Forgó Ferenc

Egy speciális kvadratikus feladat megoldása

Bevezetés

Lineáris feltételek által korlátozott kvadratikus programozási feladatnak a következő feltételes szélsőértékfeladatot nevezik:

$$Ax \leq b$$
$$Q(x) = p^*x + x^*Cx \to \max, \tag{1}$$

ahol A egy $m \times n$-es mátrix, x, b, p vektorok és C egy szimmetrikus mátrix.[1] (1) megoldása általában nehéz feladat, mivel lokális de nem globális maximumpontok létezhetnek. (1) megoldására, — többek között, — metszősík módszerek különböző variánsait [1], [2], a korlátozás és szétválasztás módszerét [3], vegyes egészértékű programozásra való visszavezetést [4] és különböző közelítő és heurisztikus módszereket javasoltak. Ezen módszerek elméleti tulajdonságainak és számítástechnikai viselkedésének felderítése még korántsem befejezett. Ezért érdeklődésre tarthat számot minden olyan módszer, mely (1) valamely speciális esetét megoldja és jóval egyszerűbb, mint a fentebb említett módszerek.

Anand és Swarup [5], [6] azt a speciális esetet vizsgálják, amikor $Q(x)$ két lineáris függvény szorzata. A feladat megoldására ebben az esetben metszősík módszert javasolnak. Ugyanezen típusú feladat célfüggvényének parametrizálásával foglalkozik Aggarwal és Arora [7]. Ebben a cikkben szintén ezzel a speciális esettel foglalkozunk. Általános és egyszerű (szimplex módszer bonyolultságú) módszert adunk (1) feladat megoldására abban az esetben, amikor C rangja 1. Néhány olyan általánosításra is felhívjuk a figyelmet, melyek egyszerű következményei a javasolt módszernek.

1. A módszer leírása

Tekintsük a következő kvadratikus programozási feladatot

$$Ax \leq b$$
$$\mathrm{R}(x) = (s^*x + \alpha)\ (r^*x + \beta) \to \max \tag{2}$$

Feltesszük, hogy $\mathrm{L} = \{x \mid Ax \leq b\}$ nem üres és korlátos s így (2) mindig megoldható. Ha minden $x \in \mathrm{L}$ esetén $s^*x + \alpha \leq 0$ és $r^*x + \beta \geq 0$, továbbá van olyan $\bar{x}$, hogy vagy $s^*\bar{x} + \alpha = 0$ vagy pedig $r^*\bar{x} + \beta = 0$, akkor (2) megoldása

[1] *-al jelöljük egy vektor vagy mátrix transzponáltját.

triviális; bármely fenti tulajdonságú $\bar{x}$ optimális és $R(\bar{x}) = 0$. Ezért csak a következő két eset tarthat érdeklődésre számot:

$$\text{(I)} \qquad s^*x + \alpha > 0 \text{ és } r^*x + \beta < 0 \quad \forall x \in L,$$

$$\text{(II)} \qquad s^*x + \alpha > 0 \text{ és } r^*x + \beta > 0 \quad \forall x \in L.$$

Minden egyéb eset vagy triviális vagy a fenti kettőre visszavezethető. Ha a (II) eset áll fenn, akkor SWARUP [5] bebizonyította, hogy $R(x)$ pszeudokonkáv L-en s így minden lokális maximumpont egyúttal globális is. Az (I) esetben lokális és nem globális maximumpontok létezhetnek.

Tekintsük a következő t-ben parametrikus lineáris programozási feladatot:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ s^*x + \alpha &= t \\ z(x) = r^*x + \beta &\to \max. \end{aligned} \tag{3}$$

Legyen u(t) a (3) optimális célfüggvényértéke. A lineáris programozás elméletéből ismeretesek az alábbiak:

1. Van olyan T_0 és T_1 érték, hogy u(t) értelmezve van minden t-re a $[T_0, T_1]$ intervallumban és minden ezen kívül eső t-re (3)-nak nincs megoldása. (Mivel L korlátos, T_0 és T_1 véges számok).
2. u(t) t-nek szakaszonként lineáris konkáv függvénye. Az u(t) töréspontjait, melyek száma véges, karakterisztikus pontoknak fogjuk nevezni.

