Somos Endre—Stahl János

Dekompoziciós eljárások nemlineáris programokra*

Bevezetés

[4] több eljárást tartalmaz folytonos konvex-konkáv függvény nyeregpontjának meghatározására és egy konvex programozási feladat és egy neki megfelelő nyeregpont meghatározási feladat ismert ekvivalenciája alapján megmutatja, hogy bizonyos konvex programozási dekompozíciós eljárások miképpen származtathatók az előbbiekből. (Konvex programozási feladaton olyan programozási feladatot értünk, melynél a lehetséges programok halmaza és a minimalizálandó célfüggvény konvex.)

Cikkünk is a [4]-beli utat követi. Bizonyos feltételek mellett egy

$$f_1(x_1, x_2) \leq 0$$
$$f_2(x_1, x_2) \leq 0$$
$$x_1 \in X_1$$
$$\min F(x_1, x_2)$$

alakú konvex programozási feladat megoldása egyenértékű $\varphi(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ megfelelő halmazon vett nyeregpontértékének meghatározásával, ahol $\varphi(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ az

$$f_2(\bar{x}_1, x_2) \leq 0$$
$$\min F(\bar{x}_1, x_2) + \bar{y}_1 f_1(\bar{x}_1, x_2)$$

(ugyancsak konvex) részfeladat optimumértéke.

Egy függvény nyeregpontértékének, illetve nyeregpontjának meghatározására kidolgozott eljárásunkat a fenti, a [4]-belieknél tárgyaltaknál általánosabb esetre alkalmazva dekompozíciós eljárást nyerünk a kiinduló programozási feladat megoldására.

A tárgyalandó eljárás bevezetésének általunk választott módja nem szükségszerű, azaz a dekompozíciós eljárás származtatható közvetlenül is.

Választásunkat az indokolja, hogy egyrészt a nyeregponttal kapcsolatos eljárás valamelyest önmagában is érdekes, másrészt pedig úgy érezzük, hogy megkönnyíti annak megértését, hogy egy-egy dekompozíciós eljárás valójában mit is csinál és számos ismert dekompozíciós eljárás is ezen keretekbe ágyazható.

A cikk 1. részében az említett ekvivalenciát fogalmazzuk meg pontosan, a 2. rész azzal a nyeregpontérték meghatározási eljárással foglalkozik, amelyet a dekompozíciós eljárás származtatásánál használunk. A 3. részben két esetre

* A cikk az 1975-ös győri „Operációkutatás a gyakorlatban '75" konferencián elhangzott előadás alapján készült.

fogalmazzuk meg ezeket a dekompozíciós eljárásokat. A részfeladatra vonatkozó — elég erősnek tekinthető — feltételek teljesülése esetén, valamint lényegesen gyengébb feltételek esetére akkor, ha az eredeti programozási feladatban szereplő függvényekre bizonyos szeparábilitási feltételek teljesülnek.

A 3. részbeli egyetlen megjegyzés kivételével nem foglalkozunk eljárásunknak korábbi dekompozíciós eljárásokkal történő összehasonlításával. Cikkünk eredményei eredetiek, a Dantzig—Wolfe, illetve Benders dekompozíció konvex programozási feladatra történő kiterjesztéseit speciális esetként tartalmazzák és egy részletes összehasonlítás már különösebb újat nem ad, illetve könnyen el is végezhető.

A terjedelmet rövidítendő, a cikkben a bizonyításokat mellőzzük. Ezek [6]-ban megtalálhatók, melyet kívánságra szívesen megküldünk. Az eljárás lineáris esetre történő specializálásával kapcsolatban [5]-re utalunk.

1. Programozási és nyeregpont feladatok ekvivalenciájáról

Ismeretes, hogy amennyiben x^* az

$$f(x) \leq 0$$
$$x \in X$$
$$\min F(x)$$

konvex programozási feladat egy optimális megoldása és az f-függvény kielégít egy alkalmas regularitási feltételt, akkor van olyan $y^* \geq 0$, hogy minden $x \in X$-re és $y \geq 0$-ra

$$F(x^*) + yf(x^*) \leq F(x^*) \leq F(x) + y^*f(x)$$

azaz (x^*, y^*) a $\varphi(x, y) = F(x) + yf(x)$ függvény nyeregpontja $X \times Y$-n, ahol $Y = \{y : y \geq 0\}$.

