Bod Péter

Nemlineáris ágazatközi kapcsolatok matematikai vizsgálata

Ebben a dolgozatban a Leontief-féle nyílt, statikus input-output modell egy általánosított nemlineáris változatával foglalkozunk. A modell feltételezései fővonásaiban azonosak az A. Nataf által 1960-ban vizsgált modellével [1], azzal a különbséggel, hogy nem tételezünk fel eleve növekvő hozadékot, mint ahogy ezt Nataf tette. Megmutatjuk, hogy a modellben minden ún. elérhető végső kibocsátáshoz tartozik egy olyan teljes termelés, amely azt minimális társadalmi költséggel realizálja.

A modell elemzéséhez felhasználunk bizonyos eredményeket az ún. indifferens programozási feladatok elméletéből [2], [3], valamint fogalmakat és eredményeket a minimális elemmel rendelkező halmazok területéről [4]. Ezzel két külön célt is kívánunk szolgálni. Egyfelől megmutatjuk az említett eredmények felhasználhatóságát a matematikai közgazdasági modellek egy fontos családjának általánosításában. Másrészt felhívjuk a figyelmet arra hogy egyes e témával összefüggő, újabban publikált eredmények [5] hogyan kapcsolódnak korábbi és úgy látszik elfelejtett eredményekhez.

Tekintsünk egy sokszektorú (n szektorból álló) Leontief típusú gazdaságot, melyben minden egyes ágazat egyetlen technológia segítségével egyetlen — az ágazatra jellemző — használati értéket bocsát ki. Eltekintünk az esetleges külkereskedelmi kapcsolatoktól és egy ún. nyílt modell segítségével vizsgáljuk a társadalmi újratermelés mennyiségi összefüggéseit. A ráfordítási fajlagosok állandóságának feltételezése helyett abból indulunk ki, hogy minden ágazat saját bruttó tevékenységi szintjétől függően használ fel az összes ágazat kibocsátásából. A j-edik kibocsátási ágazat ráfordításait így n különböző függvény jellemzi. Jelölje az i-ik ágazat kibocsátására irányuló ráfordítások függvényét:

$$f_{ij}(\xi_j); \qquad (i = 1, 2,\ldots, n;\ j = 1, 2,\ldots, n).$$

Összesen n^2 ráfordítási függvényünk van. Valamennyivel kapcsolatban a következő feltételezésekkel élünk:

i. Minden $f_{ij}(\xi_j)$; $(i = 1, 2,\ldots, n;\ j = 1, 2,\ldots, n)$ függvény folytonosan deriválható.

ii. $f_{ij}(0) = 0$; $(i = 1, 2,\ldots, n;\ j = 1, 2,\ldots, n)$

iii. Ha $0 \leq \xi_j^1 \leq \xi_j^2$, akkor $f_{ij}(\xi_j^1) \leq f_{ij}(\xi_j^2)$.

Valamennyi ágazat kibocsátása a következő szerkezetű mérleg szerint kerül felhasználásra:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\xi_i) + \eta_i \qquad (i = 1, 2,\ldots, n),$$

ahol η_i az i-ik ágazat kibocsátásából végső felhasználásra kerülő rész.

Vezessük be a következő jelölést:

$$f_j(\xi_j)=\begin{bmatrix} f_{1j}(\xi_j)\\ f_{2j}(\xi_j)\\ \vdots\\ f_{nj}(\xi_j)\end{bmatrix};\qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Akkor írhatjuk, hogy

$$x=\sum_{j=1}^{n} f_j(\xi_j)+y.$$

Legyen:

$$F(x)=x-\sum_{j=1}^{n} f_j(\xi_j)=\begin{bmatrix} f^1(x)\\ f^2(x)\\ \vdots\\ f^n(x)\end{bmatrix}.$$

A modell alapvető összefüggéseit kifejező egyenletrendszert így a következő alakban nyerjük:

$$F(x)=y.$$

Nyilvánvaló, hogy ha minden fajlagos ráfordítási együttható állandó, vagyis

$$f_{ij}(\xi_j)=a_{ij}\,\xi_j,$$

akkor

$$F(x)=(E-A)x$$

és ezzel az ismert lineáris Leontief modellnél vagyunk.

