

SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági
Szakosztályának lapja

Szerkeszti:

MARTOS BÉLA

Társszerkesztők:

ANDORKA RUDOLF, BOD PÉTER, PONGRÁCZ TIBOR, ZALAI ERNŐ

Szerkesztő bizottság:

AUGUSTINOVICS MÁRIA, BACSKAI ZOLTÁN, BÉKÉSI GÁBOR, BOD PÉTER, BRÓDY ANDRÁS, DOBÓ ANDOR, ÉLTETŐ ÖDÖN, FORGÓ FERENC, GANCZER SÁNDOR, GYIRES BÉLA, HALABUK LÁSZLÓ, HEPPES ALADÁR, HOSSZÚ MIKLÓS, KÁDAS KÁLMÁN, KORNAI JÁNOS, KREKÓ BÉLA, MESZÉNA GYÖRGY, ORMÓS ZSOLT, PRÉKOPA ANDRÁS, SEBESTYÉN JÓZSEF, SÓLYOM CSABA, STAHL JÁNOS, SZAKOLCZAI GYÖRGY, SZÉP JENŐ, (elnök) TARDOS MÁRTON, THEISS EDE, TÓTH JÓZSEF, ZIERMANN MARGIT

*

E szám szerzői:

ANDORKA RUDOLF, a Központi Statisztikai Hivatal munkatársa, BAKÓ ANDRÁS docens, Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskola, Győr, DOBÓ ANDOR, műszaki-gazdasági tanácsadó, KGM Műszaki Tudományos Tájékoztató Intézet, FENYVES FERENC, számítástechnikai tanácsadó, KGTMTI, FÉNYES TAMÁS, kandidátus, tudományos főmunkatárs, MTA Matematikai Kutató Intézet, KAS PÉTER, az MTA SZTAKI tudományos munkatársa, LÁNYI KAMILLA, főelőadó, Konjunktúra és Piacutató Intézet, MEDVEGYEV PÉTER, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem végzős hallgatója, MESZÉNA GYÖRGY, docens, Marx Károly Közgazdasági Egyetem, MIHÁLYFFY LÁSZLÓ, kandidátus, SZÁMKI, JENNIFER M. ROBINSON, tudományos kutató, University of Illinois at Urbana-Champaign, SÁRI JÓZSEF, osztályigazgató, Magyar Nemzeti Bank, SZAJCZ SÁNDOR, számítástechnikai tanácsadó, KGTMTI, SZIDARÓVSKY FERENC, kandidátus, adjunktus, ELTE TTK, TARJÁN TAMÁS, tudományos munkatárs, MTA Közgazdaságtudományi Intézet, TÉNYI GYÖRGY, tudományos munkatárs, MTA Közgazdaságtudományi Intézet, ZIERMANN MARGIT, főelőadó, OT Tervgazdasági Intézet

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1361 Budapest, Pf. 11.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215–96162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111–010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488., és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185–612. Előfizetési díj egy évre: 40,—Ft

Külföldön terjeszti a KULTÚRA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest Pf. 149

Periódikusan változó közgazdasági folyamatok

A gyakorlati tapasztalatok azt jelzik, hogy a gazdasági folyamatok tartam-idő-sorainak elemei szoros kapcsolatot mutatnak

- egyrészt a közvetlen megelőző időszak,
- másrészt egy teljes egységnyi elszámolási időszakkal (évvel) előbbi azonos időintervallum

adataival. Ilyen folyamatnak tekinthető többek között

- az áruforgalom (értékesítés, beszerzés)
- a termelés (és költségei)
- a fogyasztás
- a pénzforgalom (bevétel, kiadás).

A jelen cikkben megvizsgáljuk, hogy a tartamidősoroknak ez a tulajdonsága milyen feltételek között használható fel gazdasági előrejelzésre, egyben megadjuk a folyamatok általános matematikai megoldását, és végül bemutatjuk a módszer gyakorlati alkalmazását számításaink eredményeinek közlésével.

1. A probléma felvetése

A tartamidősorok közötti kapcsolatokra vonatkozó fentiekben megfogalmazott állításunk általános formában az alábbi egyszerű összefüggéssel fejezhető ki:¹

$$(1) \quad F(t) = \alpha(t) \frac{F(t-n)}{F(t-n-1)} F(t-1)$$

ahol

F = a forgalmi folyamat

α = a fejlődés várható (becsült) ütemeltérési együtthatója

t = az idő általában

n = az éven belüli periódusok száma a t -szerinti időegységekben kifejezve.

Az (1)-ben felírt egyenlőség lényegében azt fejezi ki, hogy két egymást követő időszak adatának hányadosa azonos az n periódussal későbbi két egymás utáni intervallum forgalmának láncviszonyszámával. Elterést csupán az $\alpha(t)$ együttható okoz, amelynek az a szerepe, hogy a fejlődésben várható ütemeltérést a t -edik időszakban kiegyenlítse a $(t-1)$ -edik időszakhoz képest.

¹ A kifejezés a *Persons*-féle láncindex-módszer egy speciális egyszerűsített formája.

A gyakorlatban adódhat az a feladat is, hogy egy teljes periódushosszal eltolt összefüggésből végezzük el a számításokat. Ekkor matematikailag (1)-gyel teljesen egyenértékű összefüggést írhatunk fel.

Azaz:

$$F(t) = \alpha(t) \frac{F(t-1)}{F(t-n-1)} F(t-n)$$

Az átalakítás mennyiségi változást nem eredményez, minőségileg viszont kifejezi, hogy az n periódus-különbséggel rendelkezésre álló adatok hányadosai között ugyancsak az $\alpha(t)$ hozza létre az egyenlőséget.

Miután az $F(t)$ várható (becsült) érték, s a megelőző $F(t-1)$, $F(t-2)$, ... adatok mind tapasztalati (tény-) számok, a prognózis minősége nagyban függ az $\alpha(t)$ értékének helyes megválasztásától. Ezért az $\alpha(t)$ együtthatóval kissé bővebben foglalkozunk.

Az $\alpha(t)$ az empirikus adatokhoz viszonyított ütemmódusulást jellemző együttható, amely az utána következő törtkifejezésben megfogalmazott változás (dinamikus viszonzszám) helyesbítésére szolgál. Feltételezzük, hogy $F(t)$ értéke $F(t-1)$ -hez és $F(t-n)$ -hez képest nem kizárólag egy múltban végbement változás arányában módosul, hanem hatással van rá az az ütem-különbség is, amennyivel a népgazdasági vagy vállalati tervekből illetve annak teljesítéséből következően nagyobb vagy kisebb volumen- és ár, illetve ezek együttes eredményeként — értékváltozás várható a következő időszakban. Lényegében a tendenciaszerű ütemváltozást értjük ezen a helyesbítő tényezőn. Ebből következően felfogható úgy is, mint rugalmassági mutató, határérték. Ilyen lehet pl. ha a lineáris trendben meghatározott elemek közötti állandó különbségek arányának változását a trendből következő várható értékekhez viszonyítjuk. Ezt a megoldást akkor célszerű alkalmazni, ha rendkívüli ár-változások következtében az árindexek közötti különbség nagysága $\alpha(t)$ -re nem értelmezhető.

A fenti megfontolások alapján az $\alpha(t)$ számszerűen két oldalról közelíthető. Mégpedig:

- a népgazdasági tervben megadott, a fejlődést jellemző dinamikus viszonzszámokból illetve a tervezett volumen-ár- és értékindexekből;
- az évközi teljesítések alapján — a még hátralevő periódusok alatt elérhető, illetve végbemenő arányeltolódásokból.

Nagyságrendileg az $\alpha(t)$ értéke 1 körül ingadozik, ahol az empirikus és a várható ütem különbsége egy viszonylag kicsi $\varepsilon(t)$ nagyság. Azaz:

$$(2) \quad \alpha(t) = 1 + \varepsilon(t)$$

Az $\alpha(t)$ és így az $\varepsilon(t)$ empirikus idősora meghatározható az (1) összefüggésből. Ezeket a számított adatokat azonban két okból sem tartjuk alkalmasnak a prognózisok készítésénél. Először azért, mert értékükben nagymértékű — és a jövőre nem vonatkoztatható — ingadozást idéznek elő a véletlenszerűségek, másodsor pedig azért, mert a jövőre nézve új feltételek adódnak a népgazdasági vagy vállalati tervből a fejlődési ütem változására. Márpedig az $\alpha(t)$ értékének éppen ezeket a módosító hatásokat kell kifejeznie ahhoz, hogy elfogadhatóak legyenek a becsült értékek.

Az $\alpha(t)$ gazdasági tartalmát már meghatároztuk. Érvényesülésének időtartamára azonban külön is figyelve, azt állapíthatjuk meg, hogy az (1) és

az abból levezetett összefüggésekben szereplő tényezők szorzatösszegei végeredményben a $(t - 1)$ időszakkal bezáróan tartalmazzák a folyamat értékbeni (volumen- és ár-) változását az adott tapasztalati számok alakulása szerint. Ily módon $\alpha(t)$ -nek csupán a t -edik időszak helyesbítését kell szolgáltatnia. Ezt pedig — amint előzőleg megállapítottuk — a tervezett (prognosztizált) érték-változásnak az empirikus adatokban kifejezésre nem jutó különbsége adja meg. Az $\alpha(t)$, ill. az $\varepsilon(t)$ tehát a becslések helyesbítéséül szolgáló tervezett (prognosztizált) adatok várható értéke. Tekintettel arra, hogy a népgazdasági tervek legkisebb időegysége általában az év, ezért ilyen esetben az n periódusból álló idősor mindegyikére ugyanazt az $\alpha(t)$ várható értéket tudjuk csak alkalmazni. Vállalati tervek (negyedéves, havi stb.) esetén lehetséges, hogy valamennyi t -hez önálló $\alpha(t)$ érték tartozik. Ez a pontosabb becslés alapja.

Az ismertetett módszer ellenőrző számítása céljából természetesen hasznos lehet valamilyen trend- vagy regressziós függvény szerint is elvégezni a prognózist. Ekkor a kapott $Y(t)$ értékekhez hozzá kell számítanunk a szezonálisan jellemző hibahatárnak megfelelő $\sigma(t)$ összeget (mennyiséget) is. Az általunk végzett — és a 3. pontban ismertetett számítások szerint $\alpha(t)$ alkalmazása esetén nincs szükség a szórási hiba, illetve a szezonindex alkalmazására, mert az (1) kifejezésben mindkét módosító tényező kifejezésre jut.

Ha ugyanis feltételezzük, hogy az (1) összefüggésben szereplő hányadost az n bármely egészszámú többszörösére is vonatkoztathatjuk $\left(\text{pl. } \frac{F(t-n)}{F(t-n-1)} ; \frac{F(t-2n)}{F(t-2n-1)} ; \text{stb.} \right)$, akkor e hányadosokból képezhető idősor jól szemlélteti az ütemkülönbség szezonális jellegét.

A továbbiakban részletesebb vizsgálat tárgyává tesszük az (1)-ben megfogalmazott összefüggéseket. A kifejtés során feltételezzük, hogy az idősorokban megmutatkozó periodicitás n bármilyen egészszámú többszörösének időegységére vonatkozhat. A gazdasági folyamat tartalmára azonban fennáll az a megszorítás, hogy homogén részeire vonatkoztatható az összefüggés, s csak az egyes részadatok meghatározása után végezhető el összevonással a teljes adatra a becslés. Pl. ha az árbevétel előrejelzését az egyes értékesítési irányok szerint részletezik (belföld, külföld-Rbl és \$ viszonylat), akkor a külön-külön elvégzett számítások után összegezéssel állapíthatjuk meg a végeredményt.

2. A feladat általános matematikai megoldása

Az alábbiakban az (1) egyenlet részletes matematikai diszkussziójával fogunk foglalkozni, azt n tetszőleges egész értékére megoldjuk. (1) egy nemlineáris differenciaegyenlet, amelyet egyszerű módon lineáris egyenletre lehet visszavezetni.

Közgazdaságilag nyilvánvaló, hogy $\alpha(t) > 0$, $F(t) > 0$. Így képezve (1) mindkét oldalának logaritmusát $X(t) = \log F(t)$ új függő változó bevezetésével az alábbi lineáris egyenletre jutunk.

$$(3) \quad X(t) - X(t-1) - X(t-n) + X(t-n-1) = \log \alpha(t).$$

Legyen $\alpha(t) = 1 + \varepsilon(t)$, ahol $|\varepsilon(t)| \ll 1$, ekkor $\log \alpha(t) = \log [1 + \varepsilon(t)] \simeq \varepsilon(t)$ és azt kapjuk, hogy

$$(4) \quad X(t - n - 1) - X(t - n) - X(t - 1) + X(t) = \varepsilon(t)$$

A lineáris egyenletek elméletéből ismeretes egyrészt, hogy (4) egyértelmű megoldásához elő kell írunk $X(t)$ kezdeti értékeit a $t = -1, -2, \dots, -n, -n - 1$ időpontokban, ami nyilvánvalóan azt jelenti, hogy ismernünk kell $F(t)$ értékeit a bázisidőszakban. Másrészt (4)-nek az előírt kezdeti feltételeket kielégítő megoldását megkapjuk, ha a (4)-hez tartozó homogén egyenletet megoldjuk a feladat előírt kezdeti feltételei mellett és az így kapott megoldáshoz hozzáadjuk a (4) inhomogén egyenlet zérus kezdeti feltételeket kielégítő megoldását.

Keressük a (4)-hez tartozó homogén egyenlet egy partikuláris megoldását ξ^t alakban, amelyet a (4)-hez tartozó homogén egyenletbe helyettesítve némi számolás után a

$$(5) \quad \xi^{n+1} - \xi^n - \xi + 1 = 0$$

alakú karakterisztikus egyenlet adódik. (5) gyökei tetszőleges n esetén rögtön felírhatók. Ugyanis

$$\xi^{n+1} - \xi^n - \xi + 1 = (\xi - 1)(\xi^n - 1) = 0$$

egyenletből látjuk, hogy (5) gyökei az n -edik egységgyökök, ahol $\xi = 1$ kétszeres gyök. A (4) -hez tartozó homogén egyenlet általános megoldása (valós alakban) az alábbi formában írható a karakterisztikus gyökök segítségével

$$(6) \quad X_{\text{homogén}}(t) = ct + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} a_k \sin \frac{2k\pi}{n} t + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} b_k \cos \frac{2k\pi}{n} t, \quad \text{ha } n \text{ páros,}$$

$$(7) \quad X_{\text{homogén}}(t) = ct + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} a_k \sin \frac{2k\pi}{n} t + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} b_k \cos \frac{2k\pi}{n} t, \quad \text{ha } n \text{ páratlan.}$$

Fenti kifejezésekben szereplő c, a_k, b_k együtthatók tetszőleges számok lehetnek.

Illesszük (6), (7) általános megoldást az előírt kezdeti feltételekhez. Az $X = \log F$ figyelembevételével (6), (7) általános megoldásból a c, a_k, b_k ismeretlenekre nézve az alábbi $(n+1)$ ismeretlenes algebrai egyenletrendszer írható fel:

$$(8) \quad \begin{aligned} -cj - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} a_k \sin \frac{2k\pi j}{n} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} b_k \cos \frac{2k\pi j}{n} &= \log F(-j), \quad \text{ha } n \text{ páros;} \\ j &= 1, 2, \dots, n+1 \\ -cj - \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} a_k \sin \frac{2k\pi j}{n} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} b_k \cos \frac{2k\pi j}{n} &= \log F(-j), \quad \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{aligned}$$

(8) megoldását tetszőleges n esetében nem írjuk fel explicite. Vegyük észre azonban, hogy c ismeretlen értéke igen egyszerűen meghatározható. Ugyanis

ha (8)-ban j helyébe $(n + 1)$ -et, majd 1-et írunk és az így kapott két egyenletet egymásból kivonjuk, a szinuszos és coszinuszos tagok kiesnek és kapjuk, hogy

$$(9) \quad c = \frac{1}{n} \log \frac{F(-1)}{F(-n-1)}$$

Az alábbiakban közöljük a (8) egyenletrendszer megoldását az $n = 4$ esetben. A részleteket mellőzzük.

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{7}{8} \log F(-1) - \frac{5}{8} \log F(-5) + \frac{1}{4} \log [F(-2) \cdot F(-3) \cdot F(-4)] \\ b_1 &= \frac{1}{4} \log \frac{F(-1)}{F(-5)} + \frac{1}{2} \log \frac{F(-4)}{F(-2)} \\ (10) \quad b_2 &= -\frac{1}{8} \log [F(-1) \cdot F(-5)] + \frac{1}{4} \log \frac{F(-2) \cdot F(-4)}{F(-3)} \\ a_1 &= \frac{1}{4} \log \frac{F(-1)}{F(-5)} + \frac{1}{2} \log \frac{F(-3)}{F(-1)}. \end{aligned}$$

Térjünk most rá a (4) inhomogén egyenlet nulla kezdeti értékeket kielégítő partikuláris megoldásának meghatározására. Ezt a z -transzformáció módszerével végezzük el. Képezve a (4)-ben szereplő $X(t)$, $\varepsilon(t)$ függvények z -transzformáltját

$$\bar{X}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X(i)}{z^i}, \quad \bar{\varepsilon}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon(i)}{z^i}$$

és figyelembevételével, hogy a keresett partikuláris megoldásnak a bázisidőszakban zérus értékeket kell felvenni, (4)-ből nyerjük, hogy

$$(11) \quad \frac{1}{z^{n+1}} \bar{X}(z) - \frac{1}{z^n} \bar{X}(z) - \frac{1}{z} \bar{X}(z) + \bar{X}(z) = \bar{\varepsilon}(z)$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$(12) \quad \bar{X}(z) = \bar{\varepsilon}(z) \frac{z^{n+1}}{z^{n+1} - z^n - z + 1}$$

Az $\bar{f}(z) = \frac{z^{n+1}}{z^{n+1} - z^n - z + 1}$ inverz transzformáltja az $f(t)$ könnyen meghatározható. U. i.

$$\begin{aligned} \bar{f}(z) &= \frac{z^{n+1}}{z^{n+1} - z^n - z + 1} = \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z^n-1)} = \\ (13) \quad &= \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z^n}{z^n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^n}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{z^i} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{z^{ni}} \end{aligned}$$

(13)-ból azonnal következik a z -transzformáció szorzási szabályának alkalmazásával, hogy

$$(14) \quad f(t) = \sum_{k=0}^t g(k), \text{ ahol } g(t) = \begin{cases} I, & \text{ha } t = 0, n, 2n, 3n \dots \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Végeredményben tehát

$$(15) \quad f(t) = k, \text{ ha } (k-1)n \leq t \leq kn - I, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

Most ismét felhasználva a z -transzformáció szorzási tételét, (12)-ből a keresett partikuláris megoldást az alábbi Cauchy szorzat alakjában nyerjük:

$$(16) \quad X_{\text{part}}(t) = \sum_{j=0}^t \varepsilon(j) f(t-j)$$

A keresett — az előírt kezdeti értékeket — kielégítő megoldás tehát (6)-ból és (16)-ból (a gyakorlatban fennálló $n = \text{páros}$ esetre szorítkozva)

$$(17) \quad X(t) = ct + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} a_k \sin \frac{2k\pi}{n} t + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} b_k \cos \frac{2k\pi}{n} t + \sum_{j=0}^t \varepsilon(j) f(t-j),$$

ahol c a (9)-ből, $f(t)$ a (15)-ből az a_k, b_k együtthatók pedig a (8) egyenletrendszer megoldásából adódnak.

Végül az $F(t) = e^{X(t)}$ -ből egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$(18) \quad F(t) = \left(\sqrt{\frac{F(-1)}{F(-n-1)}} \right)^t \exp \left(\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} a_k \sin \frac{2k\pi}{n} t + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} b_k \cos \frac{2k\pi}{n} t \right) \cdot \exp \left(\sum_{j=0}^t \varepsilon(j) f(t-j) \right); \quad t \geq 0, \quad n = \text{páros}.$$

Analóg kifejezés írható fel az $n = \text{páratlan}$ esetben.

Vizsgáljuk meg a kapott eredményt. Mint látjuk ez három tényezőből tevődik össze. Ezek közül a harmadik az $\varepsilon(t)$ befolyását írja le a vizsgált folyamatra. Az $\varepsilon(t)$ függvény értékei kicsik, és hosszú távon sem befolyásolhatja ez a faktor erősen a folyamat jellegét, minden esetben csak a $(t; t-1)$ intervallum közötti helyesbítést szolgálja. Ha nem vesszük tekintetbe $\varepsilon(t)$ torzító hatását, vagyis $\varepsilon = 0$ feltételezéssel élünk, úgy az

$$(19) \quad F^*(t) = \left(\sqrt{\frac{F(-1)}{F(-n-1)}} \right)^t \exp \left(\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} a_k \sin \frac{2k\pi}{n} t + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} b_k \cos \frac{2k\pi}{n} t \right)$$

alakra redukálódik.

$F^*(t)$ második faktora periódikus függvényt állít elő n hosszúságú periódussal. $F^*(t)$ első faktora a trendet adja meg. Látható, hogy — amennyiben eltekintünk az $\varepsilon(t)$ zavaró hatásától — a folyamat végtelenben való viselkedését kizárólag a $\beta = \frac{F(-1)}{F(-n-1)}$ hányados értéke dönti el.

Ha a bázisintervallum két végpontján felvett F értékek arányát jellemző β -ra

$$\beta > 1, \text{ úgy } F^*(t) \rightarrow \infty, \text{ ha } t \rightarrow \infty$$

és a folyamat instabil. Ha

$$\beta < 1, \text{ úgy } F^*(t) \rightarrow 0, \text{ ha } t \rightarrow \infty$$

és a folyamat stabil. Végül, ha

$$\beta = 1,$$

úgy a folyamat tiszta periódikus.

3. Gyakorlati alkalmazás

A felvetett probléma megoldhatóságának igazolása céljából két iparág ár-bevételére végeztünk számításokat. A becslések 1976-ra vonatkoznak negyed-éves üztemezésben. Azért választottuk az 1976. évet, mert így módunkban áll legalább az első három negyedév tényszámával egybe vetni a kapott eredményeket.

Gépipar

Az $\alpha(t)$ mutatóra éves ütemváltozási adatok állnak rendelkezésre, így az 1976 évnél mind a négy negyedévben ugyanazt az értéket vesszük figyelembe. Bár a negyedéves ütemváltozás pontosabb eredményt adna, véleményünk szerint mégsem követünk el nagyobb hibát, mert a tapasztalatok szerint az árváltozás nagyjában-egészében egész évben azonos mértékű, a volumenváltozást pedig a szezonális ingadozások sokkal erőteljesebben befolyásolják, mint maga az ütem eltérő alakulása. A terv szerint ebben az iparágban mind a volumen, mind pedig az ár növekedési üteme csökkenni fog 1976-ban 1975-höz viszonyítva. Az ütemváltozás jellemzője 0,9842 a volumennél és 0,9895 az árnál. Ily módon

$$\alpha(1976) = 0,9739, \text{ azaz } \varepsilon(1976) = 0,0261$$

Az (1) sz. egyenlőség második tényezője az $F(t - n) : F(t - n - 1)$ hányados. Ezek a hányadosok az egymást követő idősorok szezonális ingadozását kifejező indexeknek is vélelmezhetők. Tájékoztatóképpen az alábbi táblázatban közöljük az iparág mutatóit.

Szezonális jellemzők

Év	I.	II.	III.	IV.
	negyedév			
1971	0,6805	1,2522	0,9653	1,3022
1972	0,7376	1,1910	0,9434	1,2833
1973	0,7610	1,1365	0,9610	1,2875
1974	0,7621	1,2166	0,9555	1,3123
1975	0,7622	1,2480	0,8886	1,3464
Átlag	0,7415	1,2089	0,9428	1,3055

A prognózis készítésekor mérlegelés tárgyát képezheti, hogy a számtani átlagot vagy valamely más mutatót, esetleg a mutatók trend értékeit használjuk-e fel. Lényeges, hogy a szélsőségesen kicsi vagy nagy értékeket figyelmen kívül hagyjuk. Jelen esetben azt a megoldást választjuk, hogy a számtani átlagot és a valóságos középítő értéket (medián) is felhasználjuk számításainknál.

A képletben szereplő harmadik tényező az utolsó ismert forgalmi tényt, azaz

$F(1975. IV.) = 54,8 \text{ Mrd.Ft.}$ Az $F(t - 1)$ idősor további értékeit a becslések útján kapjuk meg és folyamatosan lépésről-lépésre helyettesítjük be a soron következő egyenlőségbe.

Ellenőrzés céljából meghatároztuk az iparág 1970. IV. n. é. — 1975. IV. n. évi terjedő idősorából a trend értékeket és a szóródás nagyságát is.

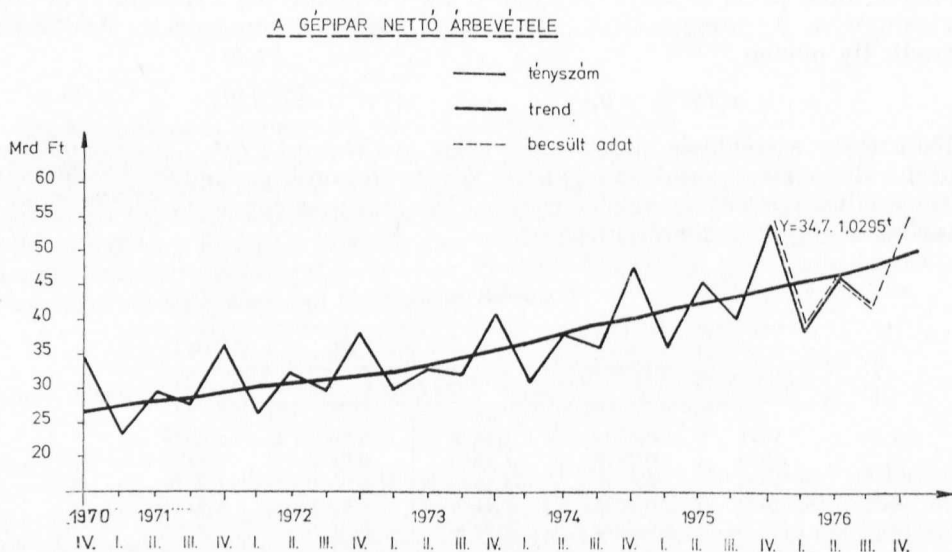
Eszerint

$$Y = 34,7 \cdot 1,0295^t \text{ Mrd Ft és}$$

$$\sigma = \pm 4,7 \text{ Mrd Ft.}$$

Megjegyezzük, hogy a σ hibahatárt értelemszerűen vettük figyelembe, a szezonyszerűség kiegészítéseképpen. Ebben a tekintetben jól el igazít a mellékelt ábra.

A becslés eredményeit — összehasonlítva 1976. I.—III. n. év már ismert adataival — a következő táblázat tartalmazza.



Nettó árbevétel
(1976)

Milliárd Ft-ban

t	Tényszám	Becsült adatok				
		F(t) átlaga F(t-1) sz.	F(t) medián- F(t-1) ja sz.	Exp. trend sz.		
				Y értéke	p helyesb.	Y ± σ érték
1.	39,4	39,6	40,6	46,2	-4,7	41,5
2.	46,2	46,6	48,1	47,4	0	47,4
3.	42,9	42,8	44,8	48,6	-4,7	43,9
4.	—	54,4	56,8	49,9	+4,7	54,6

A fenti adatokból megállapítható, hogy az általunk alkalmazott becslési eljárás viszonylag jó közelítést ad a valóságos folyamatra anélkül, hogy külön hibahatárral dolgoznánk. Ha a tapasztalati szóródást is figyelembe vesszük, biztosan állíthatjuk, hogy a becsült értékek alsó és felső határa közé esik a tényszám. A trendszámok extrapolálásával ugyanez három esetben csak egy-nél (II. n. év.) igazolódott esetünkben.

Könnnyűipar

Elvégezve az előbbi számításokat [ahol $\alpha(1976) = 0,9834$ a tendencia szerű változás csökkenő üteme szerint, $F(1975. \text{IV.}) = 31,0$ Mrd Ft], az alábbi eredményeket kaptuk:

t	Tényszám	Becsült adatok				
		F(t) átlaga F(t-1) szerint	F(t) medián- F(t-1) ja sz.	Lineáris trend szerint		
				Y értéke	σ helyesb.	Y ± σ érték
1.	25,4	26,8	26,7	28,3	-1,7	26,6
2.	29,9	29,0	29,1	28,9	+1,7	30,6
3.	28,8	28,1	28,1	29,4	-1,7	27,7
4.	—	31,7	31,8	30,0	+1,7	31,7

A számítások ebben az esetben is az általunk ismertetett eljárást igazolják, mert minden adat a hibahatáron belül helyezkedik el. Ugyanakkor a trendszámításból extrapolált adatok közül ezúttal csak egy (I. n. év) esik kívül a megengedett értéken.

* * *

A kapott eredmények elfogadható hibahatáron belüli alakulása biztató ígéret a módszer gyakorlati alkalmazhatóságára.² Ennek ellenére szeretnénk felhívni a figyelmet arra, hogy az ütemkülönbségek helyesbítéséül szolgáló

² A cikk megjelenésekor már ismertek az 1976. IV. n. évi tényszámok is. A gépipar árbevétele 57,9, a könnyűiparé 32,2 Mrd. Ft.

együttható alkalmazása nagy körültekintést igényel. Ezért tovább kívánunk foglalkozni azzal a kérdéssel, milyen tűrési határok között alkalmazható, elfogadható biztonsággal.

(Beérkezett: 1976. november 18.)

IRODALOM

- KÖVES, P.—PÁRNICZKY, G.: *Általános statisztika*. Budapest, 1973. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 537—559. o.
KAUFMANN, A.: *Az operációkutatás módszerei és modelljei*. Budapest, 1968. Műszaki Könyvkiadó. 272—277. o.

PERIODICALLY CHANGING ECONOMIC PROCESSES

Elements of the period time series of economic processes show close relationship with data of the directly preceding period on the one hand, and with those of the corresponding period of the previous year on the other hand. Processes of such kind are e.g. trade, production, consumption, and money circulation. The authors investigate the question, how this quality of period time series can be used for economic prognoses, and they give the general mathematical solution of the process, indicating also particulars of their computations.

The mathematical interrelation formulated in the article is practically a special form of the Persons chain index method. A factor (fluctuating around 1) inserted to render projection from the directly preceding and the corresponding period of the previous year more exact, expresses, as regards its economic contents, the change to be expected in the development rate between the last known factual figure and the estimated value for the future.

The problem is a non-linear differential equation for an optional positive integer value of n , which can be simply reduced to a linear equation, in which solution will yield the trend and the periodicity of the process.

The practical computations were made by the authors for estimating the output of two industries by utilisation of a chain index series. The results remained within acceptable limits of error, which is a promising fact for the practicability of the method.

ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИЕСЯ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Элементы трендов времени экономических процессов тесно увязываются, с одной стороны, с данными непосредственно предшествующего периода и, с другой стороны, аналогичного периода предшествующего года. Такими по характеру процессами являются — между прочим — товарооборот, потребление, денежный оборот. Авторы рассматривают, что это свойство трендов времени каким образом можно использовать с точки зрения экономического прогнозирования и, вместе с тем, они дают общее математическое решение процесса и приводят конкретные результаты выполненных расчетов.

Сформулированная в статье математическая зависимость по существу представляет собой специфическую форму метода цепных индексов Персона. В данной зависимости — в отношении экономического содержания — фактор колебания в пределах 1, включаемый в интересах уточнения прогнозирования на основании непосредственно предшествующего периода, а также и аналогичного периода предшествующего года, выражает ожидаемые изменения в темпах развития в аспекте последней известной фактической цифры и предполагаемого значения прогнозируемого на будущее значения.

Данная задача представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение по всему значению любой « n », которая весьма просто может быть отнесена к линейному уравнению, в котором само решение дает тренд процесса и его периодичность.

Практические расчеты были выполнены авторами для оценки поступлений по ценам двух отраслей промышленности (output), с использованием ряда цепных индексов. Получаемые результаты складываются в пределах приемлимых погрешностей, что является обнадеживающим с точки зрения практического применения данного метода.

Kísérlet a beruházási folyamat modellezésére

Bizonyos idő óta vitatott kérdés a szocialista országok közgazdászainak körében a beruházások ciklikussága. Egyes vélemények szerint tulajdonképpen ilyen ciklikusság nem létezik, hanem csak különös okokkal magyarázható egyedi eltérések mutathatók ki. Felvetődnek itt olyan érvek, amelyek szerint a statisztikai adatszolgáltatás esetlegességeinek, az árindexszámításokkal kapcsolatos bizonytalanságoknak stb. is van bizonyos szerepe.

E cikk szerzőinek egyike [1] arra a következtetésre jutott, hogy az említett bizonytalanságok ellenére valószínűsíthető, hogy a magyar népgazdasági beruházási tevékenységében az 1960–1975 időszakban ciklikusság mutatható ki.

Az említett tanulmányban levont főbb következtetések:

1. Magyarországon az 1960–1975. időszakban eléggé szabályos, lényegében 4 éves ciklusok figyelhetők meg a beruházási volumen *növekedési ütemében*. Az említett időszakban az átlagos növekedési ütem 8–9%, a mélypontokon 0–2%-os, a csúcspontokon pedig 15–20%-os növekedési ütemek mutathatók ki.

2. A beruházási ciklusokkal azonos fázisban (de jóval kisebb amplitúdókkal) ingadozik a fogyasztás növekedési üteme is, tehát a végső belső felhasználás. Ennek megfelelően a beruházások növekedési üteme közvetlenül nem a fogyasztás növekedési ütemének rovására emelkedik.

3. A hozzáadott érték belföldi termelése mutat ugyan ingadozásokat, de ezek amplitúdója a felhasználásénál kisebb, alakulása pedig ahhoz képest meglehetősen véletlenszerűnek tekinthető. Ez a megállapítás érvényes marad akkor is, ha csak az iparban és az építőiparban megtermelt hozzáadott értéket vizsgáljuk.

4. Minthogy tehát a termelés nem követi teljes mértékben a belső felhasználás ingadozásait, a különbözetnek a külkereskedelmi mérleg egyenlegében kell lecsapódnia. Különbő okok következtében (készletfelhalmozás, statisztikai számbavétel) ez a statisztikában (és feltehetően a gazdaságvezetés szemében is) csak *éveses késéssel* jelentkezik.

5. A központi állami szervek a beruházási folyamatba elsősorban az ilyen egyensúlyzavarok kiküszöbölése (vagy megelőzése) céljából avatkoznak be. Feltételezhető azonban, hogy a beavatkozás nem azonnal válik hatásossá, mert eleinte talán nem eléggé erőteljes és/vagy több-kevesebb késéssel érvényesül. Ennek számos oka lehet. Ezek közül különösen figyelemreméltónak tűnik számunkra az, hogy a beruházások fellendítését vagy visszafogását célzó intézkedések nem egy pillanatszerűen szabályozható folyamatra hatnak,

hiszen a kivitelezés alatt álló beruházások folyó ráfordítási igényei az adott évi beruházási volument — illetve legalábbis a beruházási igényeket — bizonyos mértékig determinálják.

Feltehető most az a kérdés, hogy a beruházások ilyen értelemben vett determináltsága nem lehet-e (és ha igen, milyen körülmények között) egyik oka a beruházási ingadozások kialakulásának. Cikkünkben ennek a kérdésnek a vizsgálatához kívánunk néhány adalékkal hozzájárulni.¹

Vegyünk szemügyre egy konkrét beruházást. Egyrészt a beruházás anyagi-műszaki szerkezetéből és a szóba jöhető (építési, szerelési) technológiák optimális időigényéből eleve adódik a megvalósításnak valamilyen technikai idő-minimuma. Másrészt a beruházó a pénzügyi lehetőségeket, a beruházás megvalósulásának sürgősségét, az építési-szerelési kapacitások várható hiányait is figyelembe veszi és ezzel kialakul a beruházás várható (vagy remélhető) átfutási ideje és felrakódási üteme. Lehetségesnek tartjuk, hogy ha a beruházásokat alkalmasan kategorizáljuk (nagyság, anyagi-műszaki összetétel, tervezett megvalósítási idő szerint), e kategóriák átlagára könnyebben értelmezhetjük a várható vagy normális megvalósítási ütemet, mint az egyes beruházásokra. Ha jogosnak bizonyul az a feltevés, hogy egy adott évben induló valamennyi beruházás — illetve kategória — időbeli megvalósulását többé-kevésbé költöttnek tekinthetjük, a teljes megindított beruházásmennyiség időbeli megvalósítása sem lehet túlságosan képlékeny.

Modellünk alap gondolata az, hogy végletesnek fogjuk fel ezt a meghatározottságot, azzal, hogy feltételezzük: a t -edik évben indított beruházások költségelőirányzatából $\alpha_t^{(t)}$ hányadnak kell megvalósulnia az első évben, $\alpha_2^{(t)}$ hányadnak a második évben stb., és (ha a legtovább elnyúló beruházás megvalósításának ideje T év), $\alpha_T^{(t)}$ hányadnak a T -edik évben. Nyilván

$$\sum_{i=1}^T \alpha_i^{(t)} = 1, \quad (t = 1, 2, \dots)$$

Az ilyen $\alpha_i^{(t)}$ számok együttesét nevezzük megvalósítási megoszlásnak és az $\{\alpha_i^{(t)}\}_{i=1}^T$ jellel jelöljük. Megjegyezzük, hogy a megvalósítási megoszlást nem tekintjük egyszer s mindenkorra adottnak, hiszen ezt a gazdaságirányítási rendszer, a gazdaságpolitika (és ezen belül a fejlesztéspolitika) számos tényezője befolyásolhatja. Nem tételezzük fel továbbá, hogy ez a megoszlás feltétlenül meg is valósul, hanem úgy értelmezzük, hogy egy adott évben indított beruházások esetében van — az adott körülmények között — bizonyos kényszerítő ereje és csak külső kényszerek hatására módosul.

Tisztában vagyunk azzal, hogy nem könnyű statisztikai tartalommal megtölteni a megvalósítási megoszlás fogalmát. Ez még leginkább úgy látszik megoldhatóan, hogy reprezentatív beruházások programjában foglalt megvalósítási megoszlásokból számítunk globális megoszlást. A már üzembe helyezett beruházások felrakódására vonatkozó utólagos statisztikai adatok is felhasználhatók, noha ezekben már a fedezet- és kapacitáshiányok okozta elhúzódnások is jelentkeznek, márpedig a beruházási folyamat dinamikája szempontjából a *szándékolt* megvalósítási ütemnek van elsőrendű jelentősége.

¹ A szerzők köszönetüket fejezik ki hasznos tanácsaikért és információikért Berend Ivánnak, Bródy Andrásnak, Katona Gyulának, Kovács Jánosnak, Simonovits Andrásnak, és Virág Ildikónak.

Lehetséges továbbá, hogy bizonyos következtetések már akkor is levonhatók, ha egyetlen meghatározott $\{\alpha_i\}_{i=1}^T$ megoszlás helyett egy „lassú” és egy „gyors” kivitelezésnek megfelelő határmegoszlás adható meg. Ha ugyanis ezek az utóbbiak valamilyen értelemben hasonló tulajdonságú beruházási folyamatokat eredményeznek, akkor feltételezhető, hogy a valóságos („közbülső”) megoszlásból adódó folyamat is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Esetleg a megoszlás bizonyos kvalitatív tulajdonságai is kifejezhetők valamilyen lassú-gyors intervallummal.

Indokolt az az ellenvetés, hogy egy adott beruházás indításával vállalt elkötelezettség összecszerűen sem teljesen egyértelmű, hiszen ha például megindul egy autópálya valamely szakaszának megépítése, vitatható, hogy ezzel a többi szakasz megépítésére is kötelezettséget vállaltunk-e, és főleg hogy a megindítással az egész autópálya megépítésének üteme is eldőlt-e. (Ebből a példából egyébként jól érzékelhető, hogy az általunk definiált megvalósítási megoszlás nem függ a részleges üzembehelyezések lehetőségétől.) Reméljük azonban, hogy óvatos kompromisszummal munkaképes becslésekhez juthatunk.

Másik kiindulópontunk az a feltevés, hogy a folyó beruházások összegére nézve minden évre megadható egy-egy alsó és felső korlát. Hangsúlyozzuk: általában csak e korlátok *létezését* kell feltételeznünk, nem pedig azt, hogy valamilyen előre adott képletből legyenek kiszámíthatók. A megvalósítási megoszlás és a folyó beruházási korlátok felhasználásával modellt állítunk fel, amely elsősorban annak vizsgálatára alkalmas, hogy a megvalósítási megoszlás milyen tulajdonságai könnyítik, ill. nehezítik meg a beruházási folyamat mederben tartását; vagyis, mennyiben lesz a beruházási folyamat spontán hajlamos arra, hogy kitörtjön a folyó beruházás korlátai közül.

