Forgó Ferenc

Egészszámú programozási feladatok néhány transzformációja

I. Bevezetés

Egy áttekintő cikkükben Garfinkel és Nemhauser [1] vizsgálják bizonyos egészszámú programozási feladatok kapcsolatait. Többek között megmutatják, hogy hogyan lehet egy tiszta nulla-egy lineáris programozási feladatot (ILP) a következő speciális problémákká transzformálni:

— halmaz lefedés (HL),
— halmaz felbontás (HF),
— halmaz kitöltés (HK),
— csúcspont kitöltés (CK),
— éllefedés (EL).

Ezen transzformációk természete olyan, hogy a keletkezett feladatok szerkezete, a feltételek és változók száma a kiindulásul szolgáló ILP paramétereitől függ.

Granot és Hammer [3] egy olyan módszert adtak, mely a többfeltételes hátizsák problémát (olyan ILP, ahol a feltételek $\leq$-el adottak és az együtthatómátrix nemnegatív) HL feladattá transzformálja anélkül, hogy a változók száma növekedne. Ebben az esetben is a HL együtthatómátrixa függ az eredeti ILP adataitól.

Ennek a dolgozatnak az első részében megadunk egy olyan transzformációt (helyesebben a transzformációk egy sorozatát), mely tetszőleges nulla-egy kvadratikus programozási feladatot (IQP) úgy transzformál HL, HF, HK, CK, EL feladatokká, hogy ezen problémák együtthatómátrixa csupán az eredeti IQP változóinak számától, n-től függ. Pontosabban: a HL, HF, HK, CK, EL problémák feltételeinek és változóinak száma n^2 nagyságrendű $(0(n^2))$.

A második részben arra adunk egy módszert, hogy hogyan lehet egy IQP-t fix-költséges szállítási feladattá (FK) transzformálni. Az FK költségmátrixa $n+1$-rendű.

II. Nulla-egy kvadratikus programozási feladatok transzformációja teljesen nulla-egy lineáris programozási feladatokká

Egy ILP-t teljesen nulla-egy lineáris programozási feladatnak (TILP) nevezünk, ha mind az együttható mátrix, mind a jobboldal nulla-egy.

Tekintsük a következő IQP-t

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \quad (1)$$

$$z(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_k x_j \to \max,$$

ahol valamennyi a_{ij}, c_{kj}, b_i egészek. Abban a speciális esetben, amikor $c_{kj} = 0$ minden $k \neq j$ esetén (1) feladat egy ILP.

A következő TILP feladatok speciális voltuknál fogva külön figyelmet érdemelnek. Egyedi tulajdonságaik speciális, az általános esetet is kezelni tudó algoritmusoknál hatékonyabb módszerek konstruálását teszik lehetővé. (Lásd ezzel kapcsolatban [1], [2].) A következőkben e_{ij} egy nulla vagy egy értékű konstanst jelöl.

HL:
$$x_j \in \{0, 1\} \qquad (j = 1, \ldots n)$$
$$\sum_{j=1}^{n} e_{ij}x_j \geq 1 \qquad (i = 1, \ldots m)$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$
$$c_j > 0 \qquad (j = 1, \ldots n)$$

HF:
$$x_j \in \{0, 1\} \qquad (j = 1, \ldots n)$$
$$\sum_{j=1}^{n} e_{ij}x_j = 1 \qquad (i = 1, \ldots m)$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

HK:
$$x_j \in \{0, 1\} \qquad (j = 1, \ldots n)$$
$$\sum_{j=1}^{n} e_{ij}x_j \leq 1 \qquad (i = 1, \ldots m)$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

CK: Ugyanaz, mint HK, azzal a megszorítással kiegészítve, hogy $E = [e_{ij}]$ egy nem irányított gráf él-csúcs incidencia mátrixa. (Másképpen: E minden sora pontosan két egyest tartalmaz.)

EL: Ugyanaz, mint HL, csak itt is E egy él-csúcs incidencia mátrix.

A következő tétel a dolgozat fő eredménye.

1. *Tétel.* Minden (1) alakú IQP-t át lehet transzformálni úgy HL, HF, HK, CK és EL feladatokká, hogy ezen problémák feltételeinek és változóinak száma $0(n^2)$.