Tekintsük most az

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ &f_2(x_1, x_2) \leq 0 \\ &x_1 \in X_1 \\ &\min F(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{1}$$

programozási feladatot, ahol feltesszük, hogy

(1.1) az f_1, f_2 és F függvények konvexek,

(1.2) X_1 konvex és kompakt halmaz,

(1.3) (1)-nek van optimális megoldása, egy ilyet (x_1^*, x_2^*)-gal jelölünk, (1) optimumértékét pedig φ^*-gal,

(1.4) van olyan $x_1^0 \in X_1$, melyre valamilyen x_2^0-val

$$f_1(x_1^0, x_2^0) < 0, \; f_2(x_1^0, x_2^0) \leq 0.$$

A Kuhn Tucker nyeregpont tétel szerint ekkor mindenesetre van olyan $x_1^* \in X_1$, hogy minden $y_1 \in Y_1 = \{y_1 : y_1 \geq 0\}$-ra és az

$$f_2(x_1, x_2) \leq 0$$
$$x_1 \in X_1$$

feltételek meghatározta X halmaz tetszőleges (x_1, x_2) elemére

$$\bar{\varphi}(x_1^*, x_2^*, y_1) \leq \bar{\varphi}^* \leq \bar{\varphi}(x_1, x_2, y_1^*), \tag{2}$$

ahol

$$\bar{\varphi}(x_1, x_2, y_1) = F(x_1, x_2) + y_1 f_1(x_1, x_2).$$

Tegyük fel még, hogy (1.5) az

$$f_2(\bar{x}_1, x_2) \leq 0$$

$$\min F(\bar{x}_1, x_2) + \bar{y}_1 f_1(\bar{x}_1, x_2) \tag{3}$$

feladatnak minden $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in X_1 \times \bar{Y}_1$-re van optimális megoldása.

Akkor a (2) alatti egyenlőtlenségekből

$$\varphi^* = \max_{\bar{Y}_1} \min_{X} \bar{\varphi}(x_1, x_2, y_1) = \max_{\bar{Y}_1} \min_{X_1} \min_{X_2(x_1)} \bar{\varphi}(x_1, x_2, y_1) = \max_{\bar{Y}_1} \min_{X_1} \varphi(x_1, y_1),$$

ahol

$$X_2(x_1) = \{x_2 : f_2(x_1, x_2) \leq 0\},$$

azaz (3) lehetséges megoldásainak a halmaza, $\varphi(x_1, y_1)$ pedig (3) optimumértéke $\bar{x}_1 = x_1$, $\bar{y}_1 = y_1$ esetén. (2) második részéből az is adódik, hogy

$$\|y_1^*\| \leq c \frac{F(x_1^0, x_2^0) - F(x_1^*, x_2^*)}{\|f_1(x_1^0, x_2^0)\|}, \tag{4}$$

ahol c valamilyen konstans, azaz $\bar{Y}_1$ egy alkalmas konvex és kompakt Y_1 részhalmazára szorítkozva

$$\max_{\bar{Y}_1} \min_{X_1} \varphi(x_1, y_1) = \max_{Y_1} \min_{X_1} \varphi(x_1, y_1).$$

1. lemma. $\varphi(x_1, y_1)$ konvex-konkáv függvény. Legyen továbbá (1.6) minden $x_1 \in X_1$-re $X_2(x_1) \subseteq X_2$, ahol X_2 korlátos és az f_1, f_2 és F függvények legyenek folytonosak.

Akkor φ folytonos $X_1 x Y_1$-n.

Ha $X_2(x_1)$ nem részhalmaza minden $x_1 \in X_1$-re egy rögzített korlátos X_2 halmaznak, a lemma állítása már nem feltétlenül igaz.

Tekintsük pl. a következő kétváltozós függvényt a nem-negatív síknegyedben

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x_1 x_2} & \text{ha } x_1 x_2 \leq 1; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A függvény a szóbanforgó tartományban konvex és rögzített $x_1 = x_1$ mellett az

$$x_2 \geq 0$$

$$\min f(\bar{x}_1, x_2)$$

programozási feladat $\varphi(\bar{x}_1)$ optimumértékére

$$\varphi(\bar{x}_1) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \bar{x}_1 = 0, \\ 0 & \text{ha } \bar{x}_1 > 0. \end{cases}$$

2. Eljárások nyeregpont meghatározására

Legyen $\varphi(x, y)$ folytonos $X \times Y$-n, ahol X és Y kompakt halmazok. Tegyük fel, hogy

$$m^* = \max_Y \min_X \varphi(x, y) = \min_X \max_Y \varphi(x, y) = M^*$$

A következőkben egy iterációs eljárást definiálunk. Kiinduláskor legyenek $x^1 \in X$ és $y^1 \in X$ tetszőlegesek.