A modell az időtől függő $\{\alpha_i^{(t)}\}_{i=1}^T$ megoszlásokkal is értelmezhető és alkalmazható, de a továbbiakban feltételezzük, hogy a megvalósítási megoszlás évről évre változatlan, és ennek megfelelően a megoszlás jelölésében az időre utaló felsőindexet elhagyjuk.

Annak a pénzösszegnek a jelölésére, melyet a t -edik évben a megvalósítás k -adik évében ($1 \leq k \leq T$) levő beruházásokra (k -adik évjáratú beruházásoknak nevezzük őket) kell fordítani, bevezetjük a

$$b_i^{(k)}$$

jelölést.

Az $\{\alpha_i\}_{i=1}^T$ megoszlás érvényesülésének feltételezése azt jelenti, hogy ha valamely évben

$$b_i^{(1)}$$

összeget költünk új beruházások indítására, ez egyértelműen meghatároz bizonyos

$$b_{t+1}^{(2)}, \quad b_{t+2}^{(3)}, \quad b_{t+(T-1)}^{(T)}$$

ráfordításokat, amelyeket rendre a $t+1, t+2, \dots, t+(T-1)$ években kell ezekre a beruházásokra költeni (lásd az alábbi táblázatot).

Évjárat	1	2		k		T
Év						
$t-(T-1)$	$b_{t-(T-1)}^{(1)}$					
$t-(k-1)$	$b_{t-(k-1)}^{(1)}$					
$t-1$	$b_{t-1}^{(1)}$					
t	$b_t^{(1)}$	$b_t^{(2)}$		$b_t^{(k)}$		$b_t^{(T)}$

A táblázatból könnyen kiolvasható, hogy

$$b_t^{(k)} = \frac{\alpha_k}{\alpha_1} b_{t-(k-1)}^{(1)} \quad t = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Világos, hogy ha valamilyen $t-1$ -edik évre adottak a $b_{t-1}^{(1)}, b_{t-1}^{(2)}, \dots, b_{t-1}^{(T-1)}$ értékek, ezekből a $b_t^{(2)}, b_t^{(3)}, \dots, b_t^{(T)}$ ráfordítások egyértelműen meghatározhatók. A

$$\sum_{k=2}^T b_t^{(k)}$$

összeget a t -edik év beruházási kötelezettségének fogjuk nevezni. Szükségünk lesz még egy definícióra. Egy tetszőleges t_0 évet kezdeti évnak választunk, és a megfelelő

$$b_{t_0}^{(1)}, b_{t_0}^{(2)}, \dots, b_{t_0}^{(T)}$$

értékek együttesét kezdeti helyzetnek nevezzük.

Mindig feltételezzük, hogy

$$b_{t_0}^{(k)} \geq 0, \quad k = 1, \dots, T$$

A modell egy speciális esete

Modellünket először egy speciális esetben értelmezzük, amelyben feltételezzük, hogy a beruházások évi összege évről évre azonos ütemben nő (sőt kezdetben feltételezzük, hogy állandó), továbbá, hogy az új beruházások indítására

fordítható (és fordítandó) összeg szigorúan meg van határozva az évi beruházási összeg és az előző évből átszármazó kötelezettség közötti különbségből. Ebből következik, hogy

$$\sum_{k=1}^T b_t^{(k)} = C; \quad t = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Feltételezzük itt azt is, hogy az adott megoszlás mindenképpen teljesül, ha pedig ez nem lehetséges, mert valamilyen t esetén

$$\sum_{k=2}^T b_t^{(k)} > C,$$

vagyis a kötelezettség már önmagában véve is nagyobb, mint a lehetséges beruházás, akkor a modellt az adott paraméterekkel működésképtelennek nyilvánítjuk. Itt éppen a működésképeség feltételeit keressük. A működésképeség egyenértékű a

$$b_t^{(1)} \geq 0 \quad t = 1, 2, \dots$$

feltétel teljesülésével.

Az (1) összefüggést a (2) egyenletbe behelyettesítve:

$$\sum_{k=1}^T \alpha_k b_{t-(k-1)}^{(1)} = \alpha_1 C \quad (3)$$

Vezessük be az

$$\varepsilon_{t-(k-1)} = b_{t-(k-1)}^{(1)} - \alpha_1 C \quad (4)$$

jelölést. Ezzel (3)-ból kapjuk:

$$\sum_{k=1}^T \alpha_k (\alpha_1 C + \varepsilon_{t-(k-1)}) = \alpha_1 C \quad (5)$$

Rendezve és figyelembe véve, hogy

$$\sum_{k=1}^T \alpha_k = 1 \quad (6)$$

kapjuk:

$$\sum_{k=1}^T \alpha_k \varepsilon_{t-(k-1)} = 0 \quad (7)$$

Bebizonyítható, (lásd 1. függelék), hogy a (7) differenciaegyenlet:

$$\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$$

megoldásainak [és a (4) összefüggés értelmében a

$$\{b_t^{(1)}\}_{t=1}^{\infty}$$

indítássorozatnak] a tulajdonságai a (7) egyenlet együtthatóival képzett

$$\sum_{k=1}^T \alpha_k x_{T-k} = 0 \quad (8)$$

polinom (az ún. karakterisztikus polinom) gyökeitől és a kezdeti helyzettől függnek a következőképpen:

1. Ha a kezdeti helyzet abból adódik, hogy

$$b_i^{(1)} = \alpha_1 C, \quad t = 1, \dots, T,$$

akkor az $\{\alpha_i\}_{i=2}^T$ együtthatóktól függetlenül mindig

$$b_i^{(1)} = \alpha_1 C, \quad t = T + 1, \dots$$

Ezt nevezzük lengésmentességnek. Tehát $\alpha_1 C$ az egyensúlyi indítás szerepét tölti be.

2. Általában, ha a kezdeti helyzetről nem kötjük ki, hogy egyensúlyi legyen, a

$$\{b_i^{(1)}\}_{t=1}^{\infty}$$

indítássorozat *hosszútávú* (aszimptotikus) viselkedését egyedül az $\{\alpha_i\}_{i=1}^T$ együtthatók szabják meg. Legyen a (8) egyenlet legnagyobb abszolút értékű gyökének (a domináns gyöknek) abszolút értéke q .

a) Ha $q > 1$, akkor a $\{b_i\}$ ($t \rightarrow \infty$) növekvő amplitúdójú rezgéseket ír le, mégpedig úgy, hogy valamilyen t_0 -ra

$$b_{t_0}^{(1)} < 0,$$

tehát a modell az adott paraméterekkel előbb-utóbb működésképtelenné válik. Az ilyen megoszlást destabilizálónak nevezzük.

b) Ha $q = 1$, akkor $\{b_i\}$ állandó amplitúdójú rezgéseket végez (semleges megoszlás).

c) Ha $q < 1$, akkor

$$b_j \rightarrow \alpha_1 C, \text{ ha } t \rightarrow \infty.$$

Ekkor stabilizáló megoszlásról beszélünk.

A *rövidtávú* viselkedést a megoszláson kívül még a kezdeti helyzet is befolyásolja. A (8) egyenlet gyökei egyébként a $\{b^{(k)}\}$ rezgéseinek frekvenciáját is megszabják. Ennek részleteit, valamint a kezdeti feltételektől való függés explicit formáját az olvasó megtalálja az 1. függelékben. Itt csak annyit jegyzünk meg, hogy a 2.b és 2.c feltétel teljesülése (a $T = 2$ esettől eltekintve) még nem elegendő a működésképeséghez, vagyis ahhoz, hogy

$$b_i^{(1)} \geq 0 \quad t = 1, 2, \dots$$

legyen. Még az is szükséges, hogy eleinte (az „átmeneti időszakban”) is elég kicsinyek legyenek a kilengések, úgy, hogy valamilyen t_0 időpontig

$$\varepsilon_t \geq -\alpha_1 C \quad t = 1, 2, \dots, t_0$$

legyen. Ez általában csak véges sok érték kiszámításával ellenőrizhető $t = 1$ -től kezdve.

Noha azt, hogy valamely megoszlás stabilizáló-e vagy sem, a $q < 1$ kritérium teljesülése, ill. nem-teljesülése eldönti, mégis érdemes bevezetni a stabilizáló hatás erősségének fogalmát. Legyen az $\{\alpha_i'\}_{i=1}^T$ ill. az $\{\alpha_i''\}^T$ megoszlásokhoz tartozó karakterisztikus polinomok domináns gyökének abszolút

értéke q' , ill. q'' . Ha $q' < q''$, az $\{q'_i\}_{i=1}^{T'}$ megoszlást erősebben stabilizálónak, (ill. kevésbé destabilizálónak) mondjuk az $\{q''_i\}_{i=1}^{T''}$ megoszlásnál.

Ugyanis a rövidtávú viselkedést a stabilizáló, (ill. destabilizáló) hatás erőssége és a kezdeti helyzetnek az egyensúlytól való távolsága együttesen szabja meg. Enyhén stabilizáló megoszlás eleinte még nagy kilengéseket okozhat, ha a kezdeti helyzet eltérése az egyensúlytól nagy, és megfordítva, ha a kezdeti helyzet közel van az egyensúlyihoz, enyhén destabilizáló megoszlás sem okoz kezdetben nagy kilengéseket. Márpedig modellünkkel elsősorban a rövidtávú viselkedést szándékozunk vizsgálni. abból kiindulva, hogy a paraméterek amúgy is megváltozhatnak. Látni fogjuk, hogy ezek a megfontolások fokozottan érvényesek az általános modellre.

Nehézséget okoz ebből a szempontból, hogy az $\{\alpha_i\}_{i=1}^T$ megoszlásból általában közvetlenül nem lehet leolvasni, stabilizáló hatású-e vagy sem, és arra sem lehet általános receptet adni, hogy az adott megoszlás milyen megváltoztatásával lehet a hozzá tartozó q csökkenését elérni. Könnyen belátható, hogy a $T = 2$ esetben a stabilizáló hatás szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$\alpha_1 > \alpha_2$$

egyen, sőt azt is meg lehet mutatni, hogy ha $T = 3$, az

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$$

a stabilizálás elégséges feltétele. Ebből — és néhány további példából — úgy sejtjük, hogy az „orrmehéz” megoszlások — ahol a beruházások zömét az első évben (években) kell végezni — stabilizálóak, a „farnehéz” megoszlások viszont (ahol a zöme a végére marad) destabilizálóak.

Nem nehéz belátni (lásd 2. függelék), hogy ha az évi beruházás állandó ütemben nő (vagy csökken),

$$C_t = C \cdot \gamma^t, \text{ ahol } C, \gamma > 0$$

akkor a stabilitás, ill. instabilitás kritériuma a konstans C esetével analóg:

1. A lengésmertesség feltétele:

$$b_i^{(1)} = \alpha_1 C \cdot \frac{\gamma^t}{\sum_{k=1}^T \frac{\alpha_k}{\gamma^{k-1}}} \quad t = 1, \dots, T \quad (9)$$

2/a A destabilizálás feltétele:

$$\frac{q}{\gamma} > 1$$

2/b A semlegesség feltétele:

$$\frac{q}{\gamma} = 1$$

2/c A stabilizálás feltétele:

$$\frac{q}{\gamma} < 1$$

A 2/b és 2/c esetben a működésképeséghez most még az szükséges, hogy valamely t_0 időpontig

$$\varepsilon_t \geq -\alpha_1 C \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^T \frac{\alpha_k}{\gamma^{k-1}}} \quad t = 1, \dots, t_0$$

Látható tehát, hogy rögzített $\{\alpha_i\}_{i=1}^T$ esetén $\gamma > 1$ stabilizáló, viszont $\gamma < 1$ destabilizáló hatású, ha pedig γ nő, a stabilizáló hatás erősödik, ill. a destabilizáló hatás gyengül, az egyensúlyi kezdeti helyzet pedig némileg megváltozik.

A beruházási folyamat általános modellje

Az előző rész eredményeinek felhasználásával most visszatérünk a bevezetőben felvázolt problémához. A beruházási folyamatról ott adott leírást a következőképpen öntjük konkrét modell formájába:

először megadjuk a modell paramétereit:

a) veszünk egy $\{\alpha_i\}_{i=1}^T$ megoszlást;

b) megadjuk az évi beruházások alsó és felső korlátainak kiszámítására vonatkozó szabályt.

Ezt megtehetjük, pl. egyszerűen t függvényében, vagy akár úgy is, hogy a t -edik évre vonatkozó alsó és felső korlát függjön a $t-1, t-2, \dots$ évben kialakult korlátoktól, vagy beruházási voluméntől (pl. a t -edik évben a beruházás legalább x , de legfeljebb y százaléka lehet az előző évi beruházásnak, ahol $0 \leq x \leq y$).

c) Választunk valamilyen $\gamma > 0$ szándékolt beruházásindítási növekedés-ütemet. Ebből a (9) képlet alkalmazásával kiszámítjuk az egyensúlyi kezdeti helyzetet. (Ez csak egy konstans szorzótól eltekintve van meghatározva, de ennek nincs jelentősége). Az egyensúlyi kezdeti helyzethez tartozó indítás és a γ figyelembevételével t minden értékére advan van a szándékolt beruházásindítás.

Nyilvánvaló, hogy ha a beruházásindítás γ növekedési üteme zavartalanul érvényesülhet (nem ütközik a b) pontban megszabott korlátokba), akkor az összes beruházás növekedési üteme is γ lesz. Modellünk szempontjából azonban nem szükségszerű, hogy γ értékét így válasszuk meg. (Megjegyezzük, hogy a b) és c) felcserélhető, ha ezzel a beruházási szituációt realisztikusabban írhatjuk le, tehát megadhatunk először valamilyen γ átlagos beruházásnövekedési ütemet (és egyúttal „szándékolt indítást”), és ehhez viszonyítva jelölhetünk ki minden évre beruházási korlátokat, pl. $\pm 10\%$ az egyensúlyi beruházáshoz viszonyítva).

d) Megadjuk valamilyen szabályt arra, hogy ha valamelyik t évben a kötelezettség és a c) pont alapján számított szándékolt indítás (együtt „beruházási szükséglet”) nem esik az ugyanarra az évre vonatkozó korlátok közé, hogyan módosuljon az egyes évjáratoknak jutó beruházás. A szabálynak biztosítania kell azt, hogy a korrigált beruházás a korlátok közé essék és hogy legalább az indítást, ill. a többi évjáratot differenciáltan kezelhessük. (Pl. túllépés esetén az indítást $\beta \cdot x$, a többi évjáratot x százalékkal kell csökkenteni, ahol β a modell paramétere, x értékét pedig az szabja meg, hogy a korrigált összeg a felső korláttal legyen egyenlő.)

e) Felvesszük valamilyen nem-egyensúlyi kezdeti helyzetet (egyensúlyi kezdeti helyzetből ugyanis — ha γ és a korlátok kompatibilisek — triviálisan mindig egyensúlyi helyzet adódna).

A számítás menete

Vesszünk az e) pont alapján meghatározott nem-egyensúlyi kezdeti helyzetet ($t = 1$).

A választott $\{\alpha_i\}_{i=1}^T$ megoszlással ebből kiszámítjuk a $t = 2$ évi kötelezettséget, hozzáadjuk a c) pont alapján a $t = 2$ évre számított szándékolt kezdést. Ez adja a $t = 2$ évi beruházási szükségletet, amelyet egybevetünk a b) pont alapján adódó beruházási korlátokkal. A d) szabály alkalmazásával korrigáljuk az egyes évjáratoknak jutó összeget. A korrekciókat nyilván tartjuk (majd az elmaradást pozitív, ill. az előreszaladást negatív előjellel átvisszük a $t = 3$ év azonos évjárataiba). A $t = 2$ évi korrigált beruházásból az $\{\alpha_i\}_{i=1}^T$ megoszlással (a fenti hátralékok figyelembevételével) kiszámítjuk a $t = 3$ évi kötelezettséget. A beruházásindításnál azonban nem vesszük figyelembe az előző évi elmaradást vagy többletet, hanem a $t = 3$ évi szándékolt kezdést írjuk be stb.

Nyilvánvaló, hogy ez a modell sohasem válik működésképtelenné, a B) részben megadott értelemben.

Az általános modellben stabilizáló tényezőként hat egyrészt az, hogy a beruházási összeg minden évben bizonyos határok között mozoghat, másrészt pedig az, hogy ha a szükségletet korrigálni kell, a korrekció nem kizárólag az indítást terheli.

Stabilizáló tényező az is, hogy a szándékolt indítás az egyensúlyi értéktől spontán nem tér el, de csak abban az esetben, ha a szándékolt növekedési ütem mindig belefér a korlátok közé.

Mielőtt a levonható következtetésekre rátérnénk, előre kell bocsátanunk, hogy az általános modellre vonatkozóan egzakt eredményeink nincsenek, hanem egyenlőre csupán numerikus példákon és a B) részben tárgyalt speciális esetre támaszkodó heurisztikus megfontolásokon alapuló sejtéseket mondhatunk ki. A manuális számítások időigényessége miatt a lehetséges paraméterkombinációkból vett meglehetősen szűk „mintával” dolgozhattunk. Éppen a következtetések sejtésszerű jellege miatt fontosnak tartjuk, hogy bemutassuk a paraméterek lehetséges tartományának azt a részét, amelyre számításaink kiterjedtek.

a) Mint említettük, megfelelő beruházási korlátok esetén stabilizálja a modell működését az, hogy soha nincs spontán eltérés az egyensúlyi (szándékolt) indítástól. Meg kellene vizsgálni, mi történik, ha az indítások — bizonyos korlátok között — spontán is változhatnak.

b) Nincs elegendő számítási tapasztalatunk a megoszlás változtatásával kapcsolatban. Az eddigi számításokban csak két-három stabilizáló ($q < 1$), ill. destabilizáló ($q > 1$) megoszlás szerepelt.

c) Csak egyféle átlagos növekedési ütemmel számoltunk. Nem vizsgáltuk hogy az átlagos növekedési ütem megváltoztatása pl. változatlan sáv mellett hogyan befolyásolja a rendszer viselkedését.

d) Csak a szándékolt növekedési ütemhez képest szimmetrikus korlátokkal dolgoztunk (pl. ha a szándékolt növekedési ütem évi 10%, a korlátok 5–15 vagy 0–20 százalék voltak).

e) Túllépés esetén a kötelezettség valamennyi évjáratát azonos arányban csökkentettük, csak az indításoknál engedtünk meg más csökkenéstű mégpedig úgy, hogy ha az indítást x százalékkal, a kötelezettség évjárait y százalékkal

csökkentjük, a $\beta = \frac{x}{y}$ egy számítási sorozaton belül állandó maradt. A β paramétert az indításra való ráterhelés mértékének nevezzük.

Elmaradás esetén viszont csak az indítást növeltük meg, nem vettük figyelembe a folyamatban levő beruházások gyorsításának lehetőségét. Ez feltehetően stabilizáló hatású lenne.

f) Nincs egzakt definíciónk az egyensúlyi helyzettől való kezdeti eltérés fogalmára. Nagyobb kezdeti eltérésen azt értjük, hogy minden évjárat nagyobb mértékben tér el az egyensúlyi helyzettől.

Rátérve most a következtetésekre, először osztályozzuk a modell lehetséges viselkedési típusait:

a) Előfordulhat, hogy a beruházási szükséglet kezdettől fogva nem ütközik a beruházási korlátokba (nem túl destabilizáló megoszlás, az egyensúlytól nem nagyon eltérő kezdeti helyzet, a korlátokkal kompatibilis szándékolt növekedési ütem esetén). Ekkor a modell gyorsan beáll az egyensúlyi növekedési ütemre.

b) Lehetséges, hogy a beruházási szükséglet eleinte néhányszor beleütközik az alsó és felső korlátokba, de azután a kilengések csökkennek, és idővel beáll az egyensúlyi növekedési ütem.

Ebben a két esetben a modellt az adott paraméterekkel stabilnak nevezzük.

c) Végül megtörténhet, hogy a beruházási szükséglet kezdettől fogva állandóan beleütközik a korlátokba, a szükséges korrekciók egyre növekednek (vagy legalábbis nem csökkennek). Ilyenkor instabilitásról beszélünk.

Finomabb különbségeket is érzékelhetünk. Pl. lehetséges, hogy a modell két különböző paraméter-együttes esetén egyaránt instabil, de a második paraméter-együttes a korrekciók szisztematikusan kisebbek, mint az elsővel. Vagy előfordulhat, hogy két más paraméter-együttes egyaránt stabil működést eredményez, de a második paraméter-együttes a beruházási szükséglet kevesebbszer ütközik a korlátokba, hamarabb rátér az egyensúlyi pályára, mint az elsővel. Mindkét esetben azt mondjuk, hogy a stabilitás javul. Az alábbi táblázat foglalja össze a valószínűsíthető megállapításokat. A táblázat minden sorához hozzáértendő az a megszorítás, hogy „a többi paraméter változatlansága esetén”.

A modell paraméterei	A paraméterek változásának iránya	A stabilitás változása
Megvalósítási megoszlás, $\{\alpha_i\}_{i=1}^T$	stabilizáló hatás erősödik (q csökk.)	javul
Az indítások szándékolt növekedési üteme, γ	nő	(nem vizsgáltuk, feltehetően javul)
Az évi beruházások felső és alsó korlátai közötti különbség, $\overline{B}_t - B_t$	bővül	javul
Az egyensúlyi helyzettől való kezdeti eltérés	nő	romlik
Az indításra való ráterhelés mértéke, β	nő	romlik

A legfontosabb — ismételjük: sejtésszerű — következtetésünk az, hogy minél erősebb a megoszlás stabilizáló hatása, annál inkább lehet a beruházási feszültségeket az indításra ráterhelni, miközben a modell még mindig stabilan működik. Megfordítva, minél destabilizálóbb a megoszlás, annál szűkebb sávon belül kell — az egyensúlyi indítási pályához viszonyítva — tartanunk a beruházásindításokat, különben a modell instabillá válhat, és ez az összes folyó beruházásra vonatkozó korlátokat csak olyan kitágításával ellensúlyozható, amilyen realisan nem valósítható meg.

Megjegyezzük, hogy az így kialakuló ciklikus mozgást semmiképpen sem szándékozzunk azonosítani a „beruházási ciklussal”. Csak arra akarunk rámutatni, hogy bizonyos körülmények között a beruházási igények (ahogy azt itt definiáltuk) oldalán kialakult helyzet befolyásolhatja a beruházások fellendítésére vagy visszafogására irányuló lépések hatásosságát.

A további kutatás két irányban haladhat: egyrészt meg kellene kísérelni, hogy a magyar népgazdaságot az utóbbi években, ill. a közeljövőben jellemző megvalósítási megoszlásokat, ill. egyéb paramétereket megállapítsuk, és a modell működését e paraméterértékek környezetében „nagyítóval” vizsgáljuk; másrészt a numerikus példák szaporításával (esetleg deduktív módszerekkel) ellenőrizni a sejtéseket.

Különösen fontos kérdés, hogy az általános modellre is érvényes-e az a megállapítás, hogy a megoszlás stabilizáló, ill. destabilizáló hatása csak a hozzá tartozó karakterisztikus polinom q -jától függ-e, mint azt eddigi számítási eredményeink alapján feltételeztük.

Nem vizsgáltuk még azt sem, azonos-e az adott megoszláshoz tartozó karakterisztikus polinom domináns gyökének megfelelő periodicitás és az általános modellben talált periodicitás, vagy pedig ez az utóbbi még más paraméterektől is függ.

1. függelék

A differenciaszámítás tankönyveiben [2] megtalálható, hogy a (7) homogén lineáris differenciaegyenlet $(T - 1)$ darab bázismegoldását a (8) karakterisztikus polinom gyökei segítségével az alábbi módon nyerjük:

legyenek $q_1, q_2, \dots, q_p$ a (8) karakterisztikus egyenlet egymástól különböző (esetleg komplex) gyökei, ahol $s_1, s_2, \dots, s_p$ jelölje rendre a $q_1, q_2, \dots, q_p$ gyök multiplicitását, tehát

$$\sum_{i=1}^p s_i = T - 1.$$

Ekkor a bázismegoldások a következők:

$$B = \{q_1^t, tq_1^t, \dots, t^{(s_1-1)}q_1^t; \quad q_2^t, tq_2^t, \dots, t^{(s_2-1)}q_2^t; \dots; \quad q_p^t, tq_p^t, \dots, t^{(s_p-1)}q_p^t\} \quad (10)$$

azaz röviden: $B = \{t^j q_i^t : 0 \leq j < s_i, 1 \leq i \leq p\}$

Ezen bázismegoldások tetszőleges lineáris kombinációja kielégíti a (7) differenciaegyenletet. Így az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{T-1}$ kezdeti feltételeket kielégítő

lineáris kombináció $\lambda_{i,j}$ ($1 \leq i \leq p$, $0 \leq j < s_i$) együtthatóit a

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{s_i-1} \lambda_{i,j} t^j q_i^t = \varepsilon_t \quad 1 \leq t < T \quad (11)$$

egyenlet szabja meg. Ezen együtthatókkal tetszőleges t -re ε_t az

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{s_i-1} \lambda_{i,j} t^j q_i^t \quad (12)$$

alakban áll elő.

Jelöljük ϱ -val a (8) karakterisztikus egyenlet azon legnagyobb abszolút értékű q_i gyökének abszolút értékét, amelyhez van olyan j , hogy $\lambda_{i,j}$ nem zérus gyöke (12)-nek, azaz $\varrho = \max \{|q_i|, 1 \leq i \leq p \text{ és } \exists j; 0 \leq j < s_i \text{ és } \lambda_{i,j} \neq 0 \text{ gyöke (12)-nek}\}$.

Két esetet különböztetünk meg:

a) ha $\varrho > 1$ vagy $\varrho = 1$ és van olyan i, j , hogy $\varrho = |q_i|$, $\lambda_{i,j} \neq 0$ és $j > 0$, akkor nincs olyan t_0 küszöbszám, amelytől kezdve minden t -re teljesülne az

$$\varepsilon_t \geq -\alpha_1 C \quad (13)$$

feltétel, vagyis a beruházási rendszer nem működőképes.

b) Ha $\varrho < 1$, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_t = 0$. Ezért van olyan t_0 küszöbszám, hogy a (13) feltétel teljesül, ha $t > t_0$, az $1 \leq t \leq t_0$ intervallumban pedig az összes ε_t érték kiszámolásával győződhetünk meg, hogy a (13) egyenlőtlenség teljesül-e vagy sem.

A (12) előállítás az $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$ sorozatot egyértelműen bontja fel, exponenciálisan erősödő, ill. gyengülő szinuszos rezgésekre, amelyeknek jól definiált hullámhosszuk, amplitúdójuk és fáziseltolódásuk van.

Megadjuk az $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$ sorozatnak olyan, a (12)-vel ekvivalens előállítását, amelyből az amplitúdó és hullámhossz könnyen kiolvasható.

Tekintsük a (8) karakterisztikus egyenlet nem negatív képzetes részű $q_1, q_2, \dots, q_s$, ($s \leq p$) gyökeit.

Ekkor q_k a $q_k = r_k (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$ alakú, ahol $0 < \varphi_k \leq \pi$. Alkalmas $r_{i,j}, \varphi_i$ konstansok segítségével ε_t előáll az

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{s_i-1} r_{i,j} t^j r_i^t \sin(\varphi_i + t\varphi_i)$$

alakban.

Ennek alapján $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$ előáll s darab szinuszhullám eredőjeként, ahol az i -edik hullám

$$\text{hullámhossza: } \tau_i = \frac{2\pi}{\varphi_i}$$

$$\text{amplitúdója: } A_i = \sum_{j=0}^{s_i-1} r_{i,j} t^j r_i^t.$$

2. függelék

Ha $C_t = C \cdot \gamma^t$, ahol $C, \gamma > 0$, akkor a modell speciális esetében szereplő feltevések értelmében, és az (1) képletet behelyettesítve, a (3)-nak megfelelő

$\sum_{k=1}^T \alpha_k b_{t-(k-1)}^{(1)} = \alpha_1 C \gamma^t$ képletet kapjuk, amelyet γ^t -vel végigosztva:

$$\sum_{k=1}^T \frac{\alpha_k}{\gamma^{k-1}} \cdot \frac{b_{t-(k-1)}^{(1)}}{\gamma^{t-(k-1)}} = \alpha_1 C$$

Vezessük be az

$$\varepsilon_{t-(k-1)} = \frac{b_{t-(k-1)}^{(1)}}{\gamma^{t-(k-1)}} - \frac{\alpha_1 C}{\sum_{k=1}^T \frac{\alpha_k}{\gamma^{k-1}}}$$

jelölést. Ezzel

$$\sum_{k=1}^T \frac{\alpha_k}{\gamma^{k-1}} \cdot \frac{\alpha_1 C}{\sum_{k=1}^T \frac{\alpha_k}{\gamma^{k-1}}} + \sum_{k=1}^T \frac{\alpha_k}{\gamma^{k-1}} \cdot \varepsilon_{t-(k-1)} = \alpha_1 C$$

Leegyszerűsítve:

$$\sum_{k=1}^T \frac{\alpha_k}{\gamma^{k-1}} \cdot \varepsilon_{t-(k-1)} = 0$$

Ennek a differenciaegyenletnek a karakterisztikus polinomja:

$$\sum_{k=1}^T \frac{\alpha_k}{\gamma^{k-1}} x^{T-k} = 0 \quad (14)$$

γ^{T-1} -gyel végigszorozva:

$$\sum \alpha_k (\gamma \cdot x)^{T-k} = 0 \quad (15)$$

Valahányszor egy x_0 (esetleg komplex) szám gyöke a (14) egyenletnek, $\gamma \cdot x_0$ gyöke a (15) egyenletnek, és megfordítva. Ha tehát a (15) egyenlet domináns gyökének abszolút értéke q , a (14) egyenlet domináns gyökének abszolút értéke $\frac{q}{\gamma}$ lesz.

(Beérkezett: 1977. május 27.)

IRODALOM

1. TÉNYI, GY.: Beruházási egyenletlenségek a magyar népgazdaságban. Budapest, 1976. A Közgazdaságtudományi Intézet sokszorosított kiadványa.
2. GELFOND, A. O.: Differenciaszámítás. Budapest, 1954. Akadémiai Kiadó.
3. FRISCH, R.: Kvantitatív és dinamikus közgazdaságtan, Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó 103–137. o.

EXPERIMENT FOR MODELLING THE INVESTMENT PROCEDURE

The authors introduce the concept of the „implementation coefficients”. In the present discrete case the implementation coefficients are by definition the real numbers

$$\alpha_1^{(t)}, \alpha_2^{(t)}, \dots, \alpha_t^{(t)}; \quad \left(\sum_{i=1}^T \alpha_i^{(t)} = 1 \right)$$

which show that given the total cost B_t of all investment projects started in the t -th year the part that will be spent

$$\begin{aligned} \text{in the } t\text{-th year is} & \quad \alpha_1^{(t)} B_t, \\ \text{in the } (t+1)\text{-th year is} & \quad \alpha_2^{(t)} B_t, \text{ and so on} \\ \text{in the } (t+T-1)\text{-th is} & \quad \alpha_T^{(t)} B_t. \end{aligned}$$

The authors deal with two investment models based on these implementation coefficients.

The first model is a more special one in which the following two conditions are assumed:

1) The implementation coefficients $\alpha_1^{(t)}, \alpha_2^{(t)}, \dots, \alpha_T^{(t)}$ do not depend on the starting time t .

2) The total yearly appropriation for investment purposes increases exponentially.

Starting from these conditions the authors give an analytical decomposition of the time-series B_t into sine waves. Using this decomposition they give necessary and/or sufficient conditions for convergence of B_t and define its periodicity. Using these results the authors construct a more general model of the investment process from which some suggestions can be drawn for a stabilizing investment policy.

ЭКСПЕРИМЕНТ ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЯ

Авторы вводят понятие «реализационного распределения». В соответствии с этой формулировкой реализационное распределение (в дискретном случае) представляет собой ряд цифр

$$\alpha_1^{(t)}, \alpha_2^{(t)}, \dots, \alpha_t^{(t)} \quad \left(\sum_{i=1}^T \alpha_i^{(t)} = 1 \right)$$

показывающих; что из суммы « B_t » ассигнований на капитальные вложения начатые в год « t » сколько было освоено

$$\begin{aligned} \text{в год «} s \text{»} & \quad \text{часть } \alpha_1^{(t)} \\ \text{в год «} s+1 \text{»} & \quad \text{часть } \alpha_2^{(t)} \text{ и т. д.} \\ \text{в год «} s+T-1 \text{»} & \quad \text{часть } \alpha_T^{(t)} \end{aligned}$$

В связи с этим авторы рассматривают две модели капитальных вложений.

Первая модель является более специфической и при этом исходит из следующего:

- 1) распределение в аспекте реализации является заданным независимо от
- 2) сумма капитальных вложений ежегодно равномерно увеличивается.

Исходя из этого авторы приводят аналитическое формирование ряда новых ежегодно развертываемых капитальных вложений « v_t », посредством чего « v_t » выступает в качестве суммы синусовых колебаний.

Посредством использования этих результатов авторы развертывают более общую модель капитальных вложений, на основании которой могут быть внесены некоторые предложения по стабилизации политики капитальных вложений.

A hasonlósági függvény és néhány tulajdonsága

A számítógép-rendszerek tulajdonságainak összehasonlítására Dobó Andor 1972-ben bevezetett egy, a hasonlóságot kifejező mértéket. (Lásd: [1].) Ezt a mértéket [2]-ben (1975) általánosította nemcsak matematikai értelemben, hanem az alkalmazhatóság körének kiterjesztése révén is. Gyakorlati szempontból [2]-ben a következő problémakör volt a vizsgálat tárgya:

Tegyük fel, hogy a $T_1, T_2, \dots, T_n$ tulajdonságú gyártmány számszerű jellemzőit a $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ vektor szolgáltatja. Ugyanezen tulajdonságokra nézve egy másik gyártmány számszerű jellemzői legyenek a $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ vektor által adottak. A $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ ismeretében keresendő olyan egyetlen számérték, amely a két gyártmány tulajdonságainak a hasonlóságát (vagy különbözőségét) elfogadhatóan jellemzi. Más szóval; keresendő a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektor (vagy súlyrendszer) hasonlóságát (vagy különbözőségét) kifejező egyetlen olyan mérőszám, amely lehetővé teszi többek között a termékek tulajdonságainak műszaki-gazdasági paraméterek és egyéb számszerű jellemzők alapján történő összehasonlítását, s a különbözőségek mérését. Ennek segítségével a termékek minőségének javításáról, gazdaságos ösztönzéséről, a későbbiek során pedig a termékek minőségi információrendszerének létrehozásáról intézkedhetünk. Ez utóbbi hivatott arra, hogy felhasználásával választ kapjunk: jelenleg melyik termék milyen „minőségi kategóriában” helyezkedik el, a műszaki-technikai fejlesztés elmaradása esetén az idő múlásával milyen kategóriába „esik” vissza; milyen tulajdonságát milyen mértékben kellene fejleszteni, hogy minimális munkaráfordítással, költséggel, stb. a gyártmány a kategorizálásban előbbre kerüljön, és így tovább. (A különféle mutatóknak a matematikai modellekben játszott szerepéről lásd például [4]-et.)

Az ilyen és hasonló szempontok előtérbe helyezése mellett [2]-részben az információelmélet eredményeire támaszkodva — a termékek tulajdonságai összehasonlításának a céljából definiálja a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektorok hasonlóságának egy lehetséges mértékét, amelyből speciális esetként származtatható az [1]-ben bevezetett mérték is. A [3]-ban Dobó Andor, Fenyves Ferenc és Szajcz Sándor a hasonlóság mértékét a vállalatok és számítógépek nagysága, teljesítménye közötti egyértelmű megfeleltetés céljára vették igénybe. A [6]-ban a szerzők módszert adtak a szakemberek véleményének értékelésére, s a hasonlósági függvényt három számítógép típus műszaki jellemzőinek az összehasonlítására használták. Az eddig kapott eredmények elemzése arra utal, hogy a hasonlóság mértéke mint többváltozós függvény, a gyakorlati alkalmazásoknál az elvárható praktikus követelményeknek megfelel. Magától értetődően nemcsak a termékek minősítésénél, hanem számos más célra, így

pl. pontozásos játékoknál (jégtánc, torna), káderminősítésnél, ergonómiai, szociológiai, diagnosztikai, alkalmassági stb. vizsgálatoknál is felhasználható.

A hasonlóság mérőszámának megválasztása egyébként már régóta foglalkoztatja a szakembereket, s erről némi irodalmi áttekintést [2] is szolgáltat.

Tulajdonképpen az identifikáció-elmélet egyik alapvető problémájának is felfoghatjuk e mérőszám keresését, mivel ez esetben az azonosítás mértékének a megválasztását, jellemzését szolgálja. Ilyen aspektusból és megfontolások mellett a hasonlóság vagy eltérés kimutatását vizsgáló tudományos módszereket, eljárásokat a „hasonlóság-elmélet” gyűjtőnév alá foglalt vizsgálatoknak is tekinthetjük. A hasonlóság-elmélet egzakt, axiomatikus megalapozásáról ma ugyan még nem igen beszélhetünk, de a problémakör gyakorlati jelentősége a közeljövőben minden bizonnyal erőteljesen erre irányítja majd a kutatók figyelmét.

Annál is inkább várható ez, mert például a bűnüldözésnél a személyazonosítás; a számítástechnikában az alakfelismerés, a statisztikai informatikában az ún. „automatikus osztályozás”¹ problémáinak a megválaszolása is valamilyen hasonlóságot kifejező mérték felhasználásán alapszik (lásd [7] 135–166. o.). A típusalkotással és osztályozással kapcsolatos kérdések megválaszolását a számítógép igénybevehetősége is nagymértékben befolyásolta, s ma már az automatikus osztályozás céljára kész programcsomagok is rendelkezésre állnak. Gyakorlati szempontból itt arról van szó, hogy sok esetben nagymennyiségű adat kiértékelés nélkül „ömlesztve” áll rendelkezésre; s még ezután kell a problémák elméleti háttérét tisztázni nem egyszer úgy, hogy a feldolgozás célját is menetközben kell kitűzni. Ma már az ilyen típusú problémák megoldását a „végrehajtást végző tanító nélkül tanuló algoritmusok” segítik elő, melyek végső fokon az adatfeldolgozás hatékony és univerzálisan használható módszerét adják. (Lásd még [9] 16. illetve 184. oldal.)

A hasonlóság néhány mérőszámát a [7] 5.4 táblázatában is megtalálhatjuk, s ez tartalmazza a *Russel* és *Rao*, *Sokal* és *Michener*, *Jaccard*, *Yule*, *Csuprov*-féle hasonlósági mérőszámokat. (Az utóbbi kettő negatív értéket is felvehet, ezért értelmezésük már kevésbé kézenfekvő!)

Az egyes módszerekről [7] nemcsak áttekintést nyújt, hanem rámutat a vitatható kérdésekre, valamint a gyakorlati alkalmazásokra is.

A továbbiakban eltekintünk a probléma gyakorlati vonatkozásaitól és kiemeltünk csak matematikai kérdésekkel foglalkozunk. Úgy is mondhatjuk, hogy a hasonlóság-elmélet körébe vágó vizsgálatokat végzünk a [2]-ben definiált mértékre mint többváltozós függvényre vonatkozóan; s célunk e függvény néhány — gyakorlati szempontból fontos — tulajdonságának a kimutatása.

1. A hasonlósági függvény és származtatása

Legyen $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ és $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ két azonos dimenziójú vektor, ahol p_k és $q_k > 0$; minden k -ra. $\sum_{k=1}^n p_k = P$; $\sum_{k=1}^n q_k = Q$. A [2]-ben

¹ A szakirodalomban a megnevezés korántsem egységes. Használatos még: cluster analysis, numerikus taxonomia, csoportosítási algoritmus és más elnevezések.

Dobó Andor a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektorok hasonlóságának egy lehetséges mértékéül definíciószerűen a

$$(1) \quad H = H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda \cdot \left[\frac{1}{PQ} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{(p_i q_k)^\alpha}{(p_k q_i)^{\alpha-1}} \right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}} =$$

$$= \lambda \cdot (PQ)^{\frac{\beta}{\alpha-1}} \left[\left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha q_i^{1-\alpha} \right) \left(\sum_{k=1}^n p_k^{1-\alpha} q_k^\alpha \right) \right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$$

kifejezést választotta, ahol $\beta > 0$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1$ való számok; $0 < \lambda = \lambda(P, Q) \leq 1$ a P és Q változóknak alkalmasan választott szimmetrikus függvénye, amelyre teljesül: $\lambda(P, Q) = 1$ akkor és csak akkor, ha $P = Q$.

A továbbiakban az (1) alatti $H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ függvényt hasonlósági függvénynek vagy a hasonlóság mértékének nevezzük.