Az $F(x)$ függvény közgazdasági értelmezése kézenfekvő. Kifejezi azt a transzformációt, amely az adott gazdaságban az újratermelés során végbemegy azáltal, hogy a különböző ágazatok a saját tevékenységeik megvalósításához termelő módon felhasználják a más ágazatok és egyben saját kibocsátásuk egy részét. Valamely x vektorral jellemzett teljes tevékenység mellett éppen az $F(x)$ vektor írja le a végső felhasználásra rendelkezésre álló termékhalmazt.

Hogy világosan lássék, milyen tulajdonságú általánosításról is van itt szó: hivatkozunk néhány definícióra:

1. *Definíció:* *W. C. Reinboldt* [6] nyomán egy $g(x): R^n_+ \to R^n$ leképezést, amely a $g_i(x)$; $(i=1,2,\ldots,n)$ komponensekből áll: *diagonálison kívül antitónnak* nevezünk, ha $\forall x \in R^n_+$ és $i\neq j: (i,j=1,2,\ldots,n)$ esetén a

$$G_{ij}(\tau)=g_i(x+\tau e_j)$$

leképezések R^1_+-ból R^1-be a τ változónak nem növekvő függvényei.

2. *Definíció:* A g leképezés *diagonálisan izoton*, ha $\forall x \in R^n_+$-ra a

$$G_{ii}(\tau)=g_i(x+\tau e_i)$$

függvények a τ változó nem csökkenő függvényei.

3. *Definíció:* *A. Tamir* [5] nyomán mindazokat a $g: R^n_+\to R^n$ leképezéseket, amelyek R^n_+-on diagonálison kívül antitónok: *Z*-függvényeknek nevezzük.

Egy Z-függvény ún. M-függvény, ha R_+^n-on inverz-izotón is. Ez annyit jelent, hogy

$$x;\, y \in R_+^n;\; g(x) \leq g(y) \Rightarrow x \leq y.$$

A fenti definíciónak megfelelően következik:

1. *Lemma:* A modell alapegyenletében szereplő

$$F(x) = \begin{bmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \\ \vdots \\ f^n(x) \end{bmatrix}$$

függvény Z-függvény.

Bizonyítás: Mivel:

$$f^i(x) = \xi_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\xi_j),$$

ezért

$$f^i(x + \tau e_n) = \xi_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} f_{ij}(\xi_j) - f_{ik}(\xi_k + \tau) \leq \xi_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} f_{ij}(\xi_i) - f_{ik}(\xi_k) = f^i(x).$$

Látható, hogy a Z-függvények az olyan A mátrix-szal jellemezhető lineáris leképezések általánosításai, amelyekben minden

$$a_{ij} \leq 0, \quad \text{ha} \quad i \neq j.$$

A Z-függvények számos érdekes tulajdonsággal rendelkeznek, amelyekre A. Tamir mutatott rá a már idézett cikkében. Tamir a Z-függvényekhez tartozó ún. komplementaritási feladatot vizsgálta és algoritmust adott ennek a megoldására. Megmutatta, hogy ha a feladatnak van megengedett megoldása, akkor van ún. legkisebb megoldása is, amely egyben kielégíti a komplementaritási feltételt is. Tamirnak ezek az eredményei általánosítják *Cottle* és *Veinott Jr.* korábbi eredményeit, amelyek a lineáris komplementaritási feladatra vonatkoztak [7].

A következőkben megmutatjuk, hogy a Z-függvényeknek ezek az említett sajátosságai egyenesen következnek *G. Wintgen* egy 1964-ben publikált és a nemzetközi irodalomban sajnos nem eléggé figyelembe vett tételéből [2].

Wintgen tétele az általa bevezetett ún. indifferencia fogalomra vonatkozik. Tekintsük az optimum feladatok egy családját, amelyben adott egy megengedett megoldáshalmaz és a célfüggvények egy osztálya:

$$\mathfrak{Z} = \{z(x) \mid R^n \to R\}.$$

A következő maximum (minimum) feladat a szóbanlevő feladatcsalád egy képviselője:

keresendő $\hat{x} \in R^n$ úgy, hogy

$$P : z(\hat{x}) = \max\,(\min)\, z(x);\; x \in L$$

ahol $z(x) \in \mathfrak{Z}$.