(Áttranszformálhatóságon itt azt értjük, hogy az eredeti és a transzformált feladatok ekvivalensek abban az értelemben, hogy bármelyikük tetszőleges optimális megoldásából a többi egy optimális megoldása adott szabályok szerint megkonstruálható.)

Bizonyítás: Legelőször (1) probléma feltételeit küszöböljük ki oly módon, hogy választunk egy elég nagy R egészértékű, pozitív konstanst és felírjuk a következő feltétel nélküli IQP-t:

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad (j = 1, \dots n) \qquad (2)$$

$$v_R(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j - R \sum_{i=1}^{m} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2 \to \max.$$

HAMMER és RUDEANU [17] megmutatták, hogy ha

$$R \geq \lambda^+ - \lambda^- + 1,$$

ahol λ^+ és λ^- tetszőleges olyan számok, melyek kielégítik tetszőleges nulla-egy x-re a

$$\lambda^- \leq z(x) \leq \lambda^+$$

egyenlőtlenséget, akkor (1) és (2) optimális megoldásai ugyanazok, feltéve, hogy (1)-nek van lehetséges megoldása. (Abban az esetben, ha (2) optimális megoldása, mely természetesen mindig létezik, nem lehetséges megoldása (1)-nek, akkor (1)-nek nincs lehetséges megoldása.)

(2)-őt átírhatjuk a következő, könnyebben kezelhető formába:

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad (j = 1, \dots n) \qquad (3)$$

$$v(x) = d_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_k x_j \to \max$$

ahol a d_0, d_{kj} egészértékű konstansokat c_{kj}, b_i, a_{ij} és R egyértelműen meghatározza.

Vezessünk be $\dfrac{n(n-1)}{2}$ új nulla-egy változót — jelöljük őket u_{kj} $(k \neq j)$-vel —, és $n(n-1)$ feltételt:

$$u_{kj} \in \{0, 1\}$$

$$0 \leq x_k + x_j - 2u_{kj} \leq 1 \qquad \begin{pmatrix} k, j = 1, \dots n \\ k < j \end{pmatrix} \qquad (4)$$

$$x_k, x_j \in \{0, 1\} \qquad (k, j = 1, \dots n)$$

Könnyű belátni, hogy $u_{kj} = 1$ akkor és csak akkor, ha $x_k = x_j = 1$. (Nulla-egy változók polinomjait lineáris függvénnyé először WATTERS [4] alakította.) Mivel $d_{kk} x_k^2 = d_{kk} x_k$ és $d_{kj} x_k x_j = d_{kj} u_{kj}$ minden olyan x_k, x_j, u_{kj} esetén, melyek

(4)-et kielégítik, (3) és ezáltal (2) és (1) ekvivalens a következő ILP-vel

$$
\begin{aligned}
& x_j \in \{0, 1\} && (j = 1, \dots n) \\
& u_{kj} \in \{0, 1\} && \left(\begin{matrix} k, j = 1, \dots n \\ k < j \end{matrix}\right) \\
& 0 \le x_k + x_j - 2u_{kj} \le 1 &&
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
d_0 + \sum_{k=1}^{n} d_{kk} x_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{kj} u_{kj} \to \max
$$

Tekintsük most a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$
\begin{aligned}
& x_k, x_j \in \{0, 1\} && (k, j = 1, \dots n) \\
& u_{kj} \in \{0, 1\} && \\
& x_k + x_j - u_{kj} \le 1 && \left(\begin{matrix} k, j = 1, \dots n \\ k < j \end{matrix}\right) \\
& x_k \ge u_{kj} && \\
& x_j \ge u_{kj}. &&
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Megmutatjuk, hogy (4) és (6) ekvivalens. Valóban, ha $\bar{x}_k, \bar{x}_j, \bar{u}_{kj}$ kielégíti (6)-ot, akkor $\bar{x}_k \ge \bar{u}_{kj}$ és $\bar{x}_j \ge \bar{u}_{kj}$ egyenlőtlenségeket összeadva $\bar{x}_k + \bar{x}_j - 2\bar{u}_{kj} \ge 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Más részről $\bar{x}_k + \bar{x}_j - \bar{u}_{kj} \le 1$ maga után vonja $\bar{x}_k + \bar{x}_j - 2\bar{u}_{kj} \le 1$ fennállását. Ha viszont x'_k, x'_j, x'_k kielégíti (4)-et, akkor $x'_k < u'_{kj}$-ből $x'_k = 0$, $u'_{kj} = 1$ következne s így $0 \le x_k + x_j - 2u_{kj}$ nem állhatna fenn. Ha pedig $x'_k + x'_j - u'_{kj} > 1$, akkor $x'_k = x'_j = 1$, $u'_{kj} = 0$ s így $x'_k + x'_j - 2u'_{kj} \le 1$ nem lehet.

