Kornai János—Simonovits András

# Neumann-gazdaságok szabályozási problémái

## 1. Irodalmi előzmények

Dolgozatunk[1] háromféle kutatási irányzat kereszteződéséből született.

1. *A gazdasági rendszerek szabályozási mechanizmusának matematikai modellezése.* Az első kísérleteket ebben az irányban a neoklasszikus iskola végezte el: a XIX. században Cournot [7] és Walras [33], majd az általános egyensúlyelmélet XX. századi reneszánszában Samuelson [28], Arrow, Debreu [9] és követőik. Újabban többen próbálkoztak azzal, hogy — részlegesen vagy teljesen — elszakadjanak a neoklasszikus gondolkodási sémáktól a gazdasági rendszerek szabályozásának matematikia modellezésében. Fontos úttörők Hurwicz [13], valamint Marschak és Radner [23].

2. *A dinamikus Leontief- és Neumann-modellek.* (Lásd pl. Leontief [19], Neumann [26] és Bródy [4]). Ellentétben az 1. kutatási irányzattal, ezek eredetileg csupán a *reálszféra* modelljei kívántak lenni, s nem kapcsolódtak össze a *szabályozás* leírásával. Megtörténtek az első lépések a Leontief-, ill. Neumann-gazdaság szabályozásának elemzésére; Sargan [29], Leontief [20] és Lovell [21].

3. *A matematikai szabályozáselmélet (control theory) és az ezzel rokon, ezt részben átfedő optimális folyamatelmélet és dinamikus programozás közgazdasági alkalmazása.* Eddig főképpen a Keynes-i makroökonómia, a tőkeelmélet és a növekedési elmélet formalizálására használták. (Lásd pl. Tustin [31], Lange [18], Dorfman [10], Radner [26] és Arrow—Kurz [2] munkáit). Ismeretes ökonometriai szimultán egyenletrendszerek vezérlése szabályozáselméleti formalizmus segítségével. (Lásd Chow [6]). Felhasználták egyes dinamikus tervezési problémák tanulmányozására, pl. Kendrick [14] dolgozatában. Mindezideig azonban csak kivételes esetekben, (pl. [1]) használták fel a matematikai szabályozáselméletet a gazdasági rendszerek szabályozási mechanizmusának modellezésére.

[1] A két szerző között a következő munkamegosztás alakult ki: Kornai János egy hosszabb tanulmányt készített 1973-ban [17], amelyben felvázolta a jelen dolgozat néhány főbb gondolatát is. A modell specifikálását a két szerző együtt végezte. Simonovits András dolgozta ki a matematikai tételek bizonyítását; Kornai János végezte el a feltevések és eredmények közgazdasági interpretációját.
Kornai János a kutatás egy részét külföldön végezte: 1973-ban előbb a Stanford Egyetem (USA), majd a Bielefeld Egyetem (NSZK) matematikai-közgazdasági intézeteiben. Ezen a helyen is szeretne köszönetet mondani a két intézménynek munkája elősegítéséért, s az ott dolgozó kollégáknak, elsősorban A. Manne és C. C v. Weizsacker professzoroknak értékes tanácsaikért.

A háromféle irányzat egyesítését kísérelte meg a jelen cikk egyik szerzőjének, KORNAI JÁNOSnak MARTOS BÉLÁval közösen írott [15], [16] tanulmánya a vegetatív szabályozásról, továbbá a Kornai–Martos modellt továbbfejlesztő több más dolgozat, DANCS–HUNYADI–SIVÁK [8], VIRÁG [32] és BRÓDY [5] munkái. A jelen cikk is a kutatásnak ebbe az áramlatába sorolható. Célja, akárcsak az említett korábbi munkáké, a háromféle irányzat „keresztezése": az 1. irányzat kutatásainak, azaz a szabályozási mechanizmusok absztrakt modellezésének előrevitele, mégpedig a 2. irányzat (dinamikus Leontief- és Neumann-modellek) és a 3. irányzat (szabályozáselmélet) apparátusának és eredményeinek felhasználásával. Ez a keresztezés persze nemcsak előnyökkel jár, hanem erős megszorításokkal is. Kénytelenek vagyunk együttesen alkalmazni azokat a szigorú feltevéseket, amelyeket egyfelől a Leontief- és Neumann-modellek irodalma, másfelől a matematikai szabályozáselmélet fel szokott használni.

Miután röviden ismertettük dolgozatunk irodalmi előzményeit, rátérünk a modellek és a ssegítségükkel levonható következtetések ismertetésére. Néhány helyen menet közben is utalunk majd irodalmi forrásokra, a tanulmány egy későbbi helyén pedig külön fejezetben hasonlítjuk össze saját eredményeinket más dolgozatokéval.

## 2. A modell

### *Általános megjegyzések*

Kizárólag *dinamikus rendszereket* vizsgálunk. Az idő integer változó: $t = 0, 1, 2, \ldots$ Az időegységet *periódus*nak nevezzük. Stock-típusú változó mindig a periódus kezdetekor fennálló állapotra utal (pl. nyitókészlet), a flow a periódus folyamán megy végbe.

A gazdasági rendszer *reálszférája* az alapvető reálfolyamatok (termelés, termelő felhasználás, fogyasztás, forgalom) változóit és a köztük fennálló összefüggéseket foglalja magába. Elméleti síkon elválasztjuk tőle a *szabályozási szférát*, amely a reálszférát vezérli. Egyes megjelölésekben $R$-rel utalunk a reálszférára és $C$-vel (control) a szabályozási szférára.

A gazdaságnak $n$-féle *terméke* van; előállításukat a gazdaság $n$ számú *szektora* végzi.

Kétféle gazdaságot vizsgálunk. Az egyiket *Neumann-gazdaságnak* nevezzük, mert lényeges vonásaiban megfelel egy állandó struktúrájú, egyöntetű ütemben növekedő, Neumann-pályán haladó gazdaságnak, A másikat $\varepsilon$-aszimptotikus Neumann-gazdaságnak, vagy röviden *aszimptotikus gazdaságnak* nevezzük. Ez utóbbi – kissé leegyszerűsítve a magyarázatot – olyan dinamikus Leontief rendszer, amely nagyon közel kerül egy állandó struktúrájú Neumann-gazdasághoz. A kétféle gazdaság pontosabb definíciója a feltevések és a megállapítások részletes taglalásából rajzolódik majd ki. A kétféle gazdaság modellezéséhez zömében azonos feltevéseket alkalmazunk majd. Azoknak az alternatív feltevéseknek és megállapításoknak a sorszámozásánál, amelyek a kétféle gazdaságra vonatkozóan eltérnek, az „N" (Neumann-gazdaság), illetve az „A" (aszimptotikus gazdaság) megkülönböztetést használjuk.

### *A változók*

A modell változói a következők:[2]

$r(t)$ = a *termelés* $n$ komponensű vektora. Az $r_j$ változó a $j$-edik szektor termelése.

$Y(t)$ = a *vétel* $n \times n$-es mátrixa. Az $y_{ij}$ változó az $i$-edik termékből a $j$-edik szektor által vásárolt mennyiség.

$w(t)$ = az *outputkészlet* $n$ komponensű vektora. A $w_j$ változó a $j$-edik szektor saját termékéből saját raktárában felhalmozott készlet.

$V(t)$ = az *inputkészlet* $n \times n$-es mátrixa. A $v_{ij}$ változó az $i$-edik termékből a $j$-edik szektor raktárában felhalmozott készlet.

$S(t)$ = a *slack inputkészlet* $n \times n$-es mátrixa.[3] Az $s_{ij}$ változó az összes $v_{ij}$ inputkészletnek a technikailag szükséges inputkészlet feletti része. Definíciójára még visszatérünk.

### *A reálstruktúra*

A modellben háromféle technológiai együttható mátrix szerepel.

$A(t)$ = a *folyó ráfordítási együtthatók* $n \times n$-es mátrixa. A statikus és dinamikus Leontief modellekből jól ismert $A$ mátrixnak felel meg.

