A. Ciampi

Egy két-termékes gazdaság egyszerű dinamikus modelljének megoldása

1. Bevezetés

Ezekben az években, a gazdasági rendszerek *statikus modelljeinek* [4] jelentős sikere után, nagy erőfeszítést fordítottak a *dinamikus gazdasági modellekre.* Általában a gazdaságot mint n termék együttesét definiáljuk; mindegyik terméket *mennyiségével*, x_i-vel, és *árával*, p_i-vel írjuk le. Így egy (x, p) pont az $R^n \times R^n$ térben a gazdaság állapotát írja le adott időben, ahol $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Egy gazdaság pályáját a következő típusú differenciál egyenlet rendszer írja le:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x; p) \\ \dot{p} &= G(x; p) \end{aligned} \tag{1.1}$$

ahol a pont az időszerinti deriválást jelöli. Az (1.1) egyenlet formája azt a mechanikai alapfeltevéséhez hasonló feltevést fejezi ki, hogy a termékek *mennyisége* és *ára* adott pillanatban elegendő a *későbbi pillanatok mennyiségeinek és árainak* teljes meghatározásához. Az F és G függvények specifikálása szolgáltatja a *dinamikus modellt*.

E dolgozatban szereplő modell speciális esete $(n = 2)$ egy Bródy által javasolt modellnek [1]. Bródy modellje az *egyszerű újratermelés*, azaz a stagnáló rendszer mozgását írja le. Ez a rendszer nem tartalmaz tőkefelhalmozást, ezért teljesen meghatározza egy $A = (a_{ij})$ $[i, j = 1, 2, \ldots, n]$ mátrix, amelynek nem-negatív elemei vannak — a következő értelmezéssel: a_{ij} a j-edik termék egységének termeléséhez szükséges i-edik termék mennyisége. Az A mátrixot a folyó ráfordítások mátrixának hívjuk; jelentését és használatát részletesen leírja [2] és [8].

Bródy modelljének alapfeltevései a következők:

(*a*) az i-edik termék relatív növekedési üteme, $\dot{x}_i/x_i$, egyenlő a relatív többletprofittal: $[p_i - (pA)_i]/p_i$-vel.

(*b*) az i-edik termék árának relatív csökkenése, $-\dot{p}_i/p_i$, egyenlő a relatív többlet-termeléssel: $[x_i - (Ax)_i]/x_i$-vel.

Legyen $C = I - A$, $C = (c_{ij})$. Ekkor ezek a feltevések az alábbi alakot öltik:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\dot{x}_i}{x_i} &= \frac{\sum_{k=1}^{n} c_{ki}\, p_k}{p_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ \frac{\dot{p}_i}{p_i} &= -\frac{\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, x_k}{x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \right. \tag{1.2}$$

Esetünkben, ahol $n = 2$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{x}_1}{x_1} = c_{11} + c_{21}\dfrac{p_2}{p_1} \\ \dfrac{\dot{x}_2}{x_1} = c_{12}\dfrac{p_1}{p_2} + c_{22} \\ \dfrac{\dot{p}_1}{p_1} = -c_{11} - c_{12}\dfrac{x_2}{x_1} \\ \dfrac{\dot{p}_2}{p_2} = -c_{21}\dfrac{x_1}{x_2} - c_{22} \end{cases} \tag{1.3}$$

Mi föltesszük, hogy mind a folyó ráfordítások mátrixa, mind az egyensúlyi mennyiségi arányok *pozitívak*. Ezek a feltevések a következő, együtthatóinkra vonatkozó, megszorításokban tükröződnek:

$$c_{11}, c_{22} > 0, \; c_{21}, c_{12} < 0 \tag{1.4}$$

Egy két-termékes gazdaság természetesen nagyon irreális dolog. Gazdaságunkat egy Robinson Crusoe típusú gazdaságnak tekinthetjük [2], vagy másképpen szemlélve, olyan gazdaságnak, amelynek termékei — végletesen leegyszerűsítve — két tág osztályba tartoznak: pl. ,,mezőgazdasági'' és ,,ipari'' osztályba. Ez utóbbi értelmezésben x_1 és p_1 rendre az összes mezőgazdasági termék mennyisége és ára lenne, míg x_2 és p_2 rendre az összes ipari termék mennyisége és ára. Ekkor egy sztochasztikus modell megfelelőbb lenne. A bemutatásra kerülő megoldás azonban így is érdekes, mint az általános modell megértéséhez vezető első lépés. Az általános modell taglalása a jelen pillanatban nagyon nehéznek látszik, méginkább ilyen a megoldása. Remélhető, hogy ez a vizsgálat hasonlóan hasznos lesz az általános vizsgálatnál, ahogyan a kétdimenziós Volterra—Lotka modell hasznos volt az n egymásraható populáció dinamikájának tanulmányozásában.