Az n-edik iterációs lépésben ismert $x^1, x^2, \ldots, x^n \in X$ és $y^1, y^2, \ldots, y^n \in Y$ birtokában tekintsük a következő két programozási feladatot

$$\begin{gathered} M \geq \varphi(x, y^i), \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ x \in X \\ \min M \end{gathered} \tag{5}$$

és

$$\begin{gathered} m \leq \varphi(y^i, y), \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ y \in Y \\ \max m. \end{gathered}$$

φ folytonossága és X, illetve Y kompakt volta folytán mindkét feladatnak van optimális megoldása. Legyenek (M^n, x^{n+1}), illetve (m^n, y^{n+1}) ilyenek, amelyek meghatározásával az iterációs lépés végetér.

2. lemma. $M^n \leq M^{n+1} \leq M^* = m^* \leq m^{n+1} \leq m^n$ és $\lim M^n = \lim m^n = M^* = m^*$.

Legyen most $\varphi(x, y)$ konvex-konkáv. Akkor a Kakutani tétel folytán teljesül $M^* = m^*$. Továbbá ebben az esetben (5) és (6) konvex programozási feladat, amelyekre nyilvánvalóan teljesül a Slater-féle regularitási feltétel. Jelöljük az (5) és (6)-beli első feltétel csoporthoz tartozó optimális, a Kuhn–Tucker nyeregpont feltételeket kielégítő multiplikátorokat $\mu^{1n}, \mu^{2n}, \ldots, \mu^{nn}$, $\lambda^{1n}, \lambda^{2n}, \ldots, \lambda^{nn}$-nel.

3. lemma. Az $\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda^{in} x^i, \sum_{i=1}^{n} \mu^{in} y^i \right\}$ sorozat tetszőleges torlódási pontja nyeregpontja φ-nek.

A 3. részbeli alkalmazásnál, ahol $\varphi(x, y)$ egy programozási feladat optimumértéke lesz, nincs explicit formulánk a $\varphi(x, y^i)$ és $\varphi(x^i, y)$ függvényértékek felírására. Ezért az (5)–(6) feladatpár helyett – amint az a nem-lineáris programozásban egyébként is gyakran szokásos – tekintsük annak linearizált alakját. Ezen feladatpár felhasználásakor már nem jelentkezik az említett probléma.

Ennek az eljárásnak az n-edik iterációs lépésében ismert $x^1, x^2, \ldots, x^n \in X$ és $y^1, y^2, \ldots, y^n \in Y$ birtokában tekintsük a következő két programozási feladatot

$$\begin{gathered} M \geq \varphi(x^i, y^i) + \nabla_X \varphi(x^i, y^i)(x - x^i), \quad i = 1,2, \ldots, n \\ x \in X \\ \min M \end{gathered} \tag{7}$$

és

$$m \leq \varphi(x^i, y^i) + (y - y^i) \nabla_y \varphi(x^i, y^i) \qquad i = 1,2, \ldots, n$$

(8) $$y \in Y$$

$$\max m$$

Mivel mindkét feladat első feltételcsoportja lineáris korlátozó feltétel és az X és Y kompakt halmazok, ezen feladatoknak is létezik optimális megoldása, amelyeket jelöljön $(\bar{M}^n, x^{n+1})$, illetve $(\bar{\bar{m}}^n, y^{n+1})$.

4. lemma. $\bar{M}^n \leq \bar{M}^{n+1} \leq M^{n+1} \leq M^* = m^* \leq m^{n+1} \leq \bar{\bar{m}}^{n+1} \leq \bar{\bar{m}}^n$ és $\lim \bar{M}^n = \lim \bar{\bar{m}}^n = M^* = m^*$. A $\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda^{in} x^i, \sum \mu^{in} y^i\right\}$ sorozat tetszőleges torlódási pontja nyeregpontja φ-nek, ahol a λ^{in}-nek és μ^{in}-nek (7), illetve (8) első feltételcsoportjához tartozó optimális multiplikátorok.