$B(t)$ = a *technikai eszközlekötési együtthatók* $n \times n$-es mátrixa. Ez alapjában véve a dinamikus Leontief modell $B$ mátrixának felel meg, egy lényeges eltéréssel. Ez csupán *a termeléshez technikailag elengedhetetlenül szükséges* eszközlekötést adja meg. Ha tehát pl. a 8. szektor az áramfejlesztő generátorok előállítója és a 2. szektor a villamosenergia-termelés, akkor $b_{8,2}$ az egységnyi villamosenergia előállításában közvetlenül résztvevő generátorok mennyiségét fejezi ki, *tartalék* generátorok *nélkül*. Ennek megfelelően $v_{ij}(t) = b_{ij}(t)r_j(t) + s_{ij}(t)$, vagyis az összes inputkészlet két fő részből tevődik össze: a $b_{ij}(t)\, r_j(t)$ *technikai inputkészletből* és az $s_{ij}(t)$ *slack inputkészletből*.

$C(t)$ = *a selejtezéssel csökkentett technikai eszközlekötési együtthatók* $n \times n$-es mátrixa. Exogén módon adva van a termelésben technikailag lekötött eszközök egy periódus alatti kiselejtezési hányada, $\gamma_{ij}(t)$. $0 \leq \gamma_{ij}(t) < 1$. Eszerint $c_{ij}(t) = [1 - \gamma_{ij}(t)]b_{ij}(t)$.

A három együttható mátrix együttesét, az $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ együttest a rendszer *reálstruktúrájának* nevezzük.

[2] Főbb jelölési elveink a következők:
*Mátrixot* latin nagybetűvel jelölünk; a mátrix elemeit ugyanazon betű kisbetűs alakjával és kettős indexszel jelöljük. *Vektort* latin kisbetű jelöl, komponenseit ugyanaz a kisbetű, egy indexszel. A transzpozíció jele a szimbólum mellett $'$. *Diagonál mátrixot* a főátló vektorának $\langle\,\rangle$-ba foglalása jelzi. Két vektor, ill. mátrix logikai (elemenkénti) szorzatát $\times$-val jelöljük, a köztük levő egyenlőtlenséget $\geq$ ill. $\geq$-vel jelöljük, ahol az előbbi nem zárja ki, hogy minden elempár egyenlő legyen, az utóbbi kizárja.

[3] A „slack" elnevezés arra utal, hogy itt erőforrások kihasználatlan részéről van szó. A „slack" szó semleges jellegű, értékítéletet nem tartalmaz. Magában foglalja a véletlen zavarok ellensúlyozására tudatosan kialakított *tartalékot* és a *felesleget*, az ésszerű gazdálkodás szempontjából indokolatlan rezíduumot.

### *A termékmérleg*

A modell reálszférájának működését könnyebben megértjük, ha skaláris jelöléssel áttekintjük az $i$-edik szektor termékmérlegét a $t$-edik periódusban.

$$\begin{aligned} r_i(t) = & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, r_j(t) + \\ & + w_i(t+1) - w_i(t) + \\ & + \sum_{j=1}^{n} [b_{ij}(t+1)\, r_j(t+1) - c_{ij}(t)\, r_j(t)] + \\ & + \sum_{j=1}^{n} [s_{ij}(t+1) - s_{ij}(t)]. \end{aligned}$$

A termelést négyféle célra használjuk fel. (Az értelmezés egyszerűsítésére tegyük fel, hogy mind a termelés, mind a készletek nőnek.)
*Első sor*: a termelés folyó ráfordítása.
*Második sor*: az outputkészletek növeléséhez szükséges felhalmozás.
*Harmadik sor*: a technikai inputkészletek növeléséhez szükséges felhalmozás. Ez magában foglalja egyrészt a kiselejtezett eszközök pótlását $[b_{ij}(t) - c_{ij}(t)]\, r_j(t)$-t, másrészt a termelés növekedésével együttjáró többlet eszközlekötés fedezetét.
*Negyedik sor*: a slack input készlet növeléséhez szükséges felhalmozás.

A gazdaság outputkészleteinek és slack inputkészleteinek együttesét *ütközőkészletnek* nevezzük. A gazdaság ideális körülmények között – tökéletesen súrlódás- és zavarmentes működés esetén – funkcionálhatna kizárólag a technikai inputkészletek segítségével, ütközőkészletek nélkül is.

### *A reálszférára vonatkozó feltevések*

Foglaljuk össze a reálszférára vonatkozó feltevéseket.

*R*. 1. *Zárt Leontief gazdaság*. Egy terméket egyetlen szektor állít elő, s megfordítva, minden szektornak csak egyféle kibocsátása van. Nincsen inputok közti helyettesítés, nincs választás alternatív technológiák között. Nincsenek ikertermékek. Nincsenek külső erőforrások. Nincsen végső fogyasztás. A gazdaság ,,munkaerőszektorainak" fogyasztása inputként, munkája pedig outputként jelentkezik, s ezért a modellben nincsenek megkülönböztetve a többi, ,,közönséges" szektortól. A gazdaság irreducibilis.

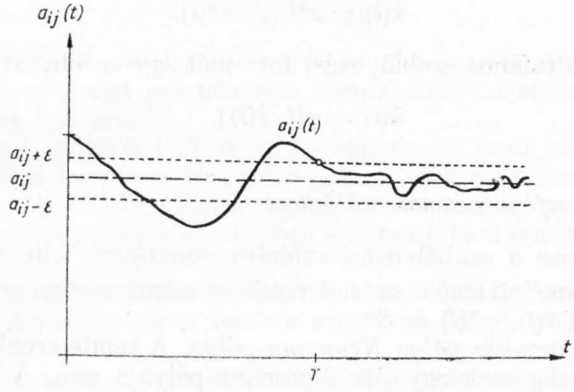
*R*. 2. *Homogén lineáris ráfordítási függvények*. A termelés folyó ráfordítása és technikailag szükséges eszközlekötése a termelés volumenének homogén lineáris függvénye.

*R*. 3. *Exogén selejtezési hányadok*. A termeléshez technikailag lekötött eszközök periódusonkénti selejtezési hányada exogén módon meghatározott.

*R*. 4. *A rendszer produktivitása*. A rendszer képes növekedni. A folyó ráfordítások felett többlet marad a készlet (outputkészletek, technikai és slack inputkészletek) feltöltésére és növelésére. Másszóval az $A(t) + B(t) - C(t)$ mátrix spektrálrádiusza kisebb 1-nél: $\sigma\{A(t) + B(t) - C(t)\} < 1$.

*R*. 5. *N*. *A reálstruktúra az időben állandó*. A reálstruktúra együttható mátrixai az időben változatlanok: $A(t) = A$, $B(t) = B$, $C(t) = C$.

*R. 5. A. A reálstruktúra aszimptotikus.* A reálstruktúra együtthatómátrixai véges idő után nagyon közel jutnak egy *alapstruktúrához.* Létezik egy $\varepsilon > 0$ (megfelelően kicsi) szám és egy $T$ (nagy) természetes szám, amelyekre nézve teljesül a következő összefüggés: ha $t > T$, akkor $||A(t) - A|| < \varepsilon$, $||B(t) - B|| < \varepsilon$, $||C(t) - C|| < \varepsilon$, ahol $||\cdot||$ valamilyen mátrixnormát jelöl. (Pl. az elemek abszolút értékének összege). Ábránk az $a_{ij}(t)$ együttható példáján szemlélteti az $\varepsilon$-aszimptotikus tulajdonságot.




*1. ábra*

*A norma szerinti szabályozás*

A reálszféra ismertetése után a szabályozási szféra leírására áttérve mindenekelőtt a *norma szerinti szabályozás* alapgondolatát fejtjük ki.

Feltételezzük, hogy a gazdaság döntéshozó egységei — modellünkben a szektorok — számára adva vannak *normák*, amelyek viselkedésük iránytűjeként szolgálnak. Dinamikus rendszerben a normák esetleg *normatív pályák* formájában jelennek meg, Olyan pályák ezek, amelyek a rendszer mozgásának normatív irányát jelzik.

A normák történelmi-társadalmi folyamatok eredményeképpen alakulnak ki, s konvenciók rögzítik. Dolgozatunkban nem foglalkozunk a normák *keletkezésével*; ezt majd más munkákban vizsgáljuk. Itt egyszerűen *adottnak* vesszük őket.

E dolgozatban a normák meghatározott módon *kiszámíthatók.* Ez azonban csupán egy elemzési „fogás", amely a rendszer elméleti vizsgálatát hivatott elősegíteni. Nincs összekapcsolva olyasféle institucionális feltételezéssel, mintha a valóságban bárki „kiszámítaná" a rendszer normáit. A való életben e normákat anonim társadalmi processzusok tapogatódzva alakítják ki.

