VISSZAVÁSÁRLÁSI KOCKÁZAT ÉRTÉKELÉSE KORRELÁLT BIZTOSÍTÁSI KOCKÁZATOKNÁL[1]

SZINI RÓBERT
Magyar Nemzeti Bank

A Szolvencia II szabályozás várható bevezetésének hatására az utóbbi években megnövekedett a különböző kockázatok minél pontosabb modellezésének igénye a biztosítók részéről. Cikkünk célja a biztosítók visszavásárlási opcióval érintett területén felmerülő visszavásárlási kockázat modellezési lehetőségeinek, valamint a szakirodalomban már egy ismert modell lehetséges fejlesztésének, továbbgondolásának bemutatása. Ehhez először is röviden bemutatjuk Loisel-Milhaud [2012] eddigi eredményeit, kiegészítve azt a szerzőpáros vizsgálatának fókuszába nem kerülő, saját számításokon alapuló paraméterbecslés eredményeivel. A későbbiekben megmutatjuk, hogyan lehet Grosen-Jørgensen [1999] modelljét egy eltérő, vegyes biztosítási keretrendszerben kezelni és így a visszavásárlást, mint egy biztosítási termékhez kapcsolódó opciót beárazni. Ezt követően pedig bemutatásra kerül, hogyan lehet a módosított keretrendszerben tárgyalt Grosen-Jørgensen [1999] modellbe Loisel-Milhaud [2012] eredményeit beépíteni a stressz időszak során felmerülő visszavásárlási döntések közötti korrelációval kapcsolatban. A cikkben azt állítjuk, hogy az így továbbfejlesztett, kombinált modellel a visszavásárlással, mint az ügyfél által lehívható opcióval rendelkező termék aktuáriusilag korrekt árának (actuarially fair price) meghatározására egy pontosabb, az árat mozgató külső tényezők szélesebb körét megragadó eszközhöz jutunk.

Kulcsszavak: visszavásárlási kockázat, aktuáriusilag korrekt ár, modellezés, Szolvencia II
Journal of Economic Literature (JEL) kód: C15, C46, C63, G12, G22

Bevezetés

A biztosítási szektort a tőkepiacok eredménye és működése egyre inkább befolyásolja napjainkban, amelyet nagyrészt a banki és biztosítási tevékenységek, termékek egyre szorosabb összefonódása indukál. A biztosítási ágazat ennek hatására egyre inkább magasabb kockázati szintekkel szembesül, amelynek kezelését és mérését a biztosítók szavatolótőkéjére vonatkozó jelenlegi szabályozás (Szolvencia I) egyre kevésbé tudja lefedni. Ennek hatására az Európai Unió elindította a Szolvencia II projektet, amelynek célja, hogy a

[1]Ezúton szeretném megköszönni Dr. Szüle Borbálának és Inzelt Györgynek, hogy idejüket nem kímélve szakmai és formai tanácsaikkal segítettek a cikk elkészítésében. Beérkezett: 2013. október 6. E-mail: `szinir@mnb.hu`.

biztosítók minimum tőkekövetelményének szintje jobban tükrözze az általuk vállalt kockázatokat.

A Szolvencia II keretrendszer már lehetőséget nyújt olyan kockázattípusok jobb megragadására, számszerűsítésére is, amelyek nem kerültek lefedésre a Szolvencia I által. A visszavásárlási kockázat (surrender risk), azaz jelen cikk témája pontosan ezen, az eredeti szabályrendszer által még nem lefedett kockázattípusok közé tartozik. A szakirodalomban a visszavásárlással, mint egy ügyfél által lehívható opcióval, valamint annak árazásával kapcsolatosan számos cikk született már, amelyek az ár meghatározására különféle módszereket javasolnak. Tak Kuen Siu [2005] például másodrendű, szakaszonként lineáris, közönséges differenciálegyenletek segítségével jut el az aktuáriusilag korrekt árhoz, míg Bacinello [2003] CRR[2] modell, valamint egy rekurzív algoritmus alkalmazásával kapja a korrekt árat. A szakirodalom azonban még nem foglalkozott az aktuáriusilag korrekt árat meghatározni képes modellek kapcsán az összefüggő (korrelált) biztosítási kockázatokkal, valamint annak modellbe történő beépíthetőségével. A cikkünkben közölt új eredmények egyike viszont pontosan ezzel a témakörrel kapcsolatos.

Cikkünk első szakaszában bemutatjuk a szakirodalom még viszonylag újnak tekinthető eredményeit a stressz időszak során felmerülő visszavásárlási döntések közötti korrelációjával kapcsolatban (Loisel-Milhaud [2012] nyomán), majd a második szakaszban egy módosított keretrendszerben (vegyes biztosítás) tárgyaljuk a visszavásárlási opcióval ellátott termékek aktuáriusilag korrekt árának meghatározására képes Grosen-Jørgensen [1999] modellt. A harmadik szakaszban pedig bemutatjuk, hogyan is vehetőek figyelembe Loisel-Milhaud [2012] eredményei a módosított keretrendszerű Grosen-Jørgensen [1999] modellben, amellyel kapcsolatosan kontrollszámításokat is végzünk.

1 A visszavásárlási kockázat sztochasztikus modellje

Az összefoglalóban említett kombinált modell bemutatása előtt, mely jelen cikk fő tárgyát képezi, röviden összefoglaljuk Loisel-Milhaud [2012] modelljének eredményét, valamint annak a kombinált modell matematikai hátterének megértéséhez feltétlenül szükséges alapjait. A részletes lépéseket és alkalmazott összefüggéseket az érdeklődő olvasó megtalálja Loisel-Milhaud [2012] cikkében.

Legyen adott egy tetszőleges biztosítási termék, amelyet az ügyfél a teljes tartam alatt visszavásárolhat. Jelölje a továbbiakban Δr a piacon, egyéb befektetéssel elérhető hozamnak, valamint az adott biztosítási termékhez tartozó szerződésben rögzített hozamnak a különbségét. Legyen K_i egy olyan indikátor valószínűségi változó, amely 1 értéket vesz fel, ha az i-edik kötvénytulajdonos visszavásárol, 0-t pedig, ha nem vásárol vissza. Hasonlóan, jelölje M_i azt az indikátor valószínűségi változót, amely 1 értéket vesz fel,

[2] Cox, Ross, Rubinstein

ha az i-edik kötvénytulajdonos piackövető magatartású, 0-t pedig, ha nem, továbbá legyen az M_i valószínűségi változó paramétere p_0. Legyen továbbá K_0 az az indikátor valószínűségi változó, amely a visszavásárlással kapcsolatos piaci várakozásokat tükrözi (1 értéket vesz fel, ha a piaci viszonyok a visszavásárlást diktálják), valamint jelölje $K_i^{\perp}$ az i-edik kötvénytulajdonos minden, a piaci várakozásokon kívüli információforrása segítségével meghozott döntését a visszavásárlással kapcsolatban (1 értéket vesz fel, ha visszavásárlást diktál minden egyéb információ). A következőkben tegyük fel, hogy K_0 és $K_i^{\perp}$ $(i = 1, \ldots)$ függetlenek, és legyenek azonos eloszlásúak p paraméterrel, továbbá legyen független M_i $(i = 1, \ldots)$ K_0-tól és $K_i^{\perp}$-től $(i = 1, \ldots)$. Ezen feltételezések felhasználását, valamint szükségességét a modell levezetése során, a megfelelő helyen külön ismertetjük. A visszavásárlással kapcsolatos döntést jelző K_i indikátor változót az eddigiek alapján a következőképp írhatjuk fel egy adott kötvénytulajdonosra:

$$K_i = M_i K_0 + (1 - M_i) K_i^{\perp} \ . \tag{1}$$

Az (1)-ben szereplő K_i változóról, azaz az egyéni visszavásárlási döntések változójáról feltehető, hogy annak a valószínűsége, hogy értéke 1, az Δr növekvő függvénye.

A következőkben bemutatjuk, hogy portfólió szinten hogyan tudjuk a fentieket alkalmazni, továbbá a fenti paraméterek felhasználásával milyen eloszláshoz jutunk a kötvénytulajdonosok visszavásárlását illetően (Loisel-Milhaud [2012] alapján). Vegyünk egy $n \geq 2$ kötvénytulajdonosokból álló portfóliót. Jelölje a visszavásárlás mellett döntő szerződők számát Z, azaz $Z = \sum_{i=1}^{n} K_i$. Továbbá jelölje a piackövető magatartású szerződők számát Y, így $Y = \sum_{i=1}^{n} M_i$. Most tegyük fel, hogy a piaci várakozások a visszavásárlást képviselik, azaz $K_0 = 1$. Ekkor Z egyenlő $k \in [0, n]$ egésszel, továbbá az $Y \leq k$ feltételnek is teljesülnie kell, hisz a piackövető magatartásúakon kívül más is dönthet visszavásárlás mellett. Ehhez hasonlóan, ha $K_0 = 0$, akkor $Y \leq (n - k)$ fog teljesülni, hisz ekkor $(n - k)$ kötvénytulajdonos nem fog visszavásárolni, akik közül nem biztos, hogy mindenki piackövető magatartású. Ezek és a teljes valószínűség tétele alapján felírhatjuk a $P(Z = k)$ valószínűséget minden $0 \leq k \leq n$ esetén:

$$P(Z = k) = P(Z = k \mid K_0 = 0) P(K_0 = 0) + P(Z = k \mid K_0 = 1) P(K_0 = 1) \ . \tag{2}$$