Látni fogjuk, hogy a $H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ függvény származtatása a középérték-képzéssel függ össze. A középértékek általános elméletében az $x_1, x_2, \dots, x_n$ valós számok $p'_1, p'_2, \dots, p'_n$ súlyokkal

$$\left(\text{ahol } p'_i = \frac{p_i}{\sum_{k=1}^n p_k}; \quad p_i \in (0, \infty); \quad i = 1, 2, \dots, n \right)$$

vett középértékén általában egy

$$(2) \quad \Phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p'_i \Phi(x_i) \right)$$

alakú kifejezést értünk, ahol $\Phi(x)$ egy a valós számokon értelmezett szigorúan monoton (növekvő, vagy csökkenő) és folytonos, de egyébként tetszőleges függvény; $\Phi^{-1}(y) = x$ az $y = \Phi(x)$ függvény inverzét jelenti.

$\Phi(x)$ -et a (2) középértékhez tartozó KOLMOGOROV-NAGUMO függvénynek is szokták nevezni.

A (2) alatti kifejezést *homogén középértéknek* nevezzük, ha $m > 0$ valós szám esetén

$$(3) \quad \Phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p'_i \Phi(mx_i) \right) = m \Phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p'_i \Phi(x_i) \right).$$

Ilyen előzmények után rátérünk $H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ származtatására, mindvégig feltételezve a $\Phi(x)$ -re tett kikötések teljesülését.

Első származtatás

Legyen $H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^{-1}(\Phi(u) \cdot \Phi(v)) \stackrel{\text{def}}{=} uv$, ahol $\Phi(x)$, $x \geq 0$ esetén, folytonos nem negatív (azaz $\Phi(x) \geq 0$) és szigorúan monoton függvény;

$x_i, y_i \in (0, \infty)$; $p_i, q_i \in (0, \infty)$; ha $i = 1, 2, \dots, n$ és $\sum_{i=1}^n p_i = P$; $\sum_{i=1}^n q_i = Q$;

továbbá az u és v értéke olyan, amelyre a

$$(4) \quad \left[\sum_{i=1}^n p_i (\Phi(x_i) - \Phi(u))^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n q_i (\Phi(y_i) - \Phi(v))^2 \right]$$

kifejezés értéke minimális.

Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i [\Phi(z_i) - \Phi(w)]^2 &= \sum_{i=1}^n p_i \Phi^2(z_i) - \\ &- 2\Phi(w) \sum_{i=1}^n p_i \Phi(z_i) + \Phi^2(w) \sum_{i=1}^n p_i \end{aligned}$$

alapján (4) értéke

$$\Phi(u) = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n p_i \Phi(x_i) \text{ és } \Phi(v) = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^n q_i \Phi(y_i)$$

esetén lesz minimális. Minthogy esetünkben $\Phi(x)$ invertálható függvény, ezért u -ra és v -re

$$u = \Phi^{-1} \left(\frac{1}{P} \sum_{i=1}^n p_i \Phi(x_i) \right)$$

ill.

$$v = \Phi^{-1} \left(\frac{1}{Q} \sum_{i=1}^n q_i \Phi(y_i) \right)$$

adódik.

Mivel értelmezés szerint $\Phi(uv) = \Phi(u)\Phi(v)$, azért $\Phi(z) = z^r$. Azaz

$$u = \left(\frac{1}{P} \sum_{i=1}^n p_i x_i^r \right)^{\frac{1}{r}} \text{ és } v = \left(\frac{1}{Q} \sum_{i=1}^n q_i y_i^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ha most $p_i > 0$, $q_i > 0$, minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re, akkor az

$$(5) \quad x_i = \lambda^{1/2} \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^{-\beta}; \quad y_i = \lambda^{1/2} \left(\frac{q_i}{p_i} \right)^{-\beta}$$

és

$$\frac{1}{r} = \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (\alpha \neq 1)$$

választással következik, hogy

$$H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda \left[\frac{1}{PQ} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{(p_i q_k)}{(p_k q_i)^{\alpha-1}} \right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}}.$$

Vagyis $H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ éppen az (1)-gyel definiált hasonlósági függvény.

Második származtatás

Legyen

$$H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p'_i \Phi(x_i) \right) \Phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n q'_i \Phi(y_i) \right)$$

és a Φ függvény tegyen eleget a következő homogenitási feltételnek:

$$(3') \quad \Phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p'_i \Phi(mx_i) = m \Phi^{-1} \right) \left(\sum_{i=1}^n p'_i \Phi(x_i) \right); \quad (m > 0)$$

ahol

$$x_k = \lambda^{1/2} \left(\frac{p'_k}{q'_k} \right)^{-\beta}; \quad y_k = \lambda^{1/2} \left(\frac{q'_k}{p'_k} \right)^{-\beta}; \quad p'_k = \frac{p_k}{\sum_{i=1}^n p_i}; \quad q'_k = \frac{q_k}{\sum_{i=1}^n q_i}; \quad (p_k, q_k \in (0, \infty))$$

$k = 1, 2, \dots, n$ és $0 < \lambda \leq 1$ pedig alkalmasan választott paraméter.

Ismeretes (lásd: [8] 84. Tétel 68. oldal) a homogén középérték azon tulajdonsága, amely szerint $0 < x < \infty$ esetén a homogenitás maga után vonja a $\Phi(x) = x^r$, vagy $\Phi(x) = \log x$ teljesülését. Amennyiben $\Phi(x) = x^r$ és $\frac{1}{r} = \frac{\beta}{1-\alpha}$ ($\alpha \neq 1$) akkor könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ezen választásokkal (1)-hez jutunk.

Ha pedig $\Phi(x) = \log x$, akkor

$$\Phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p'_i \Phi(x_i) \right) \Phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n q'_i \Phi(y_i) \right) = \lambda \prod_{i=1}^n \left(\frac{p'_i}{q'_i} \right)^{\beta(q'_i - p'_i)}.$$

A 2. Tétel alapján látni fogjuk, hogy ezen $\Phi(x) = \log x$ választás a $\lim_{\alpha \rightarrow 1} H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ esetnek felel meg, s ezzel a közölt módon való származtatás egyértelművé válik.

2. A hasonlósági függvény tulajdonságai

Ha p'_k és q'_k valószínűség-eloszlást reprezentál és $J_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ jelenti az α -rendű JEFFREYS-féle invarianciát vagy más néven a J_{α} -divergenciát — ami felfogható a $\mathbf{p}'$ és $\mathbf{q}'$ eloszlások különbözősége mérőszámának — akkor, mivel definíció szerint (v.ö.: [2], [5])

$$(6) \quad J_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\alpha - 1} \log_2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{(p'_i q'_k)^{\alpha}}{(p'_k q'_i)^{\alpha-1}} = \\ = \frac{1}{\alpha - 1} \log_2 \left[\frac{1}{PQ} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{(p_i q_k)^{\alpha}}{(p_k q_i)^{\alpha-1}} \right]; \quad (\alpha \neq 1).$$

ezért könnyen belátható a hasonlóság mértéke és a J_{α} -divergencia közötti azon kapcsolat, amelyet az alábbi tétel fejez ki:

1. Tétel:

Ha $\alpha \geq 0$, de $\alpha \neq 1$, akkor

$$(1') \quad H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) 2^{-\beta J_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}; \quad (\beta \geq 0),$$

illetve

$$(6') \quad J_{\alpha}\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\beta} [\log_2 H_{0,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \log_2 H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] \quad (\beta \geq 0).$$

Bizonyítás:

Mivel

$$\begin{aligned} H_{0,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \lambda(P, Q) \left(\frac{1}{PQ} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{(p_i q_k)^0}{(p_k q_i)^{-1}} \right)^{\beta} = \lambda(P, Q) \\ &= H_{\alpha,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{aligned}$$

ezért

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \left[\frac{1}{PQ} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{(p_i q_k)^{\alpha}}{(p_k q_i)^{\alpha-1}} \right]^{\frac{\beta}{\alpha-1}}.$$

Ha mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát vesszük, akkor egyszerű átrendezés után kapjuk, hogy ($\beta > 0$ esetén)

$$\frac{1}{\beta} [\log_2 H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \log_2 H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] = \frac{1}{\alpha - 1} \log_2 \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{PQ} \frac{(p_i q_k)^{\alpha}}{(p_k q_i)^{\alpha-1}} \right],$$

s minthogy az itt kapott egyenlőség jobb oldalán éppen a J_{α} divergencia áll, ezért a tétel be van bizonyítva.

A (6') alatti kifejezés a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektorok hasonlóság-elméleti távolságának fogható fel, amely speciális esetben információelméleti távolságot jelent. A későbbiekben közölt vizsgálatok eredményeként ugyanis belátható, hogy $J_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ eleget tesz a „távolsági mérőszámokkal” szemben támasztott azon követelményeknek, mely szerint:

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \quad & J_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq 0 \\ 2^{\circ} \quad & J_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 0 \\ 3^{\circ} \quad & J_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = J_{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

A továbbiakban — célunknak megfelelően — a $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ függvény tulajdonságait vizsgáljuk.

2. Tétel:

$$(7) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \prod_{k=1}^n \left(\frac{p_k}{q_k} \right)^{\beta \left(\frac{q_k}{Q} - \frac{p_k}{P} \right)}.$$

Bizonyítás:

Mivel a

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) 2^{-\beta J_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}; \quad (\alpha \neq 1)$$

függvényben csak a

$$J_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\alpha - 1} \log_2 g(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} \log_2 \frac{1}{PQ} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{(p_i q_k)^{\alpha}}{(p_k q_i)^{\alpha-1}}$$

függ α -tól, ezért elég a $\lim_{\alpha \rightarrow 1} J_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ határátmenetet vizsgálni.

Könnyen belátható, hogy $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \log_2 g(\alpha) = 0$, ezért alkalmazni lehet a l'Hospital szabályt. Így

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} J_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\log_2 g(\alpha)}{\alpha - 1} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} [\log_2 g(\alpha)]'.$$

Minthogy

$$[\log_2 g(\alpha)]' = \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha) \ln 2} = \frac{1}{PQ g(\alpha)} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n p_i q_k \left(\frac{p_i q_k}{p_k q_i} \right)^{\alpha-1} \log_2 \frac{p_i q_k}{p_k q_i},$$

ezért

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} J_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{PQ} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n p_i q_k \log_2 \frac{p_i q_k}{p_k q_i} = \\ &= \frac{1}{PQ} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left[p_i q_k \log_2 \frac{p_i}{q_i} - p_i q_k \log_2 \frac{p_k}{q_k} \right] = \\ &= \frac{1}{PQ} \sum_{i=1}^n (Q p_k - P q_k) \log_2 \frac{p_k}{q_k} = \\ &= \sum_{k=1}^n \log_2 \left(\frac{p_k}{q_k} \right)^{\left(\frac{p_k}{P} - \frac{q_k}{Q} \right)} = \log_2 \prod_{k=1}^n \left(\frac{p_k}{q_k} \right)^{\left(\frac{p_k}{P} - \frac{q_k}{Q} \right)}. \end{aligned}$$

Ennél fogva

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \prod_{k=1}^n \left(\frac{p_k}{q_k} \right)^{\beta \left(\frac{p_k}{P} - \frac{q_k}{Q} \right)}.$$

Megjegyzések:

1. A $H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ hasonlósági függvénynek az $\alpha = 1$ pontban megszüntethető szakadása van, ezért lehetséges, hogy

$$(1'') \quad H_{1, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \stackrel{\text{def}}{=} H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \prod_{k=1}^n \left(\frac{p_k}{q_k} \right)^{\beta \left(\frac{q_k}{Q} - \frac{p_k}{P} \right)} \quad (\beta \geq 0)$$

legyen. A továbbiakban $\alpha = 1$ esetén $H_{1, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ alatt az $(1'')$ értendő.

2. Az iménti megjegyzés értelmében az 1. Tétel akkor is igaz, ha $\alpha = 1$.

A további vizsgálatok könnyebb kezelhetősége végett vezessük be a következő jelöléseket, legyen:

$$a_{(k-1)n+i} = \frac{p_i q_k}{PQ}$$

$$b_{(k-1)n+i} = \frac{p_i q_k}{p_k q_i} \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

és

$$f(s) = \varphi(s)^{\frac{\beta}{s}} = \left[\sum_{i=1}^m a_i b_i^s \right]^{\frac{\beta}{s}}.$$

ahol $\beta > 0$, $m = n^2$ és $s = \alpha - 1 \neq 0$.

Könnyen belátható, hogy a jelölések felhasználásával $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ az alábbi alakban írható fel:

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\lambda(P, Q)}{f(s)} = \frac{H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{f(s)}.$$

Ezek után rátérünk az $f(s)$ függvény tulajdonságainak vizsgálatára.

1. Lemma:

Amennyiben $\alpha \neq 1$, akkor — ha van olyan $i = i_0$ index, amelyre $b_{i_0} \neq 1$, akkor $f(s)$ az s -nek ($s = \alpha - 1$) szigorúan monoton növekvő függvénye, ha pedig nincs ilyen index, azaz $b_i = 1$, minden $i = 1, 2, \dots, m$ indexre, úgy $f(s) \equiv 1$.

Bizonyítás:

$$f'(s) = \beta f(s) \left[-\frac{\ln \varphi(s)}{s^2} + \frac{s \varphi'(s)}{\varphi(s)} \right].$$

Ha létezik olyan $i = i_0$ index, amelyre $b_{i_0} \neq 1$, úgy azt kell belátni, hogy az $f'(s) > 0$.

Mivel $x \ln x$ szigorúan konvex függvény a $(0, \infty)$ intervallumon, ezért ha létezik olyan i és j , melyekre $x_i \neq x_j$, $a_i \neq 0$, $a_j \neq 0$, akkor

$$\frac{\sum_{k=1}^m a_k x_k}{\sum_{k=1}^m a_k} \ln \frac{\sum_{k=1}^m a_k x_k}{\sum_{k=1}^m a_k} < \frac{\sum_{k=1}^m a_k x_k \ln x_k}{\sum_{k=1}^m a_k}.$$

Minthogy $\sum_{j=1}^m a_j = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{p_i q_k}{PQ} = 1$ és létezik olyan i_0 , melyre $b_{i_0} \neq 1$, melyből

az is következik, hogy van olyan j_0 , amire a $b_{j_0} = \frac{1}{b_{i_0}}$ teljesül, így a fenti egyenlőtlenségből $x_i = b_i^s$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i^s \ln \left(\sum_{i=1}^m a_i b_i^s \right) < \sum_{i=1}^m a_i b_i^s \ln b_i^s,$$

melyből az

$$\ln \varphi(s) < \frac{s \varphi'(s)}{\varphi(s)}$$

egyenlőtlenség következik.

Osztva az egyenlőtlenség mindkét oldalát $s^2 > 0$ -val, az

$$\frac{\ln \varphi(s)}{s^2} < \frac{\varphi'(s)}{s\varphi(s)}$$

azaz

$$\left(\frac{\varphi'(s)}{s\varphi(s)} - \frac{\ln \varphi(s)}{s^2} \right) > 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A $\beta f(s) > 0$ miatt ez azt jelenti, hogy $f'(s) > 0$, s ezzel a lemmát bizonyítottuk, az első esetre nézve. A második esetben, amikor $b_i^s = 1$ minden i -re ($1 \leq i \leq m$) akkor az

$$f(s) = \left(\sum_{i=1}^m a_i b_i^s \right)^{\frac{\beta}{s}} = \left(\sum_{i=1}^m a_i \right)^{\frac{\beta}{s}} = 1 \text{ minden } s \neq 0 \text{ esetén, s ezt kellett bizonyítanunk.}$$

3. Tétel:

A $\beta > 0$ és $\alpha \neq 1$ esetén, ha $\mathbf{q} \neq \frac{Q}{P}\mathbf{p}$, akkor $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ α -ban szigorúan monoton csökkenő, ha pedig $\mathbf{q} = \frac{Q}{P}\mathbf{p}$, akkor $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \lambda(P, Q)$.

Bizonyítás:

A $\mathbf{q} \neq \frac{Q}{P}\mathbf{p}$, feltételből következik, hogy a $\frac{p_i q_k}{p_k q_i} = 1$ nem teljesülhet minden $i, k = 1, 2, \dots, n$ esetén, mivel ha teljesülne, úgy $\frac{p_i}{p_k} = \frac{q_i}{q_k}$ miatt, — mint az könnyen belátható —, a $\mathbf{q} = \frac{Q}{P}\mathbf{p}$ is teljesülne. Ez pedig azt jelenti, hogy $b_i = 1$ sem teljesül minden $i = 1, 2, \dots, m$ esetén, így az 1. Lemma és a

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\lambda(P, Q)}{f(s)}$$

összefüggés miatt a tétel állítása az első esetben bizonyítva van.

A második esetben, azaz ha $\mathbf{q} = \gamma\mathbf{p}$, ahol $\gamma = \frac{Q}{P}$ teljesül, akkor

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q) \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\gamma p_i p_k}{\gamma P^2} \left(\frac{\gamma p_i p_k}{\gamma p_k p_i} \right)^{\alpha-1} \right]^{\frac{\beta}{\alpha-1}} = \lambda(P, Q).$$

Ezzel a tételt mindkét esetre nézve bizonyítottuk.

Megjegyzés:

E tétel alapján, ha $\mathbf{q} \neq \frac{Q}{P}\mathbf{p}$, akkor $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ $\alpha \rightarrow 1 - 0$ esetben szigorúan monoton csökkenően, $\alpha \rightarrow 1 + 0$ esetén pedig szigorúan monoton nö-

vekedően konvergál $H_{1,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ -hoz, melyből nyilvánvalóan következik, hogy $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a teljes $(-\infty, \infty)$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő α -ban. Ha pedig $\mathbf{q} = \frac{Q}{P}\mathbf{p}$, akkor (1'') alapján

$$H_{1,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q).$$

2. Lemma

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = B^\beta \quad (\beta > 0),$$

ahol $B = \max \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

Bizonyítás:

Jelölje L azon i indexek halmazát, amelyekre fennáll a $b_i = B$ egyenlőség, továbbá legyen $\varepsilon = \sum_{i \in L} a_i$. Könnyen belátható, hogy $0 < \varepsilon \leq 1$.

E jelölés felhasználásával kapjuk, hogy $s > 1$ esetén

$$\varepsilon B^s = \sum_{i \in L} a_i b_i^s \leq \sum_{i=1}^m a_i b_i^s \leq \sum_{i=1}^m B^s a_i = B^s,$$

azaz

$$\varepsilon B^s \leq \varphi(s) \leq B^s,$$

továbbá

$$\frac{1}{\varepsilon^s} B \leq (\varphi(s))^{\frac{1}{s}} \leq B.$$

Mivel $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon^s} = 1$, ezért

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (\varphi(s))^{\frac{1}{s}} = B,$$

amiből már következik, hogy

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} (\varphi(s))^{\frac{\beta}{s}} = B^\beta.$$

Megjegyzések:

$$1. \lim_{s \rightarrow -\infty} f(s) = b^\beta,$$

ahol $b = \min \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

Ugyanis

$$f(s) = \left(\sum_{i=1}^m a_i b_i^s \right)^{\frac{\beta}{s}} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^m a_i c_i^u \right)^{\frac{\beta}{u}}} = \frac{1}{f^*(u)},$$

ahol $c_i = \frac{1}{b_i}$ és $u = -s$;

továbbá

$$\max \{c_1, c_2, \dots, c_m\} = \frac{1}{\min \{b_1, b_2, \dots, b_m\}} = \frac{1}{b},$$

így a lemma alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} f(s) = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow +\infty} f^*(u)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^\beta} = b^\beta.$$

2. $b_i = \frac{p_l q_k}{q_k p_l}$, ahol $k = \left[\frac{i}{n}\right] + 1$ és $l = i - (k - 1)n$ ha $\frac{i}{n}$ nem egész szám, ha pedig $\frac{i}{n}$ egész szám, akkor $k = \frac{i}{n}$ és $l = n$. Így $b_i = 1$, ha $l = k$; olyan b_l -khez pedig, amelyeknél $l \neq k$, található olyan j index, melyre $b_i = \frac{1}{b_j}$.

Ez azt jelenti, hogy vagy minden $i = 1, 2, \dots, m$ esetén $b_i = 1$, vagy van olyan i és j index, melyre $b_i > 1$ és $b_j < 1$. Az első esetben $b = B = 1$, míg a második esetben $B = b_{i_0} > 1$, melynek reciproka — mint láttuk, ilyen b_{j_0} van, — adja a b értéket. Ezért minden esetben igaz, hogy $b = \frac{1}{B}$. Ennek alapján a következő is fennáll:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} f(s) = \frac{1}{B^\beta}.$$

4. Tétel:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\lambda(P, Q)}{B^\beta} \quad (\beta > 0).$$

Bizonyítás:

A tétel állítása a 2. Lemmából triviálisan következik.

Megjegyzések:

1. A 2. Lemma második megjegyzésében kapott eredményből következik, hogy

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q) B^\beta.$$

2. $\alpha \geq 1$ esetén a

$$\frac{\lambda(P, Q)}{B^\beta} \leq H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq H_{1, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

$\alpha < 1$ esetén pedig a

$$H_{1, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq \frac{\lambda(P, Q)}{B^\beta}$$

egyenlőtlenség áll fenn.

5. Tétel :

Ha $p_i > 0$; $q_i > 0$ $i = 1, 2, \dots, n$ és $\beta > 0$; $\alpha > 0$, akkor tetszőlegesen rögzített $\mathbf{p}$ és $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ esetén $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq \lambda(P, Q)$, az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{q} = \gamma \mathbf{p}$, ahol $\gamma = \frac{Q}{P}$, $P = \sum_{i=1}^n p_i$.

Bizonyítás:

Ha $\mathbf{q} = \gamma \mathbf{p}$, akkor $\alpha \neq 1$ esetén

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q) \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\gamma p_i p_k}{\gamma P^2} \left(\frac{\gamma p_i p_k}{\gamma p_k p_i} \right)^{\alpha-1} \right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}} = \lambda(P, Q)$$

$\alpha = 1$ esetén pedig

$$H_{1,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q) \prod_{k=1}^n \left(\frac{p_k}{\gamma q_k} \right)^{\beta \left(\frac{Q}{P} \frac{p_k}{Q} - \frac{p_k}{P} \right)} = \lambda(P, Q).$$

Ha pedig $\mathbf{q} \neq \gamma \mathbf{p}$, akkor a 3. Tétel értelmében $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ szigorúan monoton csökkenő, ezért tetszőleges $\alpha > 0$ -ra

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < H_{0,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q).$$

Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Az eddig kapott eredmények alapján könnyen belátható, hogy $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$; $\beta \geq 0$, $\alpha \geq 0$ esetén rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- 1° $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_{\alpha,\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.
- 2° $0 \leq H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq 1$.
- 3° $\beta \neq 0$ esetén $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.
- 4° Ha tetszőleges $P > 0$, $Q > 0$ és $c > 0$ esetén

$$\lambda(P, Q) = \lambda(cP, cQ), \text{ akkor}$$

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_{\alpha,\beta}(c\mathbf{p}, c\mathbf{q}).$$

Valóban az 1° tulajdonság triviálisan teljesül, mert (1) alapján $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a p_i és q_i változók szimmetrikus függvénye ($i = 1, 2, \dots, n$).

Továbbá $\alpha \geq 0$ esetén, az 5. Tétel alapján:

$$0 \leq H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq \lambda(P, Q) \leq 1.$$

Mivel $\lambda(P, Q) = 1$, akkor és csak akkor teljesül, ha $P = Q$, továbbá $\mathbf{q} \neq \gamma \mathbf{p}$, ahol $\gamma = \frac{Q}{P}$, esetén $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < \lambda(P, Q)$.

Így a 2° és 3° tulajdonság érvényessége bizonyított.

A 2° tulajdonság tetszőleges $\alpha < 0$ esetén nem igaz, mert például $n = 2$; $p_1 = 8$; $p_2 = 5$; $q_1 = 4$; $q_2 = 2$; $\alpha = -20$; $\beta = 21$ esetén

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 22,78\lambda(P, Q),$$

s ha itt $\lambda(P, Q) = \frac{2\sqrt{PQ}}{P+Q}$, akkor $H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 19,69$. (Lásd még a 4. Tétel 2. megjegyzését!)

A 4° tulajdonság behelyettesítéssel egyszerűen adódik.

3. A hasonlósági függvény speciálisabb esetei

Az alábbi vizsgálatok a hasonlósági függvényben szereplő változók, illetve paraméterek speciálisabb választásaival függnek össze. Vizsgálatainknál már szerepet játszik a $\lambda(P, Q)$ szimmetrikus függvény megválasztása is. A következő tétel $\lambda(P, Q)$ konkrét megválasztásával függ össze.

6. Tétel:

Ha $\alpha = \frac{1}{2}$; $\tau \geq 0$; $\beta > 0$; $Q < P$, akkor a

$$(8) \quad \lambda(P, Q) = \left[\frac{4PQ}{(P+Q)^2} \right]^{2\beta+\tau}$$

választás esetén előálló:

$$(9) \quad H_{\frac{1}{2}, \beta}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left[\frac{2 \sum_{k=1}^n \sqrt{p_k q_k}}{P+Q} \right]^{4\beta} \left[\frac{2\sqrt{PQ}}{P+Q} \right]^{2\tau}$$

hasonlósági függvény szigorúan monoton növekedő függvénye q_j -nek a $[0, p_j]$ intervallumon, minden $j(1 \leq j \leq n)$ -re.

Bizonyítás:

A $H_{\frac{1}{2}, \beta}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ függvény szóban forgó monotonitásának belátásához $\beta > 0$; $\tau \geq 0$ és (9) miatt elegendő kimutatni, hogy a

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2 \sum_{k=1}^n \sqrt{p_k q_k}}{P+Q} \quad \text{és} \quad K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2\sqrt{PQ}}{P+Q}$$

(pozitív értékű) függvények q_j -nek szigorúan monoton növekedő függvénye minden $j(1 \leq j \leq n)$ -re a $[0, p_i]$ intervallumon.

Ehhez pedig csak azt kell igazolni, hogy

$$\frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_j} > 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_j} > 0.$$

Mivel

$$\frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{P+Q}{2} \right)^{-2} \left(\frac{p_j \frac{P+Q}{2}}{\sqrt{p_j q_j}} - \sum_{k=1}^n \sqrt{p_k q_k} \right);$$

és $p_j > q_j$ miatt $p_j > \sqrt{p_j q_j}$,

valamint fennáll $\frac{P+Q}{2} - \sum_{k=1}^n \sqrt{p_k q_k} > 0$;

ezért

$$\frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_j} > 0.$$

Másrészt

$$\frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{Q}} \left(\frac{P+Q}{2} \right)^{-2} \left(\frac{P-Q}{2} \right)$$

és $P > Q$ miatt

$$\frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_j} > 0.$$

Ezzel a 6. Tétel bizonyítása teljes.

Külön érdekessége van annak az esetnek, amikor $\beta = 1$; $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ valószínűségi eloszlásokat reprezentál. Ekkor $P = Q = 1$, s így $\lambda(P, Q) = 1$, továbbá

$$H_{\alpha,1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n p_k q_i \left(\frac{p_k q_i}{q_k p_i} \right)^{\alpha-1} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (\alpha \neq 1).$$

Mindkét oldal logaritmusát véve kapjuk, hogy

$$-\log_2 H_{\alpha,1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\alpha-1} \log_2 \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \log_2 \sum_{k=1}^n q_k \left(\frac{q_k}{p_k} \right)^{\alpha-1}.$$

Az információelméletben (Vö.: [5]) az

$$(10) \quad I_\alpha(\mathbf{p}|\mathbf{q}) = \frac{1}{\alpha-1} \log_2 \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^{\alpha-1}$$

kifejezést a $\mathbf{q}$ eloszlásnak a $\mathbf{p}$ eloszlással való helyettesítésénél fellépő α -ad rendű információnyerésnek nevezik. (Más elnevezéssel I_α divergencia.) Nyilvánvalóan

$$-\log_2 H_{\alpha,1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = I_\alpha(\mathbf{p}|\mathbf{q}) + I_\alpha(\mathbf{q}|\mathbf{p}) = J_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

ahol $J_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ eloszlások különbözőségének a mérőszáma (J_α divergencia).

Ha $p_k = \frac{1}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$ vagyis

ha $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}} = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right\}$, akkor

$$I_\alpha(\mathbf{q}|\hat{\mathbf{p}}) = \log_2 n - \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \sum_{k=1}^n q_k^\alpha.$$

Ugyancsak az információelméletben az

$$(11) \quad I_\alpha(\mathbf{q}) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \sum_{k=1}^n q_k^\alpha$$

kifejezést a $\mathbf{q}$ eloszláshoz tartozó α -ad rendű információértéknek nevezik.

Nyilvánvalóan

$$I_\alpha(\mathbf{q}|\hat{\mathbf{p}}) = I_\alpha(\hat{\mathbf{p}}) - I_\alpha(\mathbf{q})$$

$$I_\alpha(\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{q}) = \frac{\alpha}{1-\alpha} I_{1-\alpha}(\hat{\mathbf{p}}) - \frac{\alpha}{1-\alpha} I_{1-\alpha}(\mathbf{q}),$$

ahol

$$I_\gamma(\hat{\mathbf{p}}) = \log_2 n.$$

Az itt kapottakra való tekintettel

$$-\log_2 H_{\alpha,1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 n - I_\alpha(\mathbf{q}) - \frac{\alpha}{1-\alpha} I_{1-\alpha}(\mathbf{q}).$$

Ha $\alpha = 1$, akkor

$$-\log_2 H_{1,1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n (p_k - q_k) \log_2 \frac{p_k}{q_k} = I_1(\mathbf{p}|\mathbf{q}) + I_1(\mathbf{q}|\mathbf{p}) = J_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

ahol

$$I_1(\mathbf{q}|\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n q_k \log_2 \frac{q_k}{p_k} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} I_\alpha(\mathbf{q}|\mathbf{p}),$$

([10] az $I_1(\mathbf{q}|\mathbf{p})$ kifejezést a $\mathbf{q}$ eloszlásnak a $\mathbf{p}$ eloszlástól való információelméleti távolságnak nevezi.)

Ha $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}$, akkor

$$I_1(\mathbf{q}|\hat{\mathbf{p}}) = \log_2 n - \sum_{k=1}^n q_k \log_2 \frac{1}{q_k} = I_1(\hat{\mathbf{p}}) - I_1(\mathbf{q}),$$

s itt

$$(12) \quad I_1(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n q_k \log_2 \frac{1}{q_k} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} I_\alpha(\mathbf{q}),$$

ami nem más, mint a Shannon-féle entrópia (1. rendű információ).

Könnyen belátható, hogy az entrópia (bizonytalanság) és a hasonlósági mérték között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$(13) \quad \begin{aligned} I_1(\mathbf{q}) &= \log_2 H_{1,1}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log_2 q_k = \\ &= \log_2 H_{1,1}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) + \sum_{k=1}^n \log_2 \frac{1}{q_k} = \log_2 H_{1,1}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) + n I_1(\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{q}). \end{aligned}$$

Megemlítjük, hogy az eloszlások eltéréseinek a J_α divergencián kívül további számos más mérőszámát is szokás használni. Így például az I_α divergenciát χ^2 eltérést stb. (Bővebbet lásd: [9] 38–42. o.)

Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk megemlíthetjük még, hogy a hasonlósági függvényt nemcsak diszkrét változók, hanem folytonos változók esetében is definiálhatjuk, értelmezhetjük.

Ha például $\mathbf{p} = f(x) \geq 0$ és $\mathbf{q} = g(x) \geq 0$ az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvények, akkor

$$(14) \quad H_{1/2, 1/4}(f(x), g(x)) = H_{1/2, 1/4}(f, g) = \lambda(P, Q) \int_a^b \sqrt{f(x)g(x)} dx,$$

ahol

$$P = \int_a^b f(x) dx; \quad Q = \int_a^b g(x) dx.$$

Ha $P = Q = 1$, akkor (14)-ből speciális esetként a *Hellinger*-integrált kapjuk, (Vö. [9] 40. o.), amelyet mint mérőszámot — többek között — az alakfelismeréssel kapcsolatos problémák megválaszolásánál használnak.

4. A hasonlóság mértékének alkalmazása függvényközelítés esetén

A) eset (interpoláció): Adott $x_0, x_1, \dots, x_n$ interpolációs alappontokhoz tartozzanak az $y_0, y_1, \dots, y_n$ értékek.

Legyen $p_k = y_k$; $q_k = g_n(x_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), ahol $g_n(x)$ egy n -edfokú polinom. Határozzuk meg a $g_n(x)$ polinomot úgy, hogy a $\mathbf{p} = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ és $\mathbf{q} = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ vektorokra nézve

$$H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1$$

teljesüljön. Ekkor a $H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ hasonlósági függvény 2° tulajdonsága alapján szükségképpen fennáll, hogy

$$(15) \quad y_k = g_n(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Mint ismeretes egy és csak egy olyan n -edfokú polinom létezik, amely (15)-nek eleget tesz, és ezt a polinomot például a jól ismert Lagrange-formula szolgáltatja. Ez esetben tehát:

$$g_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) y_i,$$

ahol:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

($i = 0, 1, \dots, n$), a Lagrange-féle interpolációs alappolinomok.

A továbbiakban rátérünk a *B)* eset (momentumok módszere) ismertetésére. Előbb azonban szükségünk lesz egy új fogalomnak a „*hasonlóság váratlansága mértéké*”-nek a bevezetésére.

Minden $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ vektorpárnak megfeleltetünk egy olyan $W_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ valós számot, amely csak a $H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ hasonlósági mértéktől függ. Pontosabban szólva a $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ vektorpárhoz a

$$W_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = F(H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})), \quad (\beta > 0)$$

értéket rendeljük, ahol $F(x)$ monoton csökkenő függvény. Abban az esetben, amikor még az $F(xy) = F(x) + F(y)$ és $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\beta}$ is teljesül, akkor a szóban levő számot a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektorok hasonlósági váratlanságának nevezzük.

Nem nehéz belátni, hogy a közölt feltételek mellett:

$$(16) \quad W_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\beta} \log_2 \frac{1}{H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}, \quad (\beta > 0).$$

Az 1. Tétel alapján nyilvánvaló az alábbi állítás helyessége:

7. Tétel:

Ahhoz, hogy tetszőszerinti $\beta > 0$ esetén $W_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ β -től független legyen, szükséges és elégséges, hogy $\lambda(P, Q) = 1$ legyen. Ekkor

$$(17) \quad W_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \stackrel{\text{def}}{=} V_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = J_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

vagyis a hasonlóság váratlansága megegyezik a különbözőség mértékével.

1. Következmény

$V_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q) = 1$ azaz, ha $P = Q$.

B) eset (momentumok módszere):

Legyen $p_k = y_k$; $q_k = g(x_k; a_0, a_1, \dots, a_s) = g(x_k; \mathbf{a})$, ahol $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_s)$ egyelőre ismeretlen paramétervektor, $g(x; \mathbf{a})$ tetszőleges függvény.

Feladat:

Ha az $x_k (> 0)$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ értékekhez valamilyen módon (pl. méréssel, megfigyeléssel stb.) hozzárendeljük, meghatározzuk az $y_k (k = 1, 2, \dots, n)$ értékeket, akkor fennáll azon kérdés: hogyan válasszuk meg az $\mathbf{a}$ paraméter vektort ahhoz, hogy a közelítés a „lehető legjobb” legyen?

Egy lehetséges eljárás a következő:

Legyen:

$$\mathbf{X}^{(j)} = \begin{pmatrix} x_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2^j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & x_n^j \end{pmatrix}; \quad (j = 0, 1, \dots, s).$$

Meghatározandók azon $a_0, a_1, \dots, a_s$ értékek, amelyek esetén fennáll a

$$(18) \quad J_{\alpha}(\mathbf{X}^{(j)} \mathbf{p}, \mathbf{X}^{(j)} \mathbf{q}) = V_{\alpha}(\mathbf{X}^{(j)} \mathbf{p}, \mathbf{X}^{(j)} \mathbf{q}) \quad (j = 0, 1, \dots, s)$$

összefüggés; más szóval az $\mathbf{a}$ vektort határozzuk meg úgy, hogy a hasonlóság váratlansága egyezzen meg a különbözőség mértékével.

Mivel $H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q)$, továbbá $\lambda(P, Q) = 1$ teljesülésének kritériuma $P = Q$, azért (18)-ból következik, hogy

$$\sum_{k=1}^n x_k^j y_k = \sum_{k=1}^n x_k^j g(x_k; \mathbf{a}); \quad (j = 0, 1, \dots, s).$$

Ez végső soron $s + 1$ számú egyenletet jelent az $\mathbf{a}$ komponenseire nézve; az eljárás szempontjából pedig a momentumok módszerére vezet.

Ha pl. $g(x; \mathbf{a}) = a_0 + a_1 x + \dots + a_s x^s$, akkor az a_l ($l = 0, 1, \dots, s$) paraméterek egyértelmű „legjobb” becslésére ugyanazt kapjuk, mintha a legkisebb négyzetek módszerét alkalmaztuk volna (Vö.: [11] 376. o.)

5. A hasonlósági függvény valószínűségi változók esetén

Vizsgáljuk a

$$H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

függvénynek azt az esetét, amikor

$$\alpha = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{4} \text{ és } \mathbf{p} > \mathbf{0}; \mathbf{q} > \mathbf{0}.$$

Ekkor könnyen meggyőződhetünk arról, hogy

$$(19) \quad H_{1/2, 1/4}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q) \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{p_k q_k}}{\sqrt{PQ}}.$$

Legyen:

$$(20) \quad R(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{PQ}} \sum_{k=1}^n \sqrt{p_k q_k}.$$

Ekkor:

$$(19') \quad H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q) \cdot R(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Az $R(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ -nak az alábbi valószínűség számítási vonatkozású interpretációját adhatjuk:

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ teljesen független valószínűségi változók, melyre nézve $M(\xi_k) = m_k$, $D(\xi_k) = \sigma_k$, ($k = 1, 2, \dots, n$). Legyenek továbbá $a_k \sigma_k = \sqrt{p_k} > 0$; $b_k \sigma_k = \sqrt{q_k} > 0$, ($k = 1, 2, \dots, n$) valós számok, és legyen:

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^n a_k (\xi_k - m_k)$$

$$\eta_2 = \sum_{k=1}^n b_k (\xi_k - m_k).$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} M(\eta_1) &= 0; \quad M(\eta_2) = 0; \\ M(\eta_1 \eta_2) &= \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 a_k b_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{p_k q_k}, \\ D(\eta_1) &= \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 \sigma_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n p_k} = \sqrt{P}, \\ D(\eta_2) &= \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2 \sigma_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n q_k} = \sqrt{Q}, \end{aligned}$$

és így η_1 és η_2 korrelációs együtthatójára fennáll az alábbi összefüggés:

$$(21) \quad r(\eta_1, \eta_2) = \frac{M(\eta_1 \eta_2) - M(\eta_1) M(\eta_2)}{D(\eta_1) D(\eta_2)} = \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{p_k q_k}}{\sqrt{PQ}} = R(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy $R(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a

$$\mathbf{p}^* = (\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n}) \text{ és a } \mathbf{q}^* = (\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2}, \dots, \sqrt{q_n})$$

vektorok iránycosinusa.

Ezzel a hasonlósági függvényt nemcsak a J_x divergenciával, hanem a korrelációs együtthatóval is kapcsolatba hoztuk.

Ha $\lambda(P, Q) = \frac{4PQ}{(P+Q)^2}$, akkor, az eddig kapott eredmények alapján könnyen belátható, hogy

$$(19'') \quad H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{4D(\eta_1) D(\eta_2)}{(D^2(\eta_1) + D^2(\eta_2))^2} M(\eta_1 \eta_2) = \frac{4D^2(\eta_1) D^2(\eta_2)}{[(D^2(\eta_1) + D^2(\eta_2))]^2} r(\eta_1, \eta_2)$$

$P = Q$ esetén pedig a $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = r(\eta_1, \eta_2)$ összefüggés is teljesül.

Megjegyzések:

1. Mivel

$$D^2(\eta_1 + \eta_2) = 2r(\eta_1, \eta_2)D(\eta_1)D(\eta_2) + D^2(\eta_1) + D^2(\eta_2),$$

ezért a (19') és (20)-ra való tekintettel

$$(19''') \quad H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{D^2(\eta_1 + \eta_2) - [D^2(\eta_1) + D^2(\eta_2)]}{2D(\eta_1) D(\eta_2)} \lambda(P, Q).$$

2. Az itt kapott eredmények rávilágítanak a $J_{1/2}$ divergencia valószínűség-számítási jelentésére is. Ugyanis a

$$(22) \quad J_{1/2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 4 \log_2 \frac{\sqrt{PQ}}{\sum_{k=1}^n \sqrt{p_k q_k}}$$

összefüggés felhasználásával kapjuk, hogy

$$(22') \quad J_{1/2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -4 \log_2 R(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -4 \log_2 r(\eta_1, \eta_2),$$

vagyis a $J_{1/2}$ divergencia a korrelációs együttható logaritmusának konstans-szorosa.

3. Tegyük fel, hogy η olyan valószínűségi változó, amely a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ teljesen független valószínűségi változók függvénye, mégpedig

$$\eta = h(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

ahol $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olyan n -változós valós függvény, amelynek az összes elsőrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak.

Legyen $M(\xi_k) = m_k$ és $D(\xi_k) = \sigma_k$.