Ha mármost adva vannak a normák (illetve a normatív pályák), akkor a döntéshozók megfigyelik az állapotváltozók tényleges és norma szerinti értékei közti eltérést. Ennek ismeretében az eltérést az irányítási változóknál ellensúlyozva avatkoznak be és terelik vissza a rendszert a normák felé. A norma szerinti szabályozás a *negatív visszacsatolás* elve szerint megy végbe, a következő általános *szabályozási formula* alapján:

$u(t) - u^*(t) = \varphi[t, x(t) - x^*(t)]$, $\varphi(t, 0) = 0$, $\varphi(t, \hat{x})$ monoton csökken $\hat{x}$-ben, ahol $u(t)$ a rendszer *szabályozási változója*, $x(t)$ pedig a rendszer *állapotváltozója.* A csillag különbözteti meg a változó norma szerinti értékét a csillag nélküli tényleges értéktől. A $\varphi$ függés formáját természetesen minden konkrét modellben specifikálni kell.

Modellünkben az $r(t)$ termelés és az $Y(t)$ vétel a szabályozási változók, a $w(t)$ outputkészlet és az $S(t)$ slack input készlet az állapotváltozók.

Bevezetünk egy rövidített jelölésmódot is:

$$\hat{u}(t) = u(t) - u^*(t),$$
$$\hat{x}(t) = x(t) - x^*(t).$$

Eszerint az általános szabályozási formulát így is felírhatjuk:

$$\hat{u}(t) = \varphi[t, \hat{x}(t)].$$

*A szabályozási szférára vonatkozó feltevések*

Foglaljuk össze a szabályozási szférára vonatkozó feltevéseket.

*C.* 1. *Norma szerinti szabályozás.* A rendszer számára adva vannak a normatív pályák: $r^*(t)$, $Y^*(t)$, $w^*(t)$ és $S^*(t)$.

*C.* 2. *N. A normatív pálya Neumann-pálya.* A rendszernek van Neumann-pályája, mégpedig csak egyetlen Neumann-pályája van. A Neumann-pályát következőképpen jelöljük:

$$\bar{r}(t) = r_0\lambda_0^t$$
$$\bar{Y}(t) = Y_0\lambda_0^t$$
$$\bar{w}(t) = w_0\lambda_0^t$$
$$\bar{S}(t) = S_0\lambda_0^t,$$

ahol $\lambda_0$ a rendszer Neumann *növekedési együtthatója*[4]: $\lambda_0 > 1$.

A feltevés értelmében a Neumann-pálya szolgál normatív pályaként, azaz:

$$r^*(t) = \bar{r}(t)$$
$$Y^*(t) = \bar{Y}(t)$$
$$w^*(t) = \bar{w}(t)$$
$$S^*(t) = \bar{S}(t).$$

Jelöljük a slack inputkészlet per termelés normáinak mátrixát $F$-fel, az outputkészlet per termelés normáinak mátrixát pedig $\langle g \rangle$-vel: $\bar{S}(t) = F\langle \bar{r}(t) \rangle$ és $\bar{w}(t) = \langle g \rangle \bar{r}(t)$. Jelöljük $H$-val az ütközőkészlet normáinak mátrixát: $H = F + \langle g \rangle$.

*C.* 2. *A. A normatív pálya aszimptotikus pálya.* Adott záró reálstruktúra mellett létezik egy aszimptotikus pálya, amelyet következőképpen jelölünk: $\tilde{r}(t)$, $\tilde{Y}(t)$, $\tilde{w}(t)$ és $\tilde{S}(t)$. Az aszimptotikus pályán

$$|\tilde{r}_i(t) - \bar{r}_i(t)/\bar{r}_i(t)| < \varepsilon, \text{ ha } t > T.$$

[4] $\lambda_0$ meghatározását lásd az 1. megállapításban.

Hasonló tulajdonsága van $\tilde{y}_{ij}(t)$-nek, $\tilde{w}_i(t)$-nek és $\tilde{S}_{ij}(t)$-nek is. A feltevés értelmében az aszimptotikus pálya szolgál normatív pályaként, azaz:

$$r^*(t) = \tilde{r}(t)$$

$$Y^*(t) = \tilde{Y}(t)$$

$$w^*(t) = \tilde{w}(t)$$

$$S^*(t) = \tilde{S}(t).$$

Az aszimptotikus gazdaságban az $F(t)$ készlet per termelés norma-mátrixa és a $\langle g(t) \rangle$ outputkészlet per termelés norma-mátrix $\varepsilon$-aszimptotikusan konvergál $F$-hez és $\langle g \rangle$-hez.

Megjegyzés a C. 2. N. és C. 2. A. feltevésekhez. Itt most *feltevésnek* tekintjük a Neumann-pálya (egyetlen Neumann-pálya), illetve az aszimptotikus pálya egzisztenciáját. A *megállapítások* tárgyalásakor térünk majd vissza annak tisztázására, hogy e feltevés mennyiben kompetibilis a reálszférára vonatkozó feltevésekkel.

*C. 3. A döntés decentralizálása.* Adott normák mellett a döntés tökéletesen decentralizált. A $j$-edik szektor határoz az $r_j$ termelésről, valamint minden $i$-re az $y_{ij}$ vételről.

*C. 4. Nincs memória.* A decentralizált szabályozás nem vesz igénybe memóriát; nem használja fel bemenő információként a változóknak korábbi periódusokban felvett értékeit.

*C. 5. Az információ decentralizálása.* Adott normák mellett az információ tökéletesen decentralizált. A $j$-edik szektor a döntéshez kizárólag saját állapotváltozóit figyeli meg. Nevezzük *vegetatív szabályozásnak* azt a szabályozási sémát, amelyben a C. 3. és C. 5. feltevés együttesen érvényesül.

*C. 6. Készletjelzés kizárólagossága.* A C. 5. feltevés úgy realizálódik, hogy a $j$-edik szektor kizárólag saját készleteit figyeli meg: a $w_j$ outputkészletet és az $s_{ij}$ slack inputkészleteket.

*C. 7. A szabályozási formula linearitása.* A szabályozást lineáris formulával biztosítjuk. Általános alakja: $\hat{u}(t) = -\alpha(t)\hat{x}(t)$, ahol $\alpha(t)$ az *alkalmazkodási sebesség.* Az alábbi (2.3) és (2.4) egyenletekben $d(t)$ és $E(t)$ szerepel alkalmazkodási sebességként.

*A modell összefoglalása*

Dinamikus rendszerünket a következő négy egyenlet-együttessel írjuk le:

*Outputkészlet*

$$w(t+1) = w(t) - Y(t)\,\mathbf{1} + r(t). \tag{2.1}$$

*Slack inputkészlet*

$$S(t+1) = S(t) - B(t+1)\,\langle r(t+1) \rangle - [A(t) - C(t)]\langle r(t) \rangle + Y(t). \tag{2.2}$$

*A termelés szabályozása*

$$r(t) = r^*(t) - \langle d(t) \rangle\,[w(t) - w^*(t)]. \tag{2.3}$$

*A vétel szabályozása*

$$Y(t) = Y^*(t) - E(t) \otimes [S(t) - S^*(t)]. \tag{2.4}$$

Végeredményben $2n + 2n^2$ egyenletünk van.

(2.1)–(2.2) adja meg a rendszer *mozgásegyenleteit* és (2.3)–(2.4) a rendszer *szabályozását*. Előbbiek a $t$-edik periódus szabályozási és állapotváltozóival vezetik le a $(t+1)$-edik periódus új állapotváltozóit. Utóbbiak pedig az állapotváltozók tényleges és norma szerinti értékének eltéréséből vezetik le a szabályozási változók eltérítését azok norma szerinti értékéből.

A valódi számítási sorrend ettől eltérő: (2.1), (2.3), (2.2) és (2.4), és a szabályozás a $(t+1)$-edik periódusra vonatkozik.

## 3. Megállapítások

Az alábbiakban megállapításokat ismertetünk, rövid közgazdasági értelmezésükkel együtt. A megállapítások matematikai bizonyítását a Függelék közli.

1. *N. MEGÁLLAPÍTÁS. Normatív pálya létezése.* Neumann-pálya létezik és egyértelműen meghatározott.

A $\lambda_0(B + H)r_0 = (I - A + C + H)r_0$, $1'r_0 = 1$ sajátérték – sajátvektor probléma megoldásával egyértelműen megkapjuk az $r_0 > 0$ pozitív termelést és a $\lambda_0 > 1$ növekedési együtthatót.

