (16), а периодические процессы по (17) — (22) задачам линейного программирования.