2. Az (1.3) egyenlet megoldása a változók visszavezetésével

A modellt $n = 2$ esetén egy speciális szimmetria teszi megoldhatóvá. Valóban, az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy

$$c_{12} = c_{21} = c_0 \tag{2.1}$$

mivel $c_{12} \neq c_{21}$ esetén az alábbi egyszerű transzformáció (a mennyiségi és az ár mértékegységek megváltoztatása):

$$\tilde{p}_1 = \sqrt{-c_{12}}\,p_1, \quad \tilde{x}_1 = \sqrt{-c_{21}}\,x_1, \quad \tilde{p}_2 = \sqrt{-c_{21}}\,p_2, \quad \tilde{x}_2 = \sqrt{-c_{12}}\,x_2,$$

(1.3)-at a kívánt alakra hozza, ahol $c_0 = -\sqrt{c_{12}c_{21}}$. (Megjegyezzük, hogy (1.4)-et is fölhasználtuk.)

Most új változókat vezetünk be:

$$\begin{cases} u = \ln \dfrac{x_1}{x_2} \\ \\ v = \ln \dfrac{p_1}{p_2} \end{cases} \tag{2.2}$$

és újra szemügyre vesszük (1.3)-at. Kivonva a második egyenletet az elsőből és a negyediket a harmadikból, és felhasználva u és v változókat, a következő másodrendű differenciál-egyenletrendszert kapjuk

$$\begin{cases} \dot{u} = A + B \sinh v \\ \dot{v} = -(A + B \sinh u) \\ A = c_{11} - c_{22}, \ B = -2c_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

(2.3) megoldásai könnyen adják (1.3)-éit:

2.1 Tétel

(1.3) megoldása adott $[x_1(0), x_2(0), p_1(0), p_2(0)]$ esetén

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) \exp \left[c_{11}t + c_0 \int\limits_0^t \exp\left(-\bar{v}(s)\right) ds\right] \\ x_2(t) = x_2(0) \exp \left[c_{22}t + c_0 \int\limits_0^t \exp\left(\bar{v}(s)\right) ds\right] \\ p_1(t) = p_1(0) \exp \left[-c_{11}t - c_0 \int\limits_0^t \exp\left(-\bar{u}(s)\right) ds\right] \\ p_2(t) = p_2(0) \exp \left[-c_{22}t - c_0 \int\limits_0^t \exp\left(\bar{u}(s)\right) ds\right], \end{cases} \tag{2.4}$$

ahol $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$ (2.3) megoldása az alábbi kezdeti feltételek esetén:

$$\bar{u}(0) = \ln \frac{x_1(0)}{x_2(0)}, \qquad \bar{v}(0) = \ln \frac{p_1(0)}{p_2(0)}.$$

Ebből a tételből közvetlenül adódik az a fontos következtetés, hogy pozitív kezdeti árak és mennyiségek pozitívak maradnak, mint ahogy ezt bármely értelmes dinamikus modellben elvárhatjuk.

Most a (2.3) egyszerűsített rendszer tanulmányozására térünk át. E rendszernek van *egyensúlyi pontja:* (α, α), ahol $\alpha = \sinh^{-1}(-A/B)$, amely megfelel az eredeti (1.3) rendszer *egyensúlyi pályájának*, azaz (1.3) egyensúlyi pálya minden pontjának u és v koordinátában (α, α).

2.2. Tétel

(2.3) megoldásai periodikus időfüggvények. Pályáik az (u, v)-síkban zárt görbék, központjuk az egyensúlyi pont, egyenletük

$$B\cosh u + A\, u + B\cosh v + A\, v = \text{konstans}.$$

Az egyensúlyi pont tehát *stabil*, ténylegesen *középpont*.

Bizonyítás

Az integrál-görbe egyenletét (2.3)-ból kapjuk, mint

$$\frac{du}{dv} = -\frac{A + B\sinh v}{A + B\sinh u}.$$

megoldását.