Ha áttérünk az $y_j = 1 - x_j$ $(j = 1, \dots n)$ ugyancsak nulla-egy változókra, akkor az $x_k \ge u_{kj}$ és $x_j \ge u_{kj}$ feltételek a következő alakot öltik:

$$
\begin{aligned}
& y_j + u_{kj} \le 1 && \left(\begin{matrix} k, j = 1, \dots n \\ k < j \end{matrix}\right) \\
& y_k + u_{kj} \le 1. &&
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Az s_{kj} és t_{kj} kiegészítő változók bevezetésével kapjuk

$$
\begin{aligned}
& y_j + u_{kj} + s_{kj} = 1 && \left(\begin{matrix} k, j = 1, \dots n \\ k < j \end{matrix}\right) \\
& y_k + u_{kj} + t_{kj} = 1 &&
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Az $x_k + x_j - u_{kj} \le 1$ egyenlőtlenségek

$$
y_k + y_j + u_{kj} \ge 1
$$

formájúak lesznek. Kifejezve y_j-t (8) első egyenletéből és $u_{kj} + y_k$-t a másodikból, az

$$
s_{kj} + u_{kj} + t_{kj} \le 1 \qquad \left(\begin{matrix} k, j = 1, \dots n \\ k < j \end{matrix}\right) \tag{9}
$$

egyenlőtlenségekhez, majd az r_{kj} kiegészítő változó bevezetésével az

$$r_{kj} + s_{kj} + u_{kj} + t_{kj} = 1 \qquad \left(\begin{matrix} k, j = 1, \dots n \\ k < j \end{matrix}\right) \tag{10}$$

egyenlőségekhez jutunk. Természetesen a kiegészítő változók koefficiense 0 a célfüggvényben.

(8) és (10) egy HF feladat lehetséges tartományát határozza meg, ahol a változók száma $2n^2 - n$, a feltételek száma pedig $\frac{3}{2}(n^2 - n)$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy (1) ekvivalens egy HF feladattal.

Garfinkel és Nemhauser megmutatták [1] és [2]-ben, hogy minden HF átalakítható HL és HK problémákká a célfüggvényhez alkalmas pozitív konstansok hozzáadásával (ezáltal megőrizzük a feladat struktúráját — a változókat és az együttható mátrixot — és a célfüggvény valamennyi komponensét pozitívvá tesszük). Azt is megmutatják ([1]), hogy egy HK átalakítható CK-vá úgy, hogy minden egyenlőtlenséget annyi egyenlőtlenségre bontunk szét, ahány pár képezhető a HK egy sorában található egyesekből. Ez azt jelenti, hogy ha

$$\sum_j e_{kj} x_j \leq 1 \tag{11}$$

a HK egy feltétele és $e_{kj_i} = 1$ $(i = 1, \dots t)$, akkor (11) helyettesíthető az

$$x_{j_i} + x_{j_s} \leq 1 \qquad \left(\begin{matrix} i, s = 1, \dots t \\ i < s \end{matrix}\right) \tag{12}$$

egyenlőtlenségrendszerrel úgy, hogy a lehetséges megoldások halmaza nem változik. Ez a transzformáció a változókat érintetlenül hagyja, míg a feltételek száma növekszik. Mivel a mi HK problémánk minden sorában pontosan három 1 van (az r_{kj} kiegészítő változók elhagyhatók, amikor a HF-ről a HK-ra térünk át), minden sor megháromszorozódik s így egy CK-t kapunk $\frac{9}{2}(n^2 - n)$ feltétellel, s így a feltételek száma marad $0(n^2)$.

Mivel minden CK átalakítható EL-lé úgy, hogy minden változónak a komplementerét vesszük, (1) és EL ekvivalenciája nyilvánvaló. Ezzel tételünket bebizonyítottuk, mivel (1)-et transzformáltuk HL, HF, HK, CK és EL problémákká.