A fenti (2)-es kifejezést általánosabb alakra hozhatjuk a piackövető magatartású kötvénytulajdonosok számának figyelembevételével, valamint kihasználva az alkalmazott változók függetlenségét (a részletes átalakításokért lásd Loisel-Milhaud [2012]), a keresett eloszlás alakja a következő lesz:

$$P(Z = k) = p \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i,k} + (1 - p) \sum_{j=0}^{n-k} \beta_{j,k} \tag{3}$$

$$\alpha_{i,k} = \binom{n}{i} p_0^i (1 - p_0)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1 - p)^{n-k} \tag{4}$$

$$\beta_{j,k} = \binom{n}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-j} \binom{n-j}{k} p^k (1-p)^{n-j-k} \tag{5}$$

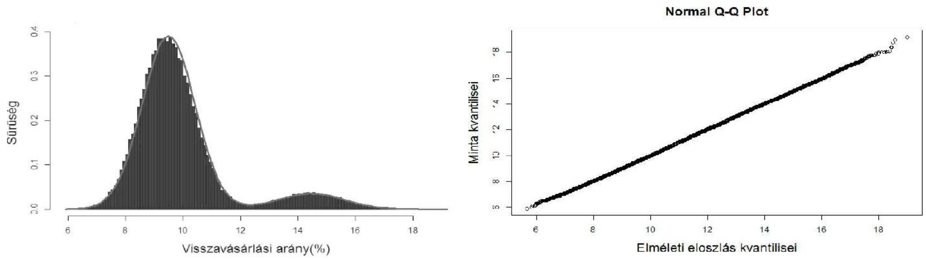
Loisel-Milhaud [2012] cikkükben megmutatják, hogy amennyiben $p_0 = 0$ és $n \to \infty$, úgy a fenti (3) eloszlás jól közelíthető normális eloszlással, valamint $p_0 \neq 0$ esetben a keresett eloszlás kétmóduszú lesz. A korábbi feltételezésünk hasznát, mely szerint az alkalmazott K_0 és $K_i^{\perp}$ $(i = 1, \ldots)$ változók nem csak függetlenek, hanem azonos eloszlásúak, azonos paraméterekkel, azt a $p_0 = 0$ eset mellett a (3) kifejezés átalakítása kapcsán láthatjuk (a $p_0 = 0$ esetén analitikusan is belátható, hogy a fenti (3) eloszlás jól közelíthető normális eloszlással[3], míg a $p_0 \neq 0$ esethez tartozó kétmóduszú eloszlással való közelítés helyességét csak a szimuláció eredménye alapján tudjuk megállapítani). A későbbiekben ismertetett kombinált modellben ezen eredményeket fogjuk felhasználni, viszont a $p_0 \neq 0$ eset további vizsgálatokat kíván, mivel a szerzőpáros cikkükben kizárólag a hisztogram alakja alapján vizsgálta ezt az esetet, és nem is kísérelték meg a kétmóduszú eloszlás közelítését valamilyen kevert eloszlással, és annak paramétereinek kiszámítására sem tértek ki. A továbbiakban tehát megmutatjuk, hogy a $p_0 \neq 0$ esethez kapcsolódó eloszlást két normális eloszlás keverése során előálló kevert eloszlás segítségével lehet közelíteni, továbbá megfelelő módszertan segítségével számszerűsítjük a normális eloszlások μ és σ paramétereit, valamint a keverés során alkalmazott súly értékét.

Az előzőekben említett feladatot az EM-algoritmus[4] alkalmazásával oldottuk meg, amely az ML becslés iteratív számítására alkalmas. Bilmes [1988] alapján az algoritmusnak két fő felhasználási területe létezik. Az egyik az adathiány esete, amely például a megfigyelések nem megfelelő rögzítéséből fakadhat, a másik terület pedig a likelihood függvény optimalizálásának nehezen kivitelezhető esete, amely során egy további, hiányzó (látens) változó létezését feltéve a likelihood függvény tovább egyszerűsíthető. Jelen esetben mi az utóbbi probléma kapcsán használjuk majd az EM-algoritmust. Az érdeklődő olvasó a cikk függelékében találhat egy rövid módszertani összefoglalót a kérdéses algoritmus kapcsán. Az EM-algoritmus segítségével meghatározott paraméterű eloszlások illeszkedésének jóságát Q-Q plotokkal ellenőriztük, amelyek közül egy kiválasztott paraméterkészlethez tartozó esetet a következő ábra mutat[5].

[3]Belátható, hogy az $i, j = 0$ esetben (4) és (5) valószínűségek, amennyiben $p_0 = 0$, $B(n,p)$ binomiális eloszlásúak, míg $i, j \neq 0$ esetben az egyes $\alpha_{i,k}$ és $\beta_{j,k}$ változók azonosan 0 értékűek. Ennek tudatában a (3) kifejezés jelentősen egyszerűsödik, és eredményként a $B(n,p)$ eloszlást kapjuk, amely $n \to \infty$ esetben a de Moivre-Laplace tétel alapján tart a normálishoz. A fenti egyszerűsítések a kérdéses változók azonos paraméterű eloszlásának feltételezése nélkül nem lennének elvégezhetőek. Az azonos paraméterű eloszlás feltételezése közgazdaságilag is értelmes: hatékony piacokon a piacon hozzá nem férhető információ nem diktálhat tartósan mást, mint a piaci várakozás, mert annak szinte azonnal be kell épülnie a várakozásokba az információ adta előny első kihasználását követően (hatékony piacok elmélete (EMH) alapján).

[4]Expectation-Maximization algorithm

[5]A cikkben szereplő összes számítást az R 3.0.1 szoftverrel végeztük el.



$n = 1000$ $p = 0.1$, $p_0 = 0.05$ $n = 1000$ $p = 0.1$, $p_0 = 0.05$

1. ábra. Illeszkedés vizsgálat

Egyéni vv. valószínűség	Korreláció	μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	α
	p_0=5%	7.66	0.84	12.64	1.12	0.92
p=8%	p_0=15%	6.88	0.79	21.95	1.22	0.91
	p_0=30%	5.65	0.72	35.63	1.51	0.91
	p_0=5%	14.23	1.08	19.21	1.30	0.85
p=15%	p_0=15%	12.76	1.05	27.73	1.42	0.84
	p_0=30%	10.50	0.98	40.56	1.56	0.84
	p_0=5%	23.77	1.32	28.72	1.51	0.75
p=25%	p_0=15%	21.25	1.30	36.27	1.55	0.74
	p_0=30%	17.48	1.20	47.44	1.57	0.74

1. táblázat. A paraméterbecslés eredményei

Az *1. táblázatban* összefoglalóan találjuk a $p_0 \neq 0$ esetekhez tartozó, a fenti eljárások segítségével meghatározott paramétereket. A táblázatból láthatjuk, hogy a p paraméter leginkább a kevert eloszlás első komponensének várható értékét befolyásolja, amely a p_0 változó, azaz a korreláció növekedésével folyamatosan csökken. A korreláció növekedésével látható, hogy a második komponens várható értéke is folyamatosan nő, azaz a kérdéses eloszlás egyre inkább kétmóduszúvá válik. A σ_1 paraméterre p_0 növekedése csökkenőleg hat, amely azt jelenti, hogy az első komponens eloszlás egyre inkább csúcsosabbá válik. Az elmondottak a σ_2 paraméterre fordítva teljesülnek, azaz p_0 növekedésével nő, így a második komponens eloszlás egyre laposabbá válik. Érdemes továbbá megemlíteni, hogy mindkét kérdéses paraméter növekedése csökkenőleg hat az első komponens keverési súlyára, azaz egyre hangsúlyosabbá válik a második komponens. A cikkünk harmadik fejezetében ismertetésre kerülő kombinált modellhez a fenti eredményeket, és azok számszerűsítéséhez szükséges módszereket a fentiek alapján most már bátran alkalmazhatjuk.

2 A visszavásárlás, mint opció

Ebben a szakaszban a bevezető részben említett kombinált modell alapját képező, a visszavásárlást, mint a kötvénytulajdonos számára a szerződés tartama alatt lehívható opció árazására képes modellt fogjuk bemutatni, azaz pontosabban annak csakis a kombinált modell megértéséhez nélkülözhetetlen részleteit, lépéseit (az érdeklődő olvasó Grosen-Jørgensen [1999] cikkében találhatja meg a részletes modell bemutatást, leírást). A modell bemutatása a cikk témájához jobban illeszkedő vegyes biztosítás keretrendszerében fog megvalósulni, amelyhez a szükséges, az említett szakirodalomhoz képesti plusz feltételezésekre, paraméterekre részletesen ki fogunk térni a következőkben. Az előző szakasz eredményeinek ezen modellbe történő beépíthetőségeire a harmadik szakaszban térünk ki, a kombinált modell ismertetése során.