Mint könnyen látható, az $\{\bar{M}^n\}$ és $\{\bar{\bar{m}}^n\}$ sorozat konvergenciájához nincs szükség arra, hogy φ folytonosan differenciálható legyen. Elegendő, ha (7)-ben és (8)-ban korlátos szubgradiensek szerepeltethetők. A (7)—(8) feladatpár „gyöngébb", mint az (5)—(6) feladatpár, amint azt az $\bar{M}^n \leq M^n$ és $\bar{\bar{m}}^n \geq m^n$ egyenlőtlenségekkel ki is fejeztük. (Bár a jelölésekben csak az optimumértékeket különböztettük meg, ugyanazon $x^1, x^2, \ldots, x^n$ és $y^1, y^2, \ldots, y^n$ mellett a két feladatpárból adódó x^{n+1}-k és y^{n+1}-k különbözőek lesznek, illetve lehetnek.)

Az is igaz, hogy a szóbanforgó sorozatnak konvergenciájához elég, ha az (5)—(6) feladatpár helyett tetszőleges olyan

$$M \geq \bar{\varphi}^n(x, y^i), \quad i = 1,2, \ldots, n$$

(9) $$x \in X$$

$$\min M$$

és

$$m \leq \bar{\bar{\varphi}}^n(x^i, y), \quad i = 1,2, \ldots, n$$

(10) $$y \in Y$$

$$\max m$$

feladatpárt tekintünk, ahol $\bar{\varphi}^n(x, y) \leq \varphi(x, y) \leq \bar{\bar{\varphi}}^n(x, y)$ és konvergens $\{x^n\} \subseteq X$ és $\{y^n\} \subseteq Y$ sorozatokra $\lim \bar{\varphi}^n(x^n, y^n) = \lim \bar{\bar{\varphi}}^n(x^n, y^n) = \varphi(\lim x^n, \lim y^n)$.

Továbbá, ha ε_x és ε_y rögzített pozitív számok és $(\bar{M}^n, x^{n+1})$-t és $(\bar{\bar{m}}^n, y^{n+1})$-t úgy definiáljuk, mint (9), ill. (10) olyan lehetséges megoldásait, amelyekre egyrészt $\bar{M}^n$ (9) optimumértékénél legfeljebb ε_x-szel nagyobb, $\bar{\bar{m}}^n$ pedig (10) optimumértékénél legfeljebb ε_y-nal kisebb, akkor az eljárás lépéseinek véges számú végrehajtása után $\bar{\bar{m}}^n - \bar{M}^n \leq \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon$, ahold $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Minden eddig leírt eljárás párhuzamosan old meg két feladatot, bár egy konkrét megvalósításnál ezek időben eltolódva követik egymást. A módszerek eleve úgy is leírhatók, hogy egyszerre mindig csak egy feladatot oldunk meg, ez ad adatokat a másiknak és viszont. A (9)—(10) feladatpár jelöléseit használva az így adódó eljárás n-edik iterációs lépése:

Adott $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1} \in X$ és $y^1, y^2, \ldots, y^{n-1} \in Y$ esetén megoldjuk az

$$m \leq \bar{\bar{\varphi}}^n(x^i, y), \quad i = 0, \ldots, n-1$$

$$y \in Y$$

$$\max m$$

feladatot, melynek megoldása (m^n, y^n), majd megoldjuk az

$$M \geq \bar{\varphi}^n(x, y^i), \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x \in X$$

$$\min M$$

feladatot, melynek megoldása: (M^n, x^n).

Az így módosított eljárásra hasonló állítások igazak, mint azokra, amelyeket eddig tárgyaltunk. Még megemlíthető, hogy amennyiben az eredeti eljárások bármelyikében egyszer valamelyik x, illetve y érték két egymást követő lépésben megismétlődik, azaz $M^n \geq \varphi(x^{n+1}, y^{n+1})$ vagy $m^n \leq \varphi(x^{n+1}, y^{n+1})$, ezután mindig a két párhuzamos feladat közül váltakozva csak az egyik bővül, így automatikusan ehhez a módosított eljáráshoz jutunk.

Ha elejtjük az $m^* = M^*$ feltételt, úgy minden esetre $m^* \leq M^*$, és az első eljárást alkalmazva nyilván továbbra is igaz lesz, hogy $M^n \leq M^{n+1} \leq M^*$ és $m^n \geq m^{n+1} \geq m^*$. Az viszont általában nem teljesül, hogy $\lim M^n = M^*$ és $\lim m^n = m^*$.

Egy ilyen esetet mutat a következő példa:

Legyen $X = [0, a] \subset R^1$ és $Y = [0, a] \subset R^1$ és

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} b - \dfrac{b}{a}x - \dfrac{b-c}{a}y, & \text{ha } y \leq a - x \\[2ex] -(b-c) + \dfrac{b-c}{a}x + \dfrac{b}{a}y, & \text{ha } y > a - x, \end{cases}$$

ahol $a > 0$, $b > 0$, $0 < c < b$ (1. ábra).