4. *Definíció:* A P feladat indifferens a célfüggvények $\mathfrak{Z}$ osztályára nézve, ha $\exists x_0 \in L$ úgy, hogy

$$z(x_0) \geq (\leq) z(x)$$

$$\forall x \in L \quad \text{és} \quad \forall z(x) \in \mathfrak{Z} \text{ mellett.}$$

Konkretizáljuk $\mathfrak{Z}$-t a következő formában: legyen adva véges sok, folytonos függvény: $z_1(x)$; $z_2(x)$; $\dots$; $z_k(x)$ amelyek az L halmazon véges maximumot (minimumot) vesznek fel. Legyen

$$\mathfrak{Z}' = \left\{ z(x) \mid z(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i(x); \; \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Vagyis a $\mathfrak{Z}'$ függvényosztályba az adott függvények nem-negatív lineáris kombinációi tartoznak.

Az $z_1(x)$; $z_2(x)$; $\dots$; $z_k(x)$ függvények egy folytonos leképezést valósítanak meg R^n-ből R^k-be. Jelöljük az L halmaznak az e leképezéssel nyert képét R^k-ban $Z(L)$-lel.

Tekintsük a következő feladatot:
keresendő $\hat{x} \in R^n$ úgy, hogy

$$P' : z(\hat{x}) = \max\,(\min)\, z(x); \quad x \in L$$

ahol $z(x) \in \mathfrak{Z}'$.

5. *Definíció:* $x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ és $y = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$ két n-elemű vektor.

Azt mondjuk, hogy

$$a = x \cup y, \quad \text{ha} \quad \alpha_i = \max\,(\xi_i;\, \eta_i) : \forall_i\text{-re}$$

és

$$b = x \cap y, \quad \text{ha} \quad \beta_i = \min\,(\xi_i;\, \eta_i) : \forall_i\text{-re.}$$

Érvényes Wintgen alábbi tétele, amelyet bizonyítással együtt reprodukálunk, mert az eredeti publikáció nehezen hozzáférhető és mert éppen ennek az eredménynek az úttörő jellegét és fontosságát kívánjuk cikkünkben hangsúlyozni.

1. *Tétel:* (Az indifferencia elégséges feltétele) P' indifferens a célfüggvények $\mathfrak{Z}'$ osztályára nézve, ha

$$x;\, y \in L \Rightarrow Z(x) \cup Z(y) \in Z(L),$$

illetve

$$Z(x) \cap Z(y) \in Z(L)$$

Bizonyítás: Legyen $\quad z_i(\hat{x}_i) = \max\,[z_i(x)]$

$$x \in L; \; (i = 1, 2, \dots, k).$$

Ezek az optimális megoldások léteznek, vagyis $\hat{x}_i \in L$ $\forall_i$-re.
Képezzük az

$$\bigcup_{i=1}^{k} Z(\hat{x}_i)$$

vektort.

$$\bigcup_{i=1}^{k} Z(\hat{x}_i) = \begin{bmatrix} z_1(\hat{x}_1) \\ z_2(\hat{x}_2) \\ \vdots \\ z_k(\hat{x}_k) \end{bmatrix} \in Z(L).$$

Tehát $\exists x_0 \in L$, hogy

$$Z(x_0) = \begin{bmatrix} \max z_1(x) \\ \max z_2(x) \\ \vdots \\ \max z_k(x) \end{bmatrix} ; \; x \in L.$$

Nyilvánvalóan:

$$Z(x_0) \geq Z(x) : \forall x \in L.$$

Legyen $z(x)$ a $\mathfrak{Z}'$ függvényosztály tetszőleges eleme, akkor

$$z(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, z_i(x_0) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, z_i(x) = z(x) : \forall x \in L.$$

Vagyis létezik olyan $x_0 \in L$, amely optimális megoldása a feladatnak tekintet nélkül arra, hogy $\mathfrak{Z}'$ melyik eleme szerepel célfüggvényként.

A tétel állítása minimalizálásra analóg módon bizonyítható, csak $\cup$ helyett a $\cap$ művelet alkalmazandó.

6. *Definíció:* Azt mondjuk, hogy $\hat{x}$ a $H \subset R^n$ halmaz legnagyobb (legkisebb) eleme, ha $\hat{x} \in H$ és $\hat{x} \geq x : \forall x \in H$, illetve $\hat{x} \leq x : \forall x \in H$.