Tegyük fel, hogy egy piaci szereplő év elején V egyszeri díjat fizet a biztosítónak, azaz V egyszeri összegért vásárol egy biztosítási terméket. Ezt az összeget a biztosító azonnal jóváírja az ügyfele számláján, azaz $P(0) = V$, ahol $P(i)$ az i-edik év elején az ügyfél számlájának egyenlegét jelenti. Ezt az összeget a biztosító azonnal befekteti, azaz $S(0) = V$, ahol $S(i)$ az i-edik év elején a biztosító eszközeinek piaci értéke. Feltesszük, hogy a biztosító az eszközeiből egy jól diverzifikált portfóliót épít fel, viszont nem teszünk kikötést annak összetételére. Ehelyett feltesszük, hogy az eszközök piaci értéke geometriai Brown-mozgást követ, azaz képlettel megadva:

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma S(t)\,\mathrm{d}W(t)\,, \quad S(0) = V\,. \tag{6}$$

A (6) összefüggésben a μ és σ a drift és volatilitás paraméterei, a $W(\cdot)$ pedig egy standard Wiener-folyamat egy filtrált valószínűségi mezőn $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ a $[0, T]$ véges időintervallumon, ahol $\mathrm{d}W(t) = \epsilon\sqrt{\mathrm{d}t}$, $\epsilon \sim N(0, 1)$. A következőkben jelölje T a szerződés tartamát, továbbá tegyük fel, hogy a biztosító minden év elején r_p kamatot ír jóvá a kötvénytulajdonos számláján lévő összegre vonatkozóan, amelynek értékét Grosen és Jørgensen [1999] a következőképp definiálták:

$$r_p(t) = \max\left\{r_g, \theta\left(\frac{B(t-1)}{P(t-1)} - \gamma\right)\right\} \tag{7}$$

A (7) képletben az r_g egy garantált hozam, amelyet a biztosító mindenképp nyújt, bárhogyan is alakul az eszközeinek piaci értéke egy adott év alatt. A $B(t)$-t a szerzők „puffernek" nevezik és a következőképp definiálják: $B(t) = S(t+1) - P(t)$, azaz az eszközök év eleji piaci értékének és az előző év eleji, az ügyfél számláján lévő egyenleg közti különbség. A γ az úgynevezett irányadó „puffer arány", amely gyakorlatilag egy célzott hányad egy adott időszaki pufferből és az adott időszak eleji számlaegyenlegből képzett hányadosra vonatkozóan és ezt végig konstansnak feltételezünk a $[1, T]$-n. A θ pedig azt az arányt jelenti, hogy ha az adott időszaki puffernek az év eleji számlaegyenleghez képesti aránya meghaladja a célzott arányt, akkor ebből mekkora részt fog megkapni az ügyfél. Összességében tehát ez az éves bónusz, amelyet említettünk a fejezet elején, hisz a garantált hozam és a befektetés jól teljesítése esetén a fenti módon meghatározott hozam közül az ügyfél mindig a nagyobbat kapja a (7) összefüggés alapján. Ezek alapján az ügyfél számláján lévő egyenleg alakulásáról pedig a következőt mondhatjuk:

$$P(t) = (1 + r_p(t))P(t-1), \quad t \in [1, T] \tag{8}$$

$$P(t) = P_0 \prod_{i=1}^{t} (1 + r_p(i)), \quad t \in [1, T] \ . \tag{9}$$

A (9) összefüggést a (8) P_0-ra történő rekurzív visszavezetésével kaptuk. A további vizsgálatokhoz helyettesítsük be a (7) összefüggést (8)-ba, ekkor a következőt kapjuk:

$$P(t) = P(t-1)\left(1 + \max\left\{r_g, \theta\left(\frac{B(t-1)}{P(t-1)} - \gamma\right)\right\}\right) \tag{10}$$

$$= P(t-1)\left(1 + r_g + \max\left\{0, \theta\left(\frac{S(t) - P(t-1)}{P(t-1)} - \gamma\right) - r_g\right\}\right) \tag{11}$$

A (11) összefüggésből látszik, hogy a garantált hozam miatt van egy lehető legkisebb értéke az ügyfél jövőbeni számlaegyenlegének, ha sohasem tudjuk lehívni a bónusz opciónkat. Ez pedig nem más, mint $P(T) = (1 + r_g)^T P_0$. Még nem esett szó a visszavásárlásról, mint az ügyfél általi lehívható opcióról. Tegyük fel, hogy a biztosító portfóliójában olyan eszközök vannak, amelyek költségmentesen megbonthatóak és azonnal értékesíthetőek. Ezen feltételezés mellett visszavásárláskor a kötvénytulajdonos a mindenkori aktuális számlaegyenlegét kapja vissza. De vajon mikor fog az ügyfél visszavásárolni? A kérdésre a válasz az, hogy akkor, amikor a jövőbeli kifizetés várható értékének diszkontált értéke kisebb az aktuális számlaegyenlegnél. Azonban tudjuk, hogy egy biztosítási szerződés kapcsán a biztosító oldaláról a költségek nagy része a tartam elején jelentkezik, így ha az ügyfél a tartam elején vásárol vissza, az a biztosító oldaláról nézve semmiképpen nem előnyös, mert a kezdeti költségek akár magasabbak is lehetnek a befektetésen elért többlethozam biztosítónál maradó hányadához képest. Ezt Grosen és Jørgensen [1999] cikkükben nem tárgyalták, viszont az elvégzett számításaim során figyelembe veszem, azaz felteszem, hogy a kötvénytulajdonos az első m évben nem vásárolhat vissza. A számításokat ez annyiban befolyásolja, hogy az opció értékének meghatározására szolgáló CRR[6] modellben, azon belül is a binomiális fában történő visszafelé haladás során csak az $m+1$-edik év elejéig vesszük a várható érték diszkontált értéke és az aktuális számlaegyenleg közül a nagyobbikat, majd az így kapott értéket a megfelelő e^{rm} kifejezéssel diszkontáljuk. Az r a továbbiakban a kockázatmentes hozamot jelenti.

Tehát amire kíváncsiak vagyunk a következőkben, az a termék valós értéke és annak alakulása különböző paraméterek mellett, valamint arra is kíváncsiak vagyunk, hogy az így kapott érték hogyan oszlik meg a garantált hozam, mint termékkomponens, a bónusz opció és a visszavásárlási opció között. Az előbb említett három komponens közül az első kettő értékét úgy határozzuk meg, hogy feltesszük, nincs visszavásárlás, azaz a számla egyenlegét csak a $(T+1)$-edik év elején kapjuk meg. Ez gyakorlatilag egy európai opciónak felel meg, amelyet csak lejáratkor lehet lehívni. Ennek az európai opciónak az értékéből levonjuk a $P(T) = (1+r_g)^T P_0$ minimális értéket, azaz a garantált hozam, mint termékkomponens értékét, így rögtön kapjuk a bónusz

[6]Cox, Ross, Rubinstein

opció értékét is. Ha van visszavásárlás, azaz bármikor hozzájuthat a számla egyenlegéhez az ügyfél, akkor az árazás egy amerikai opció árazásával egyezik meg, amely tetszőleges időpontban lehívható. Ha vesszük az amerikai és az európai opcióra kapott valós érték különbségét, akkor épp a visszavásárlás, mint opció értékét kapjuk.

Grosen és Jørgensen [1999] cikkükben egy megtakarítási típusú biztosítással foglalkoztak, viszont a fejezet elején említett vegyes biztosítás keretrendszeréhez további feltételezésekkel kell élnünk. Feltettem a továbbiakban, hogy a számlán lévő egyenleg csak akkor felvehető, ha az ügyfél még életben van, ha pedig időközben elhalálozik, akkor a vegyes biztosítás kockázati komponense akkora biztosítási összeget fizet, mint amennyi a szerződéskötéskor a várható jövőbeli számlaegyenleg a tartam végén. Ez a feltételezés onnan jött, hogy vegyes biztosítások esetén a kockázati és elérési komponensek biztosítási összegei az esetek túlnyomó részében megegyeznek. A modellben a halálozási valószínűségekről feltesszük, hogy az évek előre haladtával, az egyszerűség kedvéért lineárisan nőnek. Azt, hogy ezeket az európai és amerikai opciók árazásánál miként vettük figyelembe, azt a következőkben tárgyaljuk.

Az európai opció megközelítés szerint az ügyfél a szerződésben rögzített tartam végén $P(T)$ kifizetésben részesül. A fentieknek megfelelően ezt az értéket kell megfelelően diszkontálni, amelyhez a kockázatmentes hozamot fogjuk felhasználni. A tartam elején a valós érték meghatározása a következő összefüggés alapján történik[7]:

$$Y_0 = E[qe^{-r(T-s)}P(T) \mid S(0), P(0)], \quad t-1 \leq s < t, \quad t \in [1,T]\,. \tag{12}$$

A fenti (12) összefüggés levezetését az érdeklődő olvasó megtalálja Grosen-Jørgensen [1999] cikkében. A q paraméter az adott kötvénytulajdonos túlélési valószínűségét jelenti a teljes tartam alatt, azaz $q = \prod_{i=1}^{T}(1-q_i)$, ahol q_i ($i = 1, \ldots, T$) az i-edik évi halandósági valószínűséget jelenti, amelyről az előző fejezetben feltettük az egyszerűség kedvéért, hogy lineárisan nő az évek múlásával. A harmadik szakaszban a (12) számszerűsítését R 3.0.1 szoftverrel végeztem el Monte Carlo szimuláció alkalmazásával. A következetesség érdekében egy rövid, pontokba szedett összefoglalót is közlünk a számítás menetéről, mivel egyrészt eltérünk az eredeti modell keretrendszerétől, másrészt az így kapott eredmények összevetésre kerülnek a kombinált modell eredményeivel a harmadik szakaszban:

1. *$S(0) = V$ kezdőérték mellett szimuláljuk a befektetett eszközök piaci árának egy lehetséges alakulását a T-edik év végéig*
2. *(opcionális) figyelembe vesszük, hogy az eszközök piaci ára évközben is változhat, nem csak évente egy alkalommal (Grosen-Jørgensen [1999] eredeti modelljéből ez a lépés hiányzik)*
3. *lejáratig minden évben meghatározzuk a puffer nagyságát, amelynek segítségével meghatározható az éves r_p kamat nagysága, ebből pedig következik a minden év elején a számlán rendelkezésre álló összeg nagysága*

[7] Grosen-Jørgensen [1999] alapján, kiegészítve túlélési valószínűséggel a kockázati komponenshez.