Így a $\lambda = \dfrac{b}{2b-c}$ jelöléssel $m^* = c = \dfrac{2\lambda-1}{\lambda} b$ és $M^* = \lambda b$, és valóban teljesül, hogy $m^* < M^*$.

Legyen $x^0 = a$ és haladjunk az utoljára leírt eljárás szerint. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$y^n = \lambda(a - x^{n-1})$$

$$m^n = \lambda \frac{b(a - x^{n+1})}{a}$$

és

$$x^n = (1-\lambda)(a - y^n)$$

$$M^n = c + \frac{(b-c)(1-\lambda)}{a}(a - y^n)$$

azaz az y^n-ek sorozata monoton csökken, az x^n-ek sorozata pedig x^1-től kezdve monoton nő. A limeszpontokat (x^∞, y^∞)-nel, illetve M^∞ és m^∞-nek jelölve

$$M^\infty = m^\infty = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda + 1} b = \varphi(x^\infty, y^\infty)$$

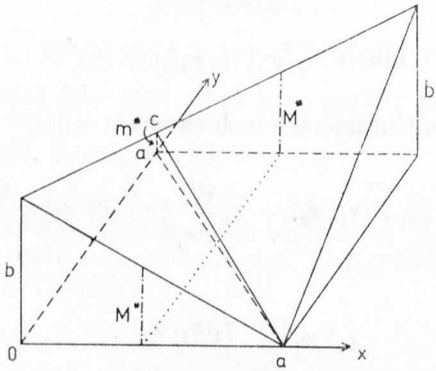
és

$$m^* < m^\infty = M^\infty < M_*$$

Az, hogy $m^\infty = M^\infty$ nem véletlen, ugyanis ez mindig teljesül, ha az eljárás ,,nem áll meg'', vagyis mindig keletkezik új x és y érték, és ezek sorozata konvergens. Tekintsük ugyanis az egyik feladatot:

$$m \leq \varphi(x^i, y), \qquad i = 1, \ldots, n-1$$
$$y \in Y$$
$$\max m$$

megoldása legyen (m^n, y^n). Így minden n-re teljesül, hogy $m^n \leq \varphi(x^{n-1}, y^n)$, amiből következik, hogy $m^\infty \leq \varphi(x^\infty, y^\infty)$.



1. ábra

Másrészt, ha a következő feladat által adott x^n érték segítségével definiált $m \leq \varphi(x^n, y)$ feltétellel kiegészítjük a feladatot, csak akkor kapunk az előzőtől különböző y^{n+1} értéket, ha $m^n > \varphi(x^n, y^n)$, amiből $m^\infty \geq \varphi(x^\infty, y^\infty)$ és így $m^\infty = \varphi(x^\infty, y^\infty)$. Hasonlóképp látható,hogy $M^\infty = \varphi(x^\infty, y^\infty)$.

3. Dekompozíciós eljárások

A korábbiak szerint az (1.1)—(1.6) feltételek teljesülése esetén (1) otpimum-értéke egy folytonos konvex-konkáv függvény nyeregpontértékével egyezik meg. Mint már említettük, az (5) és (6) feladatokkal leírt 2.-beli eljárás alkalmazását lehetetlenné teszi, hogy, lévén a szóbanforgó függvény egy programozási feladat optimumértéke, általában nincs explicit formulánk az (5) és (6)-beli $\varphi(x, y^i)$ és $\varphi(x^i, y)$ függvényértékek felírására. A (10) és (11) feladatokkal leírt programozási feladatra történő áttérés értelme éppen abban van, hogy további feltételeket bevezetve az ott előforduló $\nabla_x \varphi(x^i, y^i)$ és $\nabla_y \varphi(x^i, y^i)$ kifejezésekre már megadhatók megfelelő formulák.

