BOD PÉTER

Minimális elemmel rendelkező zárt konvex halmazokról

Ebben a cikkben általánosítjuk Cottle és Veinott Jr. egy tételét, amelyben szükséges és elégséges feltételt adtak arra, hogy valamely konvex poliedrikus halmaznak legyen minimális eleme.

A $H \in R^n$ halmaz minimális elemén — ha létezik — olyan $x_0 \in H$ pontot értünk, amelyre $x_0 \leq x$, $\forall x \in H$-ra.

A minimális elem fogalmából következik, hogy — amennyiben létezik — egyértelmű. Tegyük fel ugyanis, hogy a H halmaznak két, egymástól különböző minimális eleme volna x^1 és x^2 .Akkor x^1 minimális elem voltából következnék: $x^1 \leq x^2$ és hasonlóan: $x^2 \leq x^1 \Rightarrow x^1 = x^2$, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy $x^1 \neq x^2$.

A minimális elemmel rendelkező halmazok jellemzésének a matematikai programozás szempontjából gyakorlati jelentősége van. Tekintsük ugyanis a következő általános matematikai programozási feladatot:

$$f(x_0) = \min_{x \in H} f(x),$$

ahol f(x) tetszőleges monoton függvény.

Az f(x) függvényt monotonnak nevezzük egy $H \in R^n$ halmazon, ha azon értelmezve van és bármely $x^1 \leq x^2$-re: (x^1; $x^2 \in H$)

$$f(x^1) \leq f(x^2).$$

Amennyiben H minimális elemmel rendelkező halmaz és minimális eleme x_0, akkor a fenti matematikai programozási feladatnak x_0 minimális megoldása bármilyen monoton függvény is szerepel benne. G. Wintgen nyomán azt mondjuk, hogy egy ilyen feladat indifferens a monoton függvények osztályára nézve.

A monoton függvények fontos alosztályát alkotják a nem negatív együtthatójú lineáris függvények:

Az 1. Lemma alapján nyilvánvaló, hogy a nem negatív lineáris függvények osztályára vonatkozó indifferencia egyenértékű azzal a körülménnyel, hogy a H halmaznak van minimális eleme. Ennek az ekvivalenciának az alapján mindazon tételek, amelyek a nem negatív függvények osztályára vonatkozóan bizonyítanak indifferenciát, egyben feltételeket adnak arra, hogy a megengedett megoldások halmazában minimális elem létezzék.

1. *Lemma*: $x^1 \leq x^2 \Leftrightarrow c^*x_1 \leq c^*x_2$ tetszőleges $c^* \geq 0^*$-ra. Ha $x^1 \leq x^2$ és $c^* \geq o^*$, akkor: $c^*x^1 \leq c^*x^2$. Ha $c^*x^1 \leq c^*x^2$ minden $c^* \geq o^*$-re: legyen $c^* = e_i^*$ $(i = 1\ 2, \ldots, n)$. Ekkor: $e_i^*x^1 = (x^1)_i \leq e_i^*x^2 = (x^2)_i$ $\forall_i$-re és $x^1 \leq x^2$.

G. Wingtgen 1964-ben megmutatta, hogy amennyiben a B mátrix minden sorában egy nem-negatív elemet tartalmaz és az összes többi elem nem-pozitív, akkor a

$$\mathrm{H} = \{x \mid \mathrm{B}x \geq b;\ x \geq 0\}$$

halmaznak van minimális eleme [1].

1966-ban [2] alatti cikkemben szükséges és elégséges jellemzést adtam arra, hogy egy olyan konvex poliéder, amely véges sok hipersík és a nem-negatív ortáns közös részeként állítható elő, rendelkezzék minimális elemmel.

1971-ben R. W. Cottle és A. F. Veinott Jr. kimerítően jellemezték [3] alatti cikkükben a minimális elemmel rendelkező konvex poliedrikus halmazok osztályát, vagyis az olyan minimális elemmel rendelkező halmazokat, amelyek véges sok zárt féltér közös részeként állíthatók elő.