Ezek ismeretében az $F$ és $\langle g \rangle$ mátrixokon keresztül kiszámítható a $\overline{w}(t)$ outputkészlet, az $\overline{S}(t)$ biztonsági inputkészlet és 2.4 egyenletből az $\overline{Y}(t)$ vétel Neumann-pályája.

1. *A. MEGÁLLAPÍTÁS. Normatív pálya létezése.* Aszimptotikus pályák sávja létezik. Mindegyik aszimptotikus pályán valamennyi változó növekedési együtthatója $\varepsilon$-közelségben van az alapstruktúrához tartozó Neumann-pálya megfelelő növekedési együtthatójához.

Az 1. N. megállapítással tulajdonképpen azt mondjuk ki, hogy a Neumann-gazdaságra nézve az R. 1.—R. 4., valamint az R. 5. N. és a C.1., C. 2. N., valamint a C. 3.–C. 7. feltevések kompatibilisek egymással. Hasonlóan értelmezhető az 1. A. megállapítás az aszimptotikus gazdaságra vonatkozó feltevések összhangjára. Ezenfelül a Neumann-gazdaság esetére megkaptuk a normatív pálya egyértelmű kiszámításának módját is. Ez kiindulásul szolgál az aszimptotikus pálya kiszámításához is.

2. *N. MEGÁLLAPÍTÁS. Ütközőkészlet és növekedési ütem.* Hasonlítsuk össze az 1. és 2. gazdaságot, amely tökéletesen azonos, kivéve ütközőkészleteinek normáit: $h_{ij}^{(1)} \geq h_{ij}^{(2)}$ minden $i$-re, s legalább egy komponens határozottan nagyobb az 1. gazdaságban, mint a 2.-ban. Ebben az esetben az 1. gazdaság növekedési együtthatója kisebb mint a 2.-é: $\lambda_0^{(1)} < \lambda_0^{(2)}$.

A megállapítással azt mondjuk ki, hogy determinisztikus modellünk világában az ütközőkészletnormák növelése lassítja a gazdaság növekedését. A valóságos életben az ütközőkészletnormák növelésének előnyei is vannak: segíti a termelés váratlan zavarainak leküzdését, simábbá teszi az alkalmaz-

[5] A 2.N. megállapítás — megfelelő megszorítás mellett — kiterjeszthető az aszimptotikus gazdaságra is; erre azonban cikkünkben nem térünk ki.

kodást stb. Ezeket az előnyöket azonban a jelen dolgozatban nem tudjuk igazolni.

A továbbiakban a stabilitás és a relatív stabilitás kérdését párhuzamosan tárgyaljuk. Ilyenkor a *relatív* jelző szögletes zárójelben szerepel.

*Definíció.* A Neumann-gazdaság, ill. az aszimptotikus gazdaság [*relatíve*] *stabil,* ha tetszőleges helyzetből kiindulva, a változók egy-egy periódusra vonatkozó értékei[nek páronkénti arányai] konvergálnak (ill. $\varepsilon$-közelségekbe kerülnek) a normatív pálya [szerinti páronkénti arányok]hoz.

3. *MEGÁLLAPÍTÁS.* [*Relatív*] *stabilitás.* A (2.1—4) egyenletekben leírt szabályozás mellett a rendszer [relatíve] stabil. A [relatív] stabilitás elégséges feltétele: $0 \leq d_j < 1$ és $d_j < \min\{(a_{ij} + b_{ij} - c_{ij})/b_{ij}$ minden $i$-re, ha $b_{ij} > 0\}$ és $0 \leq e_{ij} \leq 1$, minden $(i, j)$ párra: $1 \leq i, j \leq n$.

A relatív stabilitás egyaránt érvényes mind a Neumann-gazdaságra, mind az aszimptotikus gazdaságra, a stabilitás viszont csak az előbbire.

*Definíció.* A rendszer *működőképes,* ha egyetlen változója sem negatív, s minden periódusban legalább egy termelési változója pozitív. *Működőképes indulási környezetnek* nevezzük a normatív pálya szerinti indulásnak azt a környezetét, amelynek tetszőleges pontjából elindulva a rendszer minden periódusban működőképes.

4. *MEGÁLLAPÍTÁS. Működőképesség.* Minden [relatíve] stabil gazdaságban van működőképes környezet. Speciális esetekre van konstruktív módszer a működőképes környezet meghatározására.

A megállapítás érvényes mind a Neumann-gazdaságra, mind az aszimptotikus gazdaságra. A Neumann-gazdaságra vonatkozóan egyszerű konstruktív módszerünk van a működőképes környezet kiszámítására.

A 3. és 4. megállapítás együttes interpretációja a következő:

Meghatározott feltételek mellett a dolgozatunkban leírt szabályozás működőképes, s alkalmas arra, hogy [relatív] stabilitást biztosítson.

## 4. A megállapítások közgazdasági értelmezéséhez

*Elemi mennyiségi alkalmazkodás*

A jelen dolgozatban leírt modell, akárcsak elődei, a Kornai—Martos modell és Dancs—Hunyadi—Sivák, valamint Virág modelljei, nem lépnek fel azzal az igénnyel, hogy a gazdaság szabályozásának *általános* modelljei legyenek. *A gazdasági rendszerek szabályozása összetett feladat, amelyet különböző szabályozási mechanizmusok és almechanizmusok komplexusa együttesen lát el.* E szabályozási mechanizmusok egyrésze primitív rövidlejáratú mennyiségi alkalmazkodási folyamatokat irányít, mégpedig igen egyszerű decentralizált döntési és információs struktúra mellett. A Kornai—Martos cikk a szabályozásnak ezt a típusát „autonom" vagy „vegetatív" szabályozásnak nevezte: jelen dolgozatunk a még általánosabb „elemi" jelzőt használja. Dolgozatunk kizárólag az ilyen „elemi", „primitív", „autonóm", „vegetatív" szabályozási mechanizmusok elemzéséhez kívánt hozzájárulni.

Ugyanakkor minden gazdaságban működnek *magasabbrendű* mechanizmusok is, bonyolultabb szabályozási feladatkörök ellátására. Ilyen bonyolult feladatok például a termelés és a fogyasztás minőségi fejlődése, új termékek bevezetése; különböző erőforrások takarékos kombinációja és ezzel együtt az alternatív technológiák közti választás; a felhalmozás méreteinek eldöntése; a hosszúlejáratú alkalmazkodás a tartós változásokhoz és így tovább. Ezeknek a bonyolultabb szabályozási funkcióknak az ellátására a jelen dolgozatban leírt mechanizmus nyilván nem alkalmas.

*A Neumann-gazdaság szabályozása*

Megállapításaink részben azokon a feltevéseken alapulnak, amelyek szerint a gazdaság reálstruktúrája állandó és a normatív pálya Neumann-pálya. E feltevések rendkívül erősek, eléggé távol állnak a valóságtól. A szerzők nem tagadják, hogy fogcsikorgatva kényszerültek a kutatásnak ebben a stádiumában a e feltevések alkalmazására. Az igazság azonban az, hogy ha már elfogadtuk a dinamikus Leontief modell szokványos absztrakcióit, akkor a modellezés logikája jóformán methetetlenül visz a Neumann-gazdaság világába. Önmenyugtatásképpen a következőket érdemes meggondolni:

A Neumann-pálya szinte elviselhetetlenül „rossz" modellje a gazdasági rendszernek, ha a reálszféra tervezésére kívánjuk felhasználni. Akkor ugyanis már a feltevések révén elzárkózunk a tervezési probléma lényegétől, a szektorok arányainak és a technológiának a megválasztásától. Sokkal kevésbé „rossz" a modell a mi céljainkra: a szabályozási mechanizmus — mégpedig az elemi mennyiségű alkalmazkodást vezérlő mechanizmuselméleti elemzésére.

Nemcsak a mi modellünkben, hanem a valóságban is hajlamosak a döntéshozók a rutinszerű mennyiségi alkalmazkodásban olyasféle egyszerű recepteket, hüvelykujjszabályokat alkalmazni, amelyek nem veszik számításba a távolabbi gazdasági környezet strukturális eltolódásait, hanem csupán a közvetlenül megfigyelhető jelzésekre reagálnak.

A Neumann-gazdaságnak a jelen dolgozatban leírt elemi mennyiségi alkalmazkodása olyan készletnormák segítségével történik, amelyek hasonlítanak a valóságos gazdaságban megfigyelhető készletnormák alakjára: outputkészlet per output hányados vagy inputkészlet per vétel hányados formában rögzítjük a normákat. („Hány havi termelésnek vagy beszerzésnek felel meg a készlet . . .") A normáknak ezt az egyszerű formáját eddig csupán a Neumann-gazdaságra sikerült kidolgoznunk.