Legyen $\varphi(u) = B\cosh u + A\,u$, ekkor a körpálya egyenletei

$$\varphi(u) + \varphi(v) = \text{konstans}$$

alakúak, ahol $\varphi(x)$ minimumhelye $\bar{x} = \alpha = \sin h^{-1}(-A/B)$. Geometriai megfontolásokból könnyen megállapíthatjuk, hogy ezek az egyenletek az (α, α) egyensúlyi pont körüli zárt görbék egyenletei. Másik bizonyítás adható a Poincare—Bendixon Tétel [6] felhasználásával. (Vegyük észre a hasonlóságot a Volterra—Lotka modellel!)

2.1. Megjegyzések. (2.3) egyenletek Hamilton-típusúak:

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} \\[2ex] v = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}, \end{cases}$$

ahol $\mathcal{H}(u, v) = \varphi(u) + \varphi(v)$.

2.2. Megjegyzés.

$$\begin{cases} x = (u + v)/2 \\ y = (u - v)/2 \end{cases} \tag{2.7}$$

transzformációval (2.5) integrál-görbe

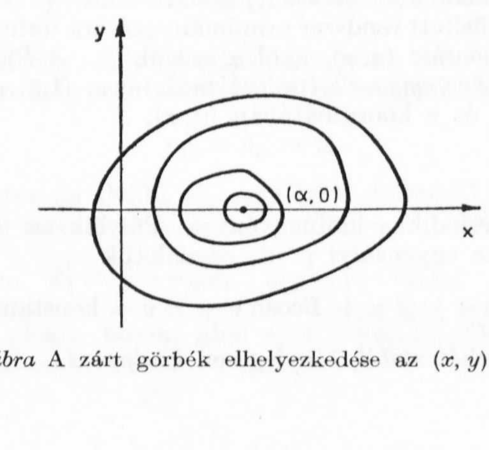
$$B\cosh x \cosh y + Ax = \text{konstans} = H \tag{2.7}$$

alakra hozható, amelyből

$$y = \pm \cosh^{-1} \frac{H - Ax}{B \cosh x} \tag{2.8}$$

képlethez jutunk.

Az (x, y)-síkban a görbék az (α, o) pont körül futnak és szimmetrikusak az x-tengelyre (lásd az 1. Ábrát)



1. ábra A zárt görbék elhelyezkedése az (x, y) síkban

Ezekkel a koordinátákkal könnyen kifejezhetjük az időt x függvényeként. Mivel az (x, y) koordinátákkal

$$\dot{x} = B \sinh y \cosh x,$$

(2.8)-ból adódik, hogy

$$\dot{x} = B \cosh x \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(H - Ax)^2 - B^2 \cosh^2 x}\ ,$$

ahonnan

$$t = \int\limits_{x(0)}^{x} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(H - As)^2 - B^2 \cosh^2 s}}\ . \tag{2.9}$$

(2.8) és (2.9) (2.3)-nak teljes megoldását adja; a (2.8) integrálgörbét azonban numerikusan kell kiszámítani, mint az A és B paraméterek és a kezdeti feltételek függvényét.

3. Az (1.3) megoldásainak viselkedése

Visszatérünk az eredeti (1.3) rendszer megoldásaihoz és a (2.4) egyenleteket úgy írjuk át, hogy a megoldások viselkedése jól lássék. Először figyelembevesszük, hogy csak pozitív kezdeti feltételek érdekelnek bennünket, amikor is a megoldások minden t-re pozitívak — mint azt már megjegyeztük. Ezért felírhatjuk e megoldásokra az alábbiakat:

$$\begin{cases} x_1(t) = X(t)\, e^{\frac{\bar{u}(t)}{2}} \\ x_2(t) = X(t)\, e^{-\frac{\bar{u}(t)}{2}} \\ p_1(t) = P(t)\, e^{\frac{\bar{v}(t)}{2}} \\ p_2(t) = P(t)\, e^{-\frac{\bar{v}(t)}{2}} \end{cases} \tag{3.1}$$

ahol felhasználtuk (2.2)-t és bevezettük az alábbi jelöléseket:

$$\begin{cases} X(t) = \big(x_1(t)\, x_2(t)\big)^{1/2} \\ P(t) = \big(p_1(t)\, p_2(t)\big)^{1/2}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Az u-n és v-n levő felülvonás (2.3) partikuláris megoldására utal, specifikált kezdeti feltételekkel.
Most (2.4)-ből a következő kifejezéseket nyerjük:

$$\begin{cases} X(t) = X(0) \exp \{\tfrac{1}{2} \int\limits_0^t [C - B \cosh \bar{v}(s)]\, \mathrm{d}s\} \\ P(t) = P(0) \exp \{-\tfrac{1}{2} \int\limits_0^t [C - B \cosh \bar{u}(s)]\, \mathrm{d}s\} \\ C = c_{11} + c_{22}, \qquad B = -2c_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Ezután alakítsuk át $X(t)$-t és $P(t)$-t úgy, hogy kiderüljön, hogy ők osszcillációt képviselnek. Legyen

$$K = \frac{1}{T}\int_0^T [C - B\cosh \bar{u}(s)]\,ds = \frac{1}{T}\int_0^T [C - B\cosh \bar{v}(s)]\,ds, \tag{3.4}$$

ahol T a (2.3) periódus ideje. A két integrál egyenlőségét nem túl nehéz bizonyítani, kihasználva, hogy ha $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$ (2.3) megoldása, akkor $(\bar{v}(-t), \bar{u}(-t))$ is az.

Most definiáljuk a következő periodikus függvényeket:

$$\begin{cases} f(t) = \int_0^t [C - B\cosh \bar{u}(s) - K]\,ds \\ g(t) = -\int_0^t [C - B\cosh \bar{v}(s) - K]\,ds, \end{cases} \tag{3.5}$$

Helyettesítsük be (3.4)-et és (3.5)-öt (3.2)-be,

$$\begin{cases} X(t) = X(0)\, e^{\frac{Kt}{2}}\, e^{\frac{f(t)}{2}} \\ P(t) = P(0)\, e^{-\frac{Kt}{2}}\, e^{\frac{g(t)}{2}} \end{cases} \tag{3.6}$$

képleteket kapjuk. Végül eljutottunk a következőhöz:

3.1. Tétel

(1.3) megoldásai (pozitív kezdeti feltételek esetén)

$$\begin{cases} x_i(t) = F_i(t)\, e^{\frac{Kt}{2}} \\ p_i(t) = G_i(t)\, e^{-\frac{Kt}{2}} \end{cases} \qquad i = 1, 2 \tag{3.7}$$

formájúak, ahol $F_i(t), G_i(t)$ t-nek periódikus függvényei, T periódus-idővel, amely egyenlő (2.3) megfelelő megoldásának periódus-idejével.

Bizonyítás

Elegendő a következő összefüggéseket felírni:

$$\begin{cases} F_1(t) = X(0)\exp\left[\frac{f(t) + \bar{u}(t)}{2}\right] \\ F_2(t) = X(0)\exp\left[\frac{f(t) - \bar{u}(t)}{2}\right] \\ G_1(t) = P(0)\exp\left[\frac{f(t) + \bar{v}(t)}{2}\right] \\ G_2(t) = P(0)\exp\left[\frac{f(t) - \bar{v}(t)}{2}\right] \end{cases} \tag{3.8}$$

és felhasználni (3.1)-et és (3.6)-ot.

A fenti eredmény szerint K értéke meghatározza gazdasági modellünk viselkedését. Három esetet kell megkülönböztetnünk:

(i) $K > 0$. Termékeink *mennyisége* exponenciálisan csökkenő amplitúdóval oszcillál az egyensúlyi pálya körül; *áraink* viszont exponenciálisan növekvő amplitúdóval oszcillálnak. A gazdaság a valóságban leáll az égbeszökő árak miatt.

(ii) $K < 0$. A helyzet az ellenkező: valóságban a termelt mennyiségek a végtelenhez tartanak, míg az árak nullához.

(iii) $K = 0$. Mind az árak, mind a mennyiségek csillapítás nélkül oszcillálnak az egyensúlyi pálya körül, T periódus-idővel.

Vegyük észre, hogy $T \ll 1/K$ esetén az oszcillációk jó közelítéssel, nem túl hosszú időszakra, csillapítás nélkülinek vehetők.

K értéke meglehetősen összetett módon függ modellünk paramétereitől *és* a kezdeti feltételektől. A következő tétel némi tájékoztatást ad e függésről; megmutatja, hogy K felvesz pozitív, negatív és nulla értékeket.

3.2. Tétel

(i) Ha $c_{11} + c_{22} \leq -2c_0$, akkor $K < 0$ *minden* kezdeti feltételnél.