A továbbiakban olyan halmazokat vizsgálunk, amelyek véges sok folytonosan differenciálható konvex függvény meghatározott alsó nívóhalmazainak közös részeként állíthatók elő.

Legyen adva tehát R^n-ben egy $\mathrm{H} \in \mathrm{R}^n$ zárt, konvex halmaz és ezen definiálunk $g_i(x) \in \mathrm{C}^1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ véges sok konvex függvényt. Az általánosság megszorítása nélkül mondhatjuk, hogy legyen:

$$\mathrm{K}_i = \{x \mid x \in \mathrm{H};\ g_i(x) \leq 0\}$$

és

$$\mathrm{P:} \quad \mathrm{K} = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{K}_i\,.$$

Minthogy konvex függvények alsó nívóhalmazai konvexek és konvex halmazok közös része konvex, ezért K konvex halmaz. Tegyük fel, hogy nem üres.

$$\mathrm{K} \neq \emptyset$$

Legyen $x_0 \in \mathrm{K}$. Definiáljuk az $\mathrm{J} = \{1, 2, \ldots, \mathrm{m}\}$ indexhalmaz következő két diszjunkt részhalmazát:

$$\mathrm{J}_1 = \{\mathrm{i} \mid \mathrm{g}_i(x_0) = 0\}$$

$$\mathrm{J}_2 = \{\mathrm{i} \mid \mathrm{g}_i(x_0) < 0\}$$

Bebizonyítjuk a következő lemmát:

2. *Lemma*: x_0 nem lehet minimális elem, ha $\mathrm{k} = |\mathrm{J}_1| < n$ Tegyük fel a lemma állításával ellentétben, hogy x_0 minimális elem K-ban. Legyen $\mathrm{J}_1 = \{1, 2, \ldots, \mathrm{k}\}$ vagyis teljesüljön egyenlőségre az első k feltétel. Tekintsük a

$$\mathrm{g}_i(x) = 0,\ i \in \mathrm{J}_1$$

k egyenletből álló n ismeretlenü nem-lineáris egyenletrendszert. Legyen

$$\nabla g_{J_1}(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial g_k(x)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_k(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy a rendszer Jacobi-mátrixának x_0-ban teljes sorrangja van és az első k oszlop lineárisan független (ha rang $\forall g_{j_1}(x_0) < k$ akkor a következtetés még inkább helytálló.)
Minthogy

$$g_i(x_0) = 0, \ i \in J_1$$

ezért az ún. „implicit függvények" tétele értelmében [4] létezik k egyértékű függvény:

$$\varphi_1(x_{k+1};\ x_{k+2};\ \ldots\ x_n)$$
$$\varphi_2(x_{k+1};\ x_{k+2};\ \ldots\ x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_k(x_{k+1};\ x_{k+2};\ \ldots\ x_n),$$

amelyek az $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} x^0_{k+1} \\ x^0_{k+2} \\ \ldots \\ x^0_n \end{bmatrix} \in R^{n-k}$ pont egy környezetében is folytonosak úgy, hogy

a) $x^0_i = \varphi_i(x^0_{k+1}, x^0_{k+2}, \ldots, x^0_n) \quad i \in J_1$

b) minden $\hat{x}_0$ környezetében levő $\hat{x}$ vektorral meghatározott

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\hat{x}) \\ \varphi_2(\hat{x}) \\ \vdots \\ \varphi_k(\hat{x}) \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