Igaz, ez az elemi szabályozási mechanizmus helytelen döntésekhez vezethet, ha számottevő minőségi változások, arányeltolódások következnek be a végső erőforrások és a végső fogyasztás összetételében, valamint a technológiában. Ilyenkor eljutunk a dolgozatunkban leírt elemi szabályozás *határaihoz.* Egyrészt: működésbe kell lépniök más, magasabbrendű szabályozóknak is. Másrészt: esetleg meg kell változtatni az eddig érvényben volt normákat. Úgy érezzük azonban, hogy ez nem hibája a modellnek. Mi nem egy mindenféle szabályozási funkció ellátására egyaránt alkalmas *univerzális* mechanizmust kívántunk bemutatni, hanem egy speciálisat, amely néhány elemi szabályozási funkciót képes ellátni — s természetesnek tartjuk, hogy időről-időre felül kell vizsgálni a benne szereplő szabályozási paramétereket, a normákat és az alkalmazkodási sebességeket.

*Az aszimptotikus gazdaság szabályozása*

Az aszimptotikus gazdaságra vonatkozó feltevések kevésbé erősek, mint az előző szakaszban tárgyaltak. Az aszimptotikus gazdaság is absztrakció — de a valósághoz közelebbálló absztrakció. Azokat a technológiai változásokat, arány-eltolódásokat, amelyek — tartós trendjüket tekintve — valamilyen határozott monoton szabályosságot mutatnak, jó közelítéssel leírhatjuk úgy, mint valami közeledést egy alapstruktúrához. Ha pl. az energiahordozóknál monoton tendencia van a nukleáris energia részarányának növelésére, akkor ez leírható úgy, mintha közelednénk egy arányhoz a nukleáris és a konvencionális energiahordozók között.[6]

## 5. Összehasonlítás más modellekkel

Amint azt a bevezetőben említettük, dolgozatunk három irányzat kereszteződéséből született: a gazdasági szabályozási mechanizmusok modellezéséből, a Leontief—Neumann-modellek irodalmából és a matematikai szabályozáselmélet közgazdasági alkalmazásából. Túl messzire vezetne, ha mindhárom irányzatnak akárcsak a fő modelljeivel összehasonlításokat tennénk. Ezért a kört lényegesen leszűkítjük. Kizárólag azokkal a modellekkel foglalkozunk, amelyek *dinamikus gazdasági rendszerek szabályozási mechanizmusát* vizsgálják. (Meglepő, hogy aránylag milyen kevés modell sorolható ebbe a kategóriába.)

Az összehasonlítást táblázatos formában végezzük el. Az oszlopok a különböző modellek szerint, a sorok pedig a modellek ismérvei szerint tagolódnak.

| | Kornai Martos [15, 16] | Virág [32] | Dancs Hunyadi [8] Sivák | Bródy [5] | Lovell [21] | Mc Fadden [22] | Kornai Simonovits |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 Determinisztikus<br>1 Sztochasztikus | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 Folytonos idő<br>1 Diszkrét | 0 | 0 | 0 és 1 | 0 és 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 Eszközlekötés nincs<br>1 van | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 Állandó struktúra<br>1 Változó | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 és 1 |
| 0 Stagnáló<br>1 Növekvő | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 Centralizált<br>1 Decentralizált | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 Memória van<br>1 nincs | 0 | 0 | 0 | 0 és 1 | 0 | 1 | 1 |

Noha a táblázat önmagáért beszél, néhány kiegészítő megjegyzést fűzünk hozzá.

— A táblázat 1., 2., 3., 4. és 7. oszlopában olyan modellek szerepelnek, amelyek szoros rokonságban állnak: valamennyi a Kornai—Martos tanulmányhoz kapcsolódik. Ezért aránylag könnyen összehasonlíthatók. Lovell és

[6] Hosszú történeti fejlődésben a szén részaránya először nőtt a fa kiszorítása idején, majd csökkent az olaj és földgáz előrenyomulásának hatására, s most talán ismét nőni fog, legalább átmenetileg, az olaj és földgáz drágulása nyomán. Az ilyen nem-monoton arányeltolódás nem írható le megfelelően az aszimptotikus feltevés segítségével.

Mc Fadden tanulmányai némileg eltérő kérdésfeltevésekből indulnak ki. Ezért e két modellt először adaptáltuk az általunk vizsgált problémára, s csak ezután hasonlítottuk össze a többivel.

— Eddig mindössze egyetlen kísérlet történt a probléma sztochasztikus kezelésére, Virág cikkében. Az egyik legfontosabb feladat a kutatás kiterjesztése ebben az irányban.

— A Kornai—Martos cikk (s ennek nyomán Virág, valamint Dancs—Ligeti—Sivák cikke) nem kötötte magát az időben állandó reálstruktúrához, hanem megengedte a reálstruktúra tetszőleges változását az időben. A jelen dolgozat egyfelől erősebb feltevést alkalmaz, amikor időben állandó vagy aszimptotikus reálstruktúrából indul ki. Viszont ennek ellentételeként van egy érdeme: a Neumann-gazdaság esetében a normarendszer igen egyszerű — a valóságos készletnormákhoz hasonló — alakot ölt (készlet a termelés, illetve a vétel fix arányában).

— A Kornai—Martos cikk folytonos változóként kezelte az időt, s nem írt le késleltetést. A Dancs—Hunyadi—Sivák modell, valamint a jelen dolgozat diszkrét változóként kezeli az időt, ami pl. azzal az előnnyel jár, hogy a rendszer számológépen közvetlenül szimulálható. Az egyik lényeges eltérés Dancs—Hunyadi—Sivák és a jelen modell között, hogy előbbiben a szabályozási változók csak centralizált információ alapján számíthatók ki, míg az utóbbiban a rendszer információs szempontból is decentralizált. Az előbbi nem vegetatív szabályozás, az utóbbi igen.

— A felsorolt tanulmányok közül a jelenlegi az első, amely tiszta készletjelzést modellez. A Kornai—Martos tanulmányban, s a hozzája kapcsolódó többi munkában a készleten kívül az eladás is a jelzések között szerepel.

— Nincs mód a „centralizált" és a „decentralizált" szabályozási sémák egyszerű szembeállítására, hiszen ez egyebek között attól is függ, miképpen jönnek létre a normák. (Vajon nem valamilyen centralizált folyamat határozza-e meg őket?) Ezért az összehasonlításban az 1-es jelet odatesszük, ahol — adott normák birtokában — szigorúan decentralizált mind a döntés, mind a döntés alapjául szolgáló információ.

Befejezésül hangsúlyozni szeretnénk: a táblázat jelzi a kutatások további irányát is. Arra törekszünk, hogy minden ismérv szempontjából kipróbáljuk mind a 0-val, mind az 1-gyel jelölt esetet. Emellett szeretnénk vizsgálatunkat kiterjeszteni olyan irányokba is, amelyeket a táblázat nem jelez: pl. beiktatni szűkös elsődleges erőforrásokat és egymást helyettesítő technológiákat.

## Függelék: A megállapítások matematikai bizonyítása

1\. *N. Megállapítás bizonyítása*:

Ha létezik N-pálya, akkor a termékmérlegbe behelyettesítve C. 2. N. összefüggéseit és $\lambda_0$-vel egyszerűsítve, a következő egyenletet kapjuk:

$$r_0 = Ar_0 + (\lambda_0 - 1)\langle g\rangle r_0 + (\lambda_0 B - C)r_0 + (\lambda_0 - 1)Fr_0 \tag{6.1}$$

ami átrendezés után az 1. N. Megállapítás-ban szereplő sajátérték — sajátvektor feladathoz vezet.

Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy egy és csak egy $r_0 > 0$ vektor elégíti ki a feladatot $1'r_0 = 1$ normálás mellett. Ezt bizonyítandó, térjünk vissza az előbb felírt (6.1) fixpont-feladathoz. $\lambda_0 > 1$ miatt és $\mathrm{B} \geq \mathrm{C}$ miatt a fixpont feladat jobboldalán szereplő mátrix pozitív és minden eleme folytonosan nő $\lambda_0$ növekedésével. A pozitív mátrixok elméletében (vö. pl. Morishima [25] és Bródy [4]). ismert a következő

*I. Lemma*: Ha $U_1$; $U_2$ $n \times n$ dimenziós, nem negatív elemű, irreducibilis mátrixok, amelyekre $U_1 \geq U_2$, akkor $\sigma(U_1) > \sigma(U_2)$.