Tekintsük a $w(t) = tu(t)$ függvényt és legyen $\bar{t}$ olyan, hogy

$$w(\bar{t}) \geq w(t) \qquad \forall t \in [T_0, T_1].$$

1. *Tétel.* $w(\bar{t})$ a (2) optimális célfüggvényértéke és a (3) feladatnak $t = \bar{t}$ paraméterérték melletti minden optimális megoldása (2)-nek is optimális megoldása.

Bizonyítás. Legyen $\bar{x}$ a (3)-nak egy optimális megoldása $t = \bar{t}$ mellett. Tegyük fel, indirekt bizonyítást alkalmazva, hogy van olyan $y \in L$, hogy $R(y) > R(\bar{x})$, Legyen $t' = s^*y + \alpha > 0$. Nyilván $t' \in [T_0, T_1]$ Így $R(y) = t'(r^*y + \beta) \leq t'u(t') = w(t') = R(\bar{x})$, ami ellentmondás.

Minthogy w(t) egy egyváltozós, szakaszonként kvadratikus függvény, ezért maximalizálása egyszerű feladat. Tegyük fel, hogy a karakterisztikus pontok a következők

$$T_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_q = T_1$$

u(t) szakaszonként lineáris, vagyis

$$u(t) = \lambda_k t + \mu_k, \text{ ha } t_{k-1} \leq t \leq t_k \qquad (k = 1, \ldots q).$$

Így w(t) monoton növekvő ebben az intervallumban, ha u(t) monoton nem csökken. A (II) esetben w(t) maximuma vagy karakterisztikus pontban van, vagy olyan $[t_{k-1}, t_k]$ szakasz belsejében, ahol u(t) monoton csökken (ehhez szükséges, hogy $\lambda_k < 0$ legyen), s így elegendő csak ezeket a szakaszokat és a karakterisztikus pontokat vizsgálni. A kvadratikus függvények maximalizálása elemi feladat. Ezzel egyúttal egy algoritmust is adtunk (2) megoldására a (II) esetben.

A fentieknek egyszerű következménye az, hogy (II) esetben (2)-nek feltétlenül van olyan optimális megoldása, mely vagy L egy csúcspontja, vagy L valamelyik élén fekszik, hiszen valamennyi karakterisztikus ponthoz tartozik L-nek egy olyan csúcspontja, mely (3)-at maximalizálja és a (3)-nak $\bar{t}$-hez tartozó bármely optimális bázismegoldása kifejezhető a $\bar{t}$-hez legközelebbi két karakterisztikus ponthoz tartozó bázismegoldások konvex lineáris kombinációjaként.

(I) esetben $u(t) < 0$, $\forall t \in [T_0, T_1]$. Ha $u(t)$ monoton nemnövekvő egy $[t_{k-1}, t_k]$ intervallumban, akkor $w(t)$ monoton csökken ugyanitt. Ha $u(t)$ monoton növekszik, akkor $\lambda_k > 0$ és $w(t)$ egy konvex kvadratikus függvény, mely maximumát a t_{k-1} és t_k pontok egyikében felveszi. Ennek következménye, hogy $w(t)$ maximumát egy olyan karakterisztikus pontban felveszi, ahol $u(t)$ nem csökkenő. (2) megoldása tehát úgy történik, hogy meghatározzuk (3) karakterisztikus pontjait T_0-ból kiindulva midaddig, amíg a célfüggvényérték nem kezd el csökkenni, s kiválasztjuk ezek közül azt, amelyikhez a maximális $w(t)$ tartozik. Ez biztosan L egy csúcspontja, ami teljesen összhangban van azzal a ténnyel, hogy egy pszeudokonvex függvény L legalább egy csúcspontjában felveszi a maximumát.