kielégíti a $g_i(x) = 0$; $i \in J_1$ egyenletrendszert. Legyen $\hat{x} = \hat{x}_0 - \lambda 1_{n-k}$, ahol 1_{n-k} az $(n - k)$ elemű összegező (csupa egyesből álló) vektor. Válasszuk először λ^9-t olyan kicsire, hogy $\hat{x}$ a megfelelő környezetbe essék. Utána vizsgáljuk meg milyen értéket vesznek fel a $g_i(x)$; $i \in J_2$ függvények az $\hat{x}$ segítségével képezett $\bar{x}$ helyen. Minthogy $g_i(x_0) < 0$ volt $\forall i \in J_2$-re és mivel a $\varphi_i(\hat{x})$ függvények folytonosak, λ pótlólag csökkenthető úgy, ha szükséges, hogy

$$g_i(\bar{x}) \leq 0;\ \forall_i \in J_2\text{-re}$$

érvényes maradjon. Mivel $g_i(\bar{x}) = 0 \ \ \forall_i \in J_1$-re, ezért:

$$g_i(\bar{x}) \leq 0 \ \ \forall_i \in J\text{-re.}$$

Tehát $\bar{x} \in K$. Azonban $\bar{x}$ utolsó $(n - k)$ komponense határozottan kisebb $\bar{x}_0$ megfelelő komponenseinél. Vagyis x_0 nem lehet minimális eleme a K halmaznak.

Bebizonyítjuk a minimális elem létezésének alábbi elégséges feltételét.

1. *Tétel*: A P. alatt megfogalmazott K halmaznak van minimális eleme, ha létezik olyan $x_0 \in K$, amely legalább n feltételben egyenlőséget eredményez és az egyenlőségre teljesülő feltételekből képezett Jacobi mátrixnak x_0-ban van n-ed rendű, nem-pozitív inverzű, bázisa.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy x_0-nál az első k feltétel teljesül egyenlőségre. Tehát a megfelelő Jacobi mátrix:

$$\nabla g_{J1}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial g_k(x)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_k(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} : (k \times n) \text{ méretű.}$$

A feltételnek megfelelően rang $[\nabla g_{J1}(x_0)] = n$. Tegyük fel, hogy az első n sor lineárisan független. Legyen:

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x_0)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_1(x_0)}{\partial xg} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial g_n(x_0)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_n(x_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1} \leq \mathbf{0}$$

Definiáljuk a következő vektorokat:

$$u_0^* = [u_1^*; u_2^*];\ u_1^* = (-c^*)\mathrm{B};\ u_2^* = 0^* \in \mathrm{R}^{m-n},$$

ahol c tetszőleges nem negatív vektor R^n-ben. Megmutatjuk, hogy $[x_0; u_0]$ kielégíti az

(P') $$f(x_0) = \min_{x \in \mathrm{K}} c^* x$$

nem lineáris programozási feladat elégséges optimumfeltételeit, akármilyen nem-negatív vektor is legyen c. Kuhn és Tucker nyomán ugyanis x_0 minimális megoldása a P' feladatnak, ha létezik olyan u_0 vektor, hogy

$$\nabla f(x_0) + u_0^* \nabla g(x_0) = 0^*$$

$$g(x_0) \leq 0.$$

$$u_0^* g(x_0) = 0$$

$$u_0^* \geq 0^*.$$

Minthogy

$$x_0 \in \mathrm{K} \Rightarrow g(x_0) \leq 0,$$

$$u_0^* g(x_0) = [(-c^*)\mathrm{B}; 0^*] \begin{bmatrix} g_1(x_0) \\ \dots \\ g_n(x_0) \\ \dots \\ g_k(x_0) \\ \\ g_n(x_0) \end{bmatrix} = 0\,,$$

mert

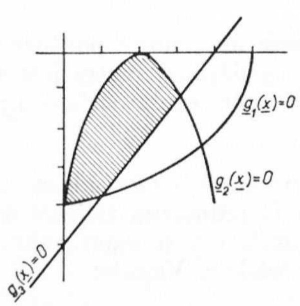
$$g_i(x_0) = 0;\ 0 < i \leq k,$$

$$u_0^* = [(-c^*)\mathrm{B}; 0^*] \geq 0^*, \text{ minden } c \geq 0 \text{ mellett.}$$