Vegyük észre, hogy ha P' indifferens a 4. Definíció szerint, akkor $Z(x_0)$ a $Z(L)$ halmaz legnagyobb (legkisebb) eleme.

7. *Definíció:* Legyen adva egy $f : R^n_+ \to R^n$ leképezés és egy $b \in R^n$ vektor. A következő feladatot komplementaritási problémának nevezzük: keresendő olyan x vektor, hogy

i. $f(x) + b \geq 0; \; x \geq 0,$

ii. $x^T[f(x) + b] = 0.$

x megengedett megoldás, ha kielégíti i.-t. Valamely megengedett megoldást komplementer, vagy kiegészítő megoldásnak mondunk, ha ii.-t is kielégíti.

2. *Lemma:* Legyen: $L = \{x \mid f(x) + b \geq 0; \; x \geq 0\}$, ahol $f : R^n_+ \to R^n$ és $b \in R^n$.

Tegyük fel, hogy $L \neq \emptyset$ és $|L| > 1$. (Az L halmaznak legalább két különböző eleme van.)

Ha f ún. Z-függvény, akkor az L halmaz zárt a $\cap$ műveletére, más szóval:

$$x;\, y \in L \Rightarrow x \cap y \in L.$$

Bizonyítás:

$$x;\, y \in L \Rightarrow f\mathrm{i}(x) + \beta\mathrm{i} \geq 0$$

és

$$f_i(y) + \beta_i \geq 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Legyen $z = x \cap y$; mivel $x \geq 0$; $y \geq 0 \Rightarrow z \geq 0$.
Megmutatjuk, hogy $f_i(z) + \beta_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$
Feltehetjük, hogy történetesen: $(z)_i = (x)_i$

Definiáljuk a következő pontsorozatot:

$$z = v_0;\, v_1;\, v_2;\, \ldots;\, v_n = x,$$

ahol

$$v_k = v_{k-1} + \tau_k e_k.$$

Legyen

$$\tau_k = 0, \qquad \text{ha} \quad (z)_k = (x)_k;$$

$$\tau_k = (x)_k - (y)_k, \quad \text{ha} \quad (z)_k = (y)_k.$$

Az 1. és 3. Definícióknak megfelelően az $F_{ik}(\tau)$ függvények nem növekvőek, ezért:

$$f_i(v_k) = f_i(v_{k-1} + \tau_k e_k) \leq f_i(v_{k-1}).$$

Tehét

$$f_i(x) \leq f_i(z).$$

Így

$$f_i(x) + \beta_i \geq 0 \Rightarrow f_i(z) + \beta_i \geq 0.$$

Mivel a fentiek minden i-re igazak:

$$f(z) + b \geq 0, \quad \text{vagyis} \quad z \in L.$$

3. *Lemma:* Ha f folytonos Z-függvény és $L \neq \emptyset$, akkor L-ben van legkisebb elem.

Bizonyítás: Tekintsük a következő nemlineáris programozási feladatcsaládot: keresendő $x \in R^n$ úgy, hogy

$$z(\bar{x}) = \min z(x)$$

$$x \in L = \{x \mid f(x) + b \geq 0;\; x \geq 0\}$$

$$P'' \qquad z(x) \in \mathfrak{Z}'' = \{z(x) \mid z(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i(x);\; \lambda_i \geq 0\},$$

ahol

$$z_i(x) = (x)_i.$$

Látható, hogy $\mathfrak{Z}''$ a nem-negatív lineáris függvények osztálya. A $z_i(x)$ függvények most a

$$Z(x) = Ex$$

azonos leképezést valósítják meg. A 2. Lemma alapján

$$x;\, y \in L \Rightarrow Z(x) \cap Z(y) = x \cap y \in Z(L) = L.$$

f folytonossága miatt L zárt halmaz. Amennyiben L korlátos is, akkor minden $z_i(x)$ függvény felveszi véges minimumát L-en. Tehát Wintgen tételének feltételei teljesülnek. Van olyan $x_0 \in L$, amelyben az összes nem-negatív lineáris függvény minimumot vesz fel. Ezért x_0 az L halmaz legkisebb eleme. Ez következik egyrészt az 1. Tételhez fűzött megjegyzésből, miszerint $Z(x_0)$ az $Z(L)$ halmaz legkisebb eleme és most $Z(L) = L$ és $Z(x_0) = x_0$. Másrészt abból az ismert tényből is, hogy $x \leq y \Leftrightarrow x^T x \leq c^T y$ tetszőleges $c^T \geq 0^T$ mellett, az következik, hogy egy halmaznak az a pontja, ahol bármely tetszőleges nem-negatív lineáris függvény minimumot vesz fel: a halmaz legkisebb eleme és fordítva.