5. lemma. Az (1.1)–(1.6) feltételeket kiegészítendő, tegyük fel, hogy

(5.1) $F(x_1, x_2)$, $f_1(x_1, x_2)$ és $f_2(x_1, x_2)$ kétszer folytonosan differenciálhatók és x_2-ben szigorúan konvex függvények;

(5.2) minden $(x_1 y_1) \in X_1' \times Y_1'$ esetén, ahol $X_1 \times Y_1 \subset \operatorname{int}(X_1' \times Y_1')$ esetén létezik a megfelelő (3) feladat optimális megoldása és ehhez a Kuhn–Tucker feltételeket kielégítő olyan y_2, amelyre szigorú komplementerítás igaz (azaz ha f_2 valamelyik komponensére az optimális megoldásnál egyenlőség teljesül, akkor y_2 ezen komponense pozitív);

(5.3) minden $(x_1, y_1) \in X_1' \times Y_1'$ esetén a megfelelő (3) feladat optimális megoldásánál a $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}$ Jacobi-mátrix azon sorai, amelyek az egyenlőségre teljesülő feltételeknek felelnek meg lineárisan függetlenek.

Akkor $(x_1, y_1) \in X_1 \times Y_1$ esetén azon $\varphi(x_1, y_1)$ függvényre, melynek értéke az

$$f_2(x_1, x_2) \leq 0$$

$$\min F(x_1, x_2) + y_1 f_1(x_1, x_2)$$

programozási feladat optimumértékével egyenlő:

$$\nabla_{x_1} \varphi = \nabla_{x_1} F(x_1, x_2) + y_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + y_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) \tag{11}$$

és

$$\nabla_{y_1} \varphi = f_1(x_1, x_2). \tag{12}$$

A (11) és (12) formulák jobboldalain álló kifejezések korábbi feltevéseink folytán folytonosak $X_1 \times Y_1$-n. Mielőtt a 2.-beli második eljárás alkalmazásaként adódó és (1)-t megoldó dekompozíciós eljárást megfogalmaznánk, egy egyszerű megjegyzést szeretnék tenni.

Nyilvánvaló, hogy a 2. részbeli eljárások érvényességén nem változtatunk, ha a (6) és (8) feladatokat egy $m \leq \varphi(x^0, y)$ feltétellel bővítjük, ahol x^0 az X tetszőleges eleme. Legyen az eljárás következő alkalmazásánál x^0 az (1.4)-beli x_1^0. Ismét nem romlik el semmi, ha ennél az alkalmazásnál az $m \leq \varphi(x^0, y)$ feltételt az $m \leq F(x_1^0, x_2^0) + y f_1(x_1^0, x_2^0)$ feltétellel helyettesítjük. Amit ezzel elérünk, hogy a (8)-nak most megfelelő feladatban az $y_1 \in Y_1$ feltétel helyettesíthető az $y_1 \geq 0$ feltétellel: az így adódó y_1-k egy korlátos halmaz elemei lesznek. (Lásd: [1]. Amit tettünk, tulajdonképpen formális: az [1]-beli tétel bizonyításánál ugyanarról van szó, mint [4]-ben, amelynek alapján a teljes nem-negatív ortáns egy kompakt konvex Y_1 részére szorítkozhattunk.)

Tekintsük az alábbi eljárást, amelynek n-edik iterációs lépése a következő: Ha $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n \in X_1$ és $y_1^1, y_1^2, \ldots, y_1^n \geq 0$ már ismertek, $x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n$ és $y_2^1, y_2^2, \ldots, y_2^n$ pedig a megfelelő (3) feladatok optimális megoldásai és azokhoz tartozó multiplikátorok, oldjuk meg először az

$$M \geq F(x_1^i, x_2^i) + y_1^i f_1(x_1^i, x_2^i) + \left(\nabla_{x_1} F(x_1^i, x_2^i) + y_1^i \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^i, x_2^i) + \right.$$

$$\left. + y_2^i \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^i, x_2^i) \right) (x_1 - x_1^i) \qquad i = 1,2, \ldots, n$$

(13)
$$x_1 \in X_1$$
$$\min M$$

(konvex) és az

$$m \geq F(x_1^i, x_2^i) + y_1 f_1(x_1^i, x_2^i), \qquad i = 0,1, \ldots, n$$

(14)
$$y_1 \geq 0$$
$$\max m$$

(lineáris) programozási feladatokat. A feladatok optimális megoldásai legyenek (M^n, x_1^{n+1}), illetve (m^n, y_1^{n+1}), (14) duálisának optimális megoldása pedig $\lambda^{0n}, \lambda^{1n}, \ldots, \lambda^{nn}$.

Ezután x_1^{n+1} és y_1^{n+1} birtokában oldjuk meg az

(15)
$$f_2(x_1^{n+1}, x_2) \leq 0$$
$$\min F(x_1^{n+1}, x_2) + y_1^{n+1} f_1(x_1^{n+1}, x_2)$$

(konvex) programozási feladatot. Ennek optimális megoldása x_2^{n+1}, a hozzá tartozó — Kuhn—Tucker feltételeket kielégítő — multiplikátor rendszer y_2^{n+1}, amivel az n-edik iterációs lépés végetér.