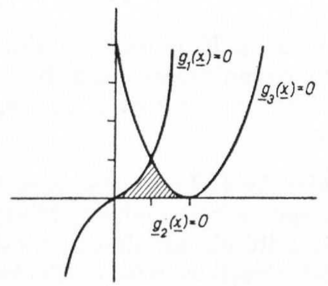
Végül:

$$\nabla f(x_0) + u_0 \nabla g f(x_0) = c^* + [(-x)B;\ 0^*] \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x_0)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial g_n(x_0)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_n(x_0)}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial g_m(x_0)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_m(x_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 0^* .$$

Tehát x_0 tetszőleges nem-negatív lineáris célfüggvény mellett minimális megoldás, és így x_0 a K halmaz minimális eleme.



1. ábra



2. ábra

Tekintsük az alábbi példát (l. 1. ábra):

Legyen $K = \{x \mid x \in R^2;\ g_i(x) \leq 0;\ (i = 1, 2, 3)\}$

$$g_1(x) = 16x_1^2 + 25x_2^2 - 400$$
$$g_2(x) = x_1^2 - 4x_1 + x_2 + 4$$
$$g_3(x) = 5x_1 - 4x_2 - 20.$$

Legyen $x_0 = [0, -4]$

$$g_1(x_0) = 0;\ g_2(x_0) = 0;\ g_3(x_0) < 0$$

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} 32x_1 & 50x_2 \\ 2x_1 - 4 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}; \qquad \nabla g_{J1}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & -200 \\ -4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B = \nabla g_{J1}(x_0)^{-1} = -\frac{1}{800} \begin{bmatrix} 1 & 200 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \leq 0 .$$

Tehát x_0 a K halmaz minimális eleme.

Mint ez a nem-lineáris programozás elméletében általános jelenség — a szükséges feltételek az itt vizsgált problémánál sem esnek egybe az elégséges feltételekkel. A fenti 2. ábra minimális elemű halmazt mutat, anélkül hogy akár a konvexitási akár a Jacobi mátrixra vonatkozó követelmények teljesülnének.

$$g_1(x) = -x_1^3 + x_2 < 0$$
$$g_2(x) = -x_2 < 0$$
$$g_3(x) = -x_1^2 + 4x_1 + x_2 - 4 \leq 0.$$

Ahhoz, hogy az 1. Tétel feltételei a konvex esetre szükségesek is legyenek, bizonyos regularitási feltételek teljesülését is ki kell kötni. Ilyen például az ún. Slater-féle regularitási feltétel. A K halmaz eleget tesz a Slater-féle regularitási feltételnek, ha relatív belseje nem üres, vagyis:

$$K^0 = \{x \mid g(x) < 0\} \neq \emptyset.$$

2. *Tétel*: Ha x_0 a K halmaz minimális eleme úgy, hogy pontosan n feltétel teljesül egyenlőségre és a K halmaz reguláris a Slater-féle regularitási feltétel szerint, akkor: a $\nabla g_{J1}(x_0)$ mátrix nem szinguláris és inverze nem-pozitív.

Bizonyítás: Az 1. Lemma értelmében x_0 minimális megoldása a P' feladatnak tetszőleges $c \geq 0$ mellett. Minthogy a K halmazon teljesül a Slater-féle regularitási feltétel, minden $c \geq 0$-hez létezik olyan $u_0(c)$ vektor, hogy $[x_0; u_0(c)]$ kielégíti a Kuhn—Tucker feltételeket. Vagyis:

$$c^* + u_0^*(c) \nabla g(x_0) = 0^*$$
$$g(x_0) \leq 0$$
$$u_0^*(x) g(x_0) = 0$$
$$u_0^*(c) \geq 0^*$$