Ha történetesen L nem korlátos: tekintjük egy tetszőleges elemét: $\bar{x} \in L$. Mivel $L \neq \emptyset$ ilyen elem létezik és alkalmazzuk a fenti meggondolásokat az

$$L' = \{x \mid x \in L;\, x \leq \bar{x}\} \subset L$$

halmazra. Nyilvánvaló, hogy $L' \neq \emptyset$, ugyancsak zárt a $\cap$ műveletére és egyben biztosan korlátos. L' minimális eleme egyben az L halmaznak is legkisebb eleme.

4. *Lemma:* Ha x_0 az L halmaz legkisebb eleme és f folytonos Z-függvény, akkor x^0 kiegészítő megoldás.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a komplementaritás nem teljesül. Akkor $\exists_i$, hogy $(x_0)_i\,[f_i(x_0) + \beta_i] > 0$.

Vagyis: $(x_0)_i > 0$ és $f_i(x_0) + \beta_i > 0$

Ha $\delta > 0$-t elég kicsinek vesszük, akkor

$$\bar{x} = x_0 - \delta\, e_i \geq 0.$$

Tekintsük az $F_{ji}(\tau)$ függvényt az $\bar{x} \in R^n_+$ pontból kiindulva:

$$F_{ji}(\tau) = f_j[(x_0 - \delta e_i) + \tau e_i] \leq f_j(x_0 - \delta e_i).$$

Legyen

$$\tau = \delta,$$

$$F_{ji}(\delta) = f_j(x_0) \leq f_j(x_0 - \delta e_i) = f_j(\bar{x}).$$

Mivel:

$$f_j(x_0) + \beta_j \geq 0 \Rightarrow f_j(\bar{x}) + \beta_j \geq 0$$

$\forall j$-re, amelynél $j \neq i$. Tekintve a továbbiakban, hogy $f_i(x_0) + \beta_i > 0$ és $fi(x)$ folytonos: δ-t lehet még tovább csökkenteni, ha szükséges és

$$f_i(\bar{x}) + \beta_i = f_i(x_0 - \delta\, e_i) + \beta_i \geq 0$$

lesz. Így $\bar{x} \in L$, de ugyanakkor $(\bar{x})_i < (x_0)_i$, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy x_0 az L halmaz legkisebb eleme.

A Z-függvények sajátosságainak bemutatása után tárjünk vissza a korábban tárgyalt modellhez.

8. *Definíció:* A modellel jellemzett gazdaságot működőképesnek mondjuk, ha $\exists \bar{x} \geq 0$, hogy $F(\bar{x}) > 0$. Egy működőképes gazdaságban elérhető végső kibocsátásnak nevezünk egy $y_0 > 0$ vektort, ha

$$L_{y_0} = \{x \mid F(x) \geq y_0\} \neq 0.$$

9. *Definíció:* Társadalmi termelési költségfüggvénynek nevezünk egy R^n_+-en értelmezett $\varphi(x)$ függvényt, ha eleget tesz az alábbi követelményeknek:

i. $\varphi(x) = 0$

ii. $\varphi(x) > 0$, ha $|x| > 0$

iii. $\varphi(x)$ izotón, vagyis: $x^1 \geqq x^2 \Rightarrow \varphi(x^1) \geqq \varphi(x^2)$.

Bebizonyítjuk a következő állítást:

2. *Tétel:* Minden elérhető y_0 végső kibocsátáshoz tartozik egy olyan teljes termelés: x_0, amelyre

$$F(x_0) = y_0$$

és amely egyben optimális abban az értelemben, hogy minimális társadalmi termelési költséggel realizálja a végső kibocsátást.