Tétel: Tegyük fel, teljesülnek az (1.1)—(1.6) és (5.1)—(5.3) feltételek. Akkor a (13), (14) és (15) feladatokkal definiált eljárásban az $\{M^n\}$ sorozat monoton nem-csökkenve, az $\{m^n\}$ sorozat monoton nem-növekedve (1) φ^* optimumértékéhez konvergál. Továbbá

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^{in} x_1^i, \sum_{i=0}^{n} \lambda^{in} x_2^i \right)$$

(1)-nek olyan lehetséges megoldása, amelyre

$$F\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^{in} x_1^i, \sum_{i=0}^{n} \lambda^{in} x_2^i \right) \leq m^n,$$

tehát

$$\lim F\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^{in} x_1^i, \sum_{i=0}^{n} \lambda^{in} x_2^i \right) = \varphi^*.$$

A (6.1)—(6.3) feltevések lényegesen gyengíthetők abban a továbbiakban vizsgált esetben, ha

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) + F_2(x_2)$$

$$f_1(x_1, x_2) = f_{11}(x_1) + f_{12}(x_2)$$

és

$$f_2(x_1, x_2) = f_{21}(x_1) + f_{22}(x_2),$$

ahol az (5.1)—(5.3) feltevéseket a következőkkel helyettesítjük

(5.1') $F_1(x_1)$, $f_{11}(x_1)$ és $f_{21}(x_1)$ folytonosan differenciálható konvex függvények, $F_2(x_2)$, $f_{12}(x)$, $f_{22}(x_2)$ pedig folytonos konvex függvények

(5.2') minden $\bar{x}_1 \in X_1$ és $\bar{y}_1 \geq 0$ esetén az

$$f_{22}(x_2) \leq -f_{21}(\bar{x}_1)$$

$$\min F_2(x_2) + \bar{y}_1 f_{12}(x_2) \tag{16}$$

programozási feladatnak van optimális megoldása és teljesül a Slater-féle regularitási feltétel, azaz van olyan $x_2^0(\bar{x}_1)$, amelyre

$$f_{22}[x_2^0(\bar{x}_1)] < -f_{21}(\bar{x}_1)$$

(amiből következik, hogy léteznek a Kuhn–Tucker nyeregpont feltételeket kielégítő multiplikátorok).

6. lemma. Az (5.1') és (5.2') feltevések mellett

$$\varphi(x_1^i, y_1) \leq \varphi(x_1^i, y_1^i) + (y_1 - y_1^i) f_1(x_1^i, x_2^i) \tag{17}$$

és

$$\varphi(x_1, y_1^i) \geq \varphi(x_1^i, y_1^i) + \left\{\nabla_{x_1} F_1(x_1^i) + y_1^i \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1}(x_1^i) + y_2^i \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1}(x_1^i)\right\}(x_1 - x_1^i), \tag{18}$$

ahol x_2^i és y_2^i az x_1^i és y_1^i-hez tartozó (16) feladat optimális megoldása és a hozzá tartozó multiplikátorok.

A 2.-beli második eljárás alkalmazásához elegendő, ha (17) és (18) jobboldalán megjelenő

$$f_1(x_1^i, x_2^i) = f_{11}(x_1^i) + f_{21}(x_2^i)$$

és

$$\nabla_{x_1} F_1(x_1^i) + y_1^i \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1}(x_1^i) + y_2^i \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1}(x_1^i)$$

kifejezések korlátosak. Eddigi feltevéseink ezt y_2^i kivételével nyilvánvalóan biztosítják valamennyi fellépő tagra. (5.2') alapján azonban – (4)-hez hasonlóan –

$$\|y_2^i\| \leq c \frac{F_2[x_2^0(x_1^i)] + y_1^i f_{21}[x_2^0(x_1^i)] - F_2(x_2^i) - y_1^i f_{21}(x_2^i)}{\|f_{22}[x_2^0(x_1^i)]\|}$$

és itt a jobboldal nyilván korlátos $(x_1^i, y_1^i) \in X_1 \times Y_1$ esetén.

Így a szeparábilis esetre is megfogalmazható a megfelelő dekompozíciós eljárás és az erre vonatkozó korábbinak megfelelő tétel.