A többváltozós Taylor-formula szerint

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = h(m_1, m_2, \dots, m_n) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_k} (x_k - m_k),$$

s itt a deriváltak az $x_k^* = m_k + \vartheta_k(x_k - m_k)$ ($0 < \vartheta_k < 1$; $k = 1, 2, \dots, n$) helyen veendőek. Amennyiben a ξ_k valószínűségi változók szórásai kicsinyek, akkor az m_k helyen vett $\frac{\partial h}{\partial x_k} = a_k$ tényezőket első közelítésben állandónak lehet venni és így

$$M(\eta) \approx h(m_1, m_2, \dots, m_n)$$

$$\begin{aligned} D^2(\eta) &\approx D^2\{h(m_1, m_2, \dots, m_n) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_k} (\xi_k - m_k)\} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial x_k} \right)^2 D^2(\xi_k) = \sum_{k=1}^n a_k^2 \sigma_k^2, \end{aligned}$$

itt a parciális deriváltak az $m_1, m_2, \dots, m_n$ helyen veendőek.

Ha feltételezzük, hogy $M(\eta) = 0$, akkor $\eta \approx \sum_{k=1}^n a_k(\xi_k - m_k)$ közelítéssel élhetünk. A $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ismeretében az a_k együtthatók meghatározhatók s ezt a tényt felhasználhatjuk a p_k értékek megválasztásánál.

6. A kapott eredmények egy alkalmazása

Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk bemutatjuk, hogy az eddig kapott eredményeket hogyan lehet felhasználni sportteljesítmények értékelésére. Pontosabban az 1976. évi nyári olimpiaán elért eredmények alapján az országok közötti rangsorolással foglalkozunk.

Elöljáróban megemlítjük, hogy az utóbbi időben egyre gyakrabban találkozunk olyan törekvéssel, mely szerint egyes országok igyekeznek helyüket a sportvilágban objektíven meghatározni, azért, hogy a fejlődés érdekében

teendő intézkedésekhez egyfajta támpontot kapjanak. (Bővebb információként lásd pl. [12].)

Tényként említendő, hogy az olimpián résztvevő országokat hivatalosan nem rangsorolják, de „nem hivatalos” jelzőkítételekkel szinte minden országban készül az érmek száma vagy a további helyezések alakulásának figyelembevétele alapján valamilyen rangsorolás.

Hazánkban az első hat helyezés 7–5–4–3–2–1 pontszám hozzárendeléssel készült rangsorolás terjedt el, s ezt veszi alapul Köves Pál is [12]-ben amikor a megfelelő értékelő módszer kialakítását tűzi maga elé. A kiértékelési mód legegyszerűbb esetében a pontszámok összegének monoton csökkenő sorrendje adja a helyezések számát. A [12] a rangsor meghatározásánál már a népesség számának alakulására is tekintettel van, s a lélekszám logaritmusa és a pontszám logaritmusa között lineáris összefüggést tételez fel. Mi e helyen nem bocsátkozunk ilyen irányú vizsgálatokba, csupán az 1976-ban Montreálban rendezett nyári olimpiai eredmények alapján végzünk rangsorolást a [13]-ban található alapinformációk felhasználásával, figyelembevételével.

Számításaink során a következő módon jártunk el: A $\mathbf{p}$ vektor i -edik koordinátája 7 ha az i -edik versenyszámban egy ország csak egy versenyzőt (csapatot) indíthat, ellenkező esetben $7 + 5 + 4 = 16$, azaz a $\mathbf{p}$ vektor i -edik ($i = 1, 2, \dots, 198$) koordinátáját az i -edik versenyszámban egy ország által elérhető összpontok maximális száma adja meg.

A $\mathbf{q}$ vektor koordinátáit minden ország esetén az illető ország által az egyes versenyszámokban ténylegesen elért összpontok száma adja meg. A $\lambda(P, Q) =$

$$= \frac{4PQ}{(P + Q)^2} \text{ választás mellett (19) alapján elvégzett számítások eredményét}$$

az alábbi táblázat tartalmazza:

Helyezés [13] szerint	Ország	Pontszámok	$H(p, q)$ értékek	Helyezés a $H(p, q)$ értékek szerint
1	Szovjetunió	790	0,614396	1
2	Német Demokratikus Köztársaság	636	0,494744	2
3	Egyesült Államok	609	0,478226	3
4	Német Szövetségi Köztársaság	282	0,207346	4
5	Lengyelország	192	0,139646	5
6	Románia	181	0,122666	6
7	Japán	168	0,097549	9
8	Bulgária	167	0,102193	8
9	Magyarország	155	0,104389	7
10	Kanada	108	0,075358	10
11	Olaszország	101	0,067864	11
12	Nagy-Britannia	96	0,054697	12
13	Kuba	88	0,040265	14
14	Csehszlovákia	75	0,041663	13
15	Franciaország	71	0,036493	15
16	Finnország	56	0,026886	16
17	Jugoszlávia	56	0,022302	19
18	Svédország	55	0,024707	18
19	Ausztrália	52	0,026113	17
20	Hollandia	41	0,016268	20
21	Új-Zéland	36	0,012894	22
22	Belgium	35	0,013736	21
23	Dél-Korea	34	0,010141	23

Helyezés [13] szerint	Ország	Pontszámok	$H(p, q)$ értékek	Helyezés a $H(p, q)$ értékek szerint
24	Svájc	24	0,006956	26
25	Brazília	24	0,009039	24
26	Spanyolország	23	0,007023	25
27	Dánia	18	0,004217	28
28	Norvégia	18	0,003947	29
29	Koreai Népi Demokratikus Közt.	17	0,004258	27
30	Irán	16	0,003874	31
31	Jamaica	15	0,003920	30
32	Mongolia	14	0,003404	32
33	Mexikó	13	0,002439	35
34	Portugália	12	0,003194	33
35	Ausztria	10	0,002623	34
36	Trinidad	8	0,001471	37
37	Írország	7	0,001615	36
38	Puerto Rico	7	0,001272	38
39	Venezuela	5	0,000521	39
40	Bermuda	4	0,000418	40—41
41	Pakisztán	4	0,000418	40—41

Meg kívánjuk jegyezni, hogy [12]-ben a lényegesen „radikálisabb” sorrend változtató tényezők alkalmazásakor is számolhatunk pontszámok helyett H értékekkel és az ilyen H értékek alakulása szerint rangsorolhatunk.

(Beérkezett: 1977. április 19.)

IRODALOM

- [1] DOBÓ, A.: *Számítástechnikai eszközök és tulajdonságainak értékelése matematikai módszerekkel*. Budapest, 1972. KGM ISZSZI kiadvány.
- [2] DOBÓ, A.: *A termékek tulajdonságainak számszerű jellemzése*. Minőség és Megbízhatóság IX(1975):5.
- [3] DOBÓ, A.—dr. FENYVES, F.—SAJJCZ, S.: *A vállalatok és számítógép-rendszerek egyértelmű megfeleltetése*. Budapest, 1976. KIM részére készült tanulmány.
- [4] DOBÓ, A.: *Minőség és hatékonyság*. Minőség és Megbízhatóság X(1976):4.
- [5] RÉNYI, A.: *Az információelmélet néhány alapvető kérdése*. MTA III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei, X(1960):3.
- [6] DOBÓ, A.—SAJJCZ, S.: *Szakkvélemények értékelése valószínűségszámítási módszerekkel. I. rész*. Minőség és Megbízhatóság X(1976):6. II. rész u.o. XI(1977):1.
- [7] PÁRNICZKY, G.: *A statisztikai informatika alapjai*. Budapest, 1976. Statisztikai Kiadó Vállalat.
- [8] HARDY, G.H.—LITTLEWOOD, J. E.—PÓLYA, G.: *Inequalities*; Cambridge, 1952. University Press.
- [9] FRITZ, J.: *Az alakfelismerés statisztikai módszerei*. Budapest, 1974. MTA Mat. Kut. Int. Kiadványa.
- [10] RÉNYI, A.: *Napló az információelmületről*. Budapest, 1976. Gondolat Könyvkiadó.
- [11] RÉNYI, A.: *Valószínűségszámítás*. Budapest, 1954. Tankönyvkiadó.
- [12] KÖVES, P.: *Az olimpiai eredmények értékeléséhez*. Statisztikai Szemle 54(1976):11.
- [13] Népsport; 1976. augusztus 3.

SIMILARITY FUNCTION AND SOME OF ITS PROPERTIES

In this paper we use the concept of similarity function as introduced in [2]. More exactly: Given two n -dimensional real vectors of positive components: $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ by the measure H expressing similarity of the two vectors we understand, by definition the expression

$$H \stackrel{\text{def}}{=} H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda \cdot (PQ)^{\frac{\beta}{\alpha-1}} \left[\left(\sum_{i=1}^n p_i^{\alpha} q_i^{1-\alpha} \right) \left(\sum_{k=1}^n p_k^{1-\alpha} q_k^{\alpha} \right) \right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$$

where α and β are real numbers satisfying the conditions $0 \leq \beta$ and $0 \leq \alpha \neq 1$ resp., $P = \sum_{k=1}^n p_k$, $Q = \sum_{k=1}^n q_k$, and λ is such a suitably selected function of the variables P and Q for which $0 < \lambda \equiv \lambda(P, Q) \leq 1$ holds, and here $\lambda(P, Q) = 1$, if, and only if $P = Q$.

In the first part of the paper the authors point out that the origin of the function $H_{\alpha, \beta}(p, q)$ is related to the formation of averages.

The second part contains results indicating the most important characteristics of the similarity function (e.g. proposition No. 1 stating the connexion with the Jeffreys divergence J_{α} ; the possible interpretability of the similarity function in the case of $\alpha = 1$, etc).

Investigations of the third part are connected with the specification of the variables and parametres figuring in the similarity function here an important role is played already by the actual seletion of the symmetrical function $\lambda(P, Q)$.

The fourth part of the paper deals with applicability of the similarity measure to function approximation.

The fifth part reveals interdependencies of the similarity function related to the calculus of probabilities.

In the sixth and closing part of the paper the authors present a concrete application of the results, which is concerned with the evaluation of sporting results.

ГОМОГЕНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ОСОБЕННОСТИ

В рассматриваемой работе понятие гомогенической функции используется в соответствии с толкованием по (2). Точнее, в случае данного

$$p = p_1, p_2, \dots, p_n$$

и

$$q = q_1, q_2, \dots, q_n$$

реального вектора с положительным компонентом измерения « n » по данной формулировке под величиною « H », выражающей гомогеничность этих двух векторов, следует понимать выражение

$$H \stackrel{\text{def}}{=} H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda \cdot (PQ)^{\frac{\beta}{\alpha-1}} \left[\left(\sum_{i=1}^n p_i^{\alpha} q_i^{1-\alpha} \right) \left(\sum_{k=1}^n p_k^{1-\alpha} q_k^{\alpha} \right) \right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$$

в котором α и β являются реальными цифрами, удовлетворяющими условию « $0 \leq \beta$ » и « $0 \leq \alpha \neq 1$ », $P = \sum_{k=1}^n p_k$, $Q = \sum_{k=1}^n q_k$ и, далее, « λ », являются такой удачно выбранной симметрической зависимостью переменных « P » и « Q », относительно которой реально « $0 < \lambda \equiv \lambda(P, Q) \leq 1$ » и в данном случае $\lambda(P, Q) = 1$ тогда и только тогда, когда $P = Q$.

В последующем выражении $H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ будем называть гомогенической зависимостью или гомогенической мерой измерения.

В первой части работы авторы указывают, что выведение функции $H_{\alpha, \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ связано с формированием среднего значения.

Во второй части приводятся результаты, дающие основную характеристику гомогенической функции (например, возможное толкование первого положения, касающегося связи с дивергенцией J_x типа Jeffreys, если зависимость гомогеничности равна $\alpha = 1$).

В третьей части рассматриваются переменные и параметры гомотетической функции в аспекте более тщательного отбора; в данном случае большую роль играет и выбор симметрической функции $\lambda(P, Q)$.

В четвертой части работы рассматриваются возможности использования степени гомогеничности в аспекте подхода по функции.

В пятой части приводятся аспекты расчетов гомогенической функции с точки зрения теории вероятности.

В шестой завершающей части работы авторы на конкретном примере раскрывают использование получаемых результатов в отношении оценки спортивных достижений, точнее, определения классных мест стран на олимпийских играх.

Egy előrejelzési paradoxon¹

Az ökonométerek panaszkodnak némelykor, hogy a döntéshozó olyan eseményre kíván jóslatot, melynek bekövetkezése nagymértékben függ az ő döntésétől, miközben magát a döntést a kapott jóslattól teszi függővé. Ezt a korántsem ritka helyzetet az alábbi történet keretében vizsgáljuk:

A történet

Élt egyszer egy perzsa sah, aki annyira szenvedélyes vadász volt, hogy hosszú uralkodásának minden napján pompás vadászatot rendezett az udvarában, de több ízben előfordult, hogy az uralkodás gondjai megakadályozták, hogy részt vegyen rajtuk. Egy szép napon magához hívatta az ökonométerét, és megkérdezte tőle, mekkora valószínűséggel lesz jelen a másnapi vadászatón. Ez főként őfelsége óhajától függ, vélte az ökonométer. A sah tiltakozott: ő attól a kétségtől tudományos jóslattól kívánja függővé tenni elhatározását, amelyet majd az ökonométertől fog kapni. Ezután megadott egy 0 és 1 közé eső q számot és megmagyarázta, hogy ha a kapott jóslatnak megfelelően a részvételének valószínűsége legalább q , akkor úgy dönt, hogy elmegy a vadászatra, az ellenkező esetben viszont otthon szándékozik maradni. Az ökonométer még megkérdezte, mi történik akkor, ha nem tud a megadott feltételeknek eleget tevő jóslatot adni, mire az uralkodó azt válaszolta, hogy akkor is eldönti valahogyan a kérdést, de az ökonométert azon nyomban elkergeti az udvarából.

Mivelhogy mindez borzasztóan régen történt, a realitás sérelme nélkül feltehetjük, hogy az ökonométer, visszatérve laboratóriumába, nem látott neki rögtön a számolásnak, hanem először megvizsgálta a feladatot, mégpedig három szempontból:

- I. Van-e valami haszna az uralkodónak a jóslatból?
- II. Mik a lehetséges jóslatok?
- III. Mekkora valószínűséggel lehet bármilyen jóslatot adni?

A továbbiakban mi is nyomon követjük ökonométerünk gondolatmenetét és eljárásait, és megfigyeljük, hogy milyen eredményre jutott.

¹ A jelen cikk a Structures Economiques et Econométrie elnevezésű kollokviumra (Lyon, 1977. április 21–23.) benyújtott előadás szövegén alapul.

Először is definiálni fogjuk a következő eseményeket:

A: a sah részt vesz a vadászaton

$\bar{A}$: a sah otthon marad

B_1 : a sah úgy dönt, hogy vadászni megy

B_2 : a sah úgy dönt, hogy nem megy el

C_1 : a kapott jóslat olyan, hogy maga után vonja B_1 -et

C_2 : a kapott jóslat olyan, hogy maga után vonja B_2 -t

C_3 : nincs a feltételeknek megfelelő jóslat.

Továbbá feltesszük a következőket:

– az összes fenti esemény valószínűsége pozitív [ezek közül csak $P(C_3)$ pozitív voltát kell belátnunk];

– $P(A)$, $P(B_1)$, $P(A|B_1)$, $P(A|B_2)$ valószínűségek becsülhetők az udvari feljegyzések alapján relatív gyakoriságukkal, mégpedig rendre $\hat{p}$, $\hat{r}$, $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ -vel;

– továbbá tudjuk, hogy a relatív gyakoriság elégséges becslése a valószínűségnek.

A mesében említett tudományos jóslatot a sah is és az ökonóméter is úgy értelmezi, hogy az a megfelelő feltételes valószínűségek, vagyis $P(A|C_1)$, illetve $P(A|C_2)$ elégséges becslése kell hogy legyen. A továbbiakban az ilyen jóslatot fogjuk megengedett jóslatnak nevezni.

Szükségünk lesz még a következő események definíciójára:

$$D_1: P(A|B_2) < q < P(A|B_1)$$

$$D_2: P(A|B_1) < q < P(A|B_2)$$

$$D_3: q < P(A|B_1) \text{ és } q < P(A|B_2)$$

$$D_4: P(A|B_1) < q \text{ és } P(A|B_2) < q$$

Mint majd később látni fogjuk, a

$$D_5: P(A|B_1) = P(A|B_2) \text{ és } q = P(A)$$

0 valószínűségű eseménytől eltekintve a D_k ($k = 1, 2, 3, 4$) események teljes rendszert alkotnak.

A meséből és a megadott eseményekből kiindulva definiálhatjuk az $\mathcal{A}_1$ és az $\mathcal{A}_2$ σ -algebrát a következőképpen:

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}, B_i, C_j; i = 1, 2; j = 1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega, D_k; k = 1, 2, 3, 4\}$$

$\mathcal{A}_1$ -et elnevezzük a sah σ -algebrájának, mert ő éppen ezt tudja elgondolni. $\mathcal{A}_2$ -t az ökonóméterének, mert ezen fogja megoldani a feladatot.

I. A sah problémája

Ökonóméterünk először azt vizsgálja, hogy mi lehet a sah célja a feladattal. Feltehetően az, hogy növelje döntésének biztonságát, vagy ami ugyanaz, csökkentse annak a csalódásnak vagy presztizisveszteségnek a kockázatát, amely akkor éri, ha elhatározása nem teljesül.

Legyen S az az esemény, hogy a sah döntése teljesül, anélkül, hogy jósát meghallgatná. A megfelelő valószínűség:

$$P(S) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2).$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy mindig áll:

$$P(S) \leq \max [P(A|B_1), P(\bar{A}|B_2)].$$

Ezért, ha a sah gyakrabban tartja meg azt a döntését, hogy vadászni megy, mint azt, hogy otthon marad, akkor azt kell tanácsolni neki, hogy menjen vadászni; az ellenkező esetben azt, hogy maradjon otthon. Ha hallgat a tanácsra, akkor a sah döntése a legnagyobb valószínűség elvén fog alapulni.

A sah azonban nem tanácsot kért, hanem jóslatot. A feltételek értelmében

$$P(B_1|C_1) = 1 \text{ és } P(B_2|C_2) = 1, \text{ ezért}$$

$$C_1 \subset B_1 \text{ miatt } P_{C_1}^*(A) = P_{C_1}^*(A|B_1),$$

$$C_2 \subset B_2 \text{ miatt } P_{C_2}^*(\bar{A}) = P_{C_2}^*(\bar{A}|B_2),$$

ahol $P_{C_1}^*$ és $P_{C_2}^*$ a C_1 -re, illetve C_2 -re normált mérték az $\mathcal{A}_1$ σ -algebrán.

A jóslat után C_1 vagy C_2 már bekövetkezett. Az kell, hogy

$$C_1 \text{ után } P(A|B_1) \geq P(S)$$

$$C_2 \text{ után } P(\bar{A}|B_2) \geq P(S),$$

vagyis

$$C_1 \text{ után } P(A|B_1) \geq P(\bar{A}|B_2) = 1 - P(A|B_2)$$

$$C_2 \text{ után } P(A|B_1) \leq P(\bar{A}|B_2) = 1 - P(A|B_2)$$

fennálljon.

Ennek alapján máris megfogalmazható az

1. Állítás²

Ha van olyan megengedett jóslat, amely eleget tesz a legnagyobb valószínűség elvének is, akkor a sahnak érdemes hallgatnia a jóslatra.

II. A jóslási paradoxon

Ökonóméterünket most az érdekli, mi volna a sah vadászatának legpontosabb előrejelzése, hiszen ezt kérték tőle. Eközben szem előtt tartja, hogy jóslata befolyásolja a vadászat valószínűségét, mégpedig nem közvetlenül, hanem a sah döntésén keresztül.

Mihelyt elhangzott a jóslat, annak valószínűsége, hogy a sah részt vesz a vadászatban, vagy $P(A|C_1)$, vagy $P(A|C_2)$. Hogyan lehet megjósolni, hogy melyik; és mi az értéke ennek a két feltételes valószínűségnek?

² Ezt és további állításainkat igyekeztünk úgy kimondani, hogy a meséből levonható tanulságok lehetőleg közérthető verbális megfogalmazását adjuk.

Tegyük fel egyelőre, hogy a sah által megadott q szám nem más, mint a sah szubjektív becslése $P(A)$ -ra. Mint majd később látni fogjuk, ez a feltevés nem változtatja meg a probléma természetét, és a megoldását is alig.

$$P_{C_1}^*(A) = P_{C_1}^*(A|B_1)$$

és a döntési szabály miatt, amelyet most q helyett $P(A)$ -ra vonatkoztatunk, ha

$$P(A|B_1) > P(A),$$

akkor $P(A|B_1)$ biztosan a legjobb jóslat, és ugyanilyen megfontolásokból, ha

$$P(A|B_2) < P(A),$$

akkor biztosan $P(A|B_2)$ a lehetséges legjobb jóslat.

Az első esetben ugyanis a sah biztosan a B_1 döntést választja, tehát éppen $P(A|B_1)$ valószínűséggel vesz részt a vadászatban, a második esetben pedig a döntés biztosan B_2 , tehát csak $P(A|B_2)$ valószínűséggel kell elmennie, ha előbb nem akart is.

Úgy látszik tehát, hogy a feladat elvégzéséhez elég az ökonométernek a fenti két feltételes valószínűséget becsülnie, vagyis megadnia $\tilde{p}_1$ -et vagy $\tilde{p}_2$ -t. Mindkét esetben feltettük azonban, hogy a legjobb jóslatnak tekintett feltételes valószínűsége teljesül egy reláció. Ezt vizsgáljuk meg most. A teljes valószínűség tételéből

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2),$$

ahol $P(A)$, $P(A|B_1)$ és $P(A|B_2)$ között

- (i) vagy $P(A|B_2) < P(A) < P(A|B_1)$
- (ii) vagy $P(A|B_2) = P(A) = P(A|B_1)$
- (iii) vagy $P(A|B_1) < P(A) < P(A|B_2)$

reláció teljesül. Ahonnet rögtön következik a

2. Állítás

Ha az előbbi relációk közül az első áll fenn, az ökonométer nem egy, hanem két egyaránt jó jóslatot adhat, és mivel ezt az esetet a sah nem vette számításba, az ökonométernek kell eldöntenie, hogy melyik lesz az.

A második esetben a feltételek értelmében $P(A|B_1)$ még kielégítő jóslat.

A harmadik esetben az ökonométer egyáltalán nem tud a kívánságnak megfelelő jóslatot adni. Ha ugyanis $P(A)$ -nál nagyobb számot ad meg, a sah ennél kisebb valószínűséggel lesz ott a vadászatban, ha $P(A)$ -nál kisebb számot mond, a sah részvételi esélye ennél feltétlenül nagyobb.

Mindebből még az is kiderül, hogy a sah által megfogalmazott feladat tartalmazott egy implicit feltevést, mégpedig azt, hogy a döntései általában közelítik őt az óhajtott célhoz, holott ez nincs mindig így. Ha viszont a döntései jól teljesülnek, akkor két egyaránt jó jóslatot is kaphat, amelyek mindegyike determinálja az ő döntését, tehát befolyásolja a jövőjét is, és csak az ökonométertől függ, hogy milyen irányban.

Megjegyezhetjük még, hogy ha a sah a legnagyobb valószínűség elvének megtartására kötelezte volna ökonóméterét, akkor az (i) esetben is mindig egy és csak egy megengedett jóslat volna, erről azonban nem volt szó a mesében. Az ökonóméter természetesen elfogadhatja ezt a maga számára döntési szabályként, és ha jónak látja, közölheti is a sahhal.

III. Az ökonóméter problémája

Azt megállapíthatjuk, hogy ökonóméterünknek becslési problémája nincsen. Ha a minta elég nagy (az udvari feljegyzések eléggé régi időre mennek vissza), akkor a $\tilde{p}$, $\tilde{r}$, $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ becslések között fennálló relációk, minthogy relatív gyakoriságokkal becsülheti őket, igen nagy valószínűséggel ugyanazok, mint a $P(A)$, $P(B_1)$, $P(A|B_1)$, $P(A|B_2)$ közöttiek. Ezért elég azt vizsgálnunk, hogy az ökonóméter mekkora valószínűséggel tarthatja meg az állását, vagy ami ugyanaz: mekkora valószínűséggel tud valamilyen jóslatot adni.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$x = P(A), \quad y = P(B_1), \quad u = P(A|B_1), \quad v = P(A|B_2).$$

A teljes valószínűség tétele miatt bármely összetartozó (x, y, u, v) érték esetén az $x = yu + (1 - y)v$ összefüggés áll fenn a négy mennyiség között. Ezt fogjuk a továbbiakban felhasználni.

3. Állítás

Az ökonóméter nem tud nagyobb valószínűséggel jósolni, mint a legnagyobb azok közül, amekkorával ura vadászni megy vagy otthon marad, a vadászat vagy az otthon maradás mellett dönt; vagyis a jóslatadás valószínűsége nem lehet nagyobb, mint $\max [x, y, 1 - x, 1 - y]$.

Bizonyítás:

Tekintsük az $\{(x, y); 0 < x < 1; 0 < y < 1\}$ valós rendezett számpárok halmazát, és tegyük fel, hogy (x, y) -t egyenletesen választhatjuk az egységnégyzet belsejében. Az x szám álljon az ismeretlennek tekintett $P(A)$, y az ismeretlen $P(B_1)$ valószínűség helyett. Rendeljük hozzá ezután az (x, y) párokhoz az

$$I(x, y) = \{yu + (1 - y)v - x = 0; 0 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq 1\}$$

egyenes szakaszokat. Az $(x, y) \rightarrow I(x, y)$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, és $I(x, y)$ nyilván átmegy a zárt egységnégyzet $(u, v) = (x, x)$ pontján. $I(x, y)$ végpontjai $(\min u, \max v)$ és $(\max u, \min v)$, úgy hogy

$$\begin{aligned} \max u &= \min \left[\frac{x}{y}, 1 \right] & \min u &= \max \left[0, \frac{x + y - 1}{y} \right] \\ \max v &= \min \left[\frac{x}{1 - y}, 1 \right] & \min v &= \max \left[0, \frac{x - y}{1 - y} \right] \end{aligned}$$

Definiáljuk továbbá a ξ és az η valószínűségi változókat úgy, hogy

$$\eta = -a\xi + b; \quad a = \frac{y}{1-y}; \quad b = \frac{x}{1-y}.$$

A ξ valószínűségi változó az ismeretlennek tekintett $P(A|B_1)$, az η valószínűségi változó az ismeretlen $P(A|B_2)$ valószínűségek helyett áll. Az ökonóméter szempontjából értelmes feltevésnek látszik, ha a (ξ, η) változópár együttes eloszlását egyenletesnek tekintjük a

$$(\min u, \max u) \times (\max v, \min v) \subset \mathbb{R}^2$$

intervallumon, amely ξ és η lineáris összefüggése miatt $I(x, y)$ -ra húzódik össze.

Az ökonómétert a $P(\xi > x, \eta < x)$ valószínűség érdekli minden rögzített (x, y) -ra.

Az előzőekből világos, hogy ξ egyenletes eloszlású a $(\min u, \max u)$, η pedig a $(\max v, \min v)$ intervallumon. Továbbá geometriai megfontolásokból az $(x, 0)$, illetve a $(0, x)$ pont ugyanolyan arányban osztja a $[\min u, \max u]$, illetve a $[\max v, \min v]$ szakaszokat, mint az (x, x) pont az $I(x, y)$ szakaszt. Ezért a keresett valószínűségekre igaz a következő:

$$P(\xi > x, \eta < x) = P(\xi > x) = \frac{\max u - x}{\max u - \min u} = P(\eta < x) = \frac{x - \min v}{\max v - \min v}.$$

Behelyettesítés után a két tört értékére ezt kapjuk:

$$P(\xi > x, \eta < x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{ha } \max u = 1, & \min u = 0, \text{ és} \\ & \max v = \frac{x}{1-y}, & \min v = \frac{x-y}{1-y} \\ 1 - y, & \text{ha } \max u = \frac{x}{y}, & \min u = 0, \text{ és} \\ & \max v = \frac{x}{1-y}, & \min v = 0 \\ y, & \text{ha } \max u = 1, & \min u = \frac{x+y-1}{y}, \text{ és} \\ & \max v = 1, & \min v = \frac{x-y}{1-y} \\ x, & \text{ha } \max u = \frac{x}{y}, & \min u = \frac{x+y-1}{y}, \text{ és} \\ & \max v = 1, & \min v = 0 \end{cases}$$

Ezzel a 3. Állítást bizonyítottuk.

A továbbiakban kiszámolhatjuk, hogy a négy különböző eredményhez x és y milyen változási tartományai tartoznak. Ezt használva a következő feltételes valószínűségeket írhatjuk fel:

$$P(\xi > x, \eta < x \mid 0 < y \leq \min[x, 1 - x]) = 1 - x$$

$$P\left(\xi > x, \eta < x \mid x < y \leq 1 - x \text{ és } x < \frac{1}{2}\right) = 1 - y$$

$$P\left(\xi > x, \eta < x \mid 1 - x < y \leq x \text{ és } x > \frac{1}{2}\right) = y$$

$$P(\xi > x, \eta < x \mid \max[x, 1 - x] < y < 1) = x$$

Jelöljük a feltételekben szereplő eseményeket E_l -l (l = 1, 2, 3, 4). Könnyen belátható, hogy $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$ esetén ezek teljes esemény-rendszert alkotnak, és (geometriai) valószínűségük azonos, mégpedig:

$$P(0 < y \leq \min[x, 1 - x]) = P(E_1) = \frac{1}{4}$$

$$P\left(x < y \leq 1 - x \text{ és } x < \frac{1}{2}\right) = P(E_2) = \frac{1}{4}$$

$$P\left(1 - x < y \leq x \text{ és } x > \frac{1}{2}\right) = P(E_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(\max[x, 1 - x] < y < 1) = P(E_4) = \frac{1}{4}$$

Végül jelöljük a keresett feltétel nélküli valószínűséget $P(E)$ -vel. A fentiekből ennek értékére ezt kapjuk:

$$P(\xi > x, \eta < x) = P(E) = \sum_{l=1}^4 P(E|E_l) P(E_l) = \frac{1}{2},$$

mint ez intuitív módon várható is volt. Ebből következik a

4. Állítás

Ha a $P(A)$ és $P(B_1)$ valószínűségek nem ismeretesek, akkor az ökonóméter esélye nem nagyobb, mintha a sah pénzfeldobással döntené el, hogy maradhat-e az udvarnál vagy sem.

Mitől javulhat az ökonóméter helyzete? A válasz ez:

5. Állítás

Az ökonóméter helyzete akkor jobb, ha a sah által megadott q szám eléggé messze esik $P(A)$ -tól, vagyis, ha a sah eléggé rosszul tájékozott a saját múltjáról.

Ahhoz, hogy ezt belássuk, tekintsük először, hogy q hogyan helyezkedhetik el a szóbanforgó valószínűségekhez képest, és a különböző helyzeteihez milyen lehetséges jóslatok tartoznak:

q elhelyezkedése	Milyen esemény következik be?	A megengedett jóslat
$P(A B_2) < q < P(A B_1)$	$D_1 \subset C_1 + C_2$	$P(A B_1)$ és $P(A B_2)$ akármelyike
$P(A B_1) < q < P(A B_2)$	$D_2 = C_3$	nincs jóslat
$q < P(A B_2) < P(A B_1)$	$D_3 \subset C_1$	$P(A B_1)$
$q < P(A B_1) < P(A B_2)$	$D_4 \subset C_2$	$P(A B_2)$

A jóslat létezésének valószínűsége most ez:

$$P(\xi > q) + P(\eta < q) - P(\xi > q, \eta < q)$$

és ez a valószínűség lehet nagyobb is, mint az előbbiek, tehát mint $\max [x, y, 1 - x, 1 - y]$.

Tekintve, hogy ekkor eléggé sok esetet kell végigvizsgálni, számoljunk ki közülük csak egyet. Mégpedig azt, amikor $\max u = \frac{x}{y}$, $\min u = \frac{x + y - 1}{y}$, $\max v = 1$, $\min v = 0$, $q < \min u < x$.

Jelölje F azt az eseményt, hogy mindezek a feltételek teljesülnek. Számításba kell vennünk még azt is, hogy most a $v = q$ egyenes metszi az $I(x, y)$ szakaszt, és a metszéspontban

$$u = \frac{x - (1 - y)q}{y}.$$

Mindezeket figyelembe véve a keresett valószínűségek a következők:

$$P(\xi > q|F) = \frac{\max u - \min u}{\max u - \min u} = 1$$

$$P(\eta < q|F) = \frac{q - \min v}{\max v - \min v} = q$$

$$P(\xi > q, \eta < q|F) = \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{y} - \frac{x - (1 - y)q}{y}\right)^2 + q^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{y} - \frac{x + y - 1}{y}\right)^2 + 1}} = q$$

Tehát az ökonóméter most 1 valószínűséggel tud valamilyen jóslatot adni, mégpedig q valószínűséggel $P(A|B_1)$ és $P(A|B_2)$ közül bármelyiket, $1 - q$ valószínűséggel pedig $P(A|B_1)$ -et.

Végül vegyük még észre, hogy ha az előbbi számolásban x nem $P(A)$ helyett, hanem a becslt értéke $\tilde{p}$ helyett állna; y nem $P(B_1)$ helyett, hanem a becslt

értéke, $\tilde{r}$ helyett állna; ξ az ismeretlen $\tilde{p}_1$ -et, η az ismeretlen $\tilde{p}_2$ -t reprezentálná, akkor is ugyanezt az eredményt kapnánk.

Ezzel valójában vége is a történetnek. Vizsgálódása közben az ökonóméter is rájön arra, hogy az az $\{\Omega, \mathcal{A}_2, P\}$ valószínűségi mező, amelyen neki kell megoldania a feladatot, nem ekvivalens a sahéval, $\{\Omega, \mathcal{A}_1, P\}$ -vel. A jóslási problémában definiált $P(A|C_j)$ ($j = 1, 2, 3$) nem mérték $\mathcal{A}_2$ -n, a megoldáshoz szükséges $P(C_j|D_k)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) nem mérték sem $\mathcal{A}_1$ -en, sem $\mathcal{A}_2$ -n. Továbbá jóslatot kapni és jóslatot adni nem ugyanannak a kísérletnek az eredménye, bár a kapott és az adott jóslat mindig megegyezik.

Most már nincs más hátra, mint a

6. Állítás

A sah akkor tudná áttekinteni a saját helyzetét, ha meg tudná figyelni az ökonóméter döntéseit. Az ökonóméter helyzete akkor volna mindig biztos, ha csak alternatív jóslatot kérnének tőle.

IV. Epilógus, avagy modellünk és a valóság

Sokan megkérdézhetik, hogy a mesében miért nevezzük a jóst ökonóméternek, és például miért nem asztrológusnak. Hiszen Ragnar Frisch óta, aki először használta az „ökonometria” szót, az ökonometriának mint tudománynak változatlanul az a célja, hogy „az elméleti politikai gazdaságtan vagy más néven «tisztá» közgazdaságtan absztrakt törvényeit tapasztalati alapon és numerikusan verifikálja, és ezáltal, amennyire lehetséges, a tiszta közgazdaságtant a szó szoros értelmében tudománnyá változtassa”. [1] Ez biztosan igaz a tudományra, de azokat, akik az ökonometriai kutatásokat és főként az igen költséges nagy projektumokat finanszírozzák, rendszerint nem a közgazdaságtan absztrakt törvényei érdeklik, hanem inkább a jövőre kíváncsiak. Aki nagyon firtatja a jövőt, az nemcsak hajlamos arra, hogy a jóslat által vezettesse magát döntéseiben, hanem a jósnak is tudnia kell erről, különben rosszul jósol. Számos példát lehetne felhozni arra, hogy az előrejelzés hibája (különösen a hosszú és középtávú előrejelzéseké) akkor a legnagyobb, ha az, aki végzi, szándékosan nem veszi tekintetbe azokat a döntéseket, amelyeket például egy túlságosan sötétnek tűnő jövő elkerülésére hozni fognak. (A klasszikus példa erre A. Sauvy jóslata, aki a harmincas évek végén 25 millió főre becsülte Franciaország 2005. évi várható lakosságát.) A jóslat célja ilyenkor nyilvánvaló: kikényszeríteni azt a döntést, amely magát a jóslatot teszi semmissé. A mi történetünkben, amelyben kikötöttük, hogy pontos jóslatot kell adni, és a döntési szabály is előre adott, a jós nem tehet mást, mint hogy már jóslás közben figyelembe veszi a jóslat következményeit.

Azt mondhatja valaki, hogy az általunk vázolt szituáció nem reális, mégpedig két oknál fogva:

- a döntéshozók nem szokták közölni döntési szabályaikat;
- a döntéshozók nem kérnek jóslatot ugyanarra a változóra, amelynek további sorsáról dönteni szándékoznak.

Az első ellenvetésre azt mondhatjuk, hogy általában igaz. A döntéshozók viselkedése azonban ugyanúgy megfigyelhető, mint bármely véletlen tömegjelenség, és szükség esetén a döntési szabályra is kielégítő becslést lehet adni,

(Érdekes kísérlet a tervező magatartásának megfigyelésére az, amelyről Gács J.—Lackó M. [2] cikkében olvashatunk.)

A második ellenvetéssel kapcsolatban pedig szeretnénk felhívni a figyelmet arra, hogy bármely állami tervezéskor — legyen az akár indikatív, akár direktív — mindig ki szoktak tűzni tervcélokat olyan aggregált mutatókra is, min- amilyen a bruttó vagy a nettó nemzeti termék vagy a nemzeti jövedelem növekedése, az export értéke stb., és ezt mindig vagy majdnem mindig az ugyanezekre vonatkozó prognózisok birtokában teszik.

Ha egy tervszám elfogadását döntésnek tekintjük, és a döntésnek van valamilyen következménye a jövőre, akkor nehéz tagadnunk, hogy a történe- tünkben leírt szituáció létezik, és a bemutatott paradoxonokra vezethet. Hogy maga a prognózis mennyire befolyásolja a döntéshozókat, az kitűnik abból, hogy gyakran a prognosztizált értéket vagy ahhoz nagyon közel álló másikat fogadnak el terveikben.

(Beérkezett: 1977. március 15.)

IRODALOM

1. FRISCH, R.: Kvantitatív és dinamikus közgazdaságtan. Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 36. o.
2. GÁCS, J.—LACKÓ, M.: *A népgazdasági szintű tervezési magatartás vizsgálata*. Közgazda- sági Szemle, 1974. 3. sz. 257—274. o.

A PARADOX IN FORECASTING

Econometrists complain sometimes that decision-makers demand forecasts for events whose occurrence depends largely on their decision, while they make the decision dependent on the forecast received. We shall examine the problem on a highly simplified model which will be set up in the form of a parabola.

In a fairy tale the king charges his court econometrist with forecasting (providing sufficient estimation), what the probability of his participation in the following day's hunting is. With this he gives a number q between 0 and 1 saying that if the projection is higher than that, he will decide to go to the hunting, if it is lower, he will decide not to go and if the econometrist cannot make a forecast under these terms, he will be sacked from the court.

We assume that the econometrist has no estimation problem in the strict sense. In following his procedure, we come to the following results:

We recognize that the probability that either decision of the king will be executed is at least not reduced in possession of the forecast.

We recognize that the econometrist can either give two equally good projection or he can give one or he cannot give any.

In the first case, since this was not taken into account by the king, the econometrist has to decide which of the two projections he will give, by which he unambiguously determines the king's decision, thus influencing his own future as well. It also turns out that the first case is valid exactly if the king's decisions are well fulfilled, the second case is valid if it does not matter what decision he makes, and the third one is valid if probability is high that the contrary of his decision will happen.

We recognize further that if the probabilities of the problem are unknown, the econo- metrist will be able to give any forecast with $1/2$ probability, if probabilities are known, he will not be able to forecast with larger probability than with what the king goes hunting or stays at home. The econometrist is in a better position only if the given number q lies far enough from the (unconditional) probability of the king's participation in the hunting.

ОДИН ИЗ ПАРАДОКСОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Эконометристы иногда жалуются, что принимающие решения желают получить прогноз относительно таких событий, свершение которых в значительной мере зависит от принимаемых ими самими решений в то время как принятие решения ставится в зависимость от получаемого прогноза. Данная проблема рассматривалась в рамках одной весьма упрощенной модели, которая была сформулирована в виде некой параболы.

В одной сказке король поручил своему придворному эконометристу погадать (дать в должной мере достоверный прогноз) относительно того, что насколько возможно его присутствие на охоте на следующий день. Таким образом король задал цифру « q », находящуюся в пределах 0—1 и при этом он заявил, что если прогноз будет лучше этого, то он пойдет на охоту, если хуже, то решит не ходить; в том случае, если эконометрист в данной случае не сможет дать прогноз, то он будет изгнан из двора.