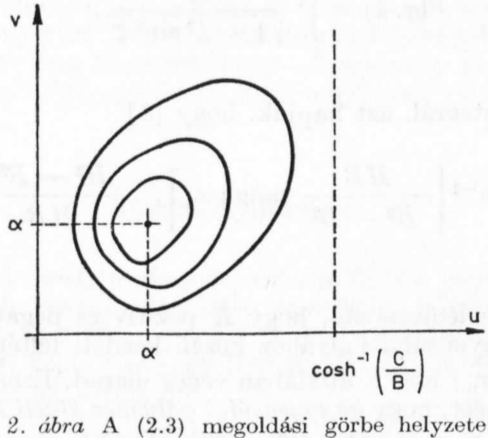
(ii) Ha $c_{11} + c_{22} > \sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_0^2}$, akkor van olyan kezdeti feltétel, amelynél $K > 0$.

(iii) A paraméterek és a kezdeti feltételek választhatók úgy, hogy $K = 0$ teljesüljön.

Bizonyítás

(i) Mérlegeljük (3.4)-ben K definícióját! Világos, hogy ha az integrandus negatív, akkor $K < 0$. Biztos, hogy ez a helyzet, ha $C/B \leq \cosh u(t)$ minden t-re. $C/B \leq 1$ esetén ez teljesül, ahonnan következik (i).

(ii) Ha a (ii) feltétele teljesül, akkor $\cosh^{-1} C/B > \alpha = \sinh^{-1}(-A/B)$. De ekkor választhatunk olyan kezdeti feltételt, hogy a megfelelő (2.3) megoldási görbe teljesen benne van az $u = \cosh^{-1}(C/B)$ egyenesétől balra fekvő félsíkban. (Lásd a 2. ábrát!) Minden ilyen görbén $\cosh u(t) < C/B$ minden t-re, ahonnan $K > 0$.



2. ábra A (2.3) megoldási görbe helyzete (Feltettük, hogy $\alpha > 0$. Hasonlóan okoskodhatunk, ha $\alpha < 0$.)

(iii) A differenciál-egyenletek általános tételei szerint [3] K folytonos függvénye c_{11}, c_{22} és c_0 paramétereknek valamint a kezdeti feltételeknek. A (iii) eredmény következik az (i)-ből és a (ii)-ből valamint az általánosított közbülső érték tételből [7].

Két alap-integrál

Mint láttuk, K és T értéke fontos tájékoztatást nyújt rendszerünkről. Tanulmányozni fogjuk e mennyiségek viselkedését.

A (2.6)-ban definiált x és y változót felhasználva, némi számolás után a következő képleteket kapjuk:

$$T = 2\int\limits_{x_0}^{x_0'} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(H - Ax)^2 - B^2 \cosh^2 x}} \tag{4.1}$$

$$K = \frac{2}{T}\int\limits_{x_0}^{x_0'} \left[\frac{C - H + Ax}{\sqrt{(H - Ax) - B\cosh x}} + \tanh x\right] \mathrm{d}x, \tag{4.2}$$

ahol x_0 és x_0' a (2.7) görbe metszéspontja az x-tengellyel (alkalmas kezdeti feltételeknél).

Vegyük észre, hogy mindkét integrál improprius integrál — az integrálási határoknál szingularitás lép föl; mivel ezek a szingularitások $x - x_0$ és $x_0 - x$ nagyságrendűek, az integrálok konvergálnak [9].

A $c_{11} = c_{22}$ esetben, vagy ami ugyanaz: $A = 0$, az integrálok zárt alakban előállíthatók. Legyen

$$F(\varphi, k) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta}},$$

elsőfajú elliptikus integrál, azt kapjuk, hogy [5]

$$\begin{cases} T = \dfrac{4B}{H} F\left(\sin^{-1}\left[\dfrac{HB}{H^2 - B^2} \operatorname{tangh} x_0\right], \quad \dfrac{H^2 - B^2}{HB} \operatorname{tangh} x_0\right). \\ K = C - H \end{cases} \tag{4.3}$$

(4.3)-ból világosan leolvasható, hogy K pozitív és negatív értékeket egyaránt fölvesz. Az egyensúlyi pályához közeli kezdeti feltételeknél láthatjuk, hogy $T = \mathcal{O}(\sqrt{x_0 - x_0})$ míg K általában véges marad. Ezért levonhatjuk azt a fontos következtetést, hogy *az egyensúlyi pályához közeli kezdeti feltételeknél, azaz ha* $x_0 - \alpha = \varepsilon$ *kicsiny, akkor* $KT = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, *tehát megoldásaink közelítően csillapítás nélküli oszcillációk.*

Bár a számítások hosszadalmasak, nem nehéz belátni, hogy az általános esetben is

$$\begin{cases} x_0 \to x_0' \\ T = \mathcal{O}\left(\sqrt{x_0' - x_0}\right) \\ K < \infty\,, \end{cases} \tag{4.4}$$

ha $x_0 \to \alpha$. Ezért a fenti következtetés általában is igaz.