Ekkor a megfelelő mátrix spektrálsugara is folytonosan nő. $\lambda_0 = 1$ esetén a spektrálsugár $= \sigma(A + B - C)$, ami az R. 4. feltevés szerint kisebb, mint 1. Másrészt a szóbanforgó mátrix nagyobb $(\lambda_0 - 1)H$-nál, vagyis spektrálsugara is nagyobb mint $(\lambda_0 - 1)\sigma(H)$. Mivel az utóbbi mennyiség $+\infty$-ben vett határértéke $+\infty$, ugyanez áll az előbbi határértékrée. Bolzanó tétele szerint ekkor létezik egy és csak egy $\lambda_0$, amely az $(1, +\infty)$ intervallumba esik és kielégíti fixpont feladatunkat, mégpedig pozitív $r_0$-lal, amely $1'r_0 = 1$ normálással szintén egyértelműen meghatározott.

$r_0$ egyértelműen meghatározza $w_0$-t és $S_0$-t C. 2. N. szerint, és ekkor $Y_0$ is egyértelműen meghatározott (2.2) miatt:

$$Y_0 = (\lambda_0 - 1) S_0 + (A + \lambda_0 B - C)\langle r_0 \rangle > \mathbf{0}.$$

1. *A. Megállapítás bizonyítása*:

Az R.1.—R.4. feltevéseket kielégítő reálstruktúra esetén létezik megengedett pályák sávja. Tegyük föl, hogy $[w^*(t), V^*(t)]$ adott. Ekkor minden olyan $[w^*(t+1), V^*(t+1)]$ állapot pozitív $[r^*(t), Y^*(t)]$ döntéssel elérhető, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:

$$w^*(t+1) \geq w^*(t) \text{ és } V^*(t+1) \geq V^*(t), \tag{6.2}$$

valamint

$$\mathrm{B}(t)\,\langle[I - A(t) - B(t) + C(t)]^{-1}[w^*(t+1) - w^*(t) + V^*(t+1)\,1 - \\ - V^*(t)1]\rangle \leq V^*(r)\,. \tag{6.3}$$

Ugyanis ha a termékmérlegben $S(t)$ helyett $V(t)$ szerepel, akkor
$r^*(t) = A(t)r^*(t) + w^*(t+1) - w^*(t) + V^*(t+1)1 - V^*(t)1 + [B(t) - C(t)]r^*(t)$
összefüggéshez jutunk. R.4 és (6.2) miatt utolsó összefüggésünkből $r^*(t)$ egyértelműen meghatározható és pozitív, (2.2)-ből $Y^*(t)$ is egyértelmű és pozitív. $S^*(t)$ pozitivitását éppen (6.3) fejezi ki, és az így adódó $[w^*(t+1), V^*(t+1)]$ vektorok halmaza nem üres, szintén R.4. miatt.

A rendszer aszimptotikus növekedési együtthatóját csak $\varepsilon$-pontossággal definiáljuk és csak akkor definiáljuk, ha az egyes változók növekedési együtt hatói $4\varepsilon\lambda_0$-nál közelebb vannak egymáshoz, ha $t > T$. Jelölje $z_\mu$ a rendszer $\mu$-edik koordinátáját, $1 \leq \mu \leq 2(n^2 + n)$.Azaz

$$|\tilde{z}_\mu(t+1)/\tilde{z}_\mu(t) - \tilde{z}_\nu(t+1)/z_\nu(t)| < 4\varepsilon\lambda_0 \text{ ha } t > T\,.$$

Az aszimptotikus és a Neumann pálya definíciója miatt

$$(1 - \varepsilon)\,\bar{z}_\mu(t) < \tilde{z}_\mu(t) < (1 + \varepsilon)\,\bar{z}_\mu(t) \text{ és}$$
$$(1 - \varepsilon)\,\bar{z}_\mu(t)\,\lambda_0 < \tilde{z}(t+1) < (1 + \varepsilon)\,\bar{z}_\mu(t)\,\lambda_0.$$

A két egyenlőtlenség pár összevetéséből közvetlenül adódik, hogy

$$(1 - 2\varepsilon)\lambda_0 < \frac{\tilde{z}_\mu(t+1)}{\tilde{z}_\mu(t)} < (1 + 2\varepsilon)\lambda_0 ,$$

ahonnan az állítás már adódik.

2. *N. Megállapítás bizonyítása*:

(6.1) fixpont-feladatunkban $H = \langle g \rangle + F$. Ha $H^{(1)} \geq H^{(2)}$, akkor az I. Lemma szerint

$$\sigma\{A + \lambda_0 B - C + (\lambda_0 - 1)H^{(1)}\} > \sigma\{A + \lambda_0 B - C + (\lambda_0 - 1)H^{(2)}\}$$

minden $\lambda_0 > 1$-re. Ezért $\sigma\{A + \lambda_0^{(1)} B - C + (\lambda_0^{(1)} - 1)H^{(2)}\} < 1$. Másrészt $\lim \sigma\{A + \lambda B - C + (\lambda - 1)H^{(2)}\} = +\infty$, azaz ismét Bolzano tétele szerint $\lambda_0^{(2)} > \lambda_0^{(1)}$.

3. *N. és* 3. *A. Megállapítás bizonyítása*:

Mind a relatív stabilitás, mind a működőképesség vizsgálatánál nagy szerepet játszik a következő *monotonitási* tulajdonság:

*II. Lemma*: Ha $0 \leq d_j \leq \min \{(a_{ij} + b_{ij} - c_{ij})/b_{ij}$ minden olyan $i$-re, amelyre $b_{ij} > 0\}$ és $d_j < 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$ és $0 \leq e_{ij} \leq 1$ minden $(i, j)$ párra, akkor $w_0^{(1)}(0) \geq w^{(2)}(0)$ és $S^{(1)}(0) \leq S_0^{(2)}(0)$ maga után vonja a $w^{(1)}(t) > w^{(2)}(t)$ és $S^{(1)}(t) \geq S^{(2)}(t)$ egyenlőtlenségeket $t \pm 1, 2, \ldots$,-re, ahol az (1) és a (2) rendszer strukturája és alkalmazkodási sebességei azonosak, csak induló állapotuk különbözik (1) „javára".

*II. Lemma bizonyítása*:

Helyettesítsük be a Neumann-pályát (2.1)-be; és vonjuk ki az eredetiből: $\hat{w}_j(t+1) = \hat{w}_j(t) - \sum_{k=1}^{n} y_{ik}(t) + \hat{r}(t)$. Helyettesítsük be (2.3)-at új egyenletünkbe:

$$\hat{w}_j(t+1) = (1 - d_j)\,\hat{w}_j(t) + \sum_{k=1}^{n} e_{jk}\hat{s}_{jk}(t) \tag{6.4}$$

(6.4)-hez hasonlóan, de már (6.4)-et is figyelembe véve, adódik

(6.5)

$$\hat{s}_{ij}(t+1) = (1 - e_{ij})\,\hat{s}_{ij}(t) + b_{ij}d_j \sum_{k=1}^{n} e_{jk}\hat{s}_{jk}(t) + d_j[b_{ij}(1 - d_j) + a_{ij} - c_{ij}]\,\hat{w}_j(t)$$

A II. Lemma feltételeiből közvetlenül következik, hogy a $(6.4-5)n^2 + n$ dimenziós iterációs formula együtthatómátrixa nem negatív, amiből az „eltérésrendszer" monotonitása azonnal adódik. Mivel az „eltérésrendszer" a

Neumann-pályával redukált rendszer, az eredeti rendszer is monoton. Az együttható-mátrix irreducibilitásához elég azt bizonyítani, hogy nem-negatív és nullától különböző vektor képe is nem-negatív és nullától különböző. Indirekt úton bizonyítunk: legyen $\hat{w}(t) \geq 0$ és $\hat{S}(t) > 0, \hat{w}(t+1) = 0$ és $S(t+1) = 0$. Ekkor (6.4—5) jobb oldalán szereplő összeadandók is nullák, pl. $e_{jk}\hat{s}_{jk}(t) = 0$, $(1 - e_{jk})\hat{s}_{jk}(t) = 0$, azaz $\hat{s}_{jk}(t) = 0$. Hasonlóan $(1 - d_j)\hat{w}_j(t) = 0$. Vagyis $\hat{w}(t) = 0$ és $\hat{S}(t) = 0$, ellentétben feltevésünkkel.