Можно предположить, что наш эконометрист не имеет проблем в аспекте собственно прогнозирования. Если последовать его методике, то можно придти к следующему выводу:

Можно согласиться с тем, что с учетом прогноза любое решение, принимаемое королем может быть реальным. Во всяком случае об ограничениях нет и речи.

Можно согласиться с тем, что эконометрист в состоянии дать два равносильных хороши, прогноза;

в состоянии дать один прогноз или не в состоянии прогнозировать.

В первом случае, т. к. король его не принимает во внимание, сам эконометрист должен решить, что из двух прогнозов который будет выбран, посредством чего он со всей определенностью детерминирует решение, принимаемое королем и этим влияет и на будущее короля. Становится ясным и то, что первый случай будет реальным только тогда, когда решение короля будет удачно реализовано; второй в том случае, если все равно, какое решение примет король, а третье тогда, когда с большей вероятностью случится обратное того, что фигурировало в решении.

Можно согласиться, далее, с тем, что если возможности приводимые в задаче являются неизвестными, то эконометрист любой прогноз может выдать с достоверностью, равной $\frac{1}{2}$; если возможности известны, то и в таком случае его прогноз не более достоверен того, что пойдет ли король на охоту или останется дома, что обычно как он решает вопрос: на охоту или дома. Положение эконометриста будет лучшим только в том случае, если данная цифра « q » находится в достаточной мере далеко от возможности (без каких либо условий) того, что король пойдет на охоту.

A k -adik legrövidebb útvonal meghatározása mátrix módszerrel

A dolgozat első részében áttekintjük a k -adik legrövidebb útvonal feladat megoldási módszereit. A második rész tartalmazza a feladat megoldására adott új algoritmust és az eljárás jogosságát. A módszer az összes pontpár között kn^3 összeadással és $k^{3/2} n^3$ összehasonlítással adja meg az első k legrövidebb utat.

Az irodalomban az általunk megoldott és a gyakorlatban is felmerülő feladatra nem közölnek eljárást. Ha a két pont közötti legrövidebb út eljárások valamelyikét alkalmazzuk erre a feladatra, akkor az egy nagyságrenddel több számítási lépést igényel, mint az itt közölt módszer.

1. Bevezetés

Gyakorlati feladatok megoldásánál sokszor szükséges az optimális megoldás mellett az optimumhoz közel álló megoldások ismerete is.

Így a k -adik legrövidebb út feladatának megoldása tervütemhálók esetén a különböző tervvariánsok kiszámítására, az objektum építése során bekövetkezett időcsúszások analizálására, valamint a teljes átfutási idő redukciójára használható. Mivel tervütemhálóban kör nincs, a feladat megoldása is egyszerű. Az összeadások és összehasonlítások száma megegyezik a CPM-time feladat megoldásához szükséges lépések számával. A tárolási igény természetesen nő: minden egyes ponthoz hozzá kell rendelni egy címke vektort és egy potenciál vektort, amelyek hossza éppen k (lásd Bakó [1]).

A feladatok nagy részénél a körnélküliség nincs biztosítva, és ekkor a megoldás is bonyolultabb. Ez fordul elő például az úthálózatok tervezésénél, az ún. ráterhelési feladatnál. Itt ismert a megadott vagy tervezett úthálózat minden i pontjából minden j pontjába a forgalom és meg kell határozni az útszakaszokon folyó forgalmat. A megoldás egyik módszere a pontpárok közötti első k legrövidebb útvonal ismeretén alapszik.

A forgalom egy részét az első, egy másik részét a második, végül az utolsó részét a k -adik legrövidebb úthoz rendelik hozzá.

A 2. pontban megadjuk a probléma matematikai megfogalmazását és összefoglaljuk a megoldási módszereket. A 3. pontban írjuk le az új algoritmust, és bebizonyítjuk az eljárás helyességét. A 4. pontban egy hatékony tárolási módszert adunk meg és néhány számítástechnikai megjegyzést teszünk.

2. A feladat megfogalmazása és megoldási módszerei

Legyen $N = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ egy irányított gráf (digráf) pontjainak, $E = \{(x_i, x_j)\}$ az irányított éleinek a halmaza. Legyen megadva a digráf élein egy $t(x_i, x_j) \geq 0$, $(x_i, x_j) \in E$ távolságfüggvény. Az (N, E, t) együttest hálózatként nevezzük. Legyen $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ az x_1 pontból az x_m pontba vezethető út.

A P út $l(P)$ hosszán az alábbiakat értjük:

$$l(P) = \sum_{i=1}^{m-1} t(x_i, x_{i+1}), \quad (1)$$

A k -adik legrövidebb út feladata: határozzuk meg egy rögzített x_1 pontból egy másik rögzített x_m pontba az első k legrövidebb útvonal hosszát, és magukat az útvonalakat is.

A feladat megoldási módszerei két csoportra oszthatók. Az első csoportba tartozó módszerek olyan utakat adnak, amelyek kört is tartalmazhatnak. Ekkor a feladat megoldása viszonylag egyszerű, de a kör kiszűrése további fáradsággal jár. Az első ilyen algoritmust *Hoffmann—Pavley* [7] közölte 1959-ben a 2. legrövidebb út megoldására. A módszernél a 2. legrövidebb út meghatározásához $M \cdot K$ művelet szükséges, ahol M az egy pontból kimenő élek átlagos száma, K a legrövidebb út éleinek a száma. Ezt a módszert általánosította a k -adik legrövidebb út meghatározására *Pollack* [14] és *Dreyfus* [4]. Egy érdekes dinamikus programozási módszert közöl *Bellman—Kalaba* [2], amely viszont több számolást igényel, mint az eredeti *Hoffmann—Pavley* módszer.

Ha kör nem lehet a meghatározott utakban, az algoritmus is bonyolultabb. Az első kör nélküli algoritmust *Clarke—Krikorian—Rausen* [3] készítette 1963-ban. A feladat megoldásához a korlátozás és szétválasztás módszerével az összes, bizonyos feltételeknek eleget tevő utat végig kell nézni. Ezek száma nagyméretű digráfok esetén nagy, így a módszer gyakorlatilag általában alkalmazhatatlan.

Az első, gyakorlatban is használható algoritmust *Yen* [18] adta. Ennél az algoritmusnál az összeadások és összehasonlítások száma $\mathcal{O}(k \cdot n^4)$ és $\mathcal{O}(k \cdot n^3)$ közé esik. A módszert *Lawler* [10] egyszerűsítette és a lépésszámot $\mathcal{O}(kn^3)$ -re szorította le. A legutóbb publikált *Weigand* [16] algoritmus nagy gráfok esetén is gyors, de az algoritmus bonyolultsága miatt nehezen programozható.

Annak eldöntésére, hogy a digráf tartalmaz-e kört egy sor eljárás ismeretes (lásd például *Klein* [9], *Florian* [5], és *Yen* [19]). *Yen* [18] dolgozatában a *Yen*, *Pollack* [13], *Bock*, *Clarke* [3] és *Sakarovich* módszereit hasonlítja össze a szükséges összeadások, összehasonlítások és memóriaigény szempontjából.

A k -adik legrövidebb út feladatának megoldási módszereiről áttekintést ad *Pollack* [13] és *Pierce* [12]. A legrövidebb út feladata és a k -adik legrövidebb út feladata átfogalmazható hozzárendelési feladatra is. Ehhez rögzítsük le a hálózat 2 pontját; legyen ez x_1 és x_n és vegyük hozzá a hálózathoz az (x_n, x_1) élt egy nagy negatív szállítási költséggel. A hálózatban a minimális hosszúságú kör éppen az x_1 -ből x_n -be vezető legrövidebb útból és az (x_n, x_1) élből áll. Ezen kör megkeresése ekvivalens egy hozzárendelési feladat megoldásával.

A feladat fenti megközelítését *Murty* [11] vetette fel. *Weintraub* [17] a k -adik legrövidebb út feladatának megoldását az optimális megoldáshoz

tartozó T mátrix egy sorának megváltoztatásával és az új optimum meghatározásával számolja ki, legfeljebb n^2 elemi operációval.

A következő fejezet egy új eljárást ismertet, amely mátrix eljárással egyszerre az összes pontpár között megadja a k -adik legrövidebb útvonalat.

3. Multiterminális feladat megoldása

A bevezetőben és a 2. fejezetben ismertetett módszerek a feladatot két kitüntetett pont között oldják meg, vagy egy pontból az összes többi pontba adják meg a k -adik legrövidebb utat. A multiterminális feladatnál az összes pontpár közötti k -adik legrövidebb utakat kell meghatározni. Ez megoldható az eddig ismertetett módszerek bármelyikével, de a leggyorsabb algoritmust is n -szer kell végigszámolni. Így a megoldáshoz legalább $\mathcal{O}(kn^4)$ összeadásra és összehasonlításra van szükség.

Az alábbiakban ismertetünk egy gyors mátrix eljárást, amely összesen $\mathcal{O}(kn^3)$ összeadásból és összehasonlításból áll. A feladat megoldásakor kört tartalmazó utak is adódhatnak, és egyenlő hosszúságú utak is előfordulhatnak a meghatározott utak között.

3.1. Megoldási algoritmus

Jelölje $t_{ij}^{(0)}$ az x_i pontból az x_j pontba vezető k -adik olyan legrövidebb út hosszát, amely közbülső pontokat legfeljebb az $N^{(l)} = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$ halmazból tartalmazhat.

A feladat megoldása során rendre meghatározunk $t_{ij}^{(1)}, t_{ij}^{(2)}, \dots$ mennyiségeket és megmutatjuk, hogy $t_{ij}^{(n)}$ a multiterminális feladat megoldása.

Jelöljük a $v_1, v_2, \dots, v_r$ egész számok p -edik legkisebb elemét $\min_p(v_1, v_2, \dots, v_r)$ -el.

Az algoritmus ezek után a következő lépésekből áll:

$$\text{kiinduló lépés} \quad t_{ij}^{(0)} = t(x_i, x_j), \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

$$t_{ijp}^{(0)} = \infty, \quad p = 2, 3, \dots, k$$

l -edik lépés

$$t_{ijp}^{(l)} = \min_p (\{t_{ijq}^{(l-1)} | q = 1, 2, \dots, k\}, \{t_{ilq}^{(l-1)} + t_{ijq} | q' = 1, 2, \dots, k\}) \quad (3.2)$$

Tétel: a fenti algoritmus eredményeképp kapott $t_{ijp}^{(n)}$ a p -edik legrövidebb út hossza.

Bizonyítás: A tételt az l szerinti teljes indukcióval mutatjuk meg.

$l = 1$ esetben legfeljebb két utat kaphatunk, amelyek hossza az alábbi két mennyiség

$$t_{ij1}^{(1)} = \min_1 (t_{ij}, t_{i1} + t_{1j})$$

$$t_{ij2}^{(1)} = \min_2 (t_{ij}, t_{i1} + t_{1j})$$

$l - 1$ -re feltesszük a tétel állítását, azaz, hogy a $t_{ijp}^{(l-1)}$ mennyiség az x_i pontból az x_j pontba vezető, $N^{(l-1)}$ halmazból közbülső pontokat tartalmazó utak közül a p -edik legrövidebb út hossza. l esetére megmutatjuk a tételt.

Tegyük fel, hogy van olyan P^* út az x_i pontból az x_j pontba, amely közbülső pontokat legfeljebb csak az $N_{(l)}$ halmazból tartalmaz

$$\text{de} \quad l(P^*) < t_{ijk}^{(l)} \quad (3.3)$$

$$\text{és} \quad l(P^*) \neq t_{ijp}^{(l)}, \quad p = 1, 2, \dots, k. \quad (3.4)$$

Ha $l \notin P^*$, akkor P^* közbülső pontokat csak az $N^{(l-1)}$ halmazból tartalmazhat, így a minimum kiválasztásakor a (3.2)-ben az első számsorból kellett volna választanunk (3.3) miatt, így $l \in (P^*)$. Ekkor viszont (3.2)-ben a második tagban kellett lennie, de mi a minimum számolásakor nem ezt választottuk.

3.2. Számítástechnikai megjegyzések

A 3.1 pontban elmondott algoritmus csak az útvonalak hosszát adja meg. A címkézési technika megfelelő módosításával azonban maguk az útvonalak is meghatározhatók.

Legyen $H = (h_{ijp}^{(l)})$ a címkemátrix.

A kezdeti lépéskor $h_{ijp}^{(0)} = j$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Az l -edik lépésben a címkemátrix elemeit a következőképp módosítjuk

$$h_{ijp}^{(l)} = \begin{cases} h_{ijp}^{(l-1)}, & \text{ha } t_{ijp}^{(l)} = t_{ijp}^{(l-1)} \\ h_{ijp}^{(l-1)} & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (3.5)$$

A címmátrix segítségével tetszés szerinti két pont között meghatározhatjuk a p -edik legrövidebb útvonal közbülső pontjait. Tegyük fel, hogy az s pontból kiinduló és a t pontban végződő útvonal meghatározása a feladat.

Az útvonal visszakeresése az alábbi lépésekből áll:

- az s pont utáni első pont a p -edik legrövidebb úton a $h_{stp} = c_1$;
- a c_1 pont után következő pont $h_{c_1tp} = c_2, \dots$

A fenti eljárás akkor ér véget, ha elérünk a t pontba, azaz ha valamelyik c_i -re $h_{c_i tp} = t$. Az eljárás eredményeképp megkaptuk az s -ben kezdődő t -ben végződő és az $s = c_0, c_1, c_2, \dots, c_i = t$ pontokból álló p -edik legrövidebb útvonalat.

A 3.2-ben leírt képlet szerint minden elem kiszámításához k^2 összeadásra, és $k^2 + k$ elemű vektor rendezésére van szükség. A 4.2. első, legfeljebb k eleme nagyság szerint növekvő sorrendben van. A második rész két összeadandója szintén monoton nő. Ezt a tulajdonságot kihasználva nem szükséges a k^2 összeadást és a vektor rendezését elvégezni, elegendő egy sokkal egyszerűbb feladat ötletes megoldása. Tekintsünk két nagyság szerint növekvő sorrendben rendezett számsort az $a_1, a_2, \dots, a_m$ és a $b_1, b_2, \dots, b_m$ vektorokat. Képezzük a két vektor diadikus összegét, azaz az alábbi táblázatot:

	b_1	b_2	$\dots$	b_m
a_2	$a_1 + b_1$	$a_1 + b_2$	$\dots$	$a_1 + b_m$
a_1	$a_2 + b_1$	$a_2 + b_2$	$\dots$	$a_2 + b_m$
$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_m	$a_m + b_1$	$a_m + b_2$	$\dots$	$a_m + b_m$

A feladat: határozzunk meg minimális számú elemi művelettel (összeadással és összehasonlítással) a tábla első t legkisebb elemét.

A következő eljárással kapjuk a megoldást:

Az első elem nyilván $a_1 + b_1$. A második elem $a_1 + b_2$ és $a_2 + b_1$ közül kerül ki, legyen mondjuk $a_1 + b_2$. A következő elem $a_1 + b_3$, $a_2 + b_1$ minimuma. mondjuk $a_2 + b_1$. A negyedik elem választásához már $a_1 + b_3$, $a_3 + b_1$ és az $a_2 + b_2$ elemeket is össze kell hasonlítani.

Így 3.2 összeadást tartalmazó második részét minimálisan $k + 1$ összeadás-sal és összehasonlítással, maximálisan $k + 1$ összeadással és $k \sqrt{k}$ összehasonlítással kaphatjuk meg. A két rendezett sorozat összefésülését a diadikus összegek meghatározása során $\mathcal{O}(k)$ lépésben végezhetjük el. Így a feladat megoldásához szükséges minimális lépésszáma következő: Egy elem meghatározásához minimálisan $k + 1$ összeadás és $2k$ összehasonlítás, egy lépésben $(k + 1)(n - 1)^2$ összeadás és $2k(n - 1)^2$ összeadás, a feladat megoldásához pedig $n(k + 1)(n - 1)^2$ összeadás és $2kn(n - 1)^2$ összehasonlítás szükséges. A műveletek felső korlátja: $n(k + 1)(n - 1)^2$ összeadás és $nk \sqrt{k}(n - 1)^2$ összehasonlítás.

Csak központi memóriát használó algoritmushoz a tárolási igény $2k \cdot n^2$, mivel n^2 elem kell egy táblázathoz, de k mátrixunk van és a cíkmátrixok tárolásához további kn^2 tárolóhely szükséges. Nagyméretű hálózatok esetén két módosítási lehetőség kínálkozik:

a) Alkalmazzuk a *Hu—Torres* [8] által javasolt dekompozíciós sémát. Ez a tárolási igényt nagymértékben lecsökkenti, és a számítási lépések száma is kevesebb lesz. Hátránya viszont, hogy a programozása meglehetősen bonyolult.

b) A mátrixok sorait és oszlopait is külső tárolón tartjuk. Az algoritmust soronként végezzük, és egyszerre csak az egy sor kitöltéséhez szükséges vektorokat tartjuk bent. Ez összesen $2n^2k$ vektor memóriába való mozgatótás és ugyanannyi külső memóriába való írást jelent.

A kör kiszűrésére az alábbi eljárást alkalmazhatjuk: minden lépésben végignézzük, hogy a két részből összerapott utak nem tartalmaznak-e kört, és ha igen, úgy a kört tartalmazót kihagyjuk és vesszük a következő, nála hosszabb utat. Ez azt jelenti, hogy r kör esetén a 3.2 lépésben nem k legkisebb elemet kell meghatároznunk, hanem $k + r$ elemet. Azokat az értékeket, amelyek kört tartalmazó úthoz tartoznak, ki kell hagyni az út mátrixából. Hasonlóképp ki kell törölni az ezen elemekhez tartozó cíkmátrix elemeket is. Ez az eljárás növeli az elemi operációk számát.

A multiterminális eljárás városi és közúti úthálózat tervezésének egyik modelljéhez szükséges. Gyakorlati feladatok megoldásához elkészítettük a gépi programját is FORTRAN nyelven a CDC 3300 számítógépre.

(Beérkezett: 1976. augusztus 15.)

IRODALOM

- [1] BAKÓ, A.: *Tervütemhálók sub-kritikus útjainak meghatározása*. Alkalmazott Matematikai Lapok (megjelenés alatt).
- [2] BELLMAN, R.—KALABA, R.: *On the Kth Best Policies*. Journal of SIAM 8(1960), 582—588.
- [3] CLARKE, S.—KRIKORIAN, A.—RAUSEN, J.: *Computing the N Best Loopless Path in a Network*. Journal of SIAM 11(1963), 1196—1202.
- [4] DREYFUS, S. E.: *An Appraisal of Some Shortest Path Algorithms*. Operations Research 17(1969), 395—412.
- [5] FLORIAN, M.—ROBERT, P.: *A Direct Search Method to Locate Negative Cycles*. Management Science 17(1971).
- [6] FLOYD, R. N.: *Algorithm 97, Shortest Path*. Communication ACM 5(1962), 345.
- [7] HOFFMAN, W.—PAVLEY, R.: *A Method for the Solution of the Nth Best Path Problem*. Journal of ACM 6(1959), 506—514.
- [8] HU, T. C.—TORRES, W. T.: *Shortcut in Decomposition Algorithm for Shortest Paths in a Network*. IBM Journal of Research and Development 13(1969), 387—390.
- [9] KLEIN, M.—TIBREWALA, R. K.: *Technical Contributions Finding Negative Cycles*. INFOR 11(1973), 59—65.
- [10] LAWLER, E. L.: *A Procedure for Computing the K Best Solutions to Discrete Optimization Problems and its Application to the Shortest Path Problem*. Management Science 18(1972) 401—405.
- [11] MURTY, K. G.: *An Algorithm for Ranking All the Assignments in Increasing Order of Cost*. Operations Research 16(1968), 682—687.
- [12] PIERCE, A. R.: *Bibliography on Algorithms for Shortest Path, Shortest Spanning Tree, and Related Circuit Routing Problems (1956—1974)*. Networks 5(1975), 129—149.
- [13] POLLACK, M.: *Solution of the k-th Best Route Through a Network*. A Review, Journal of Mathematical Analysis and Application 3(1961), 547—559.
- [14] POLLACK, M.: *The k-th Best Route through a Network*. Operations Research 8(1960), 224—230.
- [15] WARSHALL, S.: *A Theorem on Boolean Matrices*. Journal of ACM 9(1962), 11—12.
- [16] WEIGAND, M. M.: *Ein neuer Algorithmus zur Bestimmung von k-kürzesten Wegen in einem Graphen*. Computing 16(1976), 139—151.
- [17] WEINTRAUB, A.: *The Shortest and K-Shortest Routes as Assignment Problems*. Networks 3(1973), 61—73.
- [18] YEN, J. Y.: *Finding the K Shortest Path in a Network*. Management Science 17(1971), 712—716.
- [19] YEN, J. Y.: *On the Efficiencies of Algorithms for Detecting Negative Loops in Networks*. Santa Clara Business Review 2(1971), 52—58.

DETERMINING THE K-TH SHORTEST PATH BY MATRIX METHOD

In the paper an algorithm is given for the multiterminal version of the k -th shortest path problem.

The algorithm calculates in n steps the length of the first k paths between all the point pairs of a digraph.

We describe the labelling technique required for the determination of the paths and the procedure supplying the intermediate points belonging to the paths.

Altogether the calculation consists of kn^3 additions and $k^{3/2}n^3$ comparisons. This number is considerably lower than what is necessary for the repeated application of the k -th shortest path algorithm of two end points known in literature.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЕЕ КОРОТКОГО ПУТИ «К» МЕТОДОМ МАТРИЦЫ

В рассматриваемой работе дается один алгоритм на мультитерминальный вариант наиболее короткого пути «к».

Данный алгоритм в действии «п» рассчитывать протяженность наиболее короткого пути «к» между всеми парными точками диграфа.

Описывается техника установления наименований, необходимых для определения путей, а также и методика определения промежуточных пунктов, относящихся к трассам.

Собственно расчет складывается из суммирования kn^3 и сравнения $k^{3/4} n^3$. Эта цифра является значительно меньшей, чем это необходимо для многократного использования известных по литературе алгоритмов наиболее короткого пути «к» с двумя конечными точками.

A nem-differenciálható oligopol probléma

A [2], [3] és [4] dolgozatomban alkalmas monotonitási, konvexitási és differenciálhatósági feltételek mellett foglalkoztam az oligopol játék egyensúlypontjának létezésével és egyértelműségével. Ebben a dolgozatban pedig ugyanezekkel a kérdésekkel foglalkozom, amikor a differenciálhatósági feltételek nem teljesülnek.

1. Az egytermékes játék a következőképpen fogalmazható meg. Tegyük fel, hogy n termelő ugyanazt a terméket állítja elő és ugyanazon a piacon együtt értékesíti. Jelölje f az árfüggvényt, K_k , x_k , L_k pedig a k -adik ($1 \leq k \leq n$) termelő költségfüggvényét, termelési mennyiségét és termelési korlátját. Ekkor a k -adik termelő (játékos) stratégiáiahalmaza a $[0, L_k]$ intervallum, kifizetőfüggvénye pedig

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = x_k f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - K_k(x_k). \quad (1.1)$$

A játék (Nash-féle) egyensúlypontja olyan $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ vektor, amelyre

- a) $k = 1, 2, \dots, n$ esetén $x_k^* \in [0, L_k]$;
- b) $k = 1, 2, \dots, n$ és tetszőleges $x_k \in [0, L_k]$ esetén

$$\varphi_k(x_1^*, \dots, x_k^*, \dots, x_n^*) \geq \varphi_k(x_1^*, \dots, x_k, \dots, x_n^*). \quad (1.2)$$

A játék egyensúlyproblémájának vizsgálatáról a [4] dolgozat ad áttekintést. Igaz a következő tétel ([3]):

1. Tétel

Tegyük fel a következőket:

- 1. Létezik olyan $\xi > 0$ állandó, hogy
 - a) $s \geq \xi$ esetén $f(s) = 0$,
 - b) a $[0, \xi]$ intervallumon f differenciálható, konkáv és szigorúan monoton csökkenő.

2. $k = 1, 2, \dots, n$ esetén a $[0, L_k]$ intervallumon K_k folytonos, konvex és szigorúan monoton növekedő.

Ekkor a játék pontosan egy egyensúlyponttal rendelkezik.

Bebizonyítható, hogy abban az esetben, amikor f folytonos és nem differenciálható, az egyensúlypont létezése továbbra is igaz. Viszont az egyensúlypont

egyértelműsége általában nem biztosított. Ennek illusztrálására tekintsünk egy példát.

Példa. Legyen $n = 2$; $L_1 = L_2 = 2,5$; $K_1(x) = K_2(x) = 0,5x$;

$$f(s) = \begin{cases} 1,75 - 0,5s, & \text{ha } 0 \leq s \leq 1,5 \\ 2,5 - s & , \text{ ha } 1,5 \leq s \leq 2,5 \\ 0 & , \text{ ha } s \geq 2,5. \end{cases}$$

Bebizonyítjuk, hogy az

$$X^* = \{(x_1, x_2) | 0,5 \leq x_1 \leq 1, 0,5 \leq x_2 \leq 1, x_1 + x_2 = 1,5\}$$

halmaz valamennyi eleme egyensúlypontot szolgáltat.

Tekintsük most rögzített $x^* \in [0,5; 1]$ esetén a

$$\varphi(x) = xf(1,5 - x^* + x) - K_k(x)$$

függvényt. Ekkor φ bal oldali deriváltja az x^* helyen

$$x^*(-0,5) + 1 - 0,5 = 0,5 - 0,5x^*,$$

amely $x^* \leq 1$ esetén nemnegatív. A φ függvény jobb oldali deriváltja pedig

$$x^*(-1) + 1 - 0,5 = 0,5 - x^*,$$

amely $x^* \geq 0,5$ esetén nempozitív.

Tehát $0,5 \leq x^* \leq 1$ esetén x^* a φ függvény lokális maximumhelye. Mint-hogy φ konkáv, x^* globális maximumhely is. Így $k = 1,2$ esetén (1.2) fennáll, vagyis a játék kontinuum sok egyensúlyponttal rendelkezik.

2. A továbbiakban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy az f függvény differenciálhatóságát folytonossággal helyettesítve és megtartva az 1. Tétel többi feltételét milyen struktúrájú az egyensúlypontok halmaza. Az eredmény-hez több lépésben juthatunk el.

Rögzítsük most k értékét ($1 \leq k \leq n$), és vezessük be a következő jelöléseket

$$f_{\delta}^{+}(s) = \frac{f(s + \delta) - f(s)}{\delta} \quad (0 \leq s < s + \delta \leq L),$$

$$f_{\delta}^{-}(s) = \frac{f(s) - f(s - \delta)}{\delta} \quad (0 \leq s - \delta < s \leq L),$$

$$K_{k\delta}^{+}(t) = \frac{K_k(t + \delta) - K_k(t)}{\delta} \quad (0 \leq t < t + \delta \leq L_k),$$

$$K_{k\delta}^{-}(t) = \frac{K_k(t) - K_k(t - \delta)}{\delta} \quad (0 \leq t - \delta < t \leq L_k),$$

ahol $L = \min \left\{ \xi; \sum_{i=1}^n L_i \right\}$. Legyen továbbá

$$\varphi_{\delta}^{+}(s, t) = f(s + \delta) + tf_{\delta}^{+}(s) - K_{k\delta}^{+}(t), \quad (2.1)$$

$$\varphi_{\delta}^{-}(s, t) = f(s - \delta) + tf_{\delta}^{-}(s) - K_{k\delta}^{-}(t). \quad (2.2)$$

Az f és K_k függvényekre tett feltételekből azonnal adódik, hogy rögzített δ, s ill. δ, t mellett φ_δ^+ és φ_δ^- t -nek ill. s -nek szigorúan csökkenő függvénye, továbbá tetszőleges t és $\delta_1, \delta_2 > 0$ mellett $\varphi_{\delta_1}^-(s, t) \geq \varphi_{\delta_2}^+(s, t)$. Könnyen belátható továbbá, hogy rögzített s és t mellett φ_δ^+ δ -nak szigorúan csökkenő, φ_δ^- pedig szigorúan növekedő függvénye.

Legyen továbbá rögzített $s \in [0, L]$ mellett

$$\psi_k(s, x, t) = tf(s - x + t) - K_k(t), \quad (2.3)$$

valamint

$$X_k(s) = \{x_k | 0 \leq x_k \leq L_k, \psi_k(s, x_k, x_k) = \max_t \psi_k(s, x_k, t)\}. \quad (2.4)$$

1. Lemma.

a) $0 \in X_k(s)$ akkor és csak akkor, ha

$$\varphi_\delta^+(s, 0) \leq 0 \quad (s + \delta \leq L, \delta \leq L_k);$$

b) $L_k \in X_k(s)$ akkor és csak akkor, ha

$$\varphi_\delta^-(s, L_k) \geq 0 \quad (0 \leq s - \delta, \delta \leq L_k);$$

c) $0 < t < L_k$ esetén $t \in X_k(s)$ akkor és csak akkor, ha

$$\varphi_{\delta_1}^-(s, t) \geq 0 \geq \varphi_{\delta_2}^+(s, t) \quad (0 \leq s - \delta_1, \delta_1 \leq t, s + \delta_2 \leq L, t + \delta_2 \leq L_k).$$

Bizonyítás.

Nyilvánvaló, hogy egy $t \in [0, L_k]$ érték akkor és csak akkor eleme az $X_k(s)$ halmaznak, ha

$$(t - \delta_1)f(s - \delta_1) - K_k(t - \delta_1) \leq tf(s) - K_k(t) \quad (0 \leq s - \delta_1, \delta_1 \leq t)$$

$$(t + \delta_2)f(s + \delta_2) - K_k(t + \delta_2) \leq tf(s) - K_k(t) \quad (s + \delta_2 \leq L, t + \delta_2 \leq L_k).$$

Ebből pedig egyszerű átalakítással nyerjük az állítást.

2. Lemma.

Az $X_k(s)$ halmaz nem üres, és egy zárt intervallum.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy az 1. Lemma a) és b) része nem teljesül. Ekkor létezik olyan $\Delta_1, \Delta_2 > 0$, hogy $\varphi_{\Delta_1}^+(s, 0) > 0$, valamint $\varphi_{\Delta_2}^-(s, L_k) < 0$.

Ekkor pedig $\varphi_{\Delta_1}^+$ folytonossága alapján létezik olyan $u > 0$, hogy $\varphi_{\Delta_1}^+(s, u) > 0$, valamint φ_δ^+ δ -ban való csökkenése alapján tetszőleges $0 < \delta \leq \Delta_1$ mellett $\varphi_\delta^+(s, u) > 0$, így $\varphi_\delta^-(s, u) > 0$ és φ_δ^- δ -ban való növekedése miatt $\varphi_{\delta_1}^-(s, u) > 0$ tetszőleges $\delta_1 > 0$ mellett. Tekintsük most a

$$T = \{t | \varphi_\delta^-(s, t) \geq 0, \text{ tetszőleges } \delta > 0\} \quad (2.5)$$

halmazt. A φ_δ^- t -beli folytonossága következtében T zárt, így $t_0 = \sup \{t | t \in T\} \in T$, valamint $u \in T, L_k \notin T$. Tehát $0 < t_0 < L_k$. Bebizonyítjuk, hogy t_0 eleget tesz az 1. Lemma c) feltételének. Tegyük fel ennek ellenkezőjét, ekkor alkalmas

$\Delta > 0$ mellett $\varphi_{\Delta}^{+}(s, t) > 0$. A φ_{Δ}^{+} függvény t -beli folytonossága alapján van olyan $u > 0$, hogy $\varphi_{\Delta}^{+}(s, t_0 + u) > 0$ és φ_{δ}^{+} δ -ban való csökkenése alapján $0 < \delta \leq \Delta$ mellett $\varphi_{\delta}^{+}(s, t_0 + u) > 0$ és így $\varphi_{\delta}^{-}(s, t_0 + u) > 0$. A φ_{δ}^{-} függvény δ -ban való növekedése alapján tetszőleges $\delta > 0$ mellett $\varphi_{\delta}^{-}(s, t_0 + u) > 0$, vagyis $t_0 + u \in T$, amely ellentmond t_0 definíciójának. Tehát t_0 -ra az 1. Lemma c) esete vonatkozik, vagyis $t_0 \in X_k(s)$.

Tegyük ezután fel, hogy $t_1 < t_2$, $t_1 \in X_k(s)$, $t_2 \in X_k(s)$. Legyen $t_1 < t < t_2$. Bebizonyítjuk, hogy $t \in X_k(s)$, vagyis $X_k(s)$ valamilyen intervallum. Tegyük először fel, hogy $t_1 = 0$, $t_2 \leq L_k$. Ekkor elég kis $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ mellett $\varphi_{\delta_1}^{+}(s, 0) \leq 0$, $\varphi_{\delta_2}^{-}(s, t_2) \geq 0 \geq \varphi_{\delta_3}^{+}(s, t_2)$ és $\varphi_{\delta}^{-}, \varphi_{\delta}^{+}$ t -beli monotonitása alapján $\varphi_{\delta_2}^{-}(s, t) > 0 > \varphi_{\delta_3}^{+}(s, t)$, azaz $t \in X_k(s)$. A bizonyítást ugyanúgy kell elvégeznünk a $0 < t_1$, $t_2 = L_k$ esetben is. Tekintsük ezután a $0 < t_1 < t_2 < L_k$ esetet. Ekkor az 1. Lemma alapján

$$\varphi_{\delta_1}^{-}(s, t_1) \geq 0 \geq \varphi_{\delta_2}^{+}(s, t_1)$$

$$\varphi_{\delta_3}^{-}(s, t_2) \geq 0 \geq \varphi_{\delta_4}^{+}(s, t_2)$$

tetszőleges $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ mellett. Ekkor $\varphi_{\delta}^{+}, \varphi_{\delta}^{-}$ monotonitása alapján $\Delta_1 \leq \leq \min \{\delta_1, \delta_3\}$, $\Delta_2 \leq \min \{\delta_2, \delta_4\}$ esetén $\varphi_{\Delta_1}^{-}(s, t) \geq 0 \geq \varphi_{\Delta_2}^{+}(s, t)$, vagyis φ_{δ}^{-} δ -ban való monotonitása alapján tetszőleges Δ_1, Δ_2 mellett fennáll ez az egyenlőtlenség, így t -re a 3. Lemma c) esete teljesül. Tehát $t \in X_k(s)$.

A (2.4) definícióból az is nyilvánvaló, hogy $X_k(s)$ zárt halmaz, így $X_k(s)$ nem üres, zárt intervallum.

Megjegyzés. Könnyen kimutatható, hogyha az s pontban f differenciálható, akkor $X_k(s)$ egyetlen elemet tartalmaz.

3. Lemma.

Ha $s_1 < s_2$, $t_1 \in X_k(s_1)$, $t_2 \in X_k(s_2)$, akkor $t_1 \geq t_2$.

Bizonyítás.

A (2.1) és (2.2) formulákból egyszerűen adódik, hogyha s az f differenciálhatósági pontja, $t_1 < t_2$, akkor elég kis $\delta_1, \delta_2 > 0$ mellett $\varphi_{\delta_1}^{+}(s, t_1) \geq \varphi_{\delta_2}^{-}(s, t_2)$.

Tegyük fel ezután az állítással ellentétben, hogy $s_1 < s_2$ és $t_1 < t_2$. Minthogy f konkáv, létezik s_1 és s_2 között f -nek olyan pontja, ahol deriválható.

Ha t_1 és t_2 -re az 1. Lemma c) állítása érvényes, akkor elég kis $\delta > 0$ mellett

$$0 \leq \varphi_{\delta}^{-}(s_2, t_2) < \varphi_{\delta}^{-}(s, t_2) \leq \varphi_{\delta}^{+}(s, t_1) < \varphi_{\delta}^{+}(s_1, t_1) \leq 0,$$

amely nyilvánvaló ellentmondás. Ha t_1 vagy t_2 -re az 1. Lemma a) vagy b) állítása igaz, a bizonyítás az előzőhöz hasonlóan végezhető el.

2. Tétel

Tegyük fel a következőket:

1. Létezik olyan $\xi > 0$ állandó, hogy

a) $s \geq \xi$ esetén $f(s) = 0$;

b) a $[0, \xi]$ intervallumon f folytonos, konkáv és szigorúan csökken;

2. $k = 1, 2, \dots, n$ esetén a $[0, L_k]$ intervallumon K_k folytonos, konvex és szigorúan növekszik.

Jelölje $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ és $(x_1^{**}, \dots, x_n^{**})$ a játék két egyensúlypontját.

$$\text{Ekkor } \sum_{k=1}^n x_k^* = \sum_{k=1}^n x_k^{**}.$$

Bizonyítás.

Legyen $s^* = \sum_{k=1}^n x_k^*, s^{**} = \sum_{k=1}^n x_k^{**}$. Könnyű bebizonyítani (ld. [4] Tétele bizonyításának a) pontját), hogy $s^* \leq \xi, s^{**} \leq \xi$. Így $k = 1, 2, \dots, n$ esetén $x_k^* \in X_k(s^*), x_k^{**} \in X_k(s^{**})$. Tegyük fel, hogy $s^* < s^{**}$, akkor a 3. Lemma alapján $k = 1, 2, \dots, n$ esetén $x_k^* \geq x_k^{**}$; amelyeket összeadva azonnal adódik, hogy

$$s^* = \sum_{k=1}^n x_k^* \geq \sum_{k=1}^n x_k^{**} = s^{**},$$

amely nyilvánvaló ellentmondás.

3. Tétel

A 2. Tétel feltételei mellett az oligopol játék rendelkezik legalább egy egyensúlyponttal.

Bizonyítás.

Legyen $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ egy $[0, \xi]$ intervallumon f -hez tartó differenciálható, szigorúan csökkenő, konkáv függvényt sorozat. Jelölje ezen f_n árfüggvénnyel és a K_k költségfüggvényekkel rendelkező játék egyetlen egyensúlypontját $x^{(n)*}$. Ekkor — minthogy $\{x^{(n)*}\}$ korlátos sorozat — az $\{x^{(n)*}\}_{n=1}^\infty$ sorozat rendelkezik torlódási ponttal: x^* . Az (1.2) egyenlőtlenségből egyszerű határatmenettel adódik, hogy x^* az eredeti oligopol játék egyensúlypontját adja.

Megjegyzés. A tétel állítása a Nikaido — Isoda tétel alapján és bebizonyítható (ld. [1]).

Vezessük be a következő jelöléseket ($s \in [0, L]$):

$$\alpha_k(s) = \min \{t \mid t \in X_k(s)\}, \beta_k(s) = \max \{t \mid t \in X_k(s)\}, \quad (1 \leq k \leq n) \quad (2.6)$$

$$\alpha(s) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(s), \beta(s) = \sum_{k=1}^n \beta_k(s). \quad (2.7)$$

4. Tétel

A 2. Tétel feltételei mellett egy $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ vektor akkor és csak akkor adja az oligopol játék egyensúlypontját, ha

$$\begin{aligned} a) \text{ az } s^* = \sum_{k=1}^n x_k^* \text{ érték az} \\ \alpha(s^*) \leq s^* \leq \beta(s^*) \end{aligned} \quad (2.8)$$

egyenlőtlenség egyetlen megoldása;

$$b) k = 1, 2, \dots, n \text{ esetén } x_k^* \in X_k(s^*).$$

Bizonyítás.

Az állítás az (1.2), (2.4) összefüggések, valamint a 2. és 3. Tétel nyilvánvaló következménye.

1. *Következmény:* A 2. Tétel feltételeinek fennállása esetén a játék egyensúlypontjai a (2.8) egyenlőtlenség egyértelmű megoldásával, valamint az

$$\alpha_k(s^*) \leq x_k \leq \beta_k(s^*) \quad (1 \leq k \leq n) \quad (2.9)$$

$$\sum_{k=1}^n x_k = s^*$$

egyenlőtlenségrendszer megoldásaival állíthatók elő.

2. *Következmény:* A 2. Tétel feltételeinek fennállása esetén az oligopol játék egyensúlypontjainak halmaza a (2.9) szimplex.

(Beérkezett: 1976. október 20.)

IRODALOM

- [1] SZÉP, J.—FORGÓ, F.: *Bevezetés a játékelméletbe*. Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
- [2] SZIDAROVSKY, F.: *On the Oligopol Game*. K. Marx University of Economics, Techn. Rep., 1970—1.
- [3] SZIDAROVSKY, F.: *A konkáv oligopol probléma*, ELTE.TTK. Numerikus és Gépi Mat. Tanszék kiadványa, 1976—2.
- [4] SZIDAROVSKY F.: *A többtermékes oligopol játék egyensúlyproblémájáról*, megj. alatt.
- [5] SZIDAROVSKY F.: *Bevezetés a numerikus módszerekbe*. Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

THE NON-DIFFERENTIABLE OLIGOPOLY PROBLEM

In the article the author examines the continuous, concave, one-product oligopoly game. Although existence of the Nash equilibrium point is demonstrable, unicity is not true in general. Yet, the sum of the equilibrium strategies is unique and the set of equilibrium points is a simplex.