Tegyük fel, hogy az első n feltétel teljesül egyenlőségre. Akkor $g_i(x_0) < 0$, $(i = (n+1); (n+2); \ldots; m)$ és $g(x_0)$ és $u_0(c)$ ortogonalitása miatt $u_0^*(c) = [u_1^*(c); u_2^*(c)]$-ban: $u_2^*(c) = 0^*$. Minthogy $u_0^*(c) \geq 0^*$, a

$$c^* + u_0^*(c) \nabla g(x_0) = 0^*$$

egyenletrendszernek minden $c \geq 0$-ra van nem-negatív megoldása és így létezik nem negatív bázismegoldása is. $u_2^*(c) = 0^*$ miatt ez csak $[u_1^*(c); 0^*]$ alakú lehet. Így a $\nabla g(x^*)$ mátrix első n sorának lineárisan függetlennek kell lennie. Ezért írható:

$$u_1^*(c) = (-c^*) \nabla g_{J1}(x_0)^{-1}.$$

$u_1^*(c)$ nem-negativitása tetszőleges nem-negatív c mellett csak akkor áll fenn, ha

$$B = \nabla g_{J1}(x_0)^{-1} \leq 0.$$

Alkalmazzuk tételeinket arra az esetre, amikor K poliedrikus. Legyen:

$$L = \{x \mid x \in R^n;\ b - Ax \leq 0\},$$

ahol $A : (m \times n)$ méretű mátrix és $b \in R^m$. Bizonyítjuk a következő állítást:

Korollárium: x_0 akkor és degenerációmentes esetben csak akkor minimális eleme az L halmaznak, ha $x_0 \in$ L és x_0-t egy nem-negatív inverzű bázis határoz meg.

[Azt mondjuk, hogy egy $\hat{x}$ vektort, amelyre $A\hat{x} \geq b$ egy A_B bázis határoz meg, ha a sorok megfelelő átrendezése után a feladat particionálható

$$\begin{bmatrix} A_B \\ A_N \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b_B \\ b_N \end{bmatrix}$$

alakban és

$$A_B\hat{x} = b_B, \quad (\hat{x} = A_B^{-1}b_B)$$

$$A_N\hat{x} \geq b_N.]$$

A feltétel elégséges. Ha $x_0 \in$ L, és egy A_B nem-negatív inverzű bázis határozza meg, akkor

$$x_0 = A_B^{-1}b_B$$

vagyis az L konvex halmazt meghatározó feltételek közül legalább n egyenlőségre teljesül. A

$$g(x) = b - Ax$$

rendszer Jacobi mátrixa: [—A]. Minthogy A-nak van nem-negatív inverzű bázisa, ezért az 1. Tétel feltételei teljesültek és így x_0 minimális elem L-ben.

A feltétel szükséges. Ha x_0 az L halmaz minimális eleme és pontosan n feltétel teljesül egyenlőségre (degenerációmentesség), akkor teljesültek a 2. Tétel feltételei. A regularitási követelmény teljesülésére ugyanis most nincs szükség, mert az L halmazt meghatározó függvények lineárisak. Így a $\nabla g_{J1}(x_0)$ mátrix, amely jelen esetben $(-A_B)$ nem szinguláris és inverze nem-pozitív. Vagyis: $A_B^{-1} \geq 0$, és x_0-t nem-negatív inverzű bázis határoz meg.

A Korollárium a Cottle—Veinott-féle tétel 1. és 3. állítása közötti ekvivalenciát bizonyítja közvetlenül. A hivatkozott tétel 2., 3. és 5. állításai következnek a Korolláriumból.

Kiegészítő megjegyzések: A tett feltételezések több pontban gyengíthetők anélkül, hogy állításaink érvényüket vesztenék. A K halmaz P alatt adott definíciójában elegendő a $g_i(x)$ $(i = 1, 2,3, \ldots)$ függvények alulról félig folytonos voltát és kvázikonvexitásukat feltételezni.