Összegzés és következtetések

Összegezzük modellünk fő vonásait:

(a) Minden kezdeti feltételnél a két mennyiség és a két ár hányadosa T periódus-idővel oszcillál, amelyet a (4.1) egyenlet ad meg.

(b) A mennyiségek és az árak időbeli viselkedését a 3.1 Tétel írja le: Vagy az árak oszcillálnak csillapítva, míg a mennyiségek exponenciálisan növekvő amplitúdóval oszcillálnak; vagy fordítva. Ez a (4.2) egyenlet által adott K szám előjelétől függ. K függ a modell paramétereitől *és* a kezdeti feltételektől. (Lásd a 3.2. Tételt!) Lehetséges $K = 0$ — speciális paraméterekre és kezdeti feltételekre; ebben az esetben, maguk az árak és a mennyiségek, nemcsak hányadosuk, oszcillál T periódus-idővel. Azonban a paraméterek vagy a kezdeti feltételek tetszőleges kicsiny változása K-t pozitívvá vagy negatívvá teheti, azaz az oszcillációkat rendre csillapítottá ill. erősítetté teheti. Egy *hosszútávon* vagy mindkét ár nullához tart és a termékek költség nélkül termelhetők vagy mindkét ár végtelenné válik és a gazdaság rombadől.

(c) Az *egyensúlyi pályához* $(p_2/p_1 = x_2/x_1 = -c_{11}/c_0)$ közeli kezdeti feltételeknél mind T mind KT nullához tart. Azaz az egyensúly közelében az árak és a mennyiségek oszcillációja *közelítőleg* tiszta oszcilláció.

Modellünk nem írja le megfelelően a valóságos gazdaságok hosszabb távú működését. Ez a sikertelenség egyszerűen az *egyszerű újratermelés* feltételezésével magyarázható: egyszerű újratermelést folytató gazdaságok hosszú távon nem életképesek. Azonban kielégítő, hogy *az egyensúly közelében* modellünk megmagyarázza a valóságos gazdaságoknál megfigyelt ciklusokat.

Köszönetnyilvánítás

Nagyon lekötelezett *Bródy* professzor, aki a probléma felvetette és a munka haladását lépésről lépésre követte. Meg szeretném köszönni *Bartholomeus* professzor javaslatát a 2.2 Megjegyzés transzformációjára és kedves érdeklődését kutatásom iránt. Végül köszönet illeti Mr. *N. Kasaila*-t intelligens közreműködéséért a kézirat elkészítésében.

(Beérkezett: 1976. június 5.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. BRÓDY, A.: A Carter, *Contribution to Input-Output Analysis Amsterdam*, North Holland, 1970.
2. BRÓDY, A.: *Proportions, prices and planning* Budapest, Akadémiai Kiadó, 1970.
3. CODDINGTON, E. A.,—LEVINSON, N.: *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York; McGraw-Hill 1955.
4. GALE, D.: *The Theory of Linear Economic Models* New York, McGraw-Hill, 1960.
5. GRADSHTEYN, I. S.,—RYZHIK, J. M.: *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press 1965.
6. HIRSCH, M. W.,—SMALE, S.: *Linear Algebra, Dynamical Systems, and Differential Equations*, Academic Press 1974.
7. LANG, S.:*Analysis I*, Reading, Mass: Addison-Wesley 1968.
8. LEONTIEF, W.: *Input-output economics* New York, Oxford U. P., 1966.
9. WIDDER, D. V.: *Advanced Calculus*, Prentice-Hall, 1961.

SOLUTION OF A SIMPLE DYNAMIC MODEL FOR A 2-PRODUCT ECONOMY

We solve and discuss a two-product version of a simple dynamic economic mode proposed by Bródy. The model explains, at least for short times, the cycles observed in real economies. For long times, however, the oscillations are dampened or reinforced except for special values of parameters and initial conditions.

РЕШЕНИЕ ПРОСТОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВУПРОДУКТНОГО ХОЗЯЙСТВА

В статье рассматривается и решается вариант предложенной Броди простой динамической модели двупродуктного хозяйства. Модель предназначается для объяснения циклов, обнаруженных в конкретном хозяйстве, по крайней мере в течение непродолжительного периода. Однако в долгосрочной перспективе происходило затухание или усиление колебаний, за исключением параметров и особых величин исходных условий.