Az 1. Tétel néhány, egyelőre még nem teljesen tisztázott és inkább potenciálisan hasznosítható következményével kapcsolatban szeretnénk néhány megjegyzést tenni, s a további kutatómunka néhány lehetséges irányát vázolni.

1. A transzformációk során nyert HL, HF, HK, CK és EL feladatok adott n mellett azonos struktúrájúak, két tetszőleges n változós IQP a transzformációk után csak a célfüggvényben különbözik. Így adott n esetén elégséges lenne csak egyszer meghatározni a lehetséges megoldások konvex burkát, ezáltal valamennyi IQP megoldására a lineáris programozás módszerét lehetne alkalmazni. Minthogy valószínűleg a konvex burkot leíró egyenlőtlenségek száma igen nagy, csak valamilyen közvetett, ezeket az egyenlőtlenségeket egyenként generáló és az összes egyenlőtlenség kis hányadának megvizsgálását igénylő módszer jöhet szóba.

Mivel valamennyi transzformált problémánkhoz hozzárendelhető egy gráf (a HL, HF és HK feladatokhoz EDMONDS [5] rendelt hozzá egy gráfot, míg a CK és EL feladatokhoz természetes módon kapcsolódik az E incidencia mátrixú gráf) és ez a gráf adott n esetében fix, ezen adott gráfok szerkezetének felderítése több sikerrel kecsegtet, mintha minden egyes IQP-hez különböző gráf tartozna. $n = 2$ és $n = 3$ esetében a HL, HF, HK, CK és EL feladatok együtthatómátrixát és a CK és EL feladathoz tartozó gráfot a függelék tartalmazza.

2. Megvizsgálandó lenne, nem nyerhető-e közvetlen számítástechnikai előny létező, az általános ILP esetén nem elég hatékony módszerek ezen speciális feladatokra való alkalmazásával. Ez irányban optimizmusra ad okot LEBEGYEV és SZTIRIKOVICS [7] kísérletsorozata. A Gomory-féle metszősík módszert alkalmazták a HK feladatoktól csak igen kissé különböző problémák megoldására. A 14 teszt feladat esetén, melyek mérete a 11×22-től 33×191-ig változott egyik megoldásához sem volt szükség 7 metszésnél többre. Érdekes lenne megvizsgálni, miért működik az egyébként közismerten lassú Gomory-féle algoritmus ilyen jól ilyen típusú feladatok esetében.

MARSTEN [8] szintén igen jó eredményekről számol be igen nagy méretű (több ezer változó!) HL és HF feladatok megoldása kapcsán. Egy speciális leszámlálási algoritmust használ, mely annál hatékonyabb, minél ritkább az együttható mátrix.

Az 1. Tételben ismertetett transzformált problémák egyikénél sincs egy sorban négynél több egyes, s így az együttható mátrixok igen ritkák.

3. Az EL problémára történő transzformáció lehetővé teszi annak eldöntését, hogy egy adott lehetséges megoldás nem optimális. BALINSKI [9] adott egy szükséges, de sajnos nem elégséges feltételt arra, hogy egy megoldás az EL feladat optimális megoldása legyen. Ennek alkalmazása abban az esetben, ha az EL feladat duálisa — mely egyébként egy ,,jól megoldható'' általánosított párosítási probléma — egyértelmű optimummal rendelkezik, igen egyszerű.

4. BALAS és PADBERG [10], [11] igen érdekes eredményeket értek el a HF feladatra. Adtak egy algoritmust, mely a HF egy tetszőleges lehetséges megoldásából kiindulva egy jobb lehetséges megoldást talál, ha ilyen egyáltalán létezik. Az általunk javasolt algoritmus lehetővé teszi, hogy Balas módszerét az IQP megoldására alkalmas bármely módszerrel kombináljuk. Ha pl. egy leszámlálási algoritmus elakad (hosszú időn keresztül nem tudja javítani a célfüggvényértéket és nem tudja az optimalitást sem kimutatni), akkor transzformáljuk a feladatot (esetleg a részfeladatot a változók egy részhalmazának rögzítésével) egy HF problémára és alkalmazzuk Balas módszerét egy jobb megoldás elérése vagy az optimalitás igazolása céljából. Természetesen számítástechnikai tapasztalatokra van szükség a várható előnyök és hátrányok összevetéséhez.