ПРОБЛЕМА НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО ОЛИГОПОЛЯ

В рассматриваемой статье автор изучает непрерывную конкавную олигопольную игру на одно изделие. Не смотря на то, что существование точки равновесия типа Нэш является доказуемым, сама уникальность чаще всего не является истиной. Совокупность стратегий, обеспечивающих равновесие, с другой стороны, будет явной и множество точек равновесия представляет собой симплекс.

Karcolatok a modellezési munka megszervezéséről*

Azok az utak, amelyeken az emberek égi dolgok megértéséig jutnak el, nekem majdnem olyan csodálatra méltónak tetszenek, mint maguk az égi dolgok.

Johannes Kepler, 1609.

I. Bevezetés

A modellezésről szóló irodalom szívesen utal a modellekre elvont szubsztanciaként. Míg az elméletet, a módszert, az adatokat és a viselkedést hosszasan tárgyalja, szinte tabuként kerüli a modellezőre, a felhasználóra és azokra az intézményes keretekre való utalást, amelyek között tevékenykednek. Azokat a koponyákat, akik társadalmi és gazdasági folyamatokat elemeznek, ritkán lehet rajtakapni, hogy olyan társadalmi folyamatokon és gazdasági erőkhöz is töprengjenek, amelyek őket egy foglalkozás tagjaiként személyesen érintik.

Bár a tudományos kutatás körülményei között érthető, mégis félrevezető a modellezés emberi és társadalmi vonatkozásainak ilyen megkerülése. A modelleket nem a gólya hozza. Nem a tiszta ész birodalmában nőnek fel, és nem pusztán levegővel táplálkoznak. Épp úgy, mint az a másik termék, amelyet ugyancsak nem a gólya hoz, a modellek is emberi érintkezés során fogannak; alakítja őket a környezet, amelyben kiformalódnak, időt, pénzt és türelmet igényelnek ahhoz, hogy olyasmivé fejlődjenek, ami hasznos a társadalom számára. Egy modell-tanulmány gyakorlati eredménye ugyanolyan mértékben függ létrejöttének feltételeitől, a környezettől, amelyben alakul, a tervnek szentelt szeretet mennyiségétől, mint a modell-tartalmazta adatoktól vagy az elmélettől, amelyre épül. Egy tudományos mértékkel mérve közepszerű, de jól adminisztrált modellnek sokkal nagyobb és termékenyebb hatása lehet, mint egy szakmailag páratlan modellnek, amelyre senkinek sincs szüksége.

Ez a tanulmány tíz közösségi célú modellnek munka közben végzett megfigyeléséből fejlődött ki. A következő feltevéseken alapul: 1. Bizonyos adminisztratív nehézségek együtt járnak a modellező folyamattal. Ezek a nehézségek minden modellezőt gyötörnek, és hasznavehetetlenné tesznek jónéhány modell-tanulmányt. 2. A modellezési folyamat alaposabb megértése javíthat ezeknek a mélyenfekvő nehézségeknek a kezelésén. 3. A folyamat tudatosságát fokozni lehet a modellezés tényleges folyamatának részletes megfigyelésével. 4. Az önkritikus módszert serkenti, ha olyan anyagot mutatunk be kritikai él nélkül, (vagy, ami még jobb, humorosan) amelyből az olvasó magára ismerhet.

Ezekből a premissákból kiindulva hét adminisztratív lépésben csoportosítottam azokat a tevékenységeket, amelyek egy modell élettartama során előfordulnak: előzetes elképzelés, kapcsolatteremtés, a koncepció felállítása, szerkesztés, kipróbálás, dokumentálás és kivitelezés. A tanulmány során karikatúrát rajzolok arról, ami az egyes lépések során rendszerint történik, bár nem lenne szabad megtörténnie, és javaslatokat teszek, hogyan lehet elkerülni ezeket a szokásos zsákutcákat. Az egyszerűség kedvéért a lépéseket

* Lorsch Katalin fordítása.

lényegretörően, „egyszerre-csak-egy-dolog-történik” stílusban fogom tárgyalni. Azt a tévedést, hogy a modellezés ilyen szabályosan halad, másutt már eloszlatták (*Randers* 1972; *Hammond* 1974). Most megelégszünk azzal, hogy emlékeztetünk rá, néhány lépés (különösen a koncepció kidolgozása) hajlamos ismétlődő tevékenységgé válni, néhány másik pedig, például a kipróbálás és a kivitelezés, folyamatossá.

A legtöbb modell-irányítási gond a modellezés kezdeti szakaszaiban születik, a rossz hatások viszont a későbbi fázisokban összpontosulnak. Ebben a tanulmányban a gondokat nem ott fogom tárgyalni, ahol elkezdődnek, hanem ott, ahol a felszínre bukkannak. Így a javaslatok — különösen a kipróbálásra és kivitelezésre vonatkozóak — gyakran arra utalnak majd, hogy mit kellett volna tenni a korábbi fázisokban.

Minthogy a saját hibáját néha kijavíthatja az ember, másokét azonban szinte soha, az itt következő „tévedések vígjátékát” tekintse inkább úgy az olvasó, mint ami róla és rólam szól, nem pedig mint egy beszámolót arról, hogy „mások” mit csinálnak rosszul.

II. Előzetes elképzelések

Igy mi, közgazdászok, és más társadalom-tudósok, most azt tanulmányozzuk részletesen, hogyan viselkednek az emberek, hogyan motiválja, majd pedig szabályozza őket öröklött alkatuk és környezetük . . . Egyedül csak a saját hivatásunk sajátos viselkedéséről nem akarunk tudomást szerezni.

. . . A lényeg az, hogy ha egy kicsit kevésbé lennénk tudatlanok önmagunkat és saját motivációinkat illetően, könnyebben el tudnánk kerülni, hogy elfogultak legyünk, és ezért gyorsabb fejlődést várhatnánk a társadalomtudományok terén. Az a minimum, hogy mindig ismerjük a problémát, és megszerezzünk egy bizonyos fokú kifinomult ismeretet a személyiség működéséről és saját kutatói tevékenységünk társadalmi szabályozottságáról.

Gunnar Myrdal, 1968.

A) A modellező előzetes elképzelései

Az előzetes elképzelések azok a gyakran kimondatlan, föl nem ismert erők, amelyek az előtt alakítják a modellt, mielőtt az explicitté válik, és amelyek mindvégig, egész fejlődése során működni fognak a modell mögött. Az előzetes elképzelések bizonyos mértékig alkalmazhatók és szükségesek. Nélkülük a modellezés egy rendező elvek nélküli, teljesen rendezetlen és feldolgozhatatlan

helyzet nulla pontján kezdődnek. Néha azonban az előzetes elképzelések rosszul alkalmazhatók. Vagyis, előfordulhat, hogy úgy irányítják a modellező és a felhasználó felfogását, hogy rosszul magyarázzák a tényleges helyzetet, és nemigen elégítik ki a felhasználó igényeit.

Az előzetes elképzelések sokféle formát öltenek. Néhány erőteljesen megveti a lábát, mint például egy modell-típus formalizált előzetes elképzelései, a szabadpiaci rendszerben való mélységes hit, vagy általában a modellezés iránti általános szkepticizmus vagy éppenséggel túlzott lelkesedés. Mások csak ideig-óráig tartanak, és teljesen eltűnhetnek vagy megváltozhatnak a modellépítés során. Megtörténhet, hogy a modellező éppen most olvasott egy beszámolót a Föld változó időjárású rendszeréről, és egy ideig meg lesz győződve róla, hogy ezt a modellnek tartalmaznia kell. Előfordulhat, hogy a felhasználó nemrég kapott utasítást a Kongresszustól, hogy fordítson nagyobb figyelmet a jövedelem-elosztásra, de lehet, hogy a modell-szerkesztés során figyelme visszafordul a fizetési mérleg problémáira. Akár mélyen meggyökeresedett hiedelmek, akár pillanatnyi gondolatok, a modellező és a felhasználó előítéletei alaposan befolyásolják a modellezési folyamatot.

Ami a modellezőt illeti, a hivatásával járó (elsősorban a modell típusára vonatkozó) előzetes elképzelések fogják formálni módszerét és befolyásolni a gondolkodását. Figyelmét bizonyos problémákra irányítják majd, és arra készítetik, hogy másokkal ne nagyon foglalkozzék. A rendszer-dinamika hívének látóköre például elfogulttá teszi őt az aggregált, zárt hurkos szerkezetek javára. Ezek az előzetes elképzelések alkalmasak rá, hogy szemellenzőt rakjanak rá: 1. szórási problémák, mint például földrajzi változatok és jövedelem-elosztás; 2. hierarchikus rendszerek, mint például a központosítás mértéke és formái; és 3. paraméter-meghatározta rövidtávú viselkedés iránt (ld. D. H. Meadows 1976).

Az egyéni elképzelések fölött még ott tornyosulnak a kor légköréhez tartozó társadalmi előítéletek. Lehetetlen meghatározni, hogy pontosan hogyan befolyásolta a modellezést a hatvanas-hetvenes évek társadalmi atmoszférája. Mégis, egészen bizonyos vagyok benne, hogy a szakma másképp fejlődött volna, ha kialakulása éveit történetesen a McCarthy-korszakra, a gazdasági válság éveire, a spanyol inkvizíció vagy a Ming dinasztia korára estek volna. (A kulturális előítéleteknek a tudományos elemzésre gyakorolt hatásáról kitűnő leírást ad Myrdal 1968, 5–35. old.)

Hacsak nem tudunk kitalálni egy őrangyalt, aki ott ül az előzetes elképzelések tetején, és kiválogatja közülük a rosszul alkalmazhatókat, be kell érjünk a primitív józan ésszel. Itt a józan ész arra figyelmeztetne: „légy résen és cselekedj tudatosan.” Előzetes elképzelések mindig vannak. Amennyiben a modellező tudja, hogy léteznek, explicitté teheti őket, és közvetlenül foglalkozhat velük. Amennyiben nem látja őket, az előzetes elképzelések ott fognak ólálkodni a munkája körül, és úgy átalakítják, hogy nem is hasonlít majd az eredeti szándékához.

Pontosabban: légy önkritikus, vizsgál meg a saját indítékaidat és *a priori* hipotéziseidet! Tárd föl az eljárásaidban lappangó előítéleteket! Folyamatosan kérdezd meg magadtól, mit is próbálsz csinálni és miért! Az önvizsgálat és az önkorrekció alkotják a negatív visszacsatolást, ami a modellalkotó tanulmányt megtartja eredeti céljainál. Önvizsgálat híján semmi sem tudja megakadályozni, hogy az előzetes elképzelések átvegyék az uralmat, és átkormányozzák a modellalkotó tanulmányt a boldog jelentéktelenség birodalmába.

A modellezők képzése rendszerint nem sokat tesz az önkritikus éberségért. Sőt, a terület szakmai jellege akár aktívan is felléphet a „lágý”, önelemző alkatok ellen, akik szembeszállnak az előítéletek zsarnokoskodásával. Az előítélet-problémák teljes ellenszere csak a modellező-szakma értékrendszerének átalakítása lehet. A nyílt-eszű modellezés érdekében tett gyakorlati lépések a következőket tartalmaznák: 1. kapjon nagyobb hangsúlyt a modellező képzésben a gyakorlati munka; végezzenek a hallgatók 2. olyan gyakorlatokat, amelyekben általuk különben elvetett nézőpontokat kell megvédeniük; 3. szerepjátszó gyakorlatokat, amelyekben a hallgató a felhasználó szerepét veszi át; 4. bátorítsák a hallgatókat, hogy keressék a saját eljárásuk tévedéseit, és jutalmazza azokat, akik felfedezik a saját hibáikat.

B) A felhasználó előzetes elképzelései

A tervezőnek a modell-típusra koncentráló előzetes elképzeléseitől eltérően, a felhasználó előzetes elképzeléseinek gyakran nincs elméleti szerkezetük, de érzékenyen reagálnak az intézményes környezetre. Joggal, hiszen a felhasználó ritkán végeztethet változtatást az intézménye más tagjaival és támogatóival való együttműködés nélkül. Az U.S. Nemzetközi Fejlesztési Ügynökség egy ügyfele minden lehetőt meg fog tenni azért, hogy megszerezze a Kongresszus jóakarátát; előfordulhat, hogy a Világbank nem publikál olyan beszámolókat, amelyek megrökönyödést kelthetnek a tagországokban. Bármelyik felhasználó messzemenőig tiszteletben fogja tartani egy személy vagy csoport véleményét, amelyet fontosnak tart. A legtöbb felhasználó számadással tartozik a pénzről, amelyet egy modellezési kísérletre költ.

A változó intézményes szempontok nagyon bomlasztóan hatnak a modellező folyamatra. Szélsőséges példa, hogy egy mezőgazdasági modellt, amelyet eredetileg Nigériára terveztek, Dél-Koreára vittek át, amikor egy forradalom véget vetett a nigériai tanulmánynak.¹ Mindennaposabb példa, hogy a felhasználó megrendel egy demográfiai tanulmányt, amikor a közvéleményt a népesség érdekli, de azután elhanyagolja, amint az ügynökség érdeklődése a népességről az erőforrások elosztására irányul.

Légy tisztában a felhasználó előzetes elképzeléseivel! Képzeld magad a felhasználó helyébe! Érzékeld azokat az intézményi terheket, amelyek a felhasználóra hárulnak! E terheket végül is neked kell viselned. Pontosan különböztess meg a felhasználó egyéni elképzeléseit azoktól az intézményi terhektől, amelyek nyomást gyakorolnak rá! Lépj szövetségre a felhasználóval, hogy semlegesíteni tudd az eredményes modellezést gátló intézményi terheket! Ne fogadd el a felhasználó elképzeléseit, amelyek csökkentik a modell hasznosságát (pl. a rövid-távra összpontosító, egyértelmű előrejelzések), de ne is utasítsd el azonnal mindet! Nem befolyásolhatod valakinek az elképzeléseit, hacsak nincs előtte tekintélyed és nem bízik benned. Igyekezz megszerezni a bizalmát! Ha sikerült, kezd óvatosan a legfontosabb elképzelésekkel! A legtöbb előzetes elképzelés, amellyel a rendszer-dinamika alkalmazói újra és újra szembe találják magukat, a rendszer-logikától eltérő gondolkodásmódban gyökerezik. Ezeket az előzetes elképzeléseket úgy lehet a leg-

¹ A Michigani Állami Egyetemen George Rossmiller által összeállított „A koreai mezőgazdasági szektor szimulációs modellje”.

könnyebben legyőzni, ha rendszer-logikát ültetünk a másfajta logika helyébe. A fő feladat tehát pozitív: rendszer-logikát kell tanítani. De ne harcolj annyira egyes részletekért, hogy közben megfedkezsz a lényegről!

III. Kapcsolatteremtés

Ez a fázis akkor kezdődik, amikor a modellező és a felhasználó először tárgyal a speciális modell-tervezetről, és addig tart, amíg létre nem jön egy megállapodás. A modell-alkotás anyagi természetű elhatározásai leginkább ebben a korai fázisban összpontosulnak. Pénzügyi intézkedéseket hoznak, határidőkről és beszámolási tervekről, a kutatás helyéről, utazási költségekről és a kutatócsoport nagyságáról döntenek. Ha a felhasználó egy közintézményhez tartozik, ebben a fázisban határozzák meg vagy feledkeznek meg azokról az eszközökről, amelyek felelőssé teszik a modellező kísérletet a közérdek előtt. Azt is meghatározzák, hogy a modellezőket az államigazgatás milyen szintjén és milyen feltételek mellett hallgatják meg.

Érzékenyebb kérdések is ebben a szakaszban dőlnek el. Kedvelik-e a modellezők és a felhasználók egymást? Kölcsönös bizalmatlanság várható-e a modell-tervezettel kapcsolatban? Hallgat-e majd a modellező a felhasználóra? Meghallgatja-e majd a felhasználó a modellezőt?

A modellező tanulmány operációs jövőjét elég jól meghatározzák a kapcsolatteremtés közben eldőlt anyagi és erkölcsi kérdések. Ott, ahol a felhasználó jól ismeri a rendszert, a modellező és a felhasználó között kialakított kommunikációs csatornáktól függ, hogy tudása milyen mértékben épül bele a modellbe.

A modell nagysága és összetettsége arányban áll majd azzal az összeggel, amelyet a modellezők fizetésére költöttek. (Előfordulhatnak olyan esetek, amikor a modellezők egyszerűbb modellt alakítanak ki azzal, hogy több időt fordítanak rá, vagy olyan esetek is, amikor nagyobb kutatói gárda kisebb modelleket alkot. Az uralkodó tendencia azonban az, hogy a komplexitás arányosan növekszik a modellezésre fordított idővel.)

A dokumentáció minőségét döntően befolyásolja majd az idő és azok a források, amelyeket az adminisztrációs, szerkesztési, kiadói és nyomdaköltségekre fordítanak, és a hangsúly, amelyet a kezdeti szakaszokban a dokumentációra helyeznek. Ahol egyaránt van alkalmazó és finanszírozó ügyfél (például a tagállamok részére készülő, ENSZ-finanszírozta modellek esetében), az alkalmazó és a modellező közötti kapcsolatot korlátozzák azok az intézkedések, amelyeket azért tettek, hogy a modell eljusson azokhoz, akiknek szánták.

Végül pedig, a korai fázisokban kialakult magatartás valószínűleg kihat majd az egész következő munkára. A költségvetés, az ütemezés, az intézményes méretek és magatartásformák, amelyek a modellezés szerződés-kötő szakaszában alakultak ki, okozhatják a különbséget egy felhasználatlan modell és egy olyan modell között, amelyik hatékony tervezési eszközzé válik.

Egy modell megtervezése nem kevésbé bonyolult dolog, mint egy üzleti vállalkozás létrehozása, egy csata vagy egy ház megtervezése, és ugyanolyan nagy gonddal is kell közeledni hozzá. Egy modell-kísérlet megtervezése megköveteli korlátozott erőforrások összehangolását egy cél érdekében. Az erőforrások különbözőek, feladatuk pedig összetett; egyaránt beletartoznak emberek, gépek, intézmények és pénz. Valószínűbb, hogy sikeres lesz egy modell-tanulmány, ha szervezési és anyagi alapjait alaposan végiggondolják. Egy modell-kísérletet könnyen alááshat akár ha rossz technológiába végeznek

beruházásokat, ha nem veszik figyelembe a felhasználó (fogyasztó) szükségleteit, ha akár túlságosan visszafogott, akár túlságosan ambiciózus terveket alkotnak.

Kezdd azzal, hogy elképzeled, hogyan akarsz előrehaladni a modell-kísérlettel a modellezés minden egyes lépésében! Gondold végig minden lépés részleteit, mennyi idő kell majd a jó munkához, hogyan kell majd a modellezőnek és a felhasználónak érintkeznie egymással, és mik azok a dolgok, melyek várhatóan rosszul fognak sikerülni! Készülj fel mindenre, aminek meg kell történnie, és tégy óvintézkedéseket a várható nehézségek ellen!

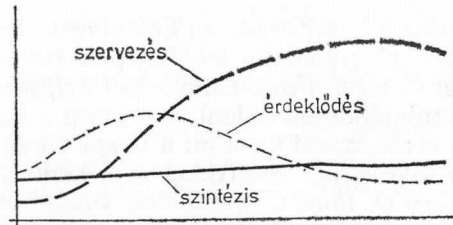
Amikor elképzeled, hogyan kell a tanulmánynak haladnia, gondold végig előző tanulmányaid történetét, és vizsgáld meg azokat az eljárásokat, amelyeket mások alkalmaznak! Próbáld meg elkerülni, hogy megismételd a hibákat! Sajátítsd el az eredményesnek látszó módszereket!

A modellező és a felhasználó között a feszültségek és félreértések gazdag forrásai az össze nem hangolt elvárások. Érdeemes kutatni utánuk a tervezés stádiumában, és ha vannak, érdemes kiirtani őket. Egyszerű mintája van ennek az óvintézkedésnek: őszinte megbeszélés, szóbeli és írásban rögzített megegyezés. Mondasd el a felhasználóval részletesen, mi az, aminek elvégzését elvárja, és mi az, amit a modelltől remél! Mondj el neki pontról pontra mindent, amiben szükség lesz együttműködésére a munkában, mely adatoknál számítász arra, hogy megkapod tőle, milyen támogatást és együttműködést vársz majd tőle, amikor eljön a modell felhasználásának ideje! Nagyon valószínű, hogy naivnak fogjátok találni egymás elképzeléseit. Folytassátok a vitát és egyezkedést mindaddig, amíg elképzeléseitek arról, hogy ki, mit, mikor és hogyan csinál, azonos és gyakorlatias nem lesz. Végül, nehogy újra-születhessenek a téves remények, foglaljátok írásba a megegyezést!

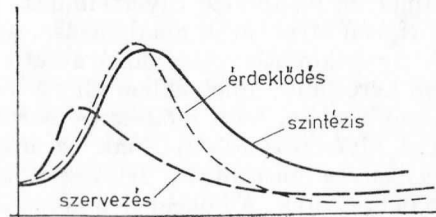
Ebben és az ezután következő stádiumban (a koncepció kidolgozásakor) mind a felhasználó, mind a modellező hajlamos arra, hogy türelmetlenné váljék: „hagyjuk abba a vacakolást és lássunk már munkához”. Állj ellent a sürgetésnek! Ezek a lépések a modellező folyamat legkritikusabb és legnehezebb részei. Ne vezessen félre, hogy tevékenységeteknek nincsen azonnali, kézzelfogható eredménye! Értelmetlen a sietség, ha még nem világos, merre kell menni. Egy évi munkára szánj rá *minimálisan* egy hónap tervezést! Nehogy pénzügyi nyomásra el kelljen sietni ezt a lépést, a próba-szerződés stratégiájához folyamodhatsz, ami *Pugh – Roberts* (ld. *Weil*, 1976) esetében hasznosnak bizonyult. Indulj el egy néhány hónapi munkáról szóló szerződéssel! Építs fel egy demonstrációs prototípus modellt! Figyeld meg, hogyan alakul a felhasználóval való kapcsolatod! A próba-időszak lejártával mind te, mind a felhasználó sokkal kedvezőbb helyzetben lesz ahhoz, hogy eldöntse, akar-e együtt dolgozni a másikkal vagy sem. Feltételezve hogy igen, sokkal kedvezőbb helyzetben lesz ahhoz, hogy eldöntse, akar-e együtt dolgozni a másikkal vagy sem. Feltételezve hogy igen, sokkal kedvezőbb helyzetben lesznek a további munka feltételeinek megtervezéséhez.

IV. A koncepció kidolgozása

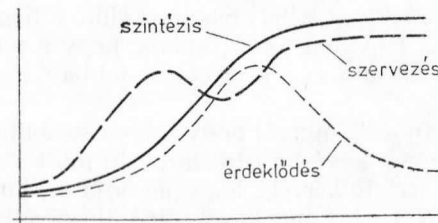
A koncepciók alkotóinak munka közben végzett megfigyelése alapján a *Conceptula* nemnek három fajtát különböztetem meg: *C. methodica*, *C. effusa*, és *C. frutescens*. A három faj megkülönböztető vonásait az 1. ábra foglalja össze.



C. methodica



C. effusa



C. frutescens

1. ábra: A koncepció-alkotók három fajtájára jellemzően az anyag rendszerezésének, a probléma iránti érdeklődésnek és az elmélet szintézisének alakulása

C. methodica (közönséges nevén: a robotoló) gondosan szedi össze az adatokat, gyűjti az elfogadott elméleteket, és rajzolja az ábrákat. Nem követi a saját szeszélyeit, és akkor sem merészkedik túlságosan messze a nyilvánvalótól, amikor a határokat szabja meg. Munkájára jellemző, hogy precíz, de nélküli az ihletet. Vagyis, nem alkot új elméletet. *C. methodica* jól-kidolgozott elméletekből táplálkozik. Legjobban akkor érzi magát, amikor újraalkalmazhat egy általános elméletet, és hajlamos rá, hogy egészen elveszítse a fejét, ha a startvonalától kell indulnia.

C. effusa (közönséges nevén: az álmodozó) *C. methodica* ellentéte. Az „érdekes” szó használatának gyakoriságából ítélve hipotézisként elfogadhatjuk, hogy legfőbb indítéka az unalom elkerülése. Ugyanolyan lankadatlan kitarással kerüli a köznapit, mint ahogy *C. methodica* csügg rajta. Jellemzője, hogy a tág határokat kedveli. Sajátossága, hogy — gyakran a rend rovására — szeszélyeket és lenge szintéziseket kerget. *C. effusa* olyan területeken érzi leginkább elemében magát, ahol nincsenek kialakult elméletek. De előbb csíhol ki egy új elméletet, minthogy bármilyen megbízható elméleti struktúrát kifejlessen.

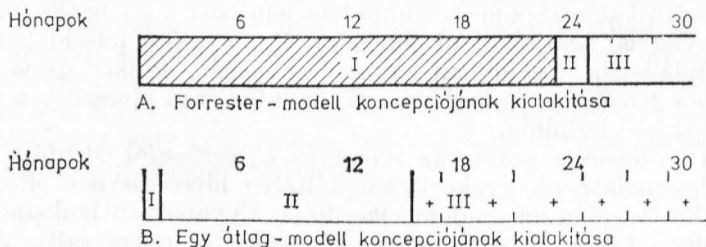
C. frutescens az előző két fajtól abban különbözik, hogy koncepciói sok dús gyümölcsöt teremnek. *C. frutescens* munkájának termékei azok az általános modellek, amelyeket *C. methodica* alkalmaz és *C. effusa* elkerül. *C. frutescens*-t talán az a jellemző tulajdonsága különbözteti meg a koncepciók többi alkotói fajától, hogy képes elválasztani az ocsut a tiszta bűzától.

C. frutescens sem fölösleges szeszélyeket nem kerget, mint *C. effusa*, sem a részletekben nem vész el, mint *C. methodica*. Inkább egy világos, érthető elmélet felé halad.

Rövid távon a modellezőnek nemigen van más választása, minthogy ösztönös képességeivel éljen. Módszeres embereknek olyan feladatokra kell fordítaniuk az erejüket, amelyek fogalmilag egyértelműek, mint például általános modellek és műszaki-típusú struktúrák alkalmazása, ami nem igényli eredeti társadalmi elméletek megalkotását. Álmódzó alkatú koncepció-alkotóknak olyan helyzeteket kell keresniük, amelyekben elméleti áttörésre van szükség. Hosszú távon hasznosabb lenne, ha a módszeres és az álmódzó stílust egyaránt annak a sokkal kíváncsiabb típusnak az irányába lehetne terelni, amelyet a *C. frutescens* leírása mutatott be. Itt, őszintén szólva, olyan rendszer áll előttünk, amelyet nem értünk. A koncepcióalkotás fejlesztésének stratégiái ugyanúgy tele vannak a „vaktában-lövöldözés”-típusú ösztönös érveléssel, mint az infláció csökkentését szolgáló jelenlegi stratégiák. Sokan állítják, hogy a koncepcióalkotást éppen úgy nem lehet tanítani, mint az alkotó művészeteket, és úgy látszik, egyetlen olyan eset sincs följegyezve, amely kétségbevonná ezt az állítást. Röviden tehát, ahhoz, hogy a koncepcióalkotás fejlesztésére ki lehessen alakítani egy stratégiát, jobban meg kell értenünk ezt a folyamatot.

Néhány jel azonban arra mutat, hogy a koncepcióalkotást befolyásolhatják olyan változók, amelyek kevésbé titokzatosak, mint a műsák és a modellező tehetség. Jay Forrester fölkhérték, hogy mondja el, hogyan szokott egy koncepciót kialakítani. A 2. ábra megközelítőleg illusztrálja a folyamatnak azt az időbeli tagolását, amelyet elmondott.

Egy új általános modellnél durván számítva két évet fordítanak a rendszerre vonatkozó információk kiválogatására, a problémával kapcsolatos ismétlődő viselkedési trendek azonosítására és a lényeges trendeket szabályozó állapotváltozók elkülönítésére. Ha ez megvan, az intenzitásokat kifejező változók megfogalmazása és a kiinduló modell megszerkesztése néhány hetet



I. a trendek és állapotváltozók azonosítása

II. modell - szerkesztés és módosítás

III. kipróbálás, értelmezés és a hátralévő fázisok

2. ábra: Az egyes fázisokra fordított idő elosztása

vesz igénybe. Ezek után a koncepció kidolgozását felváltja a modell viselkedésének extenzív kipróbálási és megfigyelési szakasza, aminek révén finomodik mind a modell, mind az elemzőknek a rendszerről alkotott koncepcionális képe.

Az ellentét kedvéért a 2. ábrán bemutatom (az én megfigyelésem szerint) egy megszokottabb modellező tanulmány időfelosztását is. A modellező többé-kevésbé fejest ugrik a tanulmányba. Gyakran csak nyers elképzelése van arról, hogy mik legyenek a fő állapotváltozók. Egy hónapon belül már a kiinduló modellt szerkeszti. A szerkesztés viszonylag hosszadalmas — és zürzavaros — folyamat. Gyakran beletartoznak kérdés-újrafogalmazási kísérletek, a modell határainak kiszélesítése, és új állapotváltozók bevonása.

A Forrester-eljárás és a Forrester-eredmények összevetése egy megszokottabb eljárással nem foglalja magában, hogy a termékeny koncepcióalkotás kulcsa a hosszú kihordási idő. De mindenesetre azt sugallja, hogy a modell-koncepciók termelése ugyanúgy nem véletlenszerű, mint a termelés más formái: lehetnek szisztematikus kapcsolatok a között, hogy mi kerül be a folyamatba, hogyan van megszervezve, és mi az eredmény. Ha ilyen szisztematikus kapcsolatok léteznek — és el tudunk jutni oda, hogy meg is értsük őket — valószínű, hogy meg tudjuk tanulni a koncepció-alkotás folyamatának szisztematikus szabályozását. Ha egy ilyen vezetési know-how kifejlesztése nem forradalmasítja is a koncepció-alkotást — ha a modellezők elismerik, de gyakorlatban semmibe veszik a koncepció-alkotást szabályozó séma érvényességét — akkor is legalább kifejlesztettük a felhasználókkal való tökéletes együtt-gondolkodásnak az alapjait, akik mindjárt megbokrosodnak, mielőtt egy szerkezeti változás életbeléptetésére kerül sor.

Figyelmeztetés! A koncepció, ha egyszer létrejött, könnyen berozsdásodik. A modellezőket megbabonázzák a saját modelljeik. Személyes ismerősükké válik minden egyes egyenlet, és elveszítik a képességüket, hogy maguk előtt lássák azt a valóságos helyzetet, amelyet az egyenletek képviselnek. A modell-dokumentációban gyakran szembeszökőek a koncepció berozsdásodásának szimptomái. Szélsőséges esetekben a fogalmi megértés egy minden áttekintést nélkülöző, szőrözően részletes elemzéssé degenerálódik. A dokumentáció sorról-sorra veszi a modellt, de nem tudja érzékeltetni az egész szerkezetet. A társadalmi tudatosság felett eluralkodik a matematika. A forma túlharsogja a modanivalót. Nagy gondot fordítanak arra, hogy mindent igazoljanak, de nem hangzik el semmi világraszóló.

A formális modell felépítésének egész folyamata alatt meg kell őrizni egy világos szellemi modellt. Rettenetesen fonák dolog, ha úgy látszik, hogy a modellező már nem érti világosan a világ valóságos helyzetét. Egyszerűen lehetetlen jó modellt felépíteni, ha az ember nem érzékeli a valódi világnak azt a részét, amelyet szimulál. Hosszútávon a való világ tiszta megértése — különösen a felhasználó számára — sokkal értékeesebb, mint maga a modell. Mindig egy világos elképzelésnek kell az előtérben állnia. A legnagyobb ajándék, amit a modellező csak adhat, a világ mozgatórugóinak fogalmi megragadása.

A modellezőknek arra kell nevelniük önmagukat, hogy el is tudjanak távolodni. Föl kell nézniük a modelljükből, és komolyabban kell venniük a való világot, mint saját, róla alkotott állításukat — rendszeresen, az egész modellező folyamat során. A könyvek böngészésével párhuzamosan meg kell figyelniük a való világot is. Beszélgetniük kell azokkal az emberekkel, akiknek elha-

tározásai információforrások a modellben. Ahol csak lehetséges, meg kell figyelniük azokat az üzemi és természeti operációkat, amelyeket a modell szimulál. Ha olvasnak, olvasmányaikat ne korlátozzák egyedül csak a közgazdaságra és a statisztikára, olvassanak történelmet, filozófiát, antropológiát, sőt regényeket is! És érezzék, hogy ezek az olvasmányok épp úgy a munkájukra vonatkozó irodalom részei, mint a közgazdasági értekezések.

A koncepció-alkotásnak a valóságból kell kiindulnia. Semmit sem szabad addig beépíteni a modellbe, amíg a modellező megfoghatóan el nem tudja képzelni, hogyan történik az a való világban. Mielőtt elképzeli egy pénzfolyamatot, a modellező képzelje el a pénzt kezelő embereket, azt, ahogy gondolkodnak, azt, hogy milyenek, a körülményeket, amelyek között élnek. Nem lehet a modellezőnek addig termelési függvényeket írnia, amíg el nem tudja képzelni az épületeket és a gépeket, a munkásokat és az anyagot, amellyel dolgoznak. Ne írjanak népesség-növekedési függvényeket anélkül, hogy föltennék a kérdést: „Mit jelentenek a gyerekek ezeknek az embereknek?”

Ha már sikerült elérni, határozottan törekedni kell a realizmus megőrzésére. A matematikai formába öltöztetés után a konkrét fogalmak könnyen sodródhatnak az absztrakció és a szakmai zsargon irányába. Túlságosan egyszerű számokat állítanak a valóság helyébe. Ha már a számok váltak „valósággá”, pusztán csak idő kérdése, hogy a matematikai logika kiszorítsa a kiinduló koncepció logikáját.

Második figyelmeztetés! Ahogy a koncepció kidolgozása előre halad, gyakran felmerülnek olyan mély, alapvető kérdések, mint például: „Mit mond ez a modell a való világ működéséről? Valóban így viselkedik-e a világ? Érint-e lényeges kérdéseket ez a modell? Hatalmában áll-e a felhasználónak életbeléptetni azokat a megoldásokat, amelyeket ez a modellező-tanulmány javasol? A megfelelő felhasználónak dolgozom-e? A megfelelő modellt építem-e?”

Az ilyen kérdések nagyon hasznosak, ha nem túlságosan szigorúak: megrázkódtatást okoznak, ami ahhoz szükséges, hogy újra és újra elindítsa a modell-finomítás és tökéletesítés fázisait. A kérdésfeltevés hatása azonban egy mélyebb szinten egészen aggasztó is lehet. Mint amikor a harmadéves medikus megkérdezi: „Valóban orvos akarok lenni?”, koncepcionális premisszáink újragondolása erkölcsi skrupulusokhoz vezethet. Szinte mindig akad valami, amivel kapcsolatban a modellezőnek súlyos kétségei támadhatnak. Gyakorlati és intézményes kényszerek együtt azonban ésszerűtlenné teszik, hogy az ember visszalépjen és átdolgozza a kétséges területeket. Ha a modell csoportmunka, a csoport minden egyes tagjának támadhat egy sor kétsége a modell koncepciójával kapcsolatban, és az alapos kétségbevonástól akár darabokra is hullhat a modell-kísérlet. Sőt, a modellezők, akik már aláírtak egy szerződést, és akiknek határidőket kell betartaniuk, nem egykönnyen táncolhatnak vissza amiatt, hogy elbizonytalanodtak az irányvételben.

A Modellező Utópiában efféle kérdések még a koncepcióalkotás idején merülnek föl, hogy a modellezők és a modell felhasználói nyíltan megvitathassák. A vita egy új, hasznosabb probléma-meghatározáshoz vezetne. Akkor a modellezők úgy folytatnák a munkát, hogy nem lennének gyötrő kétségeik arról, amit csinálnak. A felhasználó olyan modellt kapna, amely megfelelné a szükségleteinek, a modellezők pedig annyira biztosak lennének munkájuk erényeiben, hogy örömmel vennék a fáradságot, hogy jól megírják és lelkesen nyújtják át a világnak. Alkalmazásához nem férne kétség.

A gyakorlatban kevés modell illik bele a Modellező Utópia sémájába. A modellkészítő agyában túlságosan gyakran akkor fogalmazódik újra a probléma, amikor már túl van a modellkészítő folyamat felén. Addigra már a modellezők túlságosan el vannak kötelezve eredeti probléma-megfogalmazásuknak ahhoz, hogy megváltoztassák a modellt. Így azután az eredeti probléma-meghatározásnak megfelelően fejezik be a modellt, és lelkesedésüket arra fordítják, hogy új szerződés után nézzenek, amely lehetőséget ad nekik arra, hogy az előző modellnél szerzett tudással dolgozzanak egy új modellen. A régi modellt, amelyből a modellezők már kiábrándultak, éppen csak annyira egészítik ki és dokumentálják, hogy megfeleljen a szerződésbeli kötelezettségeknek. Elveszett már az odaadás, ami ahhoz kell, hogy közkinccsé tegyenek és gyakorlatban alkalmazzanak egy modellt.

A megkésettlen éleslátó kérdésfeltevés szükségessége és romboló hatása egyaránt nyilvánvaló. A későbbiekre marad, hogy vajon lehet-e úgy irányítani a modellezést, hogy elkerülhető legyen a romboló hatás. A kezdeti koncepció kidolgozására fordított több idő, szorosabb kapcsolat a modellező és a felhasználó között, egy vagy több időszak rendszeresítése az eredeti probléma meghatározás újragondolására, tapasztalt modellezők szerint (Weil 1976; Roberts 1972) elősegítheti, hogy a modelleket olyan tartós formába öntsék, hogy nagy kérdések se akadályozzák meg sikeres befejezésüket.

V. Szerkesztés

A modelleket arra szánják, hogy problémákat oldjanak meg, ők maguk nem jelentik a végcélt. A megszerkesztett modellek fajtáit a megoldandó probléma szükségletei határozzák meg. (Bárki, aki részt vesz modell-építésben, tanúskodhat arról, hogy milyen nehéz objektívnek lenni ebben a kérdésben. Nagyon könnyű hagyni, hogy a modellek önmagukban végcéllá váljanak.)

T. J. Manetsch, 1974.

A modell-szerkesztés abból áll, hogy a megfogalmazott szerkezetet olyan formába öntik, amelyet a számítógép meg tud emészteni. A modellező számára a modell-szerkesztés hazai pályát jelent. Lehet, hogy sohasem tanulmányozta, hogyan kell egy koncepciót kialakítani, vagy hogyan kell kapcsolatot teremteni a felhasználóval, de sokéves modell-szerkesztési tapasztalata van. Rendszerint szereti a hivatását, és élvezettel használja eszközeit.

A modell-szerkesztési feladat nem más, mint egy bonyolult rejtvény, amelyet meg kell oldani. A modellező lelkesen halad előre. Minden szakmai beszélgetését elhúzza, és modellező társaival egyik vagy másik modellszerkesztési eljárás viszonylagos előnyeit kezdi megvitatni. A beszélgetés a függvénytípusok, a táblázatos alakban adott függvények meredeksége, a domináns visszacsatolási hurkok és a ciklikus viselkedés felé fordul; a modellezők azzal kezdik ugratni egymást, hogy őrködnek a modell egyszerűségén, és közben belelátanak a komplexitás mocsarába.

A koncepció kidolgozása adta meg az intellektuális tervrajzot. A szerkesztés fázisában egy sor különböző eszközt, többek között grafikus eljárásokat, matematikai algoritmusokat és software csomagokat (konzerv programokat) használnak ahhoz, hogy az intellektuális tervrajzot és az adatokat technikailag kezelhető szerkezetűvé alakítsák át. Az eszközök szerepe korántsem passzív ebben az eljárásban. A DYNAMO, amelynek erősebb a belső fegyelme, mint amilyen az „1984” című regényben beszélt „új nyelv”, ugyanakkor amikor a rendszer-dinamika elfogadott formájában a szimulációt technikailag egyszerű feladattá teszi, teljesen zűrzavarossá válik, ha kilépünk e prototípus keretei közül. Aggregált, nem-lineáris állapotváltozókkal definiált visszacsatolásos rendszerek szimulálásához nem kell más, mint egy csöpp algebrai gondolkodás és a DYNAMO ismerete. Más technikákkal, például input-output, optimalizációs vagy sztochasztikus modellező technikákkal való keresztezése jelentős számítási ügyességet kíván, és rendszerint borzalmas fogalmazási nehézségeket okoz.

A felhasználó és a szerkesztés

A modellezés valamennyi lépése közül a szerkesztés áll a legtávolabb a felhasználótól, akit valószínűleg ki is hagynak belőle. Az a szakmai fecsegés és szakzsargon, ami a modellezők között elharapózik, amikor a rejtvényükben elmerülnek, a beavatottakon kívül mindenki más számára érthetetlen. Még ha a felhasználó történetesen értene is a modellezéshez, ebben a fázisban nehéz lenne lépést tartania az eseményekkel. (Sőt, még maguk a modellezők is gyakorta eltévednek benne.)