Bizonyítás: Ha y_0 elérhető végső kibocsátás, akkor az

$$L_{y_0} = \{x \mid F(x) - y_0 \geqq 0;\; x \geqq 0\} \neq \emptyset.$$

Minthogy $F(x)$ folytonos Z-függvény, a 3. Lemma értelmében az L_{y_0} halmaznak van legkisebb eleme. Legyen ez x_0. A 4. Lemma miatt x_0 egyben kiegészítő megoldás, vagyis:

$$x_0^T[F(x_0) - y_0] = 0$$

Lássuk be, hogy x_0-nak nem lehet zérus komponense. Tegyük fel, hogy $(x_0)_i = 0$. Ebben az esetben az L_{y_0} halmazt meghatározó i-ik feltétel a következőképpen alakulna:

$$(x_0)_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}[(x_0)_j] - (x_0)_i < 0$$

és így x_0 nem lehetne megengedett.

Ha viszont $x_0 > 0$, akkor a komplementaritás miatt

$$F(x_0) - y_0 = 0,$$

illetve

$$F(x_0) = y_0$$

kell, hogy fennálljon. Minthogy x_0 az L_{y_0} halmaz legkisebb eleme: bármely megengedett $\bar{x} \in L_{y_0}$ termelésre

$$x_0 \leqq \bar{x},$$

és így a társadalmi termelési költség izotonitása miatt x_0 realizálja a legkisebb társadalmi költséggel az y_0 végső kibocsátást.

3. *Tétel:* Ha x_0 az L_{y_0} halmaz legkisebb eleme és x_0-ban teljesül valamelyik regularitási feltétel, akkor az $F(x)$ függvénynek x_0-ban nem szinguláris Jacobi mátrixa van, amelynek az inverze nem-negatív.

Bizonyítás: Mivel x_0 minimális elem L_{y_0}-ban, ezért x_0 minimális megoldása a következő nemlineáris programozási feladatoknak:

$$\min x_i \to !$$

$$x \in \{x \mid y_0 - F(x_0) \leq 0\}$$
$$x \in R^n_+$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

A 2. Tételben láttuk, hogy $x_0 > 0$, vagyis a nem-negatív ortáns belső pontja. Másrészt a regularitás fennáll és így teljesülnek az optimalitás szükséges feltételei [8] és ezért $\exists$ olyan $u_i \geq 0$ vektor, hogy x_0 és u_i kielégítik a Kuhn—Tucker feltételeket. Köztük azt a feltételt, hogy x_0-ban a célfüggvény gradiense egyenlő az aktív feltételek gradienseinek megfelelő negatív lineáris kombinációjával. Mivel x_0-ban valamennyi feltétel aktív:

$$e_i = -\nabla [y_0 - F(x_0)] \cdot u_i = \nabla F(x_0) \cdot u_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Legyen

$$U = [u_1; u_2; \ldots; u_n] \geq 0.$$

Írható tehát: $E = \nabla F(x_0) \cdot U$ és innen:

$$U = [\nabla F(x_0)]^{-1} \geq 0.$$

Korollárium: Ha a rendszerben valamennyi ráfordítás nem romló kihozatalú, akkor minden elérhető végső kibocsátáshoz egyetlen azt realizáló teljes termelés tartozik, az $F(x) = y_0$ egyenletrendszer megoldása egyértelmű; vagyis $F(x)$ mindenütt egyértékű.

Bizonyítás: A pótlólagos feltételezés azt jelenti, hogy az

$$\frac{f_{ij}(\xi_j)}{\xi_j}$$

függvények nem növekvőek, vagyis valamennyi ráfordítási függvény konkáv. Ekkor a $\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\xi_j)$ összegek is konkávok; míg az

$$f^i(x) = \xi_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\xi_j)$$

függvények konvexek, vagyis $F(x)$ minden komponense konvex.

Tegyük fel az állításunkkal szemben, hogy az $F(x) = y_0$ egyenletrendszernek x^0-on kívül van még egy x^1 megoldása. Minthogy x_0 az L halmaz minimális eleme, ezért: $x_0 \leq x_1$. Mivel mind a két pont kielégíti az egyenletet:

$$F(x_0) = y_0,$$
$$F(x_1) = y_0.$$

Így

$$F(x_1) - F(x_0) = 0$$

Azonban $F(x)$ konvexitása miatt ebből

$$\nabla F(x_0)(x_1 - x_0) \leq F(x_1) - F(x_0) = 0$$

következik. Mivel $[\nabla F(x_0)]^{-1} \geq 0$, ezért $x_1 \leq x_0$, ami ellentmond annak, hogy $x_0 \leq x_1$.