3. *N. Megállapítás bizonyítása*:

Legyen (6.4 —5) lineáris rendszer alkalmasan normált pozitív domináns megoldása $(\hat{\lambda}, \hat{w}, \hat{S})$, ahol az együtthatómátrix nemnegatív irreducibilis, vagyis Frobenius tétele értelmében van pozitív domináns megoldás és az egyértelmű. A pozitív domináns megoldás segítségével egyszerű *konstruktív* feltételt adhatunk a rendszer relatív stabilitására és működőképességére.

A stabilitást bizonyítandó, be kell látnunk, hogy $\hat{\lambda} < 1$. Mivel (6.4—5) domináns megoldása, $(\hat{\lambda}, \hat{w}, \hat{S})$, az egyetlen pozitív megoldás, elegendő pozitív megoldás létezését bizonyítani, $\hat{\lambda} < 1$ mellett.

Helyettesítsük $(\hat{\lambda}, \hat{w}, \hat{S})$-t (6.4—5)-be. Némi számolás után a következő $n$-dimenziós, nem-lineáris fixpont-feladathoz jutunk:

$$\hat{w}_j = \frac{d_j}{\hat{\lambda} - 1 + d_j} \sum_{k=1}^{n} \frac{e_{jk}}{\hat{\lambda} - 1 + e_{jk}} (a_{jk} + \hat{\lambda} b_{jk} - c_{jk})\, \hat{w}$$

$$\hat{w}_j > 0,\ j = 1, \ldots, n \text{ és } \hat{\lambda} > 0.$$

Segédfeladatként vezessük be a következő sajátérték-sajátvektor feladatot:

$$\sigma_\lambda w_j = \frac{d_j}{\lambda - 1 + d_j} \sum_{k=1}^{n} \frac{e_{jk}}{\lambda - 1 + e_{jk}} (a_{jk} + \lambda b_{jk} - c_{jk})\, w_k$$

$$w_j > 0 \quad j = 1, \ldots, n \quad \text{és} \quad \lambda > 0 \text{ paraméter.}$$

Megemlítjük, hogy $\lambda = \hat{\lambda}$-nál a második feladat az elsőre egyszerűsödik. Legyen $\mu = \max\limits_{j,k} \{(1 - d_j,\ 1 - e_{jk}),\ b_{jk} > 0\}$; $d_j < \min\limits_{k} \dfrac{a_{jk} + b_{jk} - c_{jk}}{b_{jk}}$; $b_{jk} > 0$ miatt $a_{jk} + \mu b_{jk} - c_{jk} > 0$. Ezért ha $\lambda > \mu$, akkor a segédfeladat minden együtthatója nem-negatív és mátrixuk irreducibilis, $\sigma_\lambda$ spektrálsugárral.

Mivel $\lambda = \mu + 0$-nál legalább egy együttható $+\infty$, $\sigma_{\mu+0} = +\infty$, Továbbá $\lambda = 1$-nél $\sigma_1 = \sigma(A + B - C) < 1$. Mivel $\sigma_\lambda$ folytonos, Bolzano-tétel értelmében van olyan $(\hat{\lambda}, \hat{w}, \hat{S})$, amelyre $\sigma_\lambda = 1$ és az első feladat jellege miatt a megoldás pozitív. Természetesen $\hat{\lambda} < 1$.

Mivel az eltérések $\hat{\lambda}$ sebességgel tartanak zérushoz, a relatív eltérések;konvergencia sebessége $\hat{\lambda}/\lambda_0 < \hat{\lambda}$. Ezért az abszolút stabilitásból következik a relatív stabilitás, de fordítva nem.

3. *A. Megállapítás bizonyítása*:

Jól ismert, hogy lineáris differencia-, illetve differenciál-egyenletrendszerekre vonatkozó stabilitási tételek állandó mátrixról könnyen kiterjeszthetők aszimptotikus mátrixokra, mint azt Poincare (vö. *Gelfond* [12]) ill. Perron (vö. *Bellman* [3] II. fejezet, 2. Tétel) igazolta. A két tétel alapján bizonyítás nélkül kimondjuk a következő

*III. Lemmát*: Legyen $z(t+1) = Uz(t)$ állandó együtthatás elsőrendű lineáris differencia-egyenletrendszer stabil, azaz $\sigma(U) < 1$. Ekkor van olyan megfelelően kicsiny $\varepsilon > 0$ és megfelelően nagy természetes szám, $T$, amelyre. vonatkozóan tetszőleges $\{U(t)\}^{\infty}$ mátrixsorozatnál a $\tilde{\tilde{z}}(t) = U(t)\tilde{\tilde{z}}(t)$ egyenletrendszer ugyancsak stabil, feltéve, hogy $\|U(t) - U\| < \varepsilon$ minden $t > T$-re.

Osszuk el az így kapott együttható mátrixot $\lambda_0$-lal, a $t$ időszak vektorát $\lambda_0^t$-vel, a $t+1$-ét pedig $\lambda^{t+1}$-gyel. Azaz volumenek helyett az arányokra térünk, relatív stabilitás helyett rendes stabilitásra. Alkalmazzuk a III. Lemmát az (6.4–5) egyenletrendszer aszimptotikus általánosítására, ekkor $\|d(t) - d\| < \varepsilon$, $\|E(t) - E\| < \varepsilon$, $\|A(t) - A\| < \varepsilon$, $\|B(t) - B\| < \varepsilon$ és $\|C(t) - C\| < \varepsilon$, ha $t > T$.

Válasszuk $\varepsilon$-t olyan kicsire, hogy az aszimptotikus rendszerek arányai legalább $1 - \varepsilon$ sebességgel konvergáljanak. Ekkor pl. $[w_j(t) - \tilde{w}_j(t)]/\lambda_0^{t(1+\varepsilon)} \to 0$, továbbá $\tilde{w}_j(t)/\lambda_0^{t(1+\varepsilon)} \to 0$. Következésképp $[w_j(t) - \tilde{w}_j(t)]/\tilde{w}_j(t) \to 0$, ha $t \to \infty$.

Bonyolultabb a helyzet, ha az aszimptotikus normatív pálya nem megengedett. A lényeg látható tetszőleges nem megengedett Neumann-pálya esetéből is. Ekkor a $\hat{z}(t+1) = U\hat{z}(t) + \hat{v}$ iteráció határértéke $\sigma(U) < 1$ miatt $\hat{z} = (I - U)^{-1}\hat{v}$.

4. *A. Megállapítás bizonyítása*:

Általánosan igaz, hogy [relatíve] stabil differencia-egyenletrendszer esetén, ha az egyensúlyi pálya minden időpontban alulról korlátozott egy időben állandó pozitív vektorral, akkor van olyan indulási környezet, hogy bármelyik belőle induló pálya végig pozitív.

4. *N. Megállapítás bizonyítása*:

A Neumann-gazdaság esetén konstruktív módszert adunk egy bizonyos értelemben maximális kiindulási környezet meghatározására.

Szükségünk lesz az alábbi mennyiségekre:

$$\alpha = \min_{1\le j\le n} \frac{w_j^0}{\hat{w}_j}, \quad \beta = \min_{1\le j\le n} \frac{r_j^0}{d_j \hat{w}_j},$$

$$\gamma = \min_{1\le i,j\le n} \frac{s_{ij}^0}{\hat{s}_{ij}}, \quad \zeta = \min_{1\le i,j\le n} \frac{y_{ij}^0}{e_{ij}\hat{s}_{ij}},$$

$$w^{(m)} = w_0 - \alpha\hat{w}, \; w^{(M)} = w_0 + \beta\hat{w},$$

$$S^{(m)} = S_0 - \gamma\hat{S} \text{ és } S^{(M)} = S_0 + \zeta\hat{S}.$$

*IV. Lemma*: A $w^{(m)} \leqq w(0) \leqq w^{(M)}$ és $S^{(m)} \leqq S(0) \leqq S^M$ egyenlőtlenségekkel definiált indulási környezet nem üres és működőképes. A definíciókban szereplő $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ és $\zeta$ bármelyikének növelése $w^{(m)}$, $w^{(M)}$, $S^{(m)}$ és $S^{(M)}$-ben a működőképesség megszűnését okozza már a kiindulásnál.