4. *a fentieket megismételjük k-szor, és minden alkalommal eltároljuk a szimulált $P(T)$ értéket*
5. *kiszámoljuk az adott q_i-k alapján a T-edik évre vonatkozó túlélési valószínűséget*
6. *vesszük a szimulált $P(T)$-k átlagának $\exp(rT)$-vel diszkontált értékét és megszorozzuk q-val, így megkapjuk az elérési biztosítás aktuáriusi szempontból korrekt árát (actuarially fair price)*
7. *a kockázati rész aktuáriusilag korrekt árának kiszámításához vettük a szimulált $P(T)$-k átlagát, mint biztosítási összeget és képeztük a kiadások jelenértékének várható értékét*
8. *a kockázati és elérési komponensek összege adja a termék aktuáriusilag korrekt árát*

Az amerikai opció megközelítés szerint van visszavásárlás, azaz a kötvénytulajdonos bármikor hozzájuthat a számláján lévő aktuális egyenleghez. Tegyük fel továbbá, hogy ha s időpontban ($t-1 \leq s < t$, $t \in [1,T]$) jelenti be az ügyfél visszavásárlási szándékát, akkor $P(s) = P(t-1)$ összegre tarthat igényt, azaz ha év közben szeretne visszavásárolni, akkor az év elején a számláján lévő összeget kapja meg. A (12) összefüggéshez hasonlóan az aktuáriusilag korrekt árat meghatározó képlet ebben az esetben, az s időpontra vonatkozóan a következő:

$$Y(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{s,T}} E[q e^{-r(\tau - s)} P(\tau) \mid \mathcal{F}_s] \,. \tag{13}$$

A (13) összefüggésben szereplő $\mathcal{T}_{s,T}$ az $\mathcal{F}_s$-megállási idők osztálya $[s,T]$-n, az $\mathcal{F}_s$ σ-algebra pedig s-edik időpontig felhalmozott információk összessége. A megállási idő nem más, mint egy véletlen időpont, amelynek bekövetkezése a filtrációban szereplő információ alapján eldönthető. A (13) összefüggésben az aktuáriusilag korrekt ár meghatározására az alapötlet a Cox-Ross-Rubinstein (CRR[8]) modell alkalmazása volt, amelynek lényege, hogy az S árfolyam g valószínűséggel vagy u-szorosára nő Δt idő alatt, vagy $(1-g)$ valószínűséggel d-szeresére csökkenhet, ahol $d = 1/u$.

A fentiek értelmében tehát az eszközök árfolyamának alakulását egy binomiális fával fogjuk modellezni. Mint azt már az előzőekben említettük, a kötvénytulajdonos akkor fog visszavásárolni, azaz akkor fogja lehívni a visszavásárlási opciót, amint az aktuális számlaegyenleg nagyobb lesz a jövőbeni számlaegyenleg várható értékének diszkontált jelenértékénél (természetesen a vegyes biztosítás keretrendszer miatt figyelembe kell venni a halálozási valószínűségeket is). A következőben feltesszük, hogy az S minden időszakban g valószínűséggel u-szorosára nő, vagy $(1-g)$ valószínűséggel d-szeresére csökken, azaz itt megtartjuk az eredeti cikkben szereplő CRR koncepciót, viszont az időben történő „visszatekintés" (tehát mikor visszafelé haladunk a fában a diszkontálás során) végett nem az egész fát fogjuk számszerűsíteni,

[8] A modellt részleteiben nem tárgyaljuk, arról az érdeklődő olvasó Száz [2009] kötetében olvashat.

hanem szimulációval mindig egy-egy utat fogunk előállítani, amelyen követhetővé válik, hogyan is alakul az egyes időszakok puffer értéke, amiből természetesen következik r_p, majd P megfelelő értéke. Ezt pedig k-szor megismételjük. Az európai opció esetén bemutatott, pontokba szedett lépésekhez hasonlóan itt is közöljük a számítás menetét, visszautalva az európai opció pontjaira, amennyiben az megegyezik az amerikai opció árázásának menetével:

1. *$S(0) = V$ kezdőérték mellett veszünk egy véletlen számot, amely g valószínűséggel u, $(1-g)$ valószínűséggel d értéket vesz fel, és előállítjuk a következő időszaki árfolyam értéket (azaz a fában egy lépést megyünk előre)*
2. ezt követően az európai opció árazásának *2.* és *3.* pontja szerint járunk el
3. *elindulunk a fában szimulált útvonalon visszafelé, diszkontálva a t-edik időszaki számlaegyenleget, figyelembe véve a túlélési valószínűséget*
4. *az előző időszaki számlaegyenleg és a fent képzett érték közül vesszük a nagyobbat, és ezzel haladunk tovább visszafelé az útvonalon*
5. *(opcionális) feltettük, hogy az első m évben nem vásárolhat vissza az ügyfél, így az útvonalon a fenti eljárással a $P(m+1)$ értékig fogunk eljutni, amelyet e^{rm}-mel diszkontálunk*
6. *az eddig leírtakat k-szor megismételjük*
7. *az elérési komponens aktuáriusilag korrekt árát az egyes szimulált útvonalakhoz tartozó korrekt árak átlagaként számítjuk ki*
8. *a kockázati rész aktuáriusilag korrekt árának kiszámításához vettük a tartam végi szimulált számlaegyenlegek átlagát, mint biztosítási összeget és képeztük a kiadások jelenértékének várható értékét*
9. *a kockázati és elérési komponensek aktuáriusilag korrekt árainak összege adja a termék aktuáriusilag korrekt árát*

A visszavásárlásra, mint az ügyfél által lehívható opció értékére vonatkozó, különböző paraméterek melletti eredményeket a cikk következő szakaszában bemutatásra kerülő kombinált modell ismertetése után, annak eredményeivel együtt fogjuk közölni.

3 A kombinált modell

A bevezetőben említett kombinált modell célja, hogy az első szakaszban ismertetett Loisel-Milhaud [2012] eredményeit figyelembe tudjuk venni a második szakaszban tárgyalt, módosított keretrendszerű Grosen-Jørgensen [1999] modellben, és ezáltal különböző paraméterek melletti számításokat végezhessünk a termék aktuáriusilag korrekt árára vonatkozóan. Az így kapott modellről állítjuk, hogy az egyes paraméterekben bekövetkező változás jobb megragadására, továbbá az árat mozgató külső tényezők szélesebb körének figyelembe vételére egy alkalmasabb eszközt kaptunk.

3.1 A modell elméleti háttere

Tekintsünk egy n ügyfélből álló portfóliót, akik a cikk előző szakaszában ismertetett vegyes biztosítási termékbe fektetnek be. A realisztikusság kedvéért feltesszük, hogy az egyes ügyfelek kezdő befizetései különbözőek és $\mathcal{N}(100, 20)$ normális eloszlást követnek. A biztosító a befizetett összeget azonnal befekteti, és az előző modellhez hasonlóan feltesszük, hogy az eszközök piaci értéke geometriai Brown-mozgást követ (6) szerint. Az év elején jóváírandó r_p kamat mértéke szintén az előző modellhez hasonlóan (7) alapján történik. Tehát egyéni, azaz ügyfél szinten Grosen-Jørgensen [1999] modelljétől csak a visszavásárlást tekintve térünk el, azaz míg a szerzőpáros szerint akkor vásárol vissza egy ügyfél, ha az aktuális számlaegyenleg nagyobb lesz a jövőbeni számlaegyenleg várható értékének diszkontált jelenértékénél, addig mi Loisel-Milhaud [2012] eredményére támaszkodunk. Feltesszük az előző modellhez hasonlóan, hogy az első két évben az ügyfelek számára nem engedélyezett a visszavásárlás. A tartam további részében azt, hogy az n ügyfél közül ki vásárol vissza, azt az (1) képlet, avagy a K_i indikátor valószínűségi változó fogja meghatározni. Ehhez viszont szükségünk van ügyfélszinten egy megfelelő M_i, $K_i^{\perp}$, valamint portfóliószinten egy K_0 változóra. Ezen változókról viszont tudjuk, hogy a K_0 és $K_i^{\perp}$ változók p paraméterű, valamint az M_i p_0 paraméterű indikátor változók. Tehát a feladatunk redukálódik megfelelő p és p_0 változók eőállítására. Először is tekintsük a p paramétert. A szakirodalom (Loisel-Milhaud-Maume-Deschamps [2010], Loisel-Milhaud [2012]) a visszavásárlások szemléltetésére úgynevezett sigmoid-függvényeket ajánl, amelyek eléggé jellegzetes S alakot vesznek fel. Az S alak jól le tudja írni a visszavásárlások alakulását Δr függvényében: míg a Δr 0 közeli, vagy minimális, addig az ügyfelek nem motiváltak a visszavásárlásra, így az S görbe „alsó szára” alacsony visszavásárlási arányt mutat. Egy bizonyos nagyságú Δr érték után a függvény hirtelen erőteljesen növekedni kezd, majd egy maximális visszavásárlási szint elérése után ismét vízszintes alakot ölt (valós feltételezés, hogy a visszavásárlási szándékot nem kizárólag a Δr nagysága mozgatja, biztosan lesz olyan ügyfél, aki egyéb megfontolásból, de magas Δr esetén sem vásárol vissza). A kérdéses függvény talán legegyszerűbb típusa a logisztikus függvény. A számításaink során mi ettől egy eltérő alakot fogunk használni a számos kedvező tulajdonsága miatt. Ezen függvényalakot Enz [2000] használta cikkében, de nem visszavásárlások szemléltetésére, hanem a biztosítási piac fejlettségének (biztosítási penetráció (díjbevétel/GDP)) vizsgálatához. Az Enz [2000] cikkében szereplő függvényalakot és Loisel-Milhaud [2012] ajánlását kombinálva a továbbiakban használt függvényalak a következő lesz:

$$h(\Delta r) = \frac{1}{C_1 + C_2 \cdot C_3^{\Delta r}} \,. \tag{14}$$

A (14) alak paramétereinek lehetséges értékei, a függvény alakjának változása különböző paraméterezés mellett mind megtalálhatóak Enz [2000] cikkében. Jelen cikkben a fenti alak csak azon kedvező tulajdonságát emeljük ki, amely miatt kiválasztásra került a kérdéses p érték modellezése kapcsán. A (14) alak rendkívül jól testre szabható C_1, C_2 és C_3 értékek megfelelő megválasztása esetén, amelynek eredményeképp a függvény maximuma, 0 helyen felvett értéke[9] ($h(0)$), valamint az inflexiós pontja kívánt nagyságú lehet. Ehhez meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert C_1, C_2, C_3-ra[10]:

$$h(0) = \frac{1}{C_1 + C_2} \tag{15}$$

$$\text{maximum} = \frac{1}{C_1} \tag{16}$$

$$\text{inflexiós pont} = \frac{\log(C_1) - \log(C_2)}{\log(C_3)} \ . \tag{17}$$

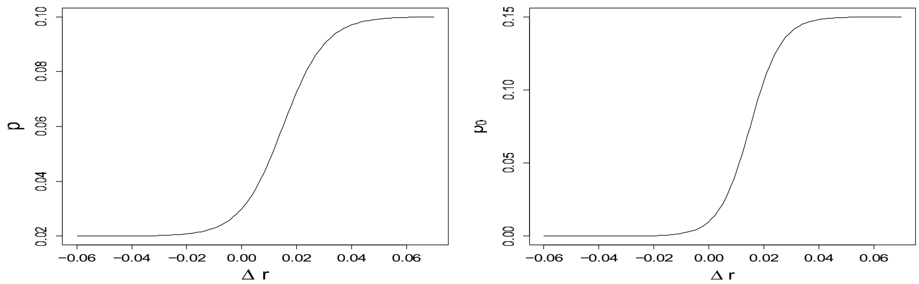
Az előző egyenletrendszer C_1, C_2, C_3-ra történő megoldása során azt szeretnénk, hogy a minimális p érték 2%, a maximális p érték pedig 10% legyen, azaz bármilyen Δr mellett legalább 2% legyen annak az esélye, hogy a piaci várakozások visszavásárlást diktáljanaknak (K_0) és az egyes ügyfelek piaci várakozásokon kívüli információforrása segítségével meghozott döntése pozitív eredményt indukáljon a visszavásárlással kapcsolatban ($K_i^{\perp}$). Hasonló érvelés igaz a maximális 10%-os értékre vonatkozóan. Az S-görbék speciális tulajdonsága miatt, (14) esetén az értékkészlet mindig 0 és a beállított maximum közé fog esni, így a kívánt minimális és maximális érték felvételét úgy oldottuk meg, hogy az egyenletrendszer megoldásakor a maximumot 8%-ra állítottuk be, majd a számszerűsített görbe minden pontját 2%-kal párhuzamosan felfelé eltoltuk, elérve ezzel, hogy a kívánt értékkészlet épp 2% és 10% közé essen (tehát az egyenletrendszer megoldásából $C_1 = 12.5$). Azaz a (14) alak helyett a következő, módosított függvényalakot alkalmaztuk p modellezésére:

$$h^*(\Delta r) = h(\Delta r) + 0.02 \ . \tag{18}$$

Visszatérve az egyenletrendszer paraméterezéséhez: a $h(0)$ értékét az egyenletrendszer megoldása során 1%-ra állítottuk be (azaz $C_2 = 87.5$), amely végül a 2%-os párhuzamos felfelé eltolás miatt 3%-ot vesz fel (lásd *2a. ábra*). Az inflexiós pontot 1.5%-ban rögzítettük, amelynek megfelelően a keresett S-görbénk -1% körül kezd hirtelen erőteljesen emelkedni, vagyis amikor már a biztosítási termék ,,előnye” kezd minimálissá válni a piaci hozamhoz képest, majd 1.5%-nál vált konvexből konkávba, és 3% fölötti szinteknél, azaz jelentős különbségek esetén megközelíti a maximumát, azaz a 10%-ot ($C_3 = 4.57 * 10^{-57}$). A kérdéses görbét a 2a. ábrán láthatjuk.

[9] Enz [2000] cikkében minimumot említ a $h(0)$ kapcsán, ami abban az értelemben minimum, hogy a (14)-ben szereplő Δr helyett egy főre eső GDP-t használ, amely értelmezhetőség szempontjából csakis nemnegatív lehet (ellentétben a Δr-rel), így a 0 helyen felvett érték tekinthető a penetráció alsó határának. Jelen esetben viszont az S-görbe alsó szárának is van jelentősége értelmezési szempontból a Δr lehetséges negatív értéke kapcsán.

[10] Megjegyezzük, hogy az egyenletrendszer megoldása kapcsán a $C_3 < 1$ feltétel teljesülésére számítunk, mivel ebben az esetben h Δr monoton növekedő függvénye lesz.



S-görbe p paraméterhez ($h^*(\Delta r)$ alapján) S-görbe p_0 paraméterhez ($h(\Delta r)$ alapján)

2. ábra. A modellben alkalmazott S-görbék

Visszatérve a fenti S-görbe felhasználására: a modellezés során minden egyes ügyfélhez egy p paraméterű indikátor változó ($K_i^{\perp}$) segítségével generálunk egy értéket, amely meghatározza, hogy az adott ügyfél a piaci várakozásokon kívüli információforrása alapján hogyan dönt a visszavásárlással kapcsolatban, továbbá generálunk szintén egy p paraméterű indikátor változót (K_0) portfóliószinten, ami eldönti, hogy mi a piaci várakozás. A kérdéses p paramétert pedig a Δr függvényében a fenti S-görbe fogja megadni.

Az (1) számszerűsítéséhez szükségünk van még az ügyfélszintű, p_0 paraméterű M_i változókra, amely azt adja meg, hogy az ügyfél piackövetű magatartású-e. A p_0 paraméter meghatározásához az alapötlet az előzőekben ismertetett S-görbe koncepció volt (ezzel is biztosítva, hogy mindkét kérdéses paraméter a Δr növekvő függvényei legyenek), így a következőkben csak a (15)-(17) paraméterezését mutatjuk be. A modellezés során alkalmazott p_0 értékek minimuma és maximuma (azaz az alkalmazott S-görbe értékkészlete) Loisel-Milhaud [2012] cikkében szereplő számítások alapján kerültek kiválasztásra. Loisel-Milhaud [2012] cikkükben különböző p és p_0 paraméterekre vonatkozóan meghatározták 99.5%-os konfidencia szint mellett a portfólióban lévő, visszavásárlók arányára vonatkozó VaR értékeket, mi pedig azon p_0 paramétereket választottuk ki további felhasználás céljából, amelyekhez racionális mértékű (és nem csak az illusztráció kedvéért szerepeltetett igen magas mértékű) VaR-okat kap a szerzőpáros. Ezt figyelembe véve a maximális p_0 értéket 15%-ban (azaz (16)-ban $C_1 = 6.67$), a minimális értéket pedig természetesen 0%-ban (azaz ebben az esetben nem alkalmaztunk felfelé történő eltolást a görbe pontjait illetően) állapítottuk meg. A $h(0)$ értéket a p paraméternél említett 1%-ban állapítottuk meg, mivel a biztosítási termék hozama és a piaci hozam egyenlő volta kapcsán reális feltételezés, hogy a kötvénytulajdonosok egy részének a termék hozamának jövőbeli alakulásával kapcsolatos várakozásai hasonlóak (negatív, azaz visszavásárlást terveznek), így alkalmazható a korrelációt tekintve nem 0 érték (tehát a $C_2 = 93.33$). Az inflexiós pont esetén szintén megfelelőnek találtuk a p paraméter esetén alkalmazott 1.5%-ot, mivel ha tekintjük a 2b. ábrát, láthatjuk, hogy a kérdéses S-görbe értékkészletének maximumát 3% körül érheti el, és egy 3%-os hozamok közötti különbség semmilyen körülmények között nem tekinthető marginálisnak (így $C_3 = 4.05 * 10^{-77}$). A fenti módon meghatározott p és p_0 paraméterek segítségével már számszerűsíthető az (1) képlet, és így eldönthető mindenkiről, hogy visszavásárol-e az adott év elején, vagy sem.

A biztosítók, amennyiben az ügyfél visszavásárol, általában nem a teljes összeget térítik vissza ügyfeleik számára. A modell építése során ez a valós feltételezés is beépítésre került a következőképpen: visszavásárlás esetén az ügyfél nem a teljes számláján lévő összeget kapja meg, hanem annak egy előre meghatározott részét, továbbá a biztosítónál maradó hányadon a biztosító és a portfólióban maradó ügyfelek 50%-50%-ban osztoznak. Az ügyfelek esetén a visszamaradó rész 50%-a természetesen a portfólió elemszámával osztandó, és a kapott összeget minden ügyfél számláján jóváírjuk (ez is egyfajta kvázi ,,bónuszként" értelmezhető). Ez az összeg természetesen az r_p kamatszintet növeli, tehát a Grosen-Jørgensen [1999] modelljében található r_p a kombinált modell r_p paraméteréhez képest kisebb/egyenlő lehet. A visszavásárló ügyfél által megkapott hányad kezdő értéke 95%-ban került megállapításra, amely minden második évben 1%-ot emelkedik a tartam során, egészen a 99%-os maximális szintig.