5. Említésre méltó tény, hogy az EL problémának van egy ugyanolyan tulajdonsága, mint a ,,jól megoldható'' párosítási feladatnak, mely a következő ILP

$$x \geq 0 \quad x = \text{integer}$$

$$Ex \leq 1 \tag{13}$$

$$1x \to \max,$$

ahol E egy gráf csúcs-él incidencia mátrixa. Tekintsük az ugyanehhez a gráfhoz tartozó EL feladat folytonos lehetséges tartományát meghatározó egyenlőtlenség rendszert:

$$\begin{aligned} E^*y &\geq 1 \\ y &\geq 0, \end{aligned} \tag{14}$$

(* a transzponáltat jelöli). A következő tétel [2] 10. tételének (85. o.) megfelelője EL probléma esetére

2. *Tétel.* Legyen y a (14)-nek egy bázismegoldása, B pedig az $A^* = \left[\frac{E^*}{-I}\right]$ mátrix azon soraiból alkotott nemszinguláris mátrix, melyekhez tartozó egyenlőtlenség egyenlőség formában teljesül y-nál. Ekkor B^{-1} minden eleme vagy 0 vagy $\frac{1}{2}$ (mod 1), míg y minden egyes komponense $0, \frac{1}{2}$ vagy 1.

Bizonyítás. Ahhoz, hogy y bázismegoldás legyen, szükséges, hogy $y \leq 1$. Legyen B az egyenlőségként teljesülő feltételek mátrixa

$$B = \begin{bmatrix} E_{11}^*, & E_{21}^* \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

és b a hozzátartozó jobboldal, mely szintén nulla-egy vektor. Így $y = B^{-1}b$. Ugyanakkor B^* a (13)-nak egy bázismátrixa, melyről bizonyított (lásd [2]), hogy minden komponense 0 vagy $\frac{1}{2}$ (mod 1). Mivel $y \leq 1$ és $y = B^{-1}b$ következik, hogy $y_j = 0$ vagy $\frac{1}{2}$ (mod 1) minden j-re, ami éppen a tétel állítása.

Ez a tulajdonság nem megy át automatikusan a megfelelő HL, HF és HK problémákra, de ugyancsak érvényes a CK-ra.

6. Amikor egy ILP-t HL, HF, HK, CK és EL problémákra transzformáltunk ezen feladatok folytonos optimuma teljesen más lehet, mint az eredeti feladaté volt és természetesen az optimális bázisok is különböznek. Ez hasznos lehet abban az esetben, ha a transzformált feladat optimális bázisának determinánsa abszolút értékben jóval kisebb, mint az eredeti feladaté. Az ún. „csoportelméleti" (group theoretic) algoritmusok (lásd pl. [2], [16]) szempontjából ezen determináns nagysága döntő fontosságú.

III. Nulla-egy kvadratikus programozási feladatok transzformációja fix költséges szállítási feladattá

Ismert dolog, hogy egy ún. fix költséges szállítási feladat [12] átalakítható egy vegyes nulla-egy programozási feladattá. A következőkben megmutatjuk, hogy ennek a fordítottja is igaz, vagyis a nulla-egy programozás feladatok egy széles osztálya egy vagy több FK megoldására visszavezethető. A könnyű hivatkozás kedvéért emlékeztetünk az FK definíciójára.

Keresendők olyan $x_{ij} \geq 0$ $(i = 1, \ldots m; j = 1, \ldots n)$ értékek, melyek kielégítik a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = f_i \qquad (i = 1, \ldots m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = r_j \qquad (j = 1, \ldots n)$$

feltételeket és minimalizálják a

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_{ij}$$

célfüggvényt, ahol r_j, f_i, c_{ij}, b_{ij} $(b_{ij} \geq 0)$ konstansok és

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x_{ij} = 0 \\ 1 & \text{ha} \quad x_{ij} > 0. \end{cases}$$

3. *Tétel.* Minden IQP megoldása visszavezethető legfeljebb $n - 1$ FK megoldására (n az IQP változóinak száma).