Röviden tehát, *a modellt átalakítják valamivé, amit a számítógép megért, a felhasználó viszont nem.* Igaz, ha a gépi program megfelelne a probléma megfogalmazásának, akkor a felhasználó megértené a gépi programot, ha nem is szóról szóra, de elméletben mindenképpen. Némi idő azonban eltelt azóta, hogy a problémát meghatározták. A felhasználó felejtett közben, a modellezők pedig át- meg átszőhették szakmai terminológiával a probléma-meghatározás eredeti szóhasználatát. Ilyen körülmények között könnyen meglehet, hogy a felhasználó többé nem hiszi, hogy érti a modellt, még ha a koncepciók alapjait érti is.

A kapcsolat-újrafelvétel emberi, nem pedig mechanikus dolog. Együttérzés és kommunikációs ügyesség kell ahhoz, hogy leereszkedés nélkül meghatározzák és tisztázzák azokat a tényezőket, amelyek a modell megértésében megakadályoznak másokat. Az eljárás elsősorban időt és türelmet igényel. Ha a térbeli távolság elválasztja a felhasználót és a modellezőt, utazásokra, telefonátvitelre és levélhegyekre lesz szükség. Ha a felhasználó nem egyetlen személy, hanem ügynökség, a kapcsolat újrafelvételének problémáját még nehezebb lesz megoldani. Ha a modellezőkből hiányzik a szükséges emberi ügyesség, vagy ha a felhasználó nem áll szilárdan a modell mellett, a modell szerkesztése során a felhasználó értelmi kapcsolata a modellel olyan törést szenvedhet, hogy érdeklődése a modell iránt menthetetlenül alacsony szintre süllyed.

A modell szerkesztése közben elkerülhetetlenül lazul a felhasználó értelmi kapcsolata a modellel. Ezt a veszteséget azonban minimálizálni kell és lehet, ha:

1. a kapcsolat nem szűnik meg teljesen a modell szerkesztése közben,

2. a modellezők lassan bevezetik a felhasználót a szakzsargonba, amit viszont a minimumon tartanak,

3. a felhasználók ragaszkodnak hozzá, hogy amit a modellezők csinálnak, csinálják érthetően, és tájékoztatják a modellezőket, ha már nem értik, hogy mi folyik,

4. a modell szerkesztésének fázisa nem tart olyan sokáig, hogy a felhasználó már meg is feledkezik a modell létezéséről,

5. a modell nem válik bonyolultabbá, mint amennyire kitűzött célja megkívánja.

A fenti „ha”-k nem teljesednek spontán módon. Akkor a legbiztosabb, hogy teljesítik őket, ha a modell-szerkesztés során felmerülő nehézségeket már a szerződés-kötés fázisában megelőzik. Az a modell-tanulmány, amelyik jól-beosztott beszámolási tervvel, a kapcsolat fenntartásáról szóló megegyezéssel és a nehézségekkel számoló reális szemlélettel indul, sokkal kevésbé valószínű, hogy a modell szerkesztése közben zátornya fut. Ha az előkészítés ellenére is bajok vannak a kapcsolattartással, a kár sokkal kisebb lesz, és sokkal könnyebb lesz helyrehozni.

VI. Kipróbálás

A kipróbálás a modellező folyamat intellektuális csúcspontja. Bizonyos értelemben a formális modelleket úgy építik, hogy állják a próbát. Ha a matematikai modelleket nem lehetne alávetni az ellenőrző eljárások széles skálájának, nem sok előnyük lenne a szóbeli modellekkel szemben. Ha a próbák nem tudnák megmutatni egy modell használhatóságát, és ha egy modellt, amelyet egy adott cél eléréséhez már alkalmasnak tartanak, nem lehetne felhasználni lehetséges politikák hatásának ellenőrzésére, akkor a modellek csupán rendkívül aprólékos leírások — matematikai festmények — lennének.

A kipróbálás az eljárást tekintve is kulmináló tevékenység. Az izgatott várakozás a modell megfogalmazásától kezdve mindaddig fokozódik, amíg meg nem érik a kipróbálásra, hiszen a modellező kíváncsi rá, hogyan fog működni.

Szakmailag a kipróbálás a legrázósabb pont. Az érvényességi próba adóz harc tárgya a rendszer-dinamika és más modell-típusok között. Úgy látszik, a rendszer-dinamika művelői között az az általános vélemény, hogy azok a statisztikai próbák, amelyeket más típusoknál alkalmaznak, nem hasznosak a rendszer-dinamikában (*Forrester* 1961; *Senge* 1975; *Mass és Senge* 1976), bár akadnak, akik síkra szállnak az előrejezés hibájának formalizált méréséért, mint olyan eszközzért, amely segíti megnyerni a felhasználó bizalmát. (*Weil* 1976).

Az érzékenységi vizsgálatokat és a stratégiák tesztelését lényegesnek tartják. (*Forrester* 1961). Főként példák alkalmazásán és inaskodáson keresztül tanítják, hogyan kell elvégezni az érzékenységi és stratégiai teszteket. Az implicit általánosítás szerint: „az elvégzendő teszteket csak a kutatás céljának és a megismerendő rendszer természetének megfelelő eset-specifikus alapon lehet előírni.” Más szóval, a próba formája értékítélet kérdése. A megítélést a tapasztalatok alakítják ki.

Az embernek nem kell nagyon messzire mennie, hogy olyan esetekre találjon, amikor a modell kipróbálásáról gyengécske döntéseket hoztak. Egy csomó modellező hajlik rá, hogy amikor egy hatalmas modellel és a kipróbálás csillagászati számú potenciális tárgyával kerül szembe, erőfeszítését inkább a modell „behangelására”, mint kipróbálására fordítsa. A paramétereket gyors-

sabban alakítják úgy, hogy jobb múltbeli illeszkedést érjen el, minthogy olyan változtatásoknak vessék alá őket, amelyek a rendszer viselkedési tűrőképességét tehetné kérdésessé. Bár a valódi világ döntési függvényei és az információs áramlatok gyakran tele vannak zajjal (*Forrester* 1961), a modellezők ritkán ellenőrzik a modelljeik érzékenységet különböző amplitúdójú és fajtájú zajokkal szemben. Szélsőséges paraméter-kombinációkat ritkán vizsgálnak meg, és ritkák a szerkezeti változtatások is. Így a modell viselkedése különleges feltételek mellett — éppen azokban a helyzetekben, amelyekben a nem-linearitások fontossá válnak és sokszor bukkannak fel érdekes eredmények — gyakran észrevétlen marad. És ami még rosszabb, úgy látszik, hogy a modell ellenőrzésének nemigen szentelnek mély gondolatokat. Közel két év alatt a modellező csoport hetente tartott szemináriumain és mindennapos vitáin ebéd közben, még soha senkit sem hallottam, hogy komolyan vitatkozott volna arról, hogyan szervezze meg saját modelljének kipróbálását. Úgy látszik, hogy a legtöbb ember, köztük magam is, tervszerűtlenül fog hozzá a teszteléshez, mint olyasmihöz, ami csak része a hibák kibogarázására és a modell finomítása folyamatának. A nem formalizált tesztekben intuitív képet alkotnak arról, hogyan működik a modell. Ez után az intuitív kép után — ami egészen pontatlan is lehet (hiszen mindannyian tudjuk, hogy az intuíciónak a magasabbrendű rendszerek szívósan ellenállnak) — következnek a szerkezeti érzékenységi tesztek. Az érzékenységi tesztek eredményei alapján és annak elgondolása alapján, hogy milyen stratégiák kipróbálása váltja ki a kívánt hatást a felhasználóból, elvégzik ezeket a stratégiai próbákat. Ezzel azután a kipróbálást befejezettnek tekintik, hacsak valami külső kritika bele nem avatkozik.

Miért válik a kipróbálás olyan gyakran felületessé? Egyrészt a modellezők sokszor annyira elmerülnek a szerkezet felülvizsgálatában és kidolgozásában, hogy nem hagynak időt az alapos kipróbálásra. Ez a gazdálkodás az idővel olyan, mintha valaki gondosan elkészítene egy ebédet, azután az egészet kiöntené a szemétkébe. A szimuláció legfőbb előnye az elemzés más formáival szemben, hogy megmutatja az embernek, mi történik, ha valamennyi hipotézis egyszerre kezd működni. Ha valaki, összeállítván a hipotéziseit, abbahagyja a munkát és nem szánja rá az időt, hogy gondosan összeállított kísérletek során részletesen megfigyelje egymásrahatásuk eredményeit, akár neki is állhat esszéket írni vagy grafikonokat rajzolni. Másrészt, a precíz ellenőrzés az intuíció természete és a szokás ellen van. Azokat a verbális elméleteket, amelyeken fölnevelkedtünk, nem lehet úgy kipróbálni, mint a szimulációs modelleket; túlságosan kevésbé explicitek ahhoz, hogy részletes szerkezet- és viselkedéselemzést tegyenek lehetővé, és túlságosan merevek ahhoz, hogy kísérletezni lehessen velük. Hacsak nem tesznek határozott kísérletet arra, hogy szigorú ellenőrző eljárásokat dolgozzanak ki és tartsanak fenn, a modellezők simán visszatérnek arra, hogy a formális modelleket se ellenőrizzék sokkal több gondnal, mint amennyit egy verbális modell értékelésére fordítanak.

Sőt, előfordulhat, hogy aktív tudatalatti ellenállás van bennük a kipróbálással szemben. Kevesen vannak közöttünk, akik élvezettel manipulálnának a saját modellünket úgy, hogy az esetleg érvénytelenítse megfogalmazott szerkezetünket, vagy a rendszer viselkedéséről alkotott ösztönös elképzelésünket. Intellektuálisan kényelmetlen úgy ellenőrizni valamit, hogy elbizonytalanodhasson a modellről alkotott véleményünk. Így hát könnyen abba a hibába esünk, hogy hasznos és értelmes tesztekkel fölösleges piszmozgással helyettesítünk.

Könyörtelenül szembe kell szállni az ilyen kipróbálás-ellenes erőkkal. Nem szabad hagyni, hogy a használhatósági tesztek olyan törekvéssé degenerálódjanak, amelyben a modell használhatóságát demonstrálják. Komoly kísérletet kell tenni arra, hogy meghatározzák azokat a helyeket, ahol a modell, vagy a modellező róla alkotott képe hamis, hogy javítani, finomítani lehessen a modell szerkezetén és a modellező szerkezeti elképzelésein. A vizsgálatot ugyanazzal a rosszindulatú szkepticizmussal kell elvégezni, mint egy használt autó kipróbálását — szinte mindig akad valami disznóság a motortető alatt. A lényeg az, hogy az ember lokalizálja és kijavítsa a bajt, nem pedig hogy átfesse a rozsdás részeket.

Adott esetben a kipróbálásnak magába kell foglalnia különböző kísérleti feltételek mellett a modell változóinak gondos megfigyelését. A modellezőnek meg kell állapítania a változók viselkedése és a különböző kísérleti körülmények között a változók viselkedésében mutatkozó különbség szerkezeti okait. Azután fel kell tennie a kérdést, hogy vajon a modell szerkezeti okai elfogadhatók-e a tényleges rendszer tekintetében. (Ha nem, itt az ideje, hogy elgondolkozzon a modell szerkezetének módosításán.) Ahhoz, hogy a teszteknek megfelelő hasznuk legyen, a modellezőnek világosan tudnia kell, hogy minden egyes próba során milyen viselkedést vár a modelltől, és gondosan figyelnie kell, hogyan tér el a modell outputja a várt viselkedéstől. A várt és megfigyelt eredmények közötti eltérések azt jelzik, hogy vagy a modell, vagy a modellező elképzelése a modell viselkedéséről irreális. Akár így, akár úgy, tanulni kell belőle.

A többi megpróbáltatáson kívül a kipróbálásnak gyakran még egy prédára éhes társadalmi környezetet is túl kell élnie. Ha lennének olyan intelligens kritikusok, akik arra kényszerítenék a modellezőt, hogy alkalmazzon a modell szerkezetének és céljának megfelelő teszteket, lenne társadalmi ösztönző arra, hogy a modellező jól végezze el az ellenőrzést. Ehelyett egy sor ellenséges érzelmű kritikussal találkozunk, akik olyan teszteket sürgetnek, amelyek egyáltalán nem felelnek meg a modell céljának és szerkezetének, a modellező arra kényszerül, hogy önvizsgáló tesztek helyett inkább védekező teszteket alkalmazzon. Nagyjából úgy látszik, hogy a szimulációs modellálás gyorsabban alakított ki ellenséges kritikusokat, mint ahogy kifejlesztette a saját hozzáértő, ellenőrző vezetését. Így azután inkább olyan tesztekért lelkesednek, amelyek igazolják, nem pedig korrigálják a modelleket.

A modellező számtalan módon elkerülheti ezt a destruktív helyzetet. Felkérhet egy külső bírálót, akinek a véleményére hallgat. Beleépítheti a modellező eljárásba a belső kritikát úgy, hogy tudatosan megbízza a modellező team egyes tagjait a team más tagjai munkájának bírálatával. Vagy ha a felhasználó elég alaposan ismeri a modellező tanulmányt, ő maga is alkalmazhat olyan elveket, amelyek továbbfejleszthetik a modell viselkedését. Nem valószínű, hogy az előbb felsorolt bármelyik kritika-fajta magától jelentkezik. Ha a modellező igényt tart rájuk, aktívan kérnie kell őket, és a helyzethez illő jutalommal kell megköszönnie (pénz, köszönet és megbecsülés, valamint egy kijavított termék, aszerint, hogy külső vagy belső bírálóról, illetve a felhasználóról van-e szó).

VII. Dokumentáció

... Vagy van az írónak mondanivalója, de nem tudja kifejezni, vagy nem-törődöm módon valami mást mond, vagy majdnem teljesen közömbös azíránt, hogy jelentenek-e valamit a szavai vagy sem. A ködösségnek és nyilvánvaló hozzá nem értésnek ez a keveréke a modern angol próza legjellemzőbb vonása.

... Amint fölmerülnek bizonyos témák, a konkrétum beleolvad az elvontba, és úgy látszik, hogy senki sem akad, aki képes lenne rá, hogy ne kölcsönvett beszédfordulatokkal éljen: a próza egyre kevésbé áll olyan szavakból, amelyeket a jelentésükért választottak ki, és egyre inkább olyan kifejezésekből, amelyeket úgy rakosgatnak össze, mint egy előre-gyártott tyűkketrec részeit.

George Orwell

A dokumentációs felelősség kérdése mögött a modellező személyének még nagyobb kérdése rejlik. Tudós-e a modellező vagy szakértő? A változás ügynöke-e vagy az igazság harcosa? A felhasználó vagy a „közjó” érdekében dolgozik? Esetleg egy személyben mind?

Ha a modellező tudós, dokumentációs feladatai lényegretörőek. A tudományok általános gyakorlatának megfelelően: 1. ismertetnie kell a szakirodalmat, hogy pozíciót szerezzen tanulmányának az elfogadott tudás birodalmában; 2. meg kell fogalmaznia problémáját vagy hipotézisét; 3. le kell írnia módszerét, elég részletesen ahhoz, hogy bármelyik önálló tudós alkalmazhassa ugyanezeket az eljárásokat, és megkaphassa ugyanezeket az eredményeket; 4. közölnie kell eredményeit; 5. értelmeznie kell ezeket az eredményeket és következtetéseket kell levonnia. Mint ahogy számítógépi modelleknél szokás, ismertetnie kell feltevéseit és közölnie kell adatforrásait.

Ha a modellező szakértő, dokumentációs kötelezettségei teljesen gyakorlatiak és pusztán a körülményektől függnék. Úgy kell dokumentálnia, ahogy a felhasználó érdekei megkívánják. A felhasználó érdekei attól függnék, hogy mit akar kezdeni a modellel, és hogy mennyire látja át a modellel dokumentáció nélkül. Ha a felhasználó aktívan részt vett a modellező folyamatban és érti a modellt, akkor igényeit remekül kielégítheti néhány összefoglalás és táblázat, amely a modell azon tulajdonságait részletezi, amelyekkel a leginkább tisztában kell lennie, és amelyeket minden valószínűség szerint el fog felejtteni. Ha a modell teljesen *ad hoc* volt, ha válaszolt egy kérdésre, és tovább nincs rá szükség, ha ez a válasz elhangzott, a modell gondos dokumentálása kész luxus. (Nehéz lenne helyeselni, hogy egy ember teljes évi munkáját fordítsák arra, hogy formálisan dokumentáljon egy modellt, ha a Világbankban azért hozták létre, hogy egyetlen speciális döntést megvilágítson, és azután eldobták.) Másrészt azonban, ha a modellt olyan eszköznek szánták, amelyet a tervezés során a

továbbiakban is használnak, a felhasználó érdeke megkövetelhet egy alapos dokumentációt. Ahhoz, hogy a modell mindig működésre kész állapotban legyen szükség lesz egy kézikönyvre épp úgy, mint ahogy számtalan tanulmány is kell majd, amely segít a modell output-jának értelmezésében és eredményei ismertetésében. Ha a felhasználó gyakran alkalmaz modelleket, hasznát láthatja az ilyen dokumentációnak, hiszen az egyik modell-tanulmányból nyert tudás átvihető a másikba.

Lehet, hogy a modellező közölni akar valamit, és célja valóraváltásában segítségére lesz a modell. Ebben az esetben dokumentációja lényegét tekintve propaganda, tehát úgy kell megírni, hogy meggyőző legyen. Rövidnek, átfogónak, világosnak és sodró erejűnek kell lennie. Figyelmet kell fordítani a megjelenésre. A módszertani tárgyalást technikai részletek nélkül a lehető leg-rövidebbre kell fogni. Csak a lényegét kell hangsúlyozni.

Végül pedig, a modellező lehet elméleti ember. A modellezők közül sokan disszertáns diákok vagy professzorok, akik a „publikálj-vagy-tűnj-el” világában élnek. Ha a modellező e két kategória valamelyikébe tartozik, úgy akarja elvégezni a dokumentációt, hogy az megfeleljen, ha nem is a tudományos, legalább az egyetemi normáknak. Dokumentációjának jellegét egyik vagy másik elméleti folyóirat formátuma vagy a minősítő bizottság szabja meg.

Egyetlen dokumentációs munka nem láthatja el az előbb említett valamennyi feladatot. A tudományos dokumentáció ritkán az, amire a felhasználónak saját használatra a leginkább szüksége van. Az aktivista dokumentáció nem igen felel meg a tudományos igényeknek vagy az egyetemi közösség kívánalmainak. Nehéz úgy megírni egy elméleti folyóiratba való cikket, hogy propaganda-értéke legyen, vagy megfeleljen a tudományos igényeknek. Ötféleképpen dokumentáljon hát a modellező, hogy valamennyi követelménynek eleget tegyen? Az olvasóra bízom a választ, de azzal a javaslatlaltal, hogy a döntést feltétlenül a kapcsolatteremtés fázisában kell meghozni. Ha a dokumentációs kötelezettségeket nem állapítják meg világosan, és a dokumentációs igényeket nem veszik számításba, a dokumentációból könnyen válik utólagos gond. Az ilyen utólag elhatározott dokumentáció pedig ritkán jó minőségű.

Amikor a dokumentáció stílusát kiválasztják, a következőket kell számításba venni:

1. A dokumentáció időigényes eljárás. Egy modellező tanulmány tájékoztató beszámolója plusz egy tudományos vagy egyetemi beszámoló elkészítésének eljárása megduplázhathatja a modellező kísérletre fordított időt és kiadásokat. Ha jó dokumentációt szeretnének kapni, a szerződésben időt és pénzt kell szánni rá.

2. Lehet, hogy a dokumentáció javít a modell minőségén. A modellezők így vagy úgy hajlamosak a felületességre. Számtalan gyöngé modell készül el, amelyet sohasem lepleznek le. Valószínűbb azonban, hogy a modellezők ügyelni fognak a hibáikra és kevésbé alkalmaznak majd technikailag jogosulatlan eljárásokat, ha munkájukat be kell mutatniuk és elérhetővé kell tenniük a bírálókat számára.

3. Jó néhány modellező nem ír valami jól. A nagyközönségnek szóló — akár rábeszélő — dokumentáció előkészítéséhez valószínűleg szükség lesz szerkesztői segítségre, sőt talán valakivel meg is kell íratni a dokumentációt. Ha szükség van egy, a nyilvánosságnak szóló beszámolóra, a szerződésben gondoskodni kell a megfelelő anyagi alapokról, amelyek megszerzik a megfelelő képességű írókat.

4. A modellezés könnyen válhat a nem szakmabeli világ megtévesztésének és összezavarásának eszközévé. Ha a döntéshozatalban a modelleket eszközként használják fel, és dokumentálásukat nem úgy végzik, hogy a nyilvánosság is megérthesse őket, szellemüket tekintve technokratikusak és antidemokratikusak.

5. Mindenféle dokumentáció fontos mechanizmus, amely lehetővé teszi, hogy a modell-eredményezte tudást elválasszák a modellezőtől. Egy modellt, amelyet nem dokumentáltak, inkább csak a modellezőnek, mint a kívüllátnak nyújt ismereteket a rendszerről. Ha a modell jól van dokumentálva, a modell-szülte tudást tovább lehet adni a szakmai közösségnek egy tudományos vagy egyetemi dokumentáció segítségével, a nyilvánosságnak pedig köznyelven írt dokumentumokon keresztül.

6. A számítógépi modellezés fiatal tudományág és a tapasztalatok nyilván-tartása még szegényes. Ha az a cél, hogy a modellezés javuljon és fejlődjön, az egyik kutatásból származó tudást át kell adni a többi tanulmánynak. Az is fontos, hogy a modelleket mind a modellező szakmából, mind a nem szakmai világból származó kritikának vessék alá (a nem szakmai világnak különösen azok a képviselői kritizáljanak, akik jól ismerik a modellező által szimulált világ tényleges helyzetét). Az ilyen kritika megköveteli, hogy a modellekhez járuljon mind matematikai, mind verbális dokumentáció.

7. Ha a modell jelentéktelen, vagy ha dokumentációja különösen zavaros, nem valószínű, hogy bárki is nagy figyelmet fordít majd a dokumentációra. Az általános modelleknek és vitatott tárggyal foglalkozó modelleknek ezért nagyobb szükségük van a dokumentációra, mint az eset-specifikus modelleknek, amelyeket senkit sem érdeklő kérdések megválaszolására szántak. Nehezen érthető dokumentációt valószínűleg nem érdemes kinyomtatni.

8. Keveset tudunk a modellek adminisztrálásáról és a modellezés folyamatáról. Az adminisztratív aspektusok dokumentációja gyümölcsöző lehet a vezetési módszerek fejlődése szempontjából.

VIII. Kivitelezés

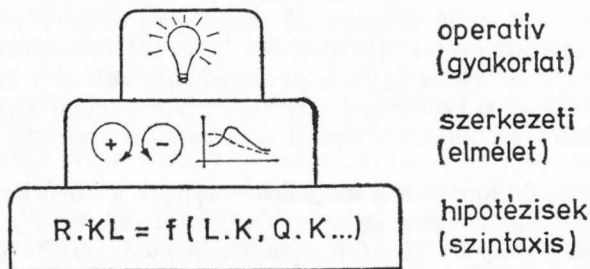
Modellező Utópiában a felhasználó, akit mélyen elkeserít egy Probléma, sírva fordul a modellezőhöz: „Ó, jaj, mi lesz? Mit tehetek, hogy elkerüljem ezt a borzalmas véget?” A modellező előlép, elvégez egy analízist és átnyújtja a Megoldást. A Megoldást a felhasználó elfogadja és alkalmazásba veszi. (A Megoldás persze tökéletesen beválik, a felhasználó pedig örökre hálás marad.)

Ezzel szemben, egy cinikus lélek a következőképpen jellemezheti a valóságos helyzetet. A modellező és valamilyen finanszírozási forrás összetetallokozik, és megegyeznek egy modell felépítésében. A modell célját „XYZ megértésének szolgáltatásában” és „a PQ módszertan hasznosságának megvizsgálásában” határozzák meg. A modellező megkapja a szükséges anyagiakat, és nekilát, hogy megépítse modelljét. Két év múlva mesterművével együtt tér vissza. A finanszírozó nem tudja használni, de ismeri az XYZ politikáját meghatározó CDE ügynökség BS főosztályának vezetőjét. Megszerveznek egy találkozót. A Főosztályvezető udvariasan figyel és átnézi a modell outputját, de nem rendeli vissza a modellezőt és további információkat sem kér. A modellező érdeklődése már valami másra irányul, a modell pedig teljesen letűnik a színről.

Mi történik a Modellező Utópiában, ami viszont nem játszódik le a valódi életben? Lényegét tekintve az, hogy míg Utópiában a modell-létrehozta

gondolatok átadása simán és automatikusan megy végbe, a valóságban a modellező és a felhasználó elképzelései között olyan mély szakadék tátong, hogy az átadás alig vagy egyáltalán nem megy végbe.

Az átadás vagy át-nem-adás kérdésének megközelítésére megszerkeszttem az információ-átadás egy egyszerű verbális modelljét. Ebben a modellben a „konklúzió” vagy „következtetés” szót tágabb értelemben használom, a modellbe beépített, vagy általa létrehozott bármilyen információ jelzésére.



Ábra 3.

Ábrázoljuk a konklúziókat úgy, mint két párhuzamos hierarchiát — a modellező konklúzióit és a felhasználó konklúzióit. Mindkettőnek legalsó szintjén töredékes hipotézisek foglalnak helyet, amelyek az egyik változót a másikhoz kapcsolják. A második szint szerkezeti konklúziókból áll — olyanokból, amelyek a rendszer viselkedését a visszacsatolási struktúrákhoz és ez utóbbiak idő jellemzőihez kapcsolják.² A legfelsőbb szintet operatív következtetések alkotják, olyan következtetések, amelyek a modell szerkezetét a való világ szerkezetéhez kapcsolják, és a rendszerről alkotott intuíciónkat irányító szerkezeti östípusokká válnak.

A modellezés első gondja, amellyel idáig kacérkodtunk az, hogyan lehet megépíteni és megfelelően tolmácsolni a helyénvaló modellt. Feltételezve, hogy ez sikerült, és a modellből potenciálisan értékes következtetéseket vontak le, új gond merül fel: hogyan lehet a következtetéseket alkalmazni. A modellezésnek nincs gyakorlati jelentősége, hacsak a felhasználó részéről nem vezet az operatív következtetések tökéletesítéséhez. A modellező következtetései teljesen haszontalanok, hacsak nem jutnak el operatív következtetések formájában a felhasználóhoz.

Operativitását tekintve a következtetések minden egyes szintje az eggyel alatta levő szinten nyugszik, és a fölötte levő szintből nyer kohéziót. A szerkezeti következtetések értelmetlenek, ha nem értik meg a feltételezett kapcsolatokat, amelyeken alapulnak, és üresek, hacsak nem érnek operatív következtetésekké. Egy okozati kapcsolatokat ábrázoló huroknak nincs létjogosultsága, hacsak az a személy, aki vizsgálja, meg nem érti a hurok minden egyes

² A más modell-típusok által levont másodlagos következtetések nagyon különböznek azoktól, amelyeket a rendszer-dinamika művelői vonnak le. Vélhetően, hogy a lineáris programozók a viselkedést a korlátozó feltételek által leírt halmazzal hozzák összefüggésbe, vagy azzal, hogyan hat egymásra a célfüggvény és az aktivitások halmaza. Az ökonómák viszont inkább azzal magyarázzák majd a viselkedést, hogy a közgazdasági elméletben található kulcs-kapcsolatok természetét vizsgálják.

láncszemének való-világi jelentőségét. Ha a szerkezeti megértésnek nem sikerül operatív válnia, nem tudja megszerezni azt a kohéziót, amit csak az elmélet és gyakorlat egyesítése adhat. Ugyanígy, az operatív következtetések a szerkezet megértése nélkül pusztán „fekete dobozos” intuíciók maradnak.

A modellező rendszerint az előző modellezés tapasztalataiból származó operatív és szerkezeti következtetések maradékával kezd neki az új modellnek. Ezek a maradékok segítik a modell hipotézisei szintaxisának összegyűjtésében. Majd a feltételezések szintaxisát formalizálja, hogy új szerkezeti és operatív következtetéseket vonjon le. Nehézségek rendszerint akkor támadnak a modellező számára, ha a hierarchia egy alsóbb szintje túlnő a fölötte levő szinten. Legtöbbször a hipotézisek az egymással összefüggő változók hatalmas gubancává válnak, mielőtt a szerkezeti következtetések odáig fejlődnének, hogy megadják a szintaxis kohéziót — innét származik a krónikus „óriás modell” probléma.

Azok a nehézségek, amelyek a modellezőt sújtják a következtetések hierarchiáján felfelé haladás közben, egészen jelentéktelenek azokhoz képest, amelyek a felhasználót vagy bárki mást sújtanak. A modellező fokozatosan kiépíti következtetéseinek vázát modellezési tudásának magja köré. Konceptió-alkotás és modellszerkesztés közben minden egyes szintaktikus hipotézisét fontolóra veszi. Szerkezeti következtetéseit folyamatosan vonja le, és a modell hipotéziseinek közvetlen ismeretére építi.

A felhasználó, ezzel szemben, fejest ugrik az egészbe. Még ha van is valamilyen elképzelése a modellezésről, valószínűleg nem esik egybe a modellezőével. Így azután egy csomó dolgot, amit a modellező magától értetődőnek tart, a Felhasználó nem is vesz észre. Ritkán áll rendelkezésére a szükséges idő, hogy befogadja a szintaxis szint következtetéseit, mielőtt a modellező elárasztaná az okozati kapcsolatok diagramjának részleteivel és elkezdené magyarázni szerkezeti-viselkedési kapcsolatait. Ha megpróbál hátrálni egy kicsit, hogy szemügyre vegye a modell hipotéziseit — ami az adott pillanatban a legtermészetesebb reakciója lenne — a modellező valószínűleg azzal a megjegyzéssel vágja el a további érdeklődését, hogy a szerkezet határozza meg a viselkedést. Végül a felhasználó abbahagyja a kérdezősködést.

Ed Roberts és más szerzők (Roberts 1972) ajánlottak megoldásokat arra, hogyan lehet elkerülni az efféle buktatókat. A legtöbb javasolt stratégia arra összpontosítja a figyelmet, hogy: 1. vonják be a felhasználót a koncepció kidolgozásába, 2. legyen szorosabb és gyakoribb a modellező és a felhasználó kapcsolata a modellezési folyamat alatt mindvégig, 3. kezdjék egészen egyszerűen, 4. és vegyék be a felhasználó hipotéziseit a modell szerkezetébe. Általában, az ilyen eljárások megoldják, hogy mind a modellező, mind a felhasználó következtetés-szerkezetei szinkronban fejlődhessenek a modellezés minden egyes fázisában.

Egy másik stratégia szerint, amely jobban illik az olyan szituációhoz, amelyben nem lehetséges szoros kapcsolat a felhasználóval (különösen akkor, ha a felhasználó maga a nagy nyilvánosság), a modelltől levezetett strukturális és működési következtetéseket teljesen át kell alakítani verbális formába, és azután hagyni kell, hogy most már a gondolati modellek szabályai szerint ez utóbbi versenyezni kezdjen más gondolati modellekkel. (Ld. pl. Randers 1976; Budzik 1975. D. H. Meadows is ezt a stratégiát tekintette alkalmazhatónak „A növekedés határai” című munkájában.) Szerencsés esetben ennek a stratégiának a végterméke egy tanulmány, mint például Garret Hardin „A nép

tragédiája” vagy Malthus demográfiai tanulmánya: érthető magyarázat arról, hogyan működik a hipotetikus rendszer, mennyiben hasonlít a való világra, és milyen tényezők befolyásolják a rendszer viselkedését.

*

Mindezidáig úgy tettünk, mintha a következtetések hierarchiája nem lenne más, mint semleges, színtelen információ-darabkák felvonulása, amire az emberek érzelmek nélkül reagálnak. Ha ez lenne a helyzet, a modell adminisztrálása tisztán technikai kérdés lenne. Valójában azonban a rendszer-dinamikai tanulmányok ritkán vezetnek semleges következtetésekhez. Mint egy korábbi dolgozat már kimutatta (D. H. Meadows 1976), ez a modelltípus hajlamossá tesz bennünket veszélyes, tekintélyromboló, radikális következtetésekre. Hajlunk rá, hogy megmondjuk az embereknek, korábbi tetteik vagy teljesen hatástalanok voltak, vagy éppenséggel súlyosbították a helyzetet. Gyakran ragaszkodunk hozzá, hogy drasztikus cselekvés nélkül (azaz, strukturális változás nélkül) nem érhető el, hogy a rendszer a kívánt módon viselkedjék. Az ilyen viselkedés könnyen vált ki érzelmi reakciókat.

Az, hogy következtetéseink ritkán semlegesek, még egy terhet ró a következtetés-átadó folyamatra. Ez a teher csökkenne, ha a modellező kutatás megkezdése előtt a modellező és a felhasználó össze vitát folytatna a veszélyről. A modellezőnek meg kellene győződnie arról, hogy a felhasználó megérti a rendszer-dinamika sajátosságait, és saját fogalmi rendszerét hajlandó kitenni nagyobb koncepcionális megrázkódtatásoknak. Ha a legkisebb kétség is felmerül, hogy a felhasználó nincs felkészülve ilyen fajta modellezői következtetések befogadására, a modellezőnek új felhasználó után kell néznie, vagy a felhasználónak kell új modellezőt keresnie. Ezután a modellezőnek le kell szállnia a magas lóról, és óvakodnia kell a Modellező Utópia Problémamegoldójának pózától. Nem szabad feltételeznie, hogy modelljét el fogják fogadni. Ha arra törekszik, hogy saját modelljét alkalmazva lássa, valóságos emberekkel, valóságos intézményekkel és valóságos tehetetlenséggel kell foglalkoznia. Nem szabad elfelejtenie, hogy neki könnyű és biztonságos változást javasolnia, a felhasználók számára azonban nehéz és kockázatos dolog lesz végrehajtani a változást — röviden, hogy a felhasználónak rendszerint alapos oka van rá, hogy szembeszálljon a modell következtetéseivel.

(Beérkezett: 1976. november 25.)

IRODALOM

1. BUDZIK, Ph. M.—MEADOWS, D. H.: *The future of the Vermont dairy farm*. Hanover, N. H., 1975. Dartmouth College, System Dynamics Group. DSD No. 50.
2. FORRESTER, J. W.: *Industrial dynamics*. Cambridge, Mass., 1961. M.I.T. Press.
3. HAMMONDS, J. S. III.: *Do's and don'ts of computer models for planning*. Harvard Business Review, 1974. 52. köt.
4. KEPLER, J.: *Astronomia nova*. Idézi: KOESTLER, A.: *The sleepwalker*. Middlesex, Eng. 1959. Penguin Books.
5. MANETSCH, T. J.: *Basic systems theory and concepts underlying construction of the Korean simulation model with implications for further work*. Michigan State University, 1974. Dept. of Agricultural Economics.
6. MASS, N. J.—SENGE, P.: *Alternative tests for the selection of model variables*. Cambridge, Mass., 1976. M.I.T. Sloan School tanulmány, No. 828—876.

7. MYRDAL, G.: *The beam in our eyes. Asian drama*: 1. kötet. New York, 1968. Vintage Books.
8. ORWELL, G.: 1984. New York, 1949. Harcourt Brace, Inc. Függelék, p. 227.
9. ORWELL, G.: *Politics in the English language*. in: *Shooting an elephant*. New York, 1950. Harcourt Brace, Inc.
10. RANDERS, J.: *Conceptualizing dynamic models of social systems and lessons from a study of social change*. Cambridge, Mass., 1973. Sloan School, M.I.T., kiadatlan disszertáció.
11. RANDERS, J.: *A system dynamics study of the transition from ample to scarce wood resources*. Megjelenés alatt.
12. ROBERTS, E. B.: *Strategies for effective implementation of complex corporate models*. Cambridge, Mass., 1972. Pugh Roberts, Inc.
13. SENGE, P. M.: *Testing estimation techniques for social models*. Cambridge, Mass., 1975. M.I.T., System Dynamics Group tanulmány, No. D-2199-4.
14. WEIL, H. B.: *Achieving implemented results from system dynamics projects: the evolution of an approach*. Megjelenés alatt.

MANAGERIAL SKETCHES OF THE STEPS OF MODELING

Observations of modeling efforts suggest that many models fail for managerial reasons. This paper is based on the hypothesis that 1. managerial failures occur because various facets of the modeling process are inherently hard to manage, and 2. that deliberate management can reduce or eliminate many common problems. The hypothesis is pursued by breaking the modeling procedure into a series of steps, sketching what typically does but should not happen at each of them, and putting forth some thoughts about what can be done to avoid the normal pitfalls. Particular attention is paid to mundane variables such as time allocations and finances and to attitudes and emotional considerations. In general, when a modeling study is not deliberately managed, the construction phase preempts the bulk of time and resources to the detriment of planning, conceptualization, testing, documentation, and client-modeler interaction. This phenomenon appears to be caused, in part, by an over-emphasis on the „harder”, more technical work of construction by difficulty justifying work that produces no direct, tangible product and by mental resistance to testing.

ЗАМЕЧАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ

Наблюдения, касающиеся работы по моделированию показывают, что многие модели оказываются безрезультатными в силу организационных причин. Данная работа исходит из предпосылки того, что, во-первых, организационные недостатки связаны с тем что они сопутствуют самому процессу моделирования и ими трудно управлять и, во-вторых, тщательная организация может привести к сокращению и, даже, к искоренению наиболее часто возникающих проблем. В порядке подтверждения этой предпосылки автор подразделяет процесс моделирования на целый ряд шагов, в которых указывается, что чаще всего случается, хотя и не должно случаться, при совершении каждого шага и приводит некоторые свои соображения относительно того, каким образом можно избежать эти препятствия. Особое внимание он уделяет денежным вопросам, распределению времени и расходам, а также формам поведения и эмоциональным связям. Вообще, можно сказать, что если работа по моделированию не будет достаточно тщательно подготовлена, то на сам процесс составления будет обращена большая часть времени и денег в ущерб планированию, разработки концепции, ее проверки, документирования и самой связи потребителем и составителем модели. Очевидно, что это явление, отчасти, связано с тем, что в большей мере подчеркивается более «жесткая», скорее техническая сторона работы и что утверждаются такие работы, которые не дают непосредственных, реализуемых результатов и что уже и в мыслях протестуют против проверки.

KÖNYVEKRŐL

RÓZSA, P.: *Lineáris algebra és alkalmazásai*. Budapest, 1976.* Műszaki Könyvkiadó. 685 p.

KREKÓ, B.: *Lineáris algebra*. Budapest, 1976. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 573 p.

A lineáris algebra minden bizonnyal olyan területe a matematikának, amelynek a jelentőségét nem kell reklámozni. Ezt a tudományágat, mely a szemléletünkhöz annyira közelálló módon tükrözi a valóságot, szakemberek százai ismerik és alkalmazzák a műszaki és gazdasági élet, valamint a természettudományok legkülönbözőbb területein. A lineáris algebra szakirodalma közismerten óriási, és az érdeklődők számos kiváló kézikönyv közül válogathattak eddig is, elegendő például F. R. Gantmacher, E. Bodevig, G. Hadley vagy R. Zuhrmühl könyvére utalnunk. A magyar nyelvű matematikai szakirodalom azonban a legutóbbi időkig nem mutathatott fel olyan kézikönyvet, amely a lineáris algebra elemeiből kiindulva, elvezet annak legkorszerűbb eredményeihez, s ugyanakkor az alkalmazások széles skálájával is megismerteti az olvasót. Az alábbiakban ismertetett két mű ezt a hiányt pótolja.

Róza Pál „Lineáris algebra és alkalmazásai” című könyve három részre tagolódik: az első a lineáris algebra elméletének a kifejtését tartalmazza (1–4. fejezet), a másodikat speciális mátrixelméleti problémák ismertetésének szenteli a szerző (5–7. fejezet), a harmadik részben találhatók a különféle alkalmazások, valamint a numerikus módszerek (8–11. fejezet). Az egyes fejezetek a következő témaköröket foglalják magukban.

Az 1. fejezet tárgyalja a komplex elemű mátrixok és vektorok értelmezését, a mátrixmatematika műveleteit, a diád, a rang és az inverz mátrix fogalmát, a spe-

ciális tulajdonságú mátrixokat, foglalkozik továbbá a diadikus felbontásnak és a lineáris egyenletrendszerek megoldásának alapelveivel. A 2. fejezetben leírja a véges dimenziós euklideszi terek fogalmát, a bázisokat, bilineáris és kvadratikus alakokat, a lineáris transzformációkat. Foglalkozik a sajátértékfeladattal, az egyszerű struktúrájú (azaz hasonlósági transzformációval diagonalizálható) mátrixokkal, továbbá az unitér és normál transzformációkkal, az önadjungált transzformációk sajátértékeinek szélsőérték tulajdonságai-val. A 3. fejezet tárgya az egyszerű struktúrájú mátrixok spektrál-előállítás, a Cayley–Hamilton-tétel, a minimálpolinom és az egyszerű struktúrájú mátrixok hatványsorai. A 4. fejezetben rátér a nem egyszerű struktúrájú mátrixok hatványsoraira, tárgyalja a Jordan-alakot és az elemi osztók elméletét.