Most már mindent tudunk, hogyan jutunk el a tartam végi, portfólióban maradó ügyfelek számlaegyenlegéig. Ezen egyenlegek diszkontálását az előző szakaszban bemutatott ,,európai opció" esetéhez teljesen hasonlóan qe^{-rT}-vel végezzük, ahol a q a már ismertetett (lineárisan növő) halálozási valószínűségek alapján számolt teljes túlélési valószínűség, T a tartam, r pedig a piaci hozam. Ezen diszkontált számlaegyenlegeknek minden egyes szimulált eset során vesszük az átlagát, majd képezve az egyes szimulált esetekhez tartozó átlagos számlaegyenlegek átlagát, megkapjuk a vegyes biztosítás elérési komponensének aktuáriusilag korrekt árát. A haláleseti komponens árazásánál az előző szakaszhoz hasonlóan feltettük, hogy a vegyes biztosítások két komponenséhez tartozó biztosítási összegek megegyeznek. Ehhez képeztük minden egyes szimulált eset során a tartam végi számlaegyenlegek átlagát, majd ezen szimulált átlagos számlaegyenlegek átlagaként állapítottuk meg a halálozási komponens biztosítási összegét. Innen a komponens aktuáriusilag korrekt ára az előző szakaszban ismertetett módon adódik. A garantált hozam komponens aktuáriusilag korrekt árának meghatározásához szintén az előző szakaszban ismertetett megközelítést alkalmazom: $P_0(1+r_g)^T e^{-rT} q$, ahol jelen esetben P_0 az egyes szimulált esetekhez tartozó $\mathcal{N}(100, 20)$ eloszlásból származó kezdő befizetések átlagának az átlaga.

3.2 A számítások eredményei

E szakasz keretein belül bemutatjuk számításaink eredményeit, amelyek a bevezetőben megfogalmazottaknak megfelelően alátámasztják, hogy az egyes paraméterek változásának hatását a kombinált modell jobban megragadja, mint a cikkben ismertetett, vegyes biztosítási keretrendszerben tárgyalt modell (Grosen-Jørgensen [1999] európai és amerikai opció szerinti árazás megközelítéssel). Ezt követően megmutatjuk, hogy az első szakaszban ismertetett paraméterbecslés eredményeit hogyan lehet beépíteni a kombinált modellbe abból a célból, hogy bizonyítani tudjuk azt, hogy a visszavásárlók számának eloszlását meghatározó (3) összefüggés nem csak, hogy jól közelíthető a paraméterbecslést bemutató szakaszban szereplő eloszlások segítségével, de ezen eloszlások kombinált modellben történő felhasználásával az eredeti kombinált modell által adott aktuáriusilag korrekt ár is szintén jól közelíthető.

Számításaink eredményeit összefoglaltuk a *2. táblázatban*, amelyben külön szerepeltettük a garantált hozam, a bónusz és a visszavásárlási komponensek, valamint az elérési és kockázati összetevők aktuáriusilag korrekt árait.

		gar. hozam	bónusz	visszav.	elérési	kockázati	díj összesen
		72.66	0	0	72.66	0.88	73.54
	0%	72.66	0	21.19	93.85	0.88	94.73
		72.66	0	0.33	72.99	0.88	73.87
		72.66	14.85	0	87.51	1.06	88.57
θ	25%	72.66	14.85	7.26	94.77	0.95	95.72
		72.66	14.83	1.42	88.91	1.08	89.99
		72.66	25.5	0	98.16	1.19	99.35
	50%	72.66	25.5	3.99	102.15	1.08	103.23
		72.66	25.4	1.81	99.87	1.22	101.09
		108.39	14.06	0	122.45	0.99	123.44
	4%	108.39	14.06	0	122.45	0.99	123.44
		108.39	14.05	0.65	123.11	1.00	124.11
		88.74	19.26	0	108.02	1.07	109.07
r	6%	88.74	19.26	0.56	108.58	1.05	109.63
		88.74	19.26	0.31	108.33	1.07	109.4
		72.66	25.5	0	98.16	1.19	99.35
	8%	72.66	25.5	3.99	102.15	1.08	103.23
		72.66	25.5	1.71	99.87	1.21	101.08
		72.66	28.33	0	100.99	1.22	102.21
	5%	72.66	28.33	4.57	105.56	1.13	106.69
		72.66	28.33	2.53	103.52	1.25	104.77
		72.66	22.71	0	95.37	1.16	96.53
γ	15%	72.66	22.71	4.15	99.52	1.03	100.55
		72.66	22.70	3.62	98.99	1.2	100.19
		72.66	18.48	0	91.14	1.10	92.24
	25%	72.66	18.48	4.74	95.88	0.96	96.84
		72.66	18.46	2.83	93.95	1.14	95.09
		72.66	18.87	0	91.53	1.11	92.64
	10%	72.66	18.87	6.15	97.68	1.03	98.71
		72.66	18.74	3.29	94.69	1.15	95.84
		72.66	32.55	0	105.21	1.28	106.49
σ	20%	72.66	32.55	1.39	106.60	1.13	107.73
		72.66	32.53	3.53	108.72	1.32	110.04
		72.66	47.48	0	120.14	1.46	121.60
	30%	72.66	47.48	0	120.14	1.46	121.60
		72.66	47.5	1.17	121.33	1.47	122.8
		59.94	32.68	0	92.62	1.25	93.87
	3%	59.94	32.68	7.43	100.05	1.13	101.18
		59.94	32.62	3.91	96.47	1.31	97.78
		79.88	22.13	0	102.01	1.17	103.18
r_g	6%	79.88	22.13	1.42	103.43	1.07	104.50
		79.88	20.32	3.32	103.52	1.19	104.71
		105.60	13.23	0	118.83	1.17	120.00
	9%	105.60	13.23	0	118.83	1.17	120.00
		105.61	13.22	0.91	119.74	1.18	120.92

2. táblázat. A termékkomponensek értékei

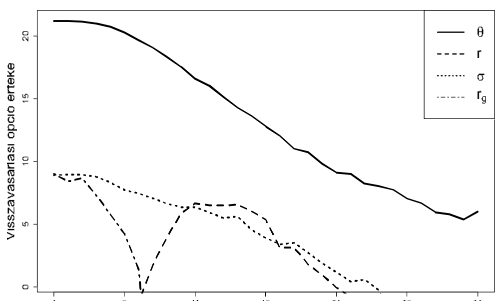
A táblázat utolsó oszlopa adja a termék teljes nettó értékét. Szükséges említenünk az értelmezés kapcsán, hogy a számításokhoz az induló paraméterek a következők voltak (zárójelben jelzem a kombinált modellben szereplő eltéréseket): $S(0) = 100$ ($\mathcal{N}(100, 20)$), $r = 8\%$, $T = 10$, $\sigma = 15\%$, $\theta = 0.5$, $\gamma = 0.1$, $r_g = 5\%$, $N = 100$, $q = 0.0005$, lépésköz=0.00005, szimulációk száma 100 ezer, amerikai opció és kombinált modell esetén $m = 2$, kombinált modell esetén a portfólió elemszáma 1000. A 2. táblázat kapcsán minden egyes esetben a fenti paraméterek az irányadóak és a táblázat megfelelő részében jelzett paraméter változtatásának a modell eredményeire gyakorolt hatását számszerűsítettük. Ezen paraméterek a táblázat alapján: θ, r, γ, σ, és r_g. Továbbá az egyes paraméterek esetén a felső sor mindig az európai opcióhoz, a középső sor az amerikai opcióhoz, az alsó pedig a kombinált modellhez tartozó eredményeket tartalmazza.

Jól látható a táblázatból, hogy az amerikai opcióra jellemző árazási technikát igénylő elérési komponens értéke minden esetben nagyobb vagy egyenlő európai társához viszonyítva, amely nem meglepő, hisz ezt vártuk. Egyenlő természetesen akkor lehet, ha a visszavásárlási lehetőség gyakorlatilag értéktelen a kötvénytulajdonos számára. A 2. táblázatból világosan látszik, hogy minél nagyobb θ értéke, annál értékesebb mindhárom típusú termék. Ez természetes, hisz ha jól teljesít a befektetés, akkor nagyobb θ miatt nagyobb hányadot kap vissza az ügyfél bónuszként, amelyet természetesen a bónusz komponens értékének növekedése is jelez. Azonban ezt a növekedést ellensúlyozza a visszavásárlási komponens értékének csökkenése, hisz minél nagyobb hányadot kap vissza az ügyfél a bónusz komponensnél, annál kevésbé valószerű, hogy vissza fog vásárolni. A kombinált modell esetén, a visszavásárlási komponens értékének kisebb volta (amerikai opció megközelítés megfelelő értékéhez képest) ahhoz köthető, hogy ennél a megközelítésnél a visszavásárló ügyfelek számlaegyenlegének biztosítónál maradó hányadának 50%-a a többi ügyfél számláján visszaosztásra kerül. Ez, mivel extra hozamot nyújthat az ügyfelek számára az európai és amerikai opció megközelítésekhez képest, csökkentheti a visszavásárlás valószínűségét.

Az r különböző értékei mellett láthatjuk, hogy ahogy r növekszik, úgy egyre csökken a garancia értéke, amely természetes, hisz egyre nagyobb értékkel diszkontálunk. A bónusz komponens értéke viszont ezt ellensúlyozza, mivel nagyobb r-hez nagyobb g tartozik, azaz nagyobb valószínűséggel fog az eszköz piaci ára növekedni a CRR modellben. Az európai opció esetén pedig elég a (6) összefüggésre vetnünk egy pillantást. Az $r = 4\%$ mellett az amerikai opció esetén azért láthatunk 0-át a visszavásárlásnál, mert a garancia, azaz $r_g = 5\%$, vagyis gyakorlatilag semmilyen körülmények között nem éri meg visszavásárolni, tehát ez a komponens értéktelen. A γ paraméter növekedése esetén ahogyan azt vártuk, a bónusz komponens értéke csökken, hisz csökken annak a valószínűsége, hogy bónuszhoz jutunk. Ezzel egyetemben pedig a termék értéke is csökken. A volatilitás értékének növekedésével a bónusz értéke természetszerűen nő, míg a visszavásárlás értéke csökken, hisz egyre inkább nem éri meg visszavásárolni. Például $\sigma = 30\%$ mellett már egyáltalán nem éri meg, azaz az értéke 0 (amerikai opció megközelítés esetén). Az r_g garantált hozam növekedése drasztikusan emeli a garancia értékét, a visszavásárlásét pedig csökkenti, amelyek okai nem szorulnak magyarázatra.