Bizonyítás: Bizonyításunk konstruktív. Csatoljuk a

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = t \tag{15}$$

feltételt (1), (2) és (3) feltételrendszeréhez. t egy egészértékű paraméter, $0 \leq t \leq n$. Ha adott t mellett (1) optimális célfüggvényértékét z_t-vel jelöljük ($z_t = -\infty$ definíció szerint, ha (1)-nek nincs lehetséges megoldása), akkor

$$z_0 = \max_{0 \leq t \leq n} z_t$$

(1) optimális célfüggvényértéke, ha $z_0 > -\infty$ és (1)-nek nincs lehetséges megoldása, ha $z_0 = -\infty$.

A $t = 0$ és a $t = n$ eset triviális, ezért elég a $1 \leq t \leq n - 1$ eseteket vizsgálni. Adjuk meg az FK-t a költségmátrixszal, valamint a peremértékekkel (a „kereslettel" és „kínálattal"). A költségmátrix egy eleme a következőképpen néz ki

$$a^{\textcircled{c}}_{\boxed{b}}$$

ahol a konstans egységköltség, b a fix költség, c pedig az illető változó egyedi felső korlátja. A $\otimes$ jelölés egy olyan nagy számot (tiltó költség) jelöl, mely biztosítja azt, hogy a hozzátartozó változó minden optimális megoldásban 0 értékkel szerepel.

Bevezetünk két pozitív konstansot is

$$M > Dn^2 \qquad D = \max_{k,j} |d_{kj}|$$

$$K > (D + M)n^2$$

ahol a d_{kj} paramétereket (3)-ban már definiáltuk. Megmutatjuk, hogy (3) megoldása és ezen keresztül (1) visszavezethető egy olyan $(n+1)\times(n+1)$-es költségmátrixú FK megoldására, melyet a következő paraméterek határoznak meg (t most rögzített és (15)-öt csatoltuk (3) feltételeihez):

$$
\begin{array}{cccccc|c}
-d_{11}^{\textcircled{1}} & (-d_{12}+M)^{\textcircled{1}} & \dots & (-d_{1n}+M)^{\textcircled{1}} & 0_{|K|} & & t \\
(-d_{21}+M)^{\textcircled{1}} & -d_{22}^{\textcircled{1}} & \dots & (-d_{2n}+M)^{\textcircled{1}} & 0_{|K|} & & t \\
 & & \dots & & & & \vdots \\
(-d_{n1}+M)^{\textcircled{1}} & (-d_{n2}+M)^{\textcircled{1}} & \dots & -d_{nn}^{\textcircled{1}} & 0_{|K|} & & t \\
0_{|K|} & 0_{|K|} & \dots & 0_{|K|} & \otimes & & (n-t)t \\
\hline
t & t & \dots & t & (n-t)t & & 2nt-t^2
\end{array}
\tag{16}
$$

Legyen x^0 az (1)-nek egy optimális megoldása. Ezért (3)-nak is optimális megoldása valamely t-re. Legyen $x_{kj}^0 = x_k^0 x_j^0$ $(k, j = 1, \dots n)$ és $x_{k,n+1}^0 = 0$, ha $x_k^0 = 1$; $x_{k,n+1}^0 = t$, ha $x_k^0 = 0$; $x_{n+1,j}^0 = 0$, ha $x_j^0 = 1$; $x_{n+1,j}^0 = t$, ha $x_j^0 = 0$. Világos, hogy az így definiált $\{x_{kj}^0\}$ a (16)-nak lehetséges megoldása és a hozzá tartozó célfüggvényérték

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_{kj}^0 + Mt(t-1) + 2(n-t)K.$$

Legyen $\{y_{kj}^0\}$ a (16)-nak egy optimális megoldása. Ekkor

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}y_{kj}^0 + rM + sK \leq -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_{kj}^0 + Mt(t-1) + 2(n-t)K, \tag{17}$$

ahol r azon pozitív y_{kj}^0-ák száma, melyekre $k \neq j$ $(k, j = 1, \dots n)$ és s a pozitív $y_{k,n+1}^0$ és $y_{n+1,j}^0$-ák száma. (16) konstrukciójából következik, hogy $s \geq 2(n-t)$, sőtK definíciója miatt $s = 2(n-t)$. Ez azt jelenti, hogy (16) minden sorára és oszlopára az utolsókat kivéve vagy $y_k^0 = 0$ vagy $y_{k,n+1}^0 = t$, ill. vagy $y_{n+1,j}^0 = 0$ vagy $y_{n+1,j}^0 = t$. Így (17) a következő alakot ölti:

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}y_{kj}^0 + rM \leq -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_{kj}^0 + Mt(t-1), \tag{18}$$

$r \geq t(t-1)$, mivel ellenkező esetben több, mint t pozitív y_{kk}^0 lenne s így $y_{k,n+1}^0 = 0$ és $y_{n+1,k}^0 = 0$ fennállna több mint t elemre, ami lehetetlen. Ugyanakkor M definíciója miatt $r > t(t-1)$ nem állhat fenn (18) következtében, s így $r = t(t-1)$ amiből

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}y_{kj}^0 \leq -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_{kj}^0 \tag{19}$$

következik. Láttuk az előzőekben, hogy pontosan t pozitív y_{kk}^0 van. Legyen $y_k^0 = 1$, ha $y_{kk}^0 = 1$ és $y_k^0 = 0$, ha $y_{kk}^0 = 0$. Ekkor (19)-ből

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_k^0 x_j^0 \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}y_k^0 y_j^0 \tag{20}$$

következik, mely azt jelenti, hogy $y^0 = [y_1^0, \ldots y_n^0]$ a (3)-nak és így (1)-nek is optimális megoldása.

Ha (16)-ot megoldjuk minden t-re $(1 \leq t \leq n-1)$ és még figyelembe vesszük a $t = 0$ és $t = n$ eseteket, akkor ki tudjuk választani (3) és ezáltal (1) egy optimális megoldását ill. el tudjuk dönteni, hogy (1)-nek nincs lehetséges megoldása. Ezzel bebizonyítottuk a 3. tételt.

Következmények:

1. Bármely módszer, mely alkalmas FK megoldására (pl. [12], [13], [14]), használható IQP megoldására is.
2. Mivel számos olyan ILP van (lásd [15]), ahol (15) már eleve szerepel a feltételek között, elég (16)-ot csak egyszer megoldani egy t-re. Ebben az esetben (1) ekvivalens egy darab FK-val.

Függelék: A transzformált problémák szerkezete

$$n = 2$$

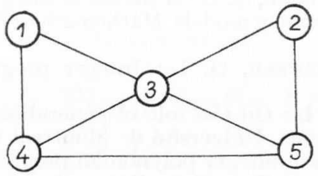
A HF, HL és HK együtthatómátrixa (HK esetében az r_{ij}-khez tartozó oszlopok elhagyhatók):

y_1	y_2	u_{12}	s_{12}	t_{12}	r_{12}
1		1	1		
	1	1		1	
		1	1	1	1

A CK és EL együttható mátrixa: (A redundáns, többször is szereplő feltételeket *-gal jelöltük meg. Ezek a további vizsgálatokban figyelmen kívül hagyhatók).

	y_1	y_2	u_{12}	s_{12}	t_{12}
	1		1		
	1			1	
			1	1	
		1	1		
		1			1
			1		1
*			1	1	
*			1		1
				1	1

A CK és EL-hez tartozó gráf a következő

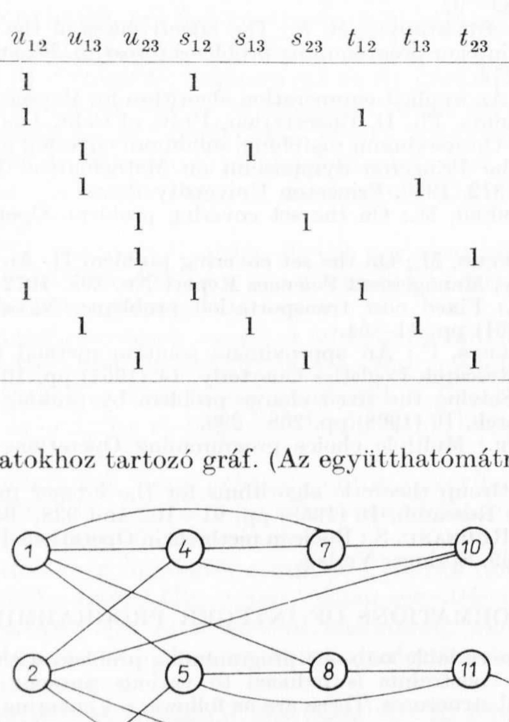


$n = 3$

A HL, HF és HK mátrixa:

y_1	y_2	y_3	u_{12}	u_{13}	u_{23}	s_{12}	s_{13}	s_{23}	t_{12}	t_{13}	t_{23}	r_{12}	r_{13}	r_{23}
1			1			1								
	1		1						1					
1				1			1							
		1		1						1				
	1				1			1						
		1			1									
			1			1			1			1		
				1			1			1			1	
					1			1			1			1

A CK és EL feladatokhoz tartozó gráf. (Az együtthatómátrix ebből felírható.)