Egyébként erre az esetre [3] is levezet egy dekompozíciós eljárást. Ez csak annyiban különbözik az általunk javasolttól, hogy abban az x_1^{n+1} meghatározására szolgáló feladatban

$$M \geq F_2(x_2^i) + y_1^i f_{12}(x_2^i) + y_2^i f_{22}(x_2^i) + F_1(x_1) + y_1^i f_{11}(x_1) + y_2^i f_{21}(x_1)$$

alakú feltételek szerepelnek. A jobboldalon álló kifejezés ugyancsak $\varphi(x_1, y_1^i)$ egy – az általunk használtnál egyébként erősebb – alsó becslése.

Ily módon $\varphi(x_1, y_1^i)$ ezen közelítésével dolgozva a [3]-beli eljárás is beilleszthető az általunk tárgyalt keretekbe, megfogalmazhatók azon feltételek, amelyek konvergenciáját biztosítják. Ez a megjegyzés azért nem teljesen érdektelen, mert [3]-ban az eljárás származtatásakor a mi tárgyalásmódunk megkívánta feltételeknél lényegesen erősebbek szerepelnek és [3] ezen feltételek mellett sem bizonyítja az eljárás konvergenciáját.

(Beérkezett: 1976. január 12.)

IRODALOM

1. Dantzig, G. B.: *Linear programming and extensions.* 476–477. o., Princeton University Press, 1963.
2. Fiacco, A. V.: *Sensitivity analysis for nonlinear programming using penalty methods.* Report paper, The George Washington University, 1974.
3. Kronsjö, T. O. M.: *Decomposition of nonlinear convex separable economic system in primal and dual direction.* R. Fletcher (ed.): Optimization, London, 1969. Academic Press. 85–97. o.
4. Oettli, W.: *Eine allgemeine Symmetrische Formulierung des Dekompositionsprinzips für duale Paare nichtlineare Minmax- und Maxmin Probleme.* Würzburg, 1974. Zeitschrift für Operations Research 18/1–18, Physica-Verlag.
5. Stahl, J.: *A kétszeresen összekapcsolt lineáris programozási feladatról.* Szigma, VII/25–40. o., 1974.
6. Somos, E.–Stahl, J.: *Dekompozíciós eljárások nemlineáris programozási feladatokról.* INFELOR, 1975. (Sokszorosítva)

DECOMPOSITION METHODS FOR NON-LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

The first part of the paper deals with methods producing the saddle point value as the limit of monotonically increasing and decreasing sequences derived from the iterated solution of problems (5) and (6). The method can be modified in such a way that the value of the function φ and of its gradients is to be calculated at one point only in each iteration.

Under certain conditions the optimum value of the programming problem:

$$f_1(x_1, x_1) \leq 0$$

$$f_2(x_1, x_2) \leq 0$$

$$x_1 \in X_1$$

$$\min F(x_1, x_2)$$

coincides with the saddle point value of function

$$\varphi(x_1, x_2) = \min_{x_2} \{F(x_1, x_2) + y_1 f_1(x_1, x_2) \colon f_2(x_1, x_2) \leq 0\}$$

Though generally this function cannot be expressed explicitly, its values or its gradients with respect to x_1 and y_1 may be determined in certain cases. Thus, applying the modified procedure described in the first part we obtain a decomposition method, which is discussed at length in the second part of the article.

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ОБЛАСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Первая часть статьи занимается определением значения функции в седловой точке по максимальной и минимальной величине.

$$\max_{y \in Y} \min_{x \in X} \varphi(x, y)$$

В статье рассматривается такой способ, который позволяет определить значение в седловой точке в качестве предельной величины монотонно повышающейся и понижающейся серии путем многократного решения заданий (5) и (6). Этот метод может быть изменен таким образом, что в ходе каждой итерации функцию φ и значение её градиентов нужно определить только в одной точке.

При определенных условиях оптимальное значение задачи программирования

$$f_1(x_1, x_2) \leq 0$$

$$f_2(x_1, x_2) \leq 0$$

$$x_1 \in X_1$$

$$\min F(x_1, x_2)$$

совпадает со значением функции

$$\varphi(x_1, x_2) = \min_{x_2} \{F(x_1, x_2) + y_1 f_1(x_1, x_2) : f_2(x_1, x_2) \leq 0\}$$

в её седловой точке. Хотя эту функцию нельзя записать в явной форме, её значеня, то есть градиенты по x_1 и в определенных случаях могут быть определены. Таким образом применяя измененный метод, приведенный в первой части, мы получаем декомпозиционный метод, описанием которого занимается вторая часть данной статьи.