*Bizonyítás*:

Térjünk át az ,,eltérés-rendszer''-re. Ekkor kiindulási környezetünk $-\alpha\hat{w} \leqq \leqq \hat{w}(0) \leqq \beta\hat{w}$ és $-\gamma\widehat{S} \leqq \widehat{S}(0) \leqq \zeta\widehat{S}$. A monotonitás miatt $-\alpha\hat{w}\hat{\lambda}^t \leqq \hat{w}(t) \leqq \leqq \beta\hat{w}\hat{\lambda}^t$ és $-\gamma\hat{S}\hat{\lambda}^t \leqq \widehat{S}(t) \leqq \zeta\hat{S}\hat{\lambda}^t$ minden $t$-re. A rendszer relatív stabilitása miatt $\hat{\lambda} < \lambda_0$, továbbá definíció miatt:

$$-w_0 \leqq -\alpha\hat{w},\ \beta\hat{w} \leqq \langle d_j^{-1} \rangle\, r_0, \quad -S_0 \leqq -\gamma S,\ \zeta\widehat{S} \leqq [n_{ij}^{-1}] \otimes Y_0.$$

Következésképpen

$$-w_0\lambda_0^t < \hat{w}(t) < \langle d_j^{-1} \rangle\, r_0\lambda_0^t, \quad -S_0\lambda_0^t < \widehat{S}(t) < [e_{ij}^{-1}] \otimes \gamma_0\lambda_0^t \quad (t > 0)$$

ami (2.3) és (2.4) szerint $-w(t)$ és $S(t)$ pozitivitásán kívül $-r(t)$ és $Y(t)$ pozitivitását is biztosítja $t > 0$-ra.

*(Beérkezett: 1974. december 18.)*

## IRODALOM


1. Aoki, M.: ,,On Feedback Stabilizability of Decentralized Dynamic Systems.'' *Automatica*, 8. (1972). pp. 163—173.
2. Arrow, K. J.—Kurz, M.: *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*. Stanford University, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, 1968.
3. Bellman, R.: *Stability Theory of Differential Equations*. New York—Toronto—London, 1953. McGraw-Hill
4. Bródy A.: *Érték és újratermelés*. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
5. Bródy A.: ,,Szabályozási modellekről''. *Szigma*, 6. (1973). pp. 93—103.
6. Chow, G. C.: ,,Optimal Control of Linear Econometric Systems with Finite Time Horizon.'' *International Economic Review*, 13. (1972). pp. 16—25.
7. Cournot, A.: *Recherches sur les principles mathematiques de la théorie des richesses*, Paris, 1838.
8. Dancs, I.—Hunyadi, L.—Sivák, J.: ,,Készletjelzésen alapuló szabályozás Leontief-típusú gazdaságban'', *Szigma*, 6. (1973). pp. 185—208.
9. Debreu, G.: *Theory of Value*, New York, 1959. Wiley
10. Dorfmann, R.: ,,An Economic Interpretation of Optimal Control Theory'', *American Economic Review.*, 59, (1969). pp. 817—831.
11. Dorfmann, R.—Samuelson, P. A.—Solow, R. M.: *Linear Programming and Economic Analysis*, New York, 1958. McGraw-Hill.
12. Gelfond, A. O.: *Differencia-számítás*. Budapest, 1953.
13. Hurwicz, L.: ,,Optimality and Information Efficiency in Resource Allocation'', megjelent: Arrow, K. J.—Karlin, S.—Suppes, P. *Mathematical Methods in the Social Sciences*. Stanford, Stanford University Press, 1960. pp. 27—46.
14. Kendrick, D.: *Numerical Methods for Planning under Uncertainty*. sokszorosítva, Stanford: Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, 1970.

15. KORNAI J.—MARTOS B.: „Gazdasági rendszerek vegetatív működése" *Szigma*, 4. (1971). pp. 34—50.
16. KORNAI J.—MARTOS B.: „Autonomous Functioning of the Economic System." *Econometria*, 41. (1973). pp. 509—528.
17. KORNAI J.: *Kétfokozatú szabályozási sémák*, kézirat, Rheda, 1973.
18. LANGE, O.: *Bevezetés a közgazdasági kibernetikába*. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
19. LEONTIEF, W. W. és mások: *Studies in the Structure of the American Economy*, New York, 1953. University Press Oxford.
20. LEONTIEF, W. W.: „Lags and Stability of Dynamical Systems: A Rejoinder." *Econometrica*, 29. (1961). pp. 659—669.
21. LOVELL, M. C.: „Buffer-Stock, Sales-Expectations and Stability: A Multi-Sector Analysis of the Inventory Cycle." *Econometrica*, 30. (1962). pp. 267—296.
22. MCFADDEN, D.: „On the Controllability of Decentralized Macroeconomic Systems: The Assignement Problem." megjelent: Kuhn, H. W.—Szegő, G. *Mathematical System Theory and Economics I.*, Berlin, 1969 Springer Verlag, pp. 221—239.
23. MARSCHAK, J.—RADNER, R.: *Economic Theory of Teams*, New Haven, 1972 . Yale University Press.
24. MARTOS B.: „Megjegyzések Dancs—Hunyadi—Sivák cikkéhez", *Szigma*, 6. (1973). pp. 209—210.
25. MORISHIMA, M.: *Equilibrium, Stability, and Growth*, Oxford, 1964. Oxford University Press
26. NEUMANN, J.: „Az általános gazdasági egyensúly egy modellje" *Válogatott előadások és tanulmányok*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1965, pp. 160—176. (első német publikáció, 1938).
27. RADNER, R.: „Dynamic Programming of Economic Growth", megjelent: Malinvaud, E.—BACHARACH, M. O. L.: *Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning*. London—Melbourne—Toronto—New York, 1967. Macmillan — St Martins Press.
28. SAMUELSON, P. A.: *Foundation of Economic Analysis*, Cambridge, 1947. Harvard University Press.
29. SARGAN, J. D.: „The Instability of the Leontief Dynamic Model", *Econometrica*, 26. (1958). pp. 381—392.
30. SARGAN, J. D.: „Lags and Stability of Dynamic Systems: A Reply", *Econometrica*, 29. (1961). pp. 671—674.
31. TUSTIN, A. *The Mechanism of Economic Systems*, London, 1953. W. Heinemann Ltd.
32. VIRÁG I.: „Gazdasági rendszerek vegetatív működése sztochasztikus külső fogyasztással", *Szigma*, 6. (1973). pp. 261—268.
33. WALRAS, L.: *Elements of Pure Economics, or the Theory of Social Value*, Homewood, 1954. Irvin. (francia eredeti első kiadás 1874).

## CONTROL PROBLEMS IN NEUMANN ECONOMIES

The present paper continues the line of thoughts of papers [15], [8], [32], [5] published also in this periodical. The real sphere of our model is descibed by a dynamic, closed Neumann—Leontief model, the structural matrices of which are (almost) constant in time. A normative control is assumed, in which the deviation of the state variable from the norm brings about a proportional deviation of the corresponding control variable from the norm in the opposite direction. In this paper the normative path is a Neumann-path, the control and the information system is decentralized, has no memory and it is based exclusively on stock signals. The operation of the system is described by equations (2.1)—(2.4).

The main findings are as follows:

1. There exists a normative path and it is uniquely determined.
2. The increase of the buffer-stock/production norms depresses the growth rate (but may increase the adaptivity of the system).
3. If the feedback coefficients are appropriately small then the system is [relatively] stable.
4. In every [relatively] stable economy there exists a viable neighbourhood of initial states.

## ПРОБЛЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ В ХОЗЯЙСТВАХ-НЕЙМАН

Данная статья является продолжением статей [15], [8], [32] и [5], которые вышли в этом же журнале. Реальную сферу нашей модели описывает динамическая закрытая модель Леонтьева—Неймана, структурные матрицы которой (почти) постоянны во времени. Мы предполагаем регулирование, нормами где отклонение от нормы соответствующих переменных регулирования изменяется пропорционально отклонению от нормы переменной положения, но с противоположным знаком. В данной работе нормативной траектории является траектория Неймана, система регулирования и информации является децентрализованной, без памяти, основана исключительно только на регистрации запасов. Функционирование системы описывается при помощи уравнений (2.1)—(2.4).

Основные выводы являются следующими:

1. Нормативная траектория существует и однозначно определена.

2. Повышение норм сталкивающихся запасов/производства понижает темпы роста (но, может новысить способность системы к адаптации).

3. Если коэффициенты обратной связи достаточно малы, то система относительно стабильна.

4. В каждом относительно стабильном хозяйстве есть окрестность нагальных переменных положения, способная к функциони-рованию.