(Beérkezett: 1974. január 28.)

IRODALOM

1. GARFINKEL, R. S.—NEMHAUSER, G. L.: A survey of integer programming emphasizing computation and relations among models. Mathematical Programming HU—ROBINSON (szerk.) pp. 77—155.
2. GARFINKEL, R. S.—NEMHAUSER, G. L.: Integer programming. New York, 1972. John Wiley and Sons.
3. GRANOT, F.—HAMMER, P. L.: On the role of generalized covering problems. Centre de Recherches Mathematiques, Université de Montreal CRM-220 1972 Sept.
4. WATTERS, L. J.: Reduction of integer polynomial programming problems to zero-one linear programming problems. Operations Research, 15, No. 6. pp. 1171—1174.
5. EDMONDS, J.: Covers and packings in a family of sets. Bull. Am. Math. Soc. 68, pp. 494—499 (1962).
6. EDMONDS, J.—JOHNSON, E. L.: Matching: A well solved class of integer linear programs. Proc. of the Calgary Int. Conf. on Comb. Structures and Their Appl. Gordon and Breach, pp. 89—92.
7. LEBEDEV, B. D.—STYRIKOVIC, R. S.: The effectiveness of the Gomory method for a certain class of integer programming problems (oroszul). Ekonom. i Mat. Metody F (1971) pp. 769—772.
8. MARSTEN, R. E.: An implicit enumeration algorithm for the set partitioning problem with side contstraints. Ph. D. Dissertation, Univ. of Calif. Los Angeles, 1971.
9. BALINSKI, M. L.: On maximum matching, minimum covering and their connections. Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming (szerk. KUHN) pp. 303—312. 1970. Princeton University Press.
10. BALAS, E.—PADBERG, M.: On the set covering problem. Operations Research, 20, 1972. No. 6.
11. BALAS, E.—PADBERG, M.: On the set covering problem II. An algorithm. Carnegie-Mellon University, Management Sciences Report No. 295. 1972.
12. BALINSKI, M. L.: Fixed cost transportation problems. Naval Research Logistics Quarterly, 11 (1961) pp. 41—54.
13. COOPER, L.—DREBES, C.: An approximate solution method for the fixed charge problem. Naval Research Logistics Quarterly, 14 (1967) pp. 101—115.
14. MURTY, K. G.: Solving the fixed charge problem by ranking the extreme points. Operations Research, 16 (1968) pp. 268—280.
15. HEALY, W. C. JR.: Multiple choice programming. Operations Research 12 (1964) pp. 122—138.
16. SHAPIRO, J. F.: Group theoretic algorithms for the integer programming problem I—II. Operations Research, 16 (1968) pp. 91—102 and 928—947.
17. HAMMER, P. L.—RUDEANU, S.: Boolean methods in Operations Research and Related Areas. Berlin, 1969. Springer Verlag.

SOME TRANSFORMATIONS OF INTEGER PROGRAMMING PROBLEMS

In the paper the n-variable zero-one programming problem with quadratic objective function and linear constraints is reduced to various zero-one linear programming problems with special structures. These are as follows: set covering, set partitioning, set packing, vertex packing, edge covering, transportation problem with fixed costs. The transformations outlined differ from the ones published insofar namely the structure of the transformed problems (with the exception of the objective function) is a function of n alone and the size of the problems (number of variables and constraints) is of the order n^2.

НЕКОТОРЫЕ ТРАНСФОРМАЦИИ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В данной статье заданные линейными условиями задачи «0—1» программирования «n» переменных, имеющих квадратическую целевую функцию, вводятся к разным ,имеющим специальную структуру задачам «0—1» линейного программирования. Эти следующие: покрытие множества, разделение множества, заполнение множества и вершин, покрытие граней, транспортная задача постоянных затрат. Трансформации отличаются от известных из литературы тем, что структура трансформированных задач (за исключением целевой функции) является функцией лишь от n, а размер задач (переменные и число ограничений) является порядка n^2.