Az 1. Tétel érvényességéhez nem szükséges valamennyi $g_i(x)$ függvény kvázikonvexitása. Elegendő, ha az x_0 pontban aktív feltételekben szereplő $g_i(x)$; $i \in J_1$ függvények kvázikonvexek és folytonosan differenciálhatók x_0-ban. A 2. Tétel érvényességéhez elégséges a differenciálhatóságot az x_0 pontban feltételezni. A regularitási feltétel enyhíthető ún. gyenge regularitási feltételre, amely csak a $g_i(x)$; $i \in J_1$ függvények meghatározta halmazra kívánja meg belső pont létezését. Végül nem szükséges valamennyi $g_i(x)$ konvexitását megkövetelni. Elegendő, ha a $g_i(x)$; $i \in J_1$ függvények pszeudokonvexek x_0-ban.

(Beérkezett: 1974. október 10.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. WINTGEN, G.: Indifferente Optimierungsprobleme. Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie. Konferenzprotokoll. II. II. 3—6. 1964.
2. BOD P.: Megjegyzés Wintgen G. egy tételéhez. MTA III. Osztályának Közleményei. 1966. 16. 275—279. o.
3. COTTLE, R. W.—VEINOTT, A. F. JR.: Polyhedral sets having a least element. Mathematical Programming. Vol. 3. No. 2. 238—249.
4. HADLEY, G.: Nonlinear and dynamic programming. 1964. Chapter 2. 11.

ON CLOSED CONVEX SETS HAVING A LEAST ELEMENT

We generalize a theorem due to R. W. Cottle and A. F. Veinott Jr. on polyhedral sets having a least element to the class of the closed, convex sets defined by a finite number of non-linear inequalities.

We consider sets of the form:

$$K = \bigcap_{i=1}^{m} K_i$$

$$K_i = \{x \mid x \in H \subset R^n;\ g_i(x) \leq 0\}$$

where the functions $g_i(x) \in C^1$ are convex.

We prove the following statements:

Theorem 1. (sufficient criteria) The set K has a least element if there exists $x_0 \in K$ yielding in at least n constraints equality and the Jacobian matrix formed by the active constraints at x_0 has a non-positively invertible basis of order n.

Theorem 2. (necessary criteria) If x_0 is the least element in K yielding equality in exactly n constraints and Karlin's constraint qualification holds on K, then the Jacobian matrix formed by the active constraints at x_0 is non-singular and has a non-positive inverse.

By applying the theorems on the polyhedral case one obtains as a corollary the equivalence $(1) \Leftrightarrow (4)$ in theorem of Cottle and Veinott.

О ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ С МИНИМАЛЬНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Мы обобщаем теорему Р. У. Котла и А. Ф. Вейнотта младшего, о полиэдрических множествах с минимальным элементом на класс замкнутых выпуклых множеств, определенных конечным числом нелинейных неравенств.

Мы рассматриваем множества вида:

$$K = \bigcap_{i=1}^{m} K_i$$

$$K_i = \{x \mid x \in H \supset R^n;\ g_i(x) \leq 0\}$$

где выведение выпуклых функций gi(x) é C^1 может быть беспрерывным. Докажем следующее:

Теорема 1. (достаточные условия). Множество K имеет минимальный элемент, если существует такое значение $x_0 \in K$, для которого по крайней мере имеется n ограничительных условий и которое дает равенство, образуемое из условий матрицы Якоби и базу X_0порядка n с неположительным обращением.

Теорема 2 (необходимые условия). Если x_0 минимальный, и множество K является регулярным согласно условию элемент множества K, так что относительно равенства точно осуществляется n условий регулярности Карлина, тогда образования из активных условий матрица Якоби не сингулярна в x_0, и ее обращенное значение не положительно.

Если мы применим наши теоремы относительно полиэдрического случая, мы получим в качестве короллария фигурирующую в теореме Котла и Вейнотта эквивалентность согласно следующему: (1) ($\Leftrightarrow$) (4).