Példaként tekintsük az alábbi feladatot [(2) feladat (I) eset]:

$$\begin{gathered} x_1, x_2 \geq 0 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ -(9 - x_1)(10 - x_2) \to \max. \end{gathered}$$

Láthatjuk most, hogy a (2) feladat (I) esete áll fenn. A feltételekhez az $x_1 = 9$-t feltételt csatolva:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{5}{3}t - \frac{25}{3}, & \text{ha } 1 \leq t \leq 4 \\ \frac{3}{5}t - \frac{37}{5}, & \text{ha } 4 \leq t \leq 9 \end{cases}$$

$$w(t) = \begin{cases} \frac{5}{3}t^2 - \frac{25}{3}t, & \text{ha } 1 \leq t \leq 4 \\ \frac{3}{5}t^2 - \frac{37}{5}t, & \text{ha } 4 \leq t \leq 9. \end{cases}$$

Az 1, 4 és 9 karakterisztikus pontok közül a $t = 1$-hez tartozik $w(t)$ maximuma és ehhez az $x = 8$, $x_2 = 0$ optimális megoldás tartozik.

Tekintsük most az (1) feladatot és tegyük fel, hogy C rangja 1. Ekkor C felírható két vektor diadikus szorzataként, $C = rs^*$, és $Q(x)$ a következő formát ölti:

$$Q(x) = p^*x + (r^*x)(s^*x).$$

Tegyük fel, hogy az (1) feltételei a következőképpen particionálhatók:

$$A_1x \leq b_1,$$
$$A_2x = b_2,$$

valamint, hogy p kifejezhető A_2 sorainak és r, s vektoroknak lineáris kombinációjaként:

$$p^* = \mathrm{u}^* A_2 + \alpha r^* + \beta s^* \tag{4}$$

Egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk ekkor arról, hogy

$$Q(x) = (\alpha + s^* x)\ (\beta + r^* x) + \mathrm{K}$$

ahol K konstans és $\mathrm{K} = \mathrm{u}^*\mathrm{b} - \alpha\beta$. Ebben az esetben (1) ugyanolyan alakú, mint (2) és a fentiekben leírt módszer alkalmazható megoldására.

Valamivel bonyolultabb a helyzet, ha p nem tesz eleget (4)-nek. Ekkor (3) helyett a következő t-ben paraméteres lineáris programozási feladatot tekintjük:

$$\begin{gathered} Ax \leq b \\ s^* x = \mathrm{t} \\ \mathrm{z}(x, \mathrm{t}) = p^* x + \mathrm{t}\, r^* x \rightarrow \max. \end{gathered} \tag{5}$$

A parametrikus lineáris programozás elméletéből ismeretes, hogy most is van olyan $[\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1]$ intervallum, ahol minden $\mathrm{t} \in [\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1]$-re (5) megoldható és $\mathrm{t} \notin [\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1]$-re nem, továbbá létezik karakterisztikus pontok véges sorozata:

$$\mathrm{T}_0 = \mathrm{t}_1 < \mathrm{t}_2 < \ldots \mathrm{t}_q = \mathrm{T}_1$$

melyekre az jellemző, hogy (5) optimális célfüggvényértéke, u(t), minden $[\mathrm{t}_{k-1}, \mathrm{t}_k]$ $(k = 1, \ldots \mathrm{q})$ szakaszon t-nek kvadratikus függvénye.

A karakterisztikus pontok meghatározása hasonlóan történik, mint a csak célfüggvényben vagy csak a jobboldalban parametrikus feladat esetében. Az (1) feladat megoldását tehát úgy kapjuk meg, hogy meghatározzuk u(t) maximumát a $[\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1]$ intervallumon és vesszük az (5) feladat ezen maximumot szolgáltató t paraméterérték melletti optimális megoldásait.

Nyilván ez az eljárás alkalmazható a (2) feladat megoldására is.

2. Néhány egyszerű általánosítás

Az (1) és (2) feladat megoldásának visszavezetése egy parametrikus programozási feladat megoldására lehetővé teszi ennek a gondolatnak néhány rokon probléma megoldására való kiterjesztését. Az alábbiakban ezek közül néhányat megemlítünk.

1. A (2) feladat egyik természetes általánosítása a következő:

$$\begin{gathered} Ax \leq b \\ \mathrm{R}_k(x) = (s_1^* x + \alpha_1)\ (s_2^* x + \alpha_2) \ldots (s_k^* x + \alpha_k) \rightarrow \max. \end{gathered} \tag{6}$$

Ennek megoldását vissza lehet vezetni a következő k—1 paraméteres feladat megoldására:

$$\begin{gathered} Ax \leq b \\ s_1^* x + \alpha_1 = \mathrm{t}_1 \\ \vdots \\ s_{k-1}^* x + \alpha_{k-1} = \mathrm{t}_{k-1} \\ \mathrm{z}(x, \mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_{k-1}) = \mathrm{t}_1 \mathrm{t}_2 \ldots \mathrm{t}_{k-1}(s_k^* x + \alpha_k) \rightarrow \max. \end{gathered} \tag{7}$$

Természetesen nagy k esetén a módszer nem praktikus, egyrészt a karakterisztikus tartományok (általában k — 1 dimenziósak) nagy száma, és az optimális célfüggvényérték függvény, $u(t_1, t_2 \ldots, t_{k-1})$ bonyolult alakja miatt.

2. Ha az (I) feladatban a C mátrix rangja k, akkor C felírható k darab diadikus mátrix összegeként s így (1) a következő alakú lesz:

$$Ax \leq b \tag{8}$$
$$Q(x) = p^*x + (r_1^*x)\ (s_1^*x) + (r_2^*x)\ (s_2^*x) + \ldots + (r_k^*x)\ (s_k^*x) \to \max.$$

Hasonlóan, mint az (5) feladat esetén (8)-nak a megoldása is visszavezethető az alábbi k paraméteres feladat megoldására:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ r_1^*x &= t_1 \\ &\vdots \\ r_k^*x &= t_k \end{aligned} \tag{9}$$
$$z(x, t_1, \ldots, t_k) = p^*x + t_1 s_1^*x + \ldots + t_k s_k^*x \to \max.$$

A helyzet annyiban kedvezőbb, mint a (6) feladatnál, hogy a karakterisztikus tartományok poliéderek és az $u(t_1, \ldots, t_k)$ optimális célfüggvényérték függvény kvadratikus. Ily módon (8)-nak a megoldását vissza lehet vezetni annyi k változós kvadratikus programozási feladat megoldására, ahány karakterisztikus poliédere van (9)-nek. Ha k kicsi, akkor ez (8) megoldásának gyakorlatilag is lehetséges módja.

3. A (2) feladat egy másik irányú általánosítása a következő:

$$Ax \leq b$$
$$R(x) = (s^*x + \alpha)\ f(x) \to \max. \tag{10}$$

ahol $f(x)$ egy konkáv függvény L-en. A feladatot ugyanúgy parametrizálhatjuk, mint (3)-at. A különbség az lesz, hogy (3) célfüggvénye most nemlineáris. Ha $f(x)$-re további megszorításokat is alkalmazunk (differenciálhatóság), úgy a nemlineáris parametrikus programozás módszereivel meg tudjuk (3)-at oldani, s ezen keresztül (10)-et is.

4. Bizonyos egészszámú nemlineáris programozási feladatok megoldására is lehet a parametrizálás módszerét alkalmazni. Tekintsük először a következő nulla—egy kvadratikus programozási feladatot:

$$0 \leq x \leq 1, \qquad x = \text{egész} \tag{11}$$
$$(s^*x + \alpha)\ (r^*x + \beta) \to \min.,$$

ahol $s^*x + \alpha > 0$ és $r^*x + \beta > 0$ minden $0 \leq x \leq 1$ esetén. Ha az egészértékűségi kikötést elhagyjuk, akkor (11) a (2) feladat (I) esete. Ekkor az optimális megoldások között szerepel (3)-nak legalább egy karakterisztikus pontja, ami egyúttal (11) csúcspontját adja. Így ez egészértékű megoldása (11)-nek és a 2. pontban leírt módszer alkalmazható (11) megoldására.

Tekintsük most a következő nemlineáris egészértékű feladatot:

$$0 \leq x \leq d, \; x = \text{egész} \tag{12}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{f}_j(x_j) + \alpha\right)\left(\sum_{j=1}^{n} g_j(x_j) + \beta\right) \to \max,$$

ahol $\mathrm{f}_j(x_j)$ egész minden egész x esetén és α, β egészek. (12) megoldása ekkor visszavezethető az alábbi parametrikus feladat megoldására:

$$0 \leq x \leq d, \; x = \text{egész}$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) + \alpha = \mathrm{t} \tag{13}$$

$$\mathrm{h}(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j) + \beta \to \max.$$

(13) megoldására a dinamikus programozás módszerét használva ([8]) egyúttal t minden szóbajöhető értékére megkapjuk (13)-nak a megoldását s ebből (12) megoldása egyszerűen nyerhető.

(Beérkezett: 1974. január 28.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. RITTER, K.: A method for solving maximum problems with nonconcave quadratic function. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete. 1966. no. 4. pp. 340—351.
2. FORGÓ F.: Metszősík módszerek és néhány közgazdasági alkalmazásuk (kandidátusi értekezés). Budapest, 1973.
3. FALK, E. J., SOLAND, R. M.: An algorithm for separable noncovex programming problems. Management Science, Vol. 15, No. 9 (1969) pp. 550—569.
4. KREKÓ B.: Optimumszámítás. Budapest, 1972. Közgazdasági és Jogi Kiadó.
5. SWARUP, K.: Programming with indefinite quadratic function with linear constraints. Cahiers de Centre d'Etudes de Rech. op. 1966. Vol. 8. No. 4.
6. SWARUP, K.—ANAND, P.: Minimization of an indefinite quadratic quadratic function with linear constraints. Ekonomicko-matematicky Obzor, 1970. Vol. 6, No. 4. pp. 380—388.
7. AGGARWAL, S. P.—ARORA, S.: Parametrization of an indefinite programming problem. (kézirat).
8. HADLEY, G.: Nonlinear and dynamic programming. London, 1964. Addison Wesley.

THE SOLUTION OF A SPECIAL QUADRATIC PROBLEM

Making use of parametric programming we present a method on the level of complexity of the simplex method for the solution of the quadratic programming problem:

$$Ax \leq b$$
$$\mathrm{Q}\,(x) = p^*x + x^*Cx \to \max$$

for the case when the rank of C is 1. This problem is a special case of the one containing the product of two linear functions as the objective function. The solution of this latter problem with the proposed method is much easier than the approaches suggested in the literature so far. If the rank of C is greater than 1 but it is not too large, then multiparametric linear programming can be applied for the solution of the problem. The article also considers some further simple generalizations.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ

С помощью параметрического программирования мы задаем метод сложности симплексного метода для решения задачи квадратического программирования:

$$Ax \leq b$$
$$Q(x) = p^*x + x^*Cx \to \max$$

если ранг C равен 1. Специальным случаем данной проблемы является задача, содержащая в качестве целовой функции произведение двух линейных функций, решение которой таким способом намного проще, чем методами, применяемыми в литературе до настоящего момента. Если ранг C больше 1, но не слишком велик, то линейное программирование с многими параметрами применимо для решения задачи. В статье имеется также несколько других простых обобщений.