Az 5. fejezetben a hipermátrixokkal kapcsolatos problémákkal, a 6.-ban az $AX - XB = 0$ és $AX - XB = F$ alakú mátrixegyenletek megoldásával, a 7.-ben az $A + \lambda B$ alakú mátrixseregekre, valamint az általánosított sajátértékfeladatokra vonatkozó eredményekkel foglalkozik.

A 8. fejezetben tárgyalja a lineáris algebra alkalmazását a differenciálegyenletek elméletében, vizsgálja a közönséges elsőrendű lineáris, valamint a másodrendű lineáris, valamint a másodrendű lineáris, konstans együtthatós, továbbá n -rendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenleteket, a differenciálegyenleteket, ezek alkalmazását, a parciális differenciálegyenletek megoldására. Ismerteti a Ljapunov-féle stabilitás elmélet alapjait. A 9. fejezet a nemnegatív elemű mátrixok elméletével, a Frobenius és Perron tétellel, a sztochasztikus mátrixokkal, a Markov láncokkal, határvalószínűségekkel és az ergodicitással foglalkozik. A 10. fejezetben áttekinti a lineáris programozást, a 11.-ben foglalkozik a lineáris egyenletrendszerek

* Az 1. kiadás 1974-ben jelent meg.

és sajátérték-feladatok közelítő megoldásával.

A könyv érdemeinek méltatása előtt célszerű vázlatosan áttekinteni *Krekó Béla* „Lineáris algebra”-jának tartalmi felépítését, mert ennek alapján össze lehet hasonlítani a két munka tárgyalásmódját. Ez a könyv 14 fejezetre tagolódik.

Az 1. fejezet foglalkozik a valós elemű mátrixok és vektorok értelmezésével, a speciális mátrixokkal (szimmetrikus és ortogonális, továbbá normális mátrixokkal, projektorokkal stb.), a gráfelméleti alkalmazásokkal. A 2. fejezet tárgyalja a lineáris terek fogalmát, a lineáris függetlenséget, a bázisokat, a mátrixok rangját, az elemi bázistranszformációt. A 3. fejezet rátér a lineáris egyenletrendszerek megoldásának alapelveire, az inverz mátrix fogalmára, az inverz szorzatalakjára, a hasonlósági transzformációra. A 4. fejezet a közgazdasági alkalmazásokat tárgyalja, például a költségelemzés, a termelés programozás, az ágazati kapcsolatok mérlege területén.

Az 5. fejezet tárgyalja a mátrixok rangjának csökkenését hatványozás esetén, továbbá a nilpotens mátrixok *Jordán*-féle normálalakját. A 6. fejezet az euklideszi tér fogalmával, konvex halmazokkal, poliéderikus halmazokkal, szeparáló hipersíkokkal, továbbá a legkisebb négyzetek módszerével és a *Moore*–*Penrosa*-féle általánosított inverz mátrix fogalmával foglalkozik. A 7. fejezet a lineáris egyenlőtlenség-rendszerek megoldási halmazának legfontosabb tulajdonságait, az extrémális irányokat és pontokat tárgyalja, továbbá ismerteti a teljes leírás módszerét és a szimplex módszert. A 8. fejezet a bilineáris és kvadratikus alakokkal, a *Sylvester*-féle tétellel, a 9. fejezet a komplex euklideszi térrel foglalkozik. A 10. fejezet bemutatja a lineáris transzformáció sajátértékeit, az invariáns altérket, a *Jordán*-féle normálalakot és az általánosított sajátérték feladatát. A 11. fejezet tárgyalja a normális transzformációk spektrális előállítását, a nemnegatív elemű mátrixok legfontosabb tulajdonságait, a 12. fejezet pedig a mátrixsorozatok és hatványsorok konvergenciáját, a mátrixegyenleteket. A 13. fejezet foglalkozik a numerikus módszerekkel, a sajátérték feladatok és lineáris egyenletrendszerek közelítő megoldásával iteráció útján (*Jacobi* és *Gauss*-féle iteráció, a konjugált gradiensek módszere stb.). Végül a 14. fejezet tárgyalja a determinánsokat, a kovariancia és korrelációs mátrixokat, a faktoranalízis problémáit, a speciális struktúrákhoz tartozó elemekből álló mátrixokat.

A két könyv felépítése és a tárgyalt témák köre tehát némileg eltér egymástól.

Mind *Rózsa Pál*, mind pedig *Krekó Béla* könyvével kapcsolatban meg kell állapítani, hogy a szerzők jól hasznosították az egyetemi oktatás során szerzett sokéves didaktikai tapasztalataikat. A könyvek felépítése a nagy terjedelem ellenére világos, jól áttekinthető, a megértést számos numerikus példa, ábra és blokk-diagram mozdítja elő. Mindkét könyvet haszonnal forgathatják azok az olvasók is, akik nem rendelkeznek mélyebb matematikai előismeretekkel. A könyvek módszertani valamint célkitűzésből adódó sajátosságaival kapcsolatban a következőket célszerű kiemelni.

1. *Rózsa Pál* a fogalmak kiépítésében döntő mértékben támaszkodik a determinánselméletre így például adjungált aldeterminánsok segítségével definiálja az inverz mátrixot, és a sajátértékfeladat vizsgálatát is a determinánselméletre építi – a minimálpolinom értelmezése $\lambda E - A$ adjungált aldeterminánsainak segítségével, *Cayley*–*Hamilton*-tétel bizonyítása stb. – ami lényegében megfelel a klasszikus tárgyalásmódnak. Ezzel szemben *Krekó Béla* a determinánsmentes tárgyalásmódot részesíti előnyben, és az A mátrix minimálpolinomját úgy értelmezi, mint azt az egységnyi főegyütthatós, minimális fokszámú $m(\lambda)$ polinomot, amelyre $m(A) = 0$. Ebben a felépítésben a sajátértékek az $m(\lambda) = 0$ egyenlet gyökei, és kimutatható, hogy minden λ_i sajátérték esetén a $\lambda_i E - A$ mátrix szinguláris, tehát létezik olyan x_i sajátvektor, amelyre $Ax_i = \lambda_i x_i$. Természetesen mind a kétféle tárgyalásmódnak megvannak a maga előnyei, az azonban nem lehet vitás, hogy lehetőség szerint mind a kettővel érdemes megismerkedni.

2. A mátrixok hatványsorainak a vizsgálatánál *Rózsa Pál* az alábbi rendkívül elegáns utat választotta. Ha A egyszerű struktúrájú, helyettesítsük $s_N(A)$ -t, a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ sor N -edik részletösszegét $R_N(A)$ -val, $s_N(A)$ -nak az A minimálpolinomjára vonatkozó osztási maradékával. $R_N(A)$ a

$$\sum_{p=1}^l s_N(\lambda_p) L_p(A)$$

alakba írható, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ az A mátrix különböző sajátértékeit, $L_1, \dots, L_l$ pedig a sajátértékekhez mint alappontokhoz tartozó *Lagrange*-féle interpolációs alapolinomokat jelöli $L_p(\lambda_p) = 1$, $L_p(\lambda_q) = 0$, ha $p \neq q$. A konvergencia ilyen módon tehát numerikus sorok konvergenciájának kérdésére redukálódik. Lényegében analóg

eredmény adódik abban az esetben, amikor A nem egyszerű struktúrájú; $R_N(A)$ előállítása ekkor természetesen bonyolultabb. *Krekó Béla* könyvében a *Jordan*-féle normál-alakra való hivatkozással kapjuk meg a választ a hatványsorok konvergenciájának kérdésére: ha $J = S^{-1}AS$ jelöli az A mátrix *Jordan*-féle normál-alakját, akkor $S_N(A) = S \cdot s_N(J) \cdot S^{-1}$. A konvergenciát végeredményben ezen az úton is numerikus sorok konvergenciájára lehet visszavezetni, ez a módszer azonban erősebb eszközöket használ, mint az előző, ti. a *Jordan*-féle normál-alakot és az S transzformációs mátrixot.

3. Az $Ax = b$ alakú, szabáságfokkal rendelkező lineáris egyenletrendszer megoldásával kapcsolatban mind a két könyvben találunk olyan eljárást, amely az A mátrix $A = A_1 A_2$ alakú bázisfaktorizációján alapul (ez annyit jelent, hogy A_1 -nek az oszlopai, A_2 -nek pedig a sorai függetlenek). A bázisfaktorizáció eszköze *Rózsa Pálnál* a *diádikus felbontás*, *Krekó Bélánál* pedig a *bázistranszformáció*. Az előbbi valamely adott $A = A^{(0)}$ mátrixból kiindulva, alkalmasan generált diádoknak az aktuális mátrixból való levonásával jön létre az eljárás r lépésben az A mátrixnak r számú diád összegeként való előállítását szolgálhatja, ahol r az A rangját jelöli. Számítástechnikailag ezzel gyakorlatilag egyenértékű a bázistranszformáció módszere, melyet a szimplex-algoritmussal való kapcsolata révén közismertnek tekinthetünk. A bázistranszformáció alkalmazására *Krekó Béla* könyvében további példákat is láthatunk: az inverz mátrix szorzat-alakjának előállítása, továbbá az n -edrendű determináns értelmezése egy igen szellemes, bár a hagyományostól nagyon eltérő módon stb.

4. Nagymértékben eltér egymástól a két könyv az alkalmazásokra bemutatott példák tekintetében, bár ez bizonyos vonatkozásban magától értetődő. *Rózsa Pál* könyvének a differenciálegyenletekkel kapcsolatos alkalmazásokat tárgyaló 8. fejezetéről kis túlzással azt lehetne mondani, hogy „könyv a könyvben”, és a nemnegatív elemű valamint a sztochasztikus mátrixokról is teljes képet kap az olvasó a könyv 9. fejezetében. A 10. fejezet, amely a lineáris programozásról nyújt áttekintést, elsősorban a tárgyalásmód újszerűsége révén tarthat igényt az érdeklődésre. *Krekó Béla* „Lineáris algebra”-jában fizikai és műszaki alkalmazásokat nem találunk, és valamivel kisebb súllyal szerepelnek a nemnegatív elemű mátrixok is, mint *Rózsa Pálnál*. *Krekó Béla* könyvében a hangsúly a közvetlen közgazdasági,

valamint az ezzel rokon alkalmazásokon van — költségelemzés, ágazati kapcsolatok mérlege, statisztikai alkalmazások stb. —, s ez nem csupán azokra a fejezetekre és alfejezetekre nyomja rá a bélyegét, amelyekben a szerző konkrét példákat mutat be, hanem a könyvek olyan elméleti részeire is, amelyek további gazdaságmatematikai tanulmányok alapjául szolgálnak, mint például a konvex halmazok tulajdonságaival és a szeparáló hipersíkokkal foglalkozó alfejezetek.

A példák felsorolását még lehetne folytatni, annyit azonban mindenestre le kell szögezni, hogy a két könyv igen sok tekintetben szerencsésen egészíti ki egymást. Gazdasági szakemberek számára természetesen elsősorban *Krekó Béla* „Lineáris algebra”-ját, műszaki és természettudományos érdeklődésű olvasók számára pedig *Rózsa Pál* könyvét lehet ajánlani. Tekintettel azonban arra, hogy a két munka tartalma és tárgyalásmódja némileg eltér egymástól, közgazdászok számára hasznos lehet *Krekó Béla* könyve mellett *Rózsa Pál* munkáját is megismerni.

MIHÁLYFFY LÁSZLÓ

NIKAIDO, H.: *Convex structures and economic theory*. New York—London, 1968. Academic Press. 405 p.

H. Nikaido neve nem ismeretlen a magyar matematikus közgazdászok előtt. A szerző korunk egyik legaktívabb, leg-sokoldalúbb matematikus közgazdásza. Figyelemre méltó eredményei vannak a játékelmélet, az általános egyensúlyelmélet, a többszektoros növekedési modellek stb. területén.

„Convex Structures and Economic Theory” c. könyvében egyedülálló dologra vállalkozik. A matematikai közgazdaságtan háború utáni fejlődésére az a legjellemzőbb, hogy a figyelem — a klasszikus analízis eszközeinek alkalmazása helyett — egyre inkább bizonyos modernebb eszközök, elsősorban a topológia néhány ága felé fordult. A szerző a matematikai közgazdaságtanban alkalmazott topológikus módszerekbe és ezek szerteágazó alkalmazásaiba kíván alapos bevezetést nyújtani — bízást mondhajuk — a legnagyobb sikerrel. *H. Nikaido* művével azt kívánja megmutatni, hogy a matematikai közgazdaságtan modern ágai egységesen tárgyalhatók a véges dimenziós euklideszi tér konvex halmazai segítségével. A mű centrális fogalma a *konvexitás matematikai fogalma*. A mű közgazdasági ihletése — közvetkeztesen *egyensúlyelméleti*.

A mű a bevezetésen kívül hét fejezetet tartalmaz. Az első fejezet a konvex halmazok és függvények matematikai elméletét tartalmazza. Ezt a fejezetet matematikusok is nagy haszonnal forgathatják. Miután a szerző tárgyalta a konvex halmazok legáltalánosabb algebrai és topológikus tulajdonságait két alapvető matematikai eredményt vesz bonckés alá, a szeparációs hipersíkok tételét és a *Brouwer*-féle fixpont tételt.

A könyvben több alternatív bizonyítást találunk a szeparációs tételre. A tétel birtokában a szerző végigveszi a konvex kónuszokról, lineáris egyenlőtlenségekről, konvex poliéderekről szóló összes fontos tételt. Így pl. a könyvben található a *Stiemke*, *Tucker*, *Farkas*–*Minkowski*-féle tételek, *Krein*–*Milman*-tétel speciális esete, mely szerint minden konvex kompakt halmaz előállítható az extrémális pontjainak konvex lineáris kombinációjaként. Nagy figyelmet szentel a konvex függvények elméletének. Tárgyalja pl. a klaszikus analízisből ismert tételeket, részletesen foglalkozik a feltételes szélsőérték problémával. Bebizonyítja a *Kuhn*–*Tucker*-féle nyeregpon tételt.

A véges dimenziós euklideszi terek konvex halmazairól szóló tételek közül a legfontosabb, legmélyebb a *Brouwer*-féle fixpont tétel, mely azt mondja ki, hogy egy konvex kompakt halmaznak önmagába való folytonos leképezésének mindig van fixpontja. A tételt az irodalomban legelterjedtebb úton: a (szimplexek rész-szimplex – felbontására vonatkozó) *Sperner* lemma segítségével bizonyítja. A tétel rendkívül bonyolult és nehéz bizonyítását pontosan, körültekintően végzi el. A *Brouwer*-tételt közvetlenül alkalmazni a közgazdasági elméletben gyakran nem lehet. Tárgyalja két általánosítását a *Kakutani*-féle fixpont tételt, amelynek az ötödik fejezetben az egyensúly létezésének bizonyításakor van kulcsszerepe. A *Kakutani*-tétel felhasználásával bizonyítja a *Neumann*-féle fixpont tételt.

A matematikai eredményeket tartalmazó fejezetet a differenciálható leképezésekről szóló rész zárja. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie a leképezés *Jakobi* mátrixának, hogy a leképezés lokálisan egy-egy értelmű legyen? A szakasz legfontosabb eredménye az implicit függvényekről szóló közismert tétel.

A könyv második fejezete a többszektoros lineáris modellekről szóló rész. Ebben a szakaszban részletesen tárgyalja a *Leontief*-féle statikus input-output modellt, röviden ismerteti annak egy dinamikus változatát, a lineáris programozást és a

Neumann-féle növekedési modellt. A fejezet fő matematikai eredménye a nemnegatív elemű mátrixokra vonatkozó tételek kifejtése, így a nemnegatív elemű mátrixok domináns sajátértékének tulajdonságait vizsgáló *Peron*–*Frobenius*-tételéké, továbbá jelentős teret szentel a primitív-imprimitív, indekompozábilis mátrixok vizsgálatának. Ezek a tételek széles alkalmazást találnak nemcsak a matematikai közgazdaságtanban, hanem pl. a valószínűségszámításban is. A fenti tételek kifejtésével párhuzamosan megfogalmazza és vizsgálja a növekedés lineáris modelljeit.

A harmadik fejezetben az egyensúlyi növekedés problémáját vizsgálja meg nem lineáris rendszerekben. A gazdaság növekedését az $x(t+1) = H[x(t)]$ összefüggéssel ábrázolja, ahol H egy homogén függvény. A fejezetben lényegileg az előző részben elért eredmények homogén, de nem feltétlenül lineáris rendszerekre való általánosítását találjuk. Pl. a *Brouwer*-féle fixpont tétel segítségével tárgyalja a *Peron*–*Frobenius*-tételek megfelelő – nem lineáris – analóg tételeit. Megfogalmazza a fenti rendszerekre a primitívesség, imprimitívesség, indekompozabilitás fogalmát. A fejezet problémája a rendszer viselkedése az időben. Megvizsgálja, hogy milyen feltételek mellett tart a megoldás stationárius megoldáshoz.

A negyedik fejezetben a szerző két problémát vizsgál. Az erőforrások hatékony allokációjának kérdését és a gazdaság hatékony növekedésének problémáját. Először általánosan ismerteti a termelési lehetőségek halmazára vonatkozó legfontosabb matematikai – közgazdasági tételeket, majd ezeket dinamizálva, vizsgálja a növekedési pályák hatékonyságát, valamint azt, hogy milyen feltételek mellett lehet a leg-gazdaságosabbá tenni egy hatékony növekedési pályát. A maximális egyensúlyi növekedés problémáját is behatóan elemzi. A *Kakutani*-féle fixpont tétel segítségével bebizonyítja, hogy létezik maximális növekedési ütemet biztosító növekedési pálya. Ez a tétel a *Peron*–*Frobenius*-tételek mély általánosításának tekinthető. Több turnpike tételt fogalmaz meg és bizonyít.

A következő, ötödik fejezetet a versenyzői egyensúly statikus modelljének szenteli. Két kérdéskört vizsgál meg, az egyensúly létezését és jóléti közgazdasági implikációit. A modellben két fajta gazdasági személy van – fogyasztó és termelő. A termelőket az előző fejezethez hasonlóan a termelési lehetőségek halmazával ábrázolja, a fogyasztók viselkedését egy folytonos preferenciarendezéssel írja le. Részletesen vizsgálja a rendezés tulajdonságait.

Adott ár mellett ismert a fogyasztók kereslete és a termelők kínálata. A piac állapotát a kereslet és kínálat különbségével az ún. túlkereslet-leképezéssel írja le. Bebizonyítja, hogy létezik olyan árrendszert, ahol a kereslet összhangba kerül a kínálattal, megvalósul az egyensúly. Az egyensúly létezésének bizonyítását három modellben végzi el.

A fejezet második részében az egyensúly jóléti tulajdonságaival foglalkozik a szerző. Bebizonyítja, miszerint minden versenyzői egyensúly *Pareto*-i értelemben optimális erőforrás allokáció és minden *Pareto*-i értelemben optimális erőforrás allokáció egyúttal egyensúlyi megoldás lehet — feltéve, ha a jövedelmeket megfelelő módon átcsoportosítjuk. A szerző nagy figyelmet szentel az egyensúly egy játékelméleti átfogalmazásának, a gazdaság „magjának” (core). A gazdaság magja az *Edgeworth*-féle szerződési görbe általánosítása. Bebizonyítja, hogy ha a gazdasági személyek száma minden határon túl nő, a „mag” tart az egyensúlyi allokációk halmazához.

A hatodik fejezetben a szabadverseny gazdaság egyes dinamikus tulajdonságait vizsgálja. A fejezet fő problémája, hogy a kereslet-kínálat törvénye biztosítja-e azt, hogy a gazdaság egyensúlyi állapotba jut és így (lásd előző szakasz) *Pareto*-i értelemben optimális állapotot vesz fel. A kereslet-kínálat törvényét, a szabad piac mozgását a $\dot{p} = f[z(p)]$ differenciál egyenletrendszert ábrázolja, ahol f az árváltozás, $z(p)$ a túlkereslet függvény. Megfogalmazza a globális helyettesíthetőség (gross substitutability) fogalmát. Bebizonyítja, hogy amennyiben minden áru globálisan helyettesíthető, akkor az egyensúly globálisan stabil, a kereslet-kínálat törvénye a gazdaságot mindig egyensúlyi állapotba tereli.

Külön felhívjuk a figyelmet a könyv utolsó fejezetére. Az utolsó fejezet az irodalomban egyedülálló. A fejezet problémája a következő: Milyen feltételek mellett lesz egy függvény az értelmezési tartománya felett globálisan egy-egy értelmű? Több alternatív feltevés mellett sikerül a problémát kielégítően megoldani. A tételket több közgazdasági kérdés megoldására használja fel. Pl.: az egyensúly egyértelműsége, tényezőár kiegyenlítődés stb.

Nikaido könyve az utóbbi idők egyik legsikerültebb matematikai-közgazdasági monográfiája. Világos stílusa a szerző nagy didaktikai érzéke biztosított arra, hogy bárki sikerrel forgathatja — a megfelelő alapok bitrokában. Ám ne higgye senki, hogy H. *Nikaido* műve könnyű olvasmány. Igen elmélyült türelmes mun-

kát kíván. A mű kitűnő tankönyv és kitűnő kézikönyv. Sikerrel forgathatják mind közgazdászok, mind matematikusok.

MEDVEGYEV PÉTER

DUNCAN, O. D.: *Introduction to structural equation models*. (Bevezetés a strukturális egyenletek modelljeibe.) New York, 1975. Academic Press. 180 p.

A szerző, aki korábbi munkáiban város-szociológiai és regionális problémákkal, a társadalmi mobilitással stb. foglalkozott, az elmúlt években a társadalmi folyamatok ökonometriai jellegű modellezésének úttörőjévé vált. Először az amerikai társadalmi mobilitást elemezte az útelemzés módszerével, majd kiterjesztette ezt a technikát és a többi ökonometriai becslési módszert más társadalmi folyamatok vizsgálatára. Ebben a könyvben összefoglalja ezeknek a technikáknak módszertani alapelveit a szociológiai alkalmazások területén. Ezek az alapelvek sok vonatkozásban meg egyeznek az ökonometriai kutatások szokásos elveivel, de — a speciális alkalmazási terület és a szerző saját elgondolásai miatt — különböznek is azoktól.

Ilyen eltérő mutatkozik a strukturális egyenlet fogalmánál is. *Duncan* szerint valamely társadalmi folyamat modelljének strukturális formája az a megfogalmazás, amelyben az együtthatók a tényleges hatótényezők hatását tisztán, autonóman, keveredés nélkül fejezik ki. Másszóval a modell olyan specifikációja gondol, amelyben a valószínű okozati kapcsolatok egyértelműen kifejezésre jutnak. Tehát a modell felépítésénél — ellentétben a sokváltozós elemzési technikákkal, amikor hajlamosak vagyunk mindent változót egymással korrelációban lévőnek tekinteni, — egy nagyon határozottan megfogalmazott elméletből kell kiindulni, amely megmondja, hogy milyen okozati összefüggések nem fordulhatnak elő a változók között (ez még fontosabb, *Duncan* szerint, mint annak megállapítása, hogy milyenek fordulhatnak elő). Ha nem megfelelő elméleti alapon áll a modell, akkor előfordulhat, hogy a különböző tényleges okok hatása összekeveredve jelentkezik a megbecsült együtthatókban.

Néhány évvel ezelőtt elsősorban útmodelleket használtak a szociológiában. Az ilyen modellben szereplő ütegütthatók lényegében standardizált regressziós együtthatók. Vagyis az útmodellek számításánál az

$$y = b_{yx}x + u$$

típusú egyenleteket standard alakra hozzák olyan módon, hogy az y , x és u változókat saját szórásuk egységeiben fejezik ki és bevezetik a szórások hányadosait a következő módon:

$$\frac{y}{\sigma_y} = b_{yx} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \frac{x}{\sigma_x} + \frac{\sigma_u}{\sigma_y} \cdot \frac{u}{\sigma_u}$$

Ebből kapják meg az útegyütthatókat, amelyeknek alkalmazását *Sewall Wright*, a strukturális egyenletekből álló modellek felépítésének úttörője, javasolta évtizedekkel ezelőtt:

$$b_{yx} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = p_{yx}$$

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_y} = p_{yu}$$

Az útegyütthatók egyben kifejezik a hozzájuk tartozó változókhoz hozzájárulását a függő változó varianciájának megmagyarázásához, mert:

$$p_{yx}^2 + p_{yu}^2 = 1$$

ahol p_{yx}^2 az x változó által megmagyarázott rész és p_{yu}^2 a megmagyarázatlan rész.

Az útmodellek természetesen nemcsak egyetlen egyenletről, hanem több — legtöbbször rekurzív — egyenletről állnak és az egyes egyenletekben több magyarázó változó szerepel. Az útmodelleket az útra alakjában szokták szemléltetni, az ábrán a változókat összekötő nyilak fejezik ki az okozati kapcsolatok irányát és a nyilak mellé írt útegyütthatók fejezik ki a kapcsolatok fontosságát.

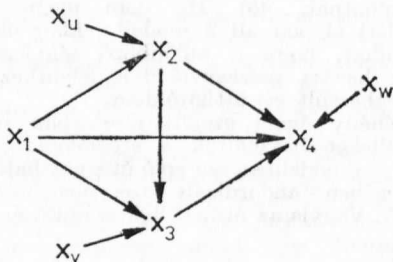
Egy tipikus négyváltozós három egyenletes útmodell például az alábbi:

$$x_2 = p_{21}x_1 + p_{2u}x_u$$

$$x_3 = p_{32}x_2 + p_{31}x_1 + p_{3v}x_v$$

$$x_4 = p_{43}x_3 + p_{42}x_2 + p_{41}x_1 + x_w$$

Ezt a következő útrával lehet ábrázolni:



Ebben a modellben tehát feltételezzük, hogy az X jelzésű okozati kapcsolatok fennállnak és az 0 jelzésűek nem állhatnak fenn:

Okozat	Ok			
	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	...	0	0	0
x_2	X	...	0	0
x_3	X	X	...	0
x_4	X	X	X	...

Az útegyütthatók és a változók közötti korrelációs együtthatók (9) közötti összefüggéseket az alábbi egyenletek fejezik ki:

$$\varrho_{12} = p_{21}$$

$$\varrho_{13} = p_{31} + p_{32}\varrho_{12}$$

$$\varrho_{23} = p_{31}\varrho_{12} + p_{32}$$

$$\varrho_{14} = p_{41} + p_{42}\varrho_{12} + p_{43}\varrho_{13}$$

$$\varrho_{24} = p_{41}\varrho_{12} + p_{42} + p_{43}\varrho_{23}$$

$$\varrho_{34} = p_{41}\varrho_{13} + p_{42}\varrho_{23} + p_{43}$$

Ezeknek az egyenleteknek segítségével — a korrelációs együtthatók kiszámítása után — meghatározhatjuk az útegyütthatókat.

Ezek az egyenletek ugyanakkor kifejezik a változók közötti hatások összetételét. Például az x_1 változó hatása az x_1 változóra összetevődik egyrészt a közvetlen hatásból (p_{41}), másrészt az x_2 változón keresztül megnyilvánuló hatásból ($p_{42}\varrho_{12}$), végül az x_3 változón keresztül hatással ($p_{43}\varrho_{13}$).

Az útmodellek bemutatása után *Duncan* — láthatóan szembefordulva saját korábbi kutatási gyakorlatával is — azt mondja, hogy előnyös lenne, ha a kutatók felhagynának azzal a gyakorlattal, hogy a változókat standardizált alakban fejezik ki, és ehelyett az ökonometriában szokásos strukturális egyenletrendszereket alkalmaznák, amelyekben az együtthatók a közönséges regressziós együttható típusúak. A továbbiakban ilyen modellekkel foglalkozik.

Ezzel kapcsolatban kitér arra a problémára, hogy a kapott többszörös korrelációs együtthatókat, illetve azok négyzetét hogyan kell értelmezni. Ez azért lényeges probléma, mert az eddig megbesélt ilyen szociológiai modellekben az R^2 értéke többnyire meglehetősen kicsi volt. *Duncan* szerint az R^2 az együttható-bebecslések pon-

tosságáról mond valamit, de ezen túlmenően hiba lenne az értékéből messzebbmenő következtetéseket levonni. Tehát egy magas R^2 érték nem mutatója a modell jóságának, alacsony értéke pedig nem mutatója a modell sikertelenségének, főképpen nem jelzi azt, hogy a vizsgált jelenség a modellben figyelembe nem vett tényezőktől igen erősen függ. Duncan érvelése ebben a kérdésben azonban szerintem nem dönti el az ekörül folyó széleskörű vitát.

A továbbiakban áttér a nem-rekurzív típusú modellek becslésére, vagyis arra az esetre, amikor a változók közötti összefüggések matrixa nem hozható a fenti háromszögű alakra. A szociológiában egyelőre kevés ilyen modellt becsültek.

Foglalkozik az identifikáció kérdéseivel, a nem-teljesen identifikált és túlidentifikált egyenletek becslésével. Az előbbi esetben további exogén változók hozzáadásával lehet kiutat találni, ennek azonban csak akkor van értelme, ha az új exogén változók valóban hatótényezők. Túlidentifi-

káltság esetén többféle megoldás lehetséges, például a kérdéses változó helyére a rá ható változókból (pl. faktoranalízissel) konstruált új változót lehet a modellbe felvenni.

Ez az utóbbi eset logikailag hasonló ahhoz, amikor a valóban vizsgálni kívánt változót nem tudjuk mérni, hanem helyette annak egy vagy több indikátorát építjük be a modellbe. Mivel ezek az indikátorok nem pontosan fejezik ki a vizsgálni kívánt változót, vagy annak a jelenségnek csak egy-egy oldalát, megnyilvánulását méri, az előbbiekhöz hasonlóan felmerül egy változó konstruálása az indikátorokból. Végül foglalkozik a könyv a specifikációs és a mérési hibák kérdéseivel.

Valószínűnek látszik, hogy a szociológiai modellek felépítésének és becslésének leg-sokatígérőbb útja az, amelyet Duncan képvisel ebben a munkában. Mivel ennek a módszernek ez az első ilyen összefoglalása, a könyv különös figyelmet érdemel.

ANDORKA RUDOLF

TUDOMÁNYOS ÉLET

15 éves a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai Közgazdasági Szakosztálya

Átlagosan havonta egy társadalmi rendezvénnyel számolva is könnyen belátható-összefoglalónk csak jellegében kísérli meg áttekinteni a Szakosztály 15 éves tevékeny, ségét és további terveit.

15 évi folyamatos munka, közel 300 fős létszám, sok fiatal a szakosztály-tagság sorai-ban, saját folyóirat, rendszeres kapcsolat és együttműködés más szervezetekkel, szak-osztályokkal, mindmegannyi jellemző tulajdonságai a matematikus-közgazdászok szervezett társadalmi kollektívájának.

A szakosztály tevékenysége iránt sokoldalú igény jelentkezik. A kvalifikáció irányába fejlődő közgazdasági elmélet és gyakorlat művelői általában különböző szakmák területé-ről indulnak el, — egyaránt lehetnek például közgazdászok, mérnökök, matematikusok, — s így természetesen esetenként eredeti szakmájukra támaszkodva szeretik megköze-líteni az éppen vizsgált határterületi kérdéseket. A specializáció azonban ma már mind-három említett eredeti szakmában is sokkal árnyaltabb képet mutat. Vessünk egy pil-lantást például a közgazdászképzés, — a kvantifikáció oldaláról tekintett, — széles skálájára. A nagyobb létszámokat érintő mikroökonómiai oktatás, az emelt szintű matematikára támaszkodó iparszakos képzés, a makroszakos többször módosított rend-szere, (volt terv-matematikusképzés, népgazdasági tervező-elemző szak: matematikai-gazdasági, vállalati-modellező és elméleti szakágazatai, s a legújabb tervgazdasági szak „terv-matematika blokkja”, terv-modellek és ökonometria „al-blokkjai”), a közgazdász továbbképzés már kialakított és még fejlődő szakdiplomaszerzési lehetőségei jól szemlél-tetik a várhatóan megjelenő széles igényspektrum realitását. S akkor még a mérnök-és a matematikusképzés hasonló tendenciáiról említést sem tettünk, valamint ugyancsak nem beszéltünk a számítástechnika (rendszer-szervezés) irányából érkező igényekről és lehetőségekről.

A szakosztály alapvető célkitűzése e változatos előképzettséggű, de modellalkotó és felhasználó tevékenységében, lelkesedésében már sokkal inkább homogén, sok fiatal-t is magábafoglaló szakembergárda számára szervezett társadalmi fórum biztosítása.

A szakosztály első elnöke *Ganczer Sándor* volt. További vezetői az elmúlt 15 év alatt: *Bródy András, Kornai János, Bod Péter, Szakolczay György, Tardos Márton, Ziermann Margit* és jelenleg: *Szép Jenő*.

Az MKT Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának 1976. okt. 28-án megválasztott vezetősége: *Augustinovics Mária, Békési Gábor, Bod Péter, Csepinszky Andor, Éllető Ödön, Forgó Ferenc, Halabuk László, Kornai János, Ligeti István, Meszéna György* (alelnök), *Morva Tamás, Ormós Zsolt* (titkár), *Simon Béláné, Simonovits András, Súlyom Csaba, Szakolczay György, Szép Jenő* (elnök), *Tardos Márton, Tóth József, Vári István, Ziermann Margit*.

A szakosztály rendezvényeinek alapvetően 3 típusát különböztethetjük meg. Havonta egy alkalommal tartunk — általában egy-egy előadó közreműködésével —, legtöbbször a TIT Kossuth-klubjában *előadó ülést*. Ha előreláthatólag az aktuális téma a MKT más szakosztályainak az érdeklődésére is számíthat, eleve közösen végezzük a szervezést, s a szóbanforgó szakosztályok valamennyi tagja meghívót kap. A felvetődő témák, meg-vitatásra alkalmasnak látszó anyagok függvényében rendszertelen időközökben rendezünk *ankétokat, vitauléseket*, fél vagy egynapos, ritkábban több napos időtartammal, esetleg csak szűkebb, meghívott szakembergárda részvételére támaszkodva. A Bolyai és Neu-mann társaságok operációkutatási szakosztályaival történt megegyezés alapján három-évenként szakosztályunk *rendezi az éves magyar operációkutatási konferenciát*, s ezt a ren-dezvényt társegyesületeinkkel összehangolt közös tevékenységgel sikerült is a szakma

hazai átfogó seregszemléjévé fejleszteni. 1977 folyamán a szakosztály 15 éves fennállását ünnepelve rendezték a VII. Magyar Operációkutatási Konferenciát Pécsen, október 11 és 14-e között.

A felsorolt rendezvények részben vagy egészben lehetnek természetesen nemzetközi jellegűek is, a szakosztály — a lehetőségek keretein belül —, igyekszik ápolni a külföldi kapcsolatokat, előadók meghívását, külföldre történő ajánlását, nemzetközi szakmai szervezetekkel a kapcsolatok fenntartását, tájékozódni a nemzetközi konferenciák rendezéséről, a részvétel elősegítésének a lehetőségeiről.

A szakosztály lapja az egyetlen magyar naelvű matematikai-közgazdasági folyóirat: a Szigma. A szakosztály tagjai tagdíjuk fejében kapják a lapot. A lap további fejlesztésének támogatását, olvasó és író taborának szélesítését fontos feladatunknak tekintjük.

A szakosztály vezetősége rendszeresen időközönként a hazai operációkutatási problémák megoldását előrevívó pályázatok kiírásával s elbírálásával is foglalkozik.

Minden vonatkozásban feladatunknak tartjuk a matematikai közgazdaságtan s hazai művelői eredményeinek és lehetőségeinek továbbfejlesztését, a szűkebb szakmából s a rokon területekből induló erőfeszítések egyesítését, összekötve mindezt a tapasztalatok széleskörű elterjesztésével. A szakosztály és a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó között ebben a szellemben kialakuló jó kapcsolat feltehetően hosszabb távon biztosítani fogja a szakma területére vonatkozó kiadói tevékenység széleskörű társadalmi háttérét.

Várjuk az elmondottakra igényt tartó, azokkal egyetértő s még sorainkon kívül levő szakembereknek a szakosztály munkájába történő bekapcsolódását. Így tudjuk valóban egyre fokozottabb mértékben megvalósítani szakterületünk társadalmi összefogását, egyre magasabb szintre emelni röviden vázolt, 15 éve elkezdett s továbbra is folytatni kívánt tevékenységünket, a matematikai közgazdaságtan és valamennyi művelője érdekében.

MESZÉNA GYÖRGY

ESEM '76

Az Econometric Society szokásos évi európai konferenciáját 1976. augusztus 23–27-ig Finnországban rendezték meg, Otaniemiben, amely a finnek festői fővárosát, Helsinkit övező számos szigetesoport egyikén fekszik.

Otaniemi egyetemi és kongresszusi város. A Helsinki Műegyetem ragyogóan felszerelt előadótermei, a modern kollégiumok és a nemzetközi tanácskozások híradásaiból, valamint a televíziós adásokból a magyar közönség előtt sem ismeretlen Dipoli kongresszusi épület nyaranta egymást váltó tudományos és jelentős más nemzetközi rendezvények kedvelt színhelye. Így azután természetes, hogy ez a konferencia is nagyszerűen szervezett és sikeres nemzetközi találkozó volt, ami finn barátaink őszinte vendéglátását, a társasági összejöveleteket és programokat illeti, tudományos szempontból pedig mind a hazai, mind pedig a nemzetközi programbizottság kiváló munkáját dicséri a színvonalasan összeállított tudományos program.

A konferencia programja meglehetősen zsúfolt volt. Erre mi sem jellemzőbb, mint az, hogy általában 10–19 parallel szekcióban, szekciónként 3–6 előadásra került sor naponta. Így például az első „munkanapon”, kedden (a délelőtti és a délutáni ülésszakon együttesen) 69 előadás közül válogathattunk. A választás különösen nehéz volt e sorok írójának, mert közgazdasági idősorok elméleti és statisztikai problémáival s általában makroökonómiai modellezéssel számos szekció foglalkozott, természetesen még olyanok is, amelyek nem ilyen elnevezéssel futottak. A szekciók elnevezései — néhány állandó címszótól eltekintve — ritkán ismétlődtek. Pontosan ugyanaz az elnevezés csak egy-két esetben fordult elő, noha más-más címen, de ugyanaz a témakör akár 10 szekcióban is jelentkezett. Gondolom a programbizottság az előadások konkrét ismeretében alaposabb, finomabb specifikációt szeretett volna elérni, ez azonban szinte lehetetlenség. Példa erre az, hogy külön „változó együttthatójú regressziós egyenletek” címen volt ugyan egy szekció, ismét egy másik „regressziós egyenletek stacionárius hibákkal”, mégis e két témacsoportba tartozó előadások az „idősorelméleti módszerek” című, majd a „szimultán egyenletrendszerek becslési problémái”, „irányításelméleti és dinamikus ökonometriai modellek” stb. és még sok más elnevezésű szekcióban is előfordultak.

A konferencián megtartott 55 szekcióülésnek 52-féle különböző elnevezése volt. Éppen ezért a címszavak felsorolása helyett nagyobb témacsoportokba igyekszem foglalni az előadásokat, megjegyezve, hogy e vállalkozás csaknem annyira reménytelen, mint a programbizottság feltételezett eredeti elképzelése volt. Így például az a besorolás, amely

a hazai operációkutatási konferenciákon oly annyira megszokott s amely különbséget tesz matematikai módszerek és modellek, valamint számítástechnikai módszerek között, itt eleve szóba sem jöhet. A számítástechnikai módszerek nélkülözhetetlen kísérői, elmaradhatatlan kiszolgálói a legkülönbözőbb közgazdasági-matematikai — meggon-dolásoknak.

Vegyük talán elsőként azt a két nagy osztályt, amelybe a konferencia programszer-vezői maguk az előadásokat sorolták, mégpedig az ún. ökonometria (econometrics) és az ún. közgazdasági-gazdaságpolitikai (economics) előadások osztályába. Az említett 55 szekcióülésből 25 szerepelt az utóbbiban. Mégsem szeretném, ha félreértés esne: míg ide-haza — és ismét csak a hazai operációkutatási konferenciák gyakorlatára kell gondolnom — közgazdasági, gazdaságpolitikai előadások az esetek zömében olyan jellegű előadásokat értenek, amelyek túlnyomórészt „verbálisak”, abban az értelemben, hogy zömükben nem alkalmaznak mélyebb matematikai ismereteket és gondolkodást igénylő módszereket, addig e konferencián az ebbe a kategóriába sorolt előadásokra ez távolról sem áll. Természetesen egy verbális