A kombinált modell eredményei alapján elmondhatjuk, hogy mind az elérési összetevő értéke, mind a teljes díj általában az amerikai opcióként beárazott elérési összetevő értéke és annak teljes díjának szintje alatt marad. Látható, hogy a θ és γ paraméter változása olyan szempontból nincs hatással a kombinált modell eredményére, hogy az elmozduljon az európai és amerikai opció megközelítéssel kapott komponensek értékei közül. Viszont az r, σ és r_g paraméterek esetén látható, hogy a kombinált modell többre értékel egy adott konstrukciót az amerikai opció megközelítéshez képest, amennyiben az ügyfél számára előnyös változás következik be az előző három paraméterben: amennyiben csökken az r (tehát a vegyes biztosítás adta lehetőség relatíve „jobb" lesz más piaci lehetőséghez képest), vagy amennyiben nő a σ (nő annak a valószínűsége, hogy nagyobb hozam is elérhető a biztosító befektetésein), vagy nő r_g (azaz egyre nagyobb garantált hozamot ígér a biztosító), úgy a kapott értékek meghaladják az amerikai opció megközelítéssel kapott értékeket. Azaz általánosságban elmondhatjuk, hogy a sztochasztikus megközelítés modellbe történő beépítésével az egyes paraméterekben bekövetkező változás az ügyfél szempontjából történő konstrukció értékelés során jobb megragadásra kerül az amerikai opció megközelítéshez képest, azaz a paraméterekben történő változásokat jobban kiemelő és jobban megragadó modellt kaptunk. A fentiek alátámasztását a következőkben többféle grafikonnal fogjuk elvégezni. Ehhez először is tekintsük a *3. ábrát*. Ezen azt próbáljuk szemléltetni, hogy hogyan változik a visszavásárlási opció értéke (amerikai opció megközelítéssel és európai megközelítéssel kapott korrekt árak közti különbség) különböző paraméterek mellett. A 2. táblázathoz képest a számítás teljesen hasonlóan történik, így tehát minden egyes függvény a grafikon magyarázatában szereplő paraméter változása kapcsán mutatja a visszavásárlási opció értékét.

Láthatjuk a 3. grafikonon, hogy a folytonos görbe a θ paraméter értékének növekedése esetén monoton csökken. Ahogy azt az előzőekben már tisztáztuk, pont erre a monoton csökkenésre számítottunk, hisz θ növekedésével egyre nagyobb hányadot kap vissza az ügyfél bónuszként. Míg $\theta = 0$ mellett a visszavásárlási opció értéke 20.8, addig $\theta = 30\%$ esetén már csak 6.2 értékű.

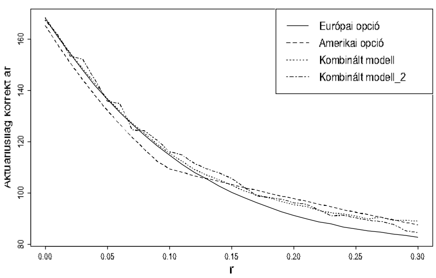


3. ábra. Visszavásárlási opció értékének alakulása

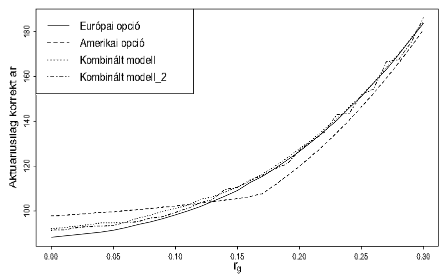
A szaggatott görbénél, azaz az r paraméter esetén már több újat tudunk mondani, mint amit tudtunk a táblázat értékei alapján. Fent levontuk a következtetést, hogy alacsony r esetén miért is 0 a visszavásárlási opció értéke, továbbá levontuk azt a következtetést is, hogy r növekedésével a bónusz opció értéknövekedése ellensúlyozza a garancia komponens értékcsökkenését. Azonban a szaggatott görbéről láthatjuk, hogy ez nem teljesen igaz, hisz a táblázatban 8%-ig vizsgáltuk az r paraméter változásának hatását, így nem vehettük észre (és az eredeti modell szerzői sem, mivel cikkükben csak táblázatos formában vizsgálták modelljüket, grafikusan nem) a következőt: a görbe a maximumát kb. $r = 11\%$-nál veszi fel, onnan kezdve a visszavásárlási opció értéke csökken. Ez azt jelenti, hogy a bónusz opció értéke csak egy ideig növekszik jobban, mint ahogy a garancia komponens értéke csökken, 11%-nál bekövetkezik a fordulópont és 20%-tól már ismét 0 a visszavásárlási opció értéke. A pont-vonal alapú szaggatott görbe alakja abszolút nem meglepő, hisz ahogy azt fent jeleztük, r_g növekedésével egy bizonyos szint után már soha nem fogja megérni a visszavásárlás. A volatilitás értékének növekedésével a bónusz értéke, ahogy azt fent is jeleztük, nő, míg a visszavásárlás értéke csökken, hisz egyre inkább nem éri meg visszavásárolni. Ezt alátámasztja a σ paraméterhez tartozó görbe alakja, amely kb. 24% körüli σ értéktől kezdve 0 értéket vesz fel, tehát a visszavásárlási opció értéktelenné válik.

Mielőtt elemeznénk a 4. ábrát, előtte még valamit tisztáznunk kell. Cikkünk első szakaszában utaltunk rá, hogy Loisel-Milhaud [2012] eredményei kapcsán végzett paraméterbecsléseink a cikk eme szakaszában felhasználásra kerülnek. Ezt úgy tettük meg, hogy a már megismert kombinált modellt átalakítottuk úgy, hogy már nem egyéni szinten, (1) alapján határozzuk meg, ki vásárolt vissza és ki nem, hanem az első szakaszban ismertetett paraméterbecslési eljárás segítségével meghatározott normális és kevert eloszlásból származtatva. Ezzel az a célunk, hogy belássuk, a Loisel-Milhaud [2012] által bemutatott, a visszavásárlók számának eloszlását meghatározó (3) összefüggés nem csak, hogy jól közelíthető a kérdéses eloszlások segítségével, de ezen eloszlások kombinált modellben történő felhasználásával az eredeti kombinált modell által adott aktuáriusilag korrekt ár is jól közelíthető. A kombinált modell átalakítása a következőképp történik: vesszük a p és p_0 paramétereket a már ismertetett S-görbék segítségével és n-et, azaz a még nem visszavásároltak számát. Ezen paraméterek segítségével, az első szakaszban ismertetett módon tudjuk szimulálni az n-ből visszavásárlók számát, amelyre $p_0 = 0$ és $p_0 \neq 0$ eseteknek megfelelően normális és kevert eloszlást illesztünk, és az ismertetett módon ML módszerrel vagy EM-algoritmussal meghatározzuk az illesztett eloszlások paramétereit. A visszavásárlók számát $p_0 = 0$ esetben az illesztett normális eloszlás várható értékeként azonosítjuk, azaz vesszük a μ paramétert. A $p_0 \neq 0$ esetben a várható érték (keverési súlyokkal súlyozott összege a μ_1 és μ_2 paramétereknek) vétele nem elég konzervatív, mivel Loisel-Milhaud [2012] cikkükben pont a kétmóduszú eloszlás várható értékének kevésbé informatív voltára hívja fel a figyelmet, mivel a várható értékhez képest nagyobb visszavásárlói szám nagyobb valószínűséggel fordul elő, mint a sima normális eloszlás esetén. Így ebben az esetben a két becsült paraméter átlagát vettük a visszavásárlók számának meghatározásához. Az n-ből pedig pontosan ennyi visszavásárlót fogunk véletlen kiválasztással meghatározni minden egyes szimulált esetben. Tekintsük a *4. ábrát*.

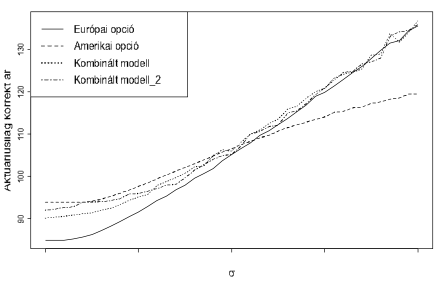
Ezeken a grafikonokon a négy korrekt ár meghatározási mód segítségével kapott árakat láthatjuk az adott paraméter függvényében (a „Kombinált modell 2" jelzi a fentebb ismertetett, átalakított kombinált modell eredményét). A 4a esetén láthatjuk, hogy kis r paraméterek mellett, tehát ahol nagyon megéri az adott konstrukcióba fektetni, végig a kombinált modell adja a legmagasabb árat, és az európai opció megközelítéssel kapott ár szintén az amerikai opció megközelítésű felett található. Majd végül egy kellően nagy r után a 2. táblázat esetén tapasztalt jelenség lép fel: a kombinált modell által kapott ár a másik két koncepció segítségével kapott ár között található. A 4b grafikon ehhez teljesen hasonlóan értelmezhető. A 4c esetén pont fordított helyzetet láthatunk: egy bizonyos σ értéken (21.2%) túl értékeli a kombinált modell legtöbbre az adott konstrukciót és az európai opció megközelítéssel kapott árak is ekkor lesznek magasabbak az amerikai opció megközelítéssel kapottnál. Ez azt jelenti, hogy ilyen magas σ paraméterek esetén egyáltalán nem érdemes visszavásárolni, és mindenképp rosszul jár az, aki mégis ezt teszi (kellően alacsony paraméter esetén pedig szintén a 2. táblázatnál tapasztalt jelenséget láthatjuk). A 4d esetében pedig csak a 2. táblázatnál tapasztaltakat kapjuk vissza, azaz θ paraméter bármilyen értéke esetén a kombinált modell által kapott ár mindig a másik két koncepció segítségével kapott ár között található.