Megjegyzés: A megoldás egyértelműségére való következtetéshez nem szükséges az $F(x)$ leképezés konvexitása. Elegendő, ha $F(x)$ az x_0 pontban a nemnegatív ortánsra nézve lokálisan kvázikonvex.

A fenti eredmények azt mutatják, hogy a Leontif-modell számos előnyös tulajdonsága érvényben marad a nem-lineáris általánosítás mellett is. Valószínűnek látszik, hogy ilyen modellek megoldása nem okozna különösebb algoritmikus, vagy számítástechnikai nehézséget sem. Mivel pedig a népgazdasági tervezéshez használt modellekben rendszerint előjön a társadalmi termelés Leontief-típusú elszámolása: lehetőség nyílnék kilépni a linearitás feltételezéséből származó korlátok közül ezen a téren is. Ehhez azonban mindenek előtt arra volna szükség, hogy az ágazatok közötti nem-lineáris kapcsolatok statisztikai megfigyelése terén jelentősen előrelépjünk.

(Beérkezett: 1975. július 20.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Nataf, A.: Systémes économiques de production á rendement croissant, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris. Vol. XI. Fasc. 2. (1960.) 161–170.
2. Wintgen, G.: Indifferente Optimierungsprobleme. Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie. Konferenzprotokoll. II. 3–6. 1964. Berlin.
3. Bod P.: Az indifferens programozási feladatokról. Szigma. 5. (1972.) 137–146.
4. Bod P.: Minimális elemmel rendelkező zárt konvex halmazokról. Szigma. 7. (1975.) 61–68.
5. Tamir, A.: Minimality and complementarity properties associated with Z-functions and M-functions. Mathematical Programming. 1974. 7–31.
6. Reinboldt, W. C.: On M-functions and their applications to nonlinear Gauss-Seidel iterations and to network flows. Journal of Math. Anal. and Appl. 1970. 247–307.
7. Cottle, R. W.–Veinott, A. F. Jr.: Polyhedral sets having a least element. Mathematical Programming. 1971. 238–249.
8. Martos, B.: Nonlinear Programming. Akadémiai Kiadó. 1975. 128 old.

MATHEMATICAL ANALYSIS OF NON-LINEAR INTER-SECTORAL RELATIONS

~~In this paper~~ a generalized non-linear variant of the open, static input-output model of *Leontief* ~~is dealt with~~.

The assumptions of the model are basically identical with those of the model examined by *A. Nataf* in 1960 with the difference that increasing returns are not *a priori* assumed.

The core of the model is a mapping $F(x)$ from $R^n_+ \ldots$ into R^n which belongs to the class of Z functions.

Relying on a theorem of *G. Wintgen* published in 1964, simple proofs are provided for the minimality and complementarity characteristics of the so called Z-functions first observed by *A. Tamir*.

It is proved that to each reachable final output belongs a total production realizing it with minimum social cost. At this point – if certain regularity conditions hold – the Jacobian matrix of the function $F(x)$ is non-singular and has a non-negative inverse. Finally, if all inputs of the system are of non-decreasing returns, a unique total production belongs to each reachable final output.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ

В этой работе мы занимаемся обобщенным нелинейным вариантом открытой статической инпут-аутпут модели Леонтьева.

Предпосылки модели в основном совпадают с предпосылками модели А. Натаф, рассмотренной в 1960 году, с той разницей, что мы не предполагаем заблаговременно увеличивающегося прироста.

Ядром модели является отображение F(x) из R^n_+, в R^n, который относится к классу функций Z.

Опираясь на опубликованный в 1964 году тезис Г. Винтгена, мы приводим простое доказательство минимальности и комплементарности функции Z, которые впервые были замечены А. Тамиром.

Мы доказываем, что в модели к каждому так наз. достижимому конечному выпуску относится такое производство, которое требует минимальных общественных затрат. В этой точке — в случае выполнения определенных условий — регулярности — функция F(x) имеет не сингулярную матрицу Якоби, обратная матрица которой не отрицательна. Наконец, если в системе все затраты не ухудшают выпуск, то к каждому достижимому конечному выпуску относится единственное, реализующее выпуск, полное производство.