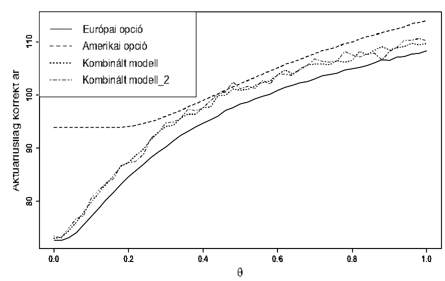
(a) Aktuáriusilag korrekt ár (r)



(b) Aktuáriusilag korrekt ár (r_g)



(c) Aktuáriusilag korrekt ár (σ)



(d) Aktuáriusilag korrekt ár (θ)

4. ábra. Az aktuáriusilag korrekt ár alakulása különböző modellek esetén

Amit viszont még észrevehetünk az az, hogy az átalakított kombinált modell végig a sima kombinált modell eredményét követi minden grafikonon (igaz, kicsit hektikusabban viselkedik a görbéi alapján, de ez betudható annak, hogy az olyan iteratív jellegű algoritmus, mint az EM esetén az eredmények természetszerűleg kis mértékű instabilitást mutathatnak). Látható, hogy mind a 4. grafikon, mind a 2. táblázat értékei a szakasz elején megfogalmazott állításainknak megfelelő eredményt, értékeket mutatnak, alátámasztva cikkünk célkitűzéseit.

Összefoglalás

Cikkünkben megmutattuk Loisel-Milhaud [2012], a szerződők visszavásárlással kapcsolatos döntései közti korrelációt is figyelembe vevő modellje esetén hogyan is lehet számszerűleg (illesztett eloszlások paramétereinek meghatározása normális és kevert eloszlás esetén) elvégezni az eredeti cikkben szereplő érzékenységvizsgálatot.

Ezt követően Grosen-Jørgensen [1999] cikkében szereplő modellt vizsgáltuk, amely lehetőséget adott arra, hogy a visszavásárlást, mint az ügyfél által lehívható opciót be tudjuk árazni, illetve meg tudjuk mutatni a termék aktuáriusilag korrekt értékében képviselt mértékét. Az eredeti modellt eltérő keretben (vegyes biztosítás) vizsgáltuk, mint azt a szerzők tették, valamint néhány új, gyakorlati jellegű feltétellel és paraméterrel éltünk a modellépítés során.

Végül megmutattuk, hogyan lehet figyelembe venni és beépíteni Loisel-Milhaud [2012] eredményeit az előző modellbe, valamint ennek segítségével összehasonlítást végeztünk a módosított keretrendszerben tárgyalt Grosen-Jørgensen [1999] modell által adott és a kombinált modell által adott aktuáriusilag korrekt árak között. Ezen kívül beláttuk, hogy Loisel-Milhaud [2012] eredményeinek beépítésével kapott aktuáriusilag korrekt árak is közelíthetőek egy olyan modell eredményeivel, amelybe a cikkünk első szakaszában ismertetett becslési eljárások kerülnek beépítésre. Összességében az eredmények alapján azt láthatjuk, hogy a kombinált modell képes az ügyfél szempontjából történő konstrukció értékelés során az egyes paraméterekben bekövetkező változás jobb megragadására, így összességében egy, a paraméterek változásának a modell eredményére gyakorolt hatását jobban kiemelő modellt kaptunk.

Függelék

EM-algoritmus

Legyen adott egy $p(\mathbf{x}|\Theta)$ sűrűségfüggvény Θ paraméter mellett, valamint legyen egy, az előbbi sűrűségfüggvény által meghatározott eloszlásból származó, N elemű adathalmazunk, azaz $X = \{\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_N\}$. Tegyük fel, hogy az előbbi eloszlás kevert és sűrűségfüggvényét a következőképp írhatjuk fel:

$$p(\mathbf{x}|\Theta) = \sum_{i=1}^{M} \theta_i p_i(\mathbf{x}|\theta_i) \ . \tag{19}$$

A (19) összefüggésben szereplő paraméterek tehát $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N, \theta_1, \ldots, \theta_N)$, amelyekre igaz, hogy $\sum_{i=1}^{M} \theta_i = 1$, továbbá az egyes p_i-k a θ_i-k szerint parametrizált sűrűségfüggvények. A fenti képletből láthatjuk, hogy itt M számú komponens keveréséről van szó θ_i keverési súlyok mentén. A paraméterbecsléshez szükséges loglikelihood függvény erre a sűrűségfüggvényre nézve ekkor a következő:

$$\log(L(\Theta|X)) = \log \prod_{i=1}^{N} p(x_i|\Theta) = \sum_{i=1}^{N} \log\Big(\sum_{j=1}^{M} \theta_j p_j(x_i|\theta_j)\Big) \ . \tag{20}$$

A (20) loglikelihood függvény optimalizálása nehéz feladat, mivel az összeg logaritmusa szerepel benne. Ha feltesszük, hogy X esetén adathiány áll fenn és létezik egy $Y = \{y_i\}_{i=1}^{N}$ olyan látens változó, amelynek értékei alapján eldönthető, hogy az adathalmazunk egyes elemei a keverés során felhasznált eloszlások közül melyikből származnak, úgy a kérdéses loglikelihood függvény jelentősen egyszerűsödik, így az optimalizálás is jóval könnyebbé válik. Tehát legyen $y_i \in 1, \ldots M$ $\forall i$-re, és jelentse $y_i = k$ azt, hogy az i-edik megfigyelés a k-adik eloszlás komponensből származik. Ekkor a loglikelihood függvény a következő formára egyszerűsödik:

$$\log(L(\Theta|X, Y)) = \log(P(X, Y|\Theta)) = \sum_{i=1}^{N} \log(\theta_{y_i} p_{y_i}(x_i|\theta_{y_i})) \ . \tag{21}$$

Az EM-algoritmus lényege, hogy (21)-ből kiindulva úgy teszünk, mintha ismernénk a paramétereket (azaz kezdőértékét adunk Θ-nak), majd az E-lépés során számszerűsítjük a $p_{ij} = P(y_j = i)$ $i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, N$ valószínűségeket (azaz minden egyes megfigyeléshez kiszámítjuk, hogy mekkora valószínűséggel származik az egyes komponensekből). Az M-lépés során képezzük a látens változók várható értékét (a fenti jelölésekkel $\sum_{i=1}^{M} P(Y_j = i) * i$, $j = 1, \ldots, N$), majd ezen várható értékek mellett megkeressük azokat a paramétereket, amelyek maximalizálják a loglikelihood függvényt. Ezt az eljárást a konvergenciáig ismételjük.

Irodalom

1. Bacinello, Anna Rita [2003]: Fair Valuation of a Guaranteed Life Insurance Participating Contract Embedding a Surrender Option. *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 70, 461–487
2. Bilmes, A. Jeff [1988]: A Gentle Tutorial of the EM Algorithm and its Application to Parameter Estimation for Gaussian Mixture and Hidden Markov Models. International Computer Science Institute, 2–10.

3. Enz, Rudolf [2000]: *The S-Curve Relation between Per-Capita Income and Insurance Penetration.* The Geneva Papers on Risk and Insurance, Vol. 25, No. 3, 396–406.
4. Grosen, Anders-Løchte Jørgensen, Peter [1999]: Fair Valuation of Life Insurance Liabilities: The Impact of Interest Rate Guarantees, Surrender Options, and Bonus Policies. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 26, 37–57.
5. Loisel, S.-Milhaud, X.-Maume-Deschamps, V. [2010]: Surrender triggers in life insurance: classification and risk predictions. Working Paper. Elérhető: *http://isfa.univ-lyon1.fr/vmaume/sites/default/files/documents/lapse.pdf*
6. Loisel, Stéphane-Milhaud, Xavier [2012]: From deterministic to stochastic surrender risk models: impact of correlation crises on economic capital. *European Journal of Operational Research*, Vol. 214, 348–357.
7. Siu, Tak Kuen [2005]: Fair valuation of participating policies with surrender options and regime switching. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 37, 533–552.
8. Száz, János [2009]: *Pénzügyi termékek áralakulása.* Jet Set Tipográfiai Műhely Kft., Budapest.

VALUATION OF SURRENDER RISK WITH CORRELATED INSURANCE RISKS

In recent years the claim of insurance companies arises to model different risk types more precisely which comes from the expected implementation of Solvency II Directive. The purpose of this article is to describe the modelling possibilities of surrender risk in surrender option concerned area and a possible way to improve a model known in scientific literature. First of all we introduce shortly the result of Loisel-Milhaud [2012] so far complemented with parameter estimation results based on own calculation which have not been the focus of the authors' investigation. After this we describe how to handle the model of Grosen-Jørgensen [1999] in different mixed insurance framework and calculate the option's price related to the product. Next we show how can the result of Loisel-Milhaud [2012] be built into the model of Grosen-Jørgensen [1999] which is related to the increasing correlation between surrender decisions in a stress period. This paper argues that this improved model can calculate the actuarially fair price of a product with surrender option more accurate and able to capture a wider range of external drivers.

Keywords: surrender risk, actuarially fair price, modelling, Solvency II. *Journal of Economic Literature (JEL) code:* C15, C46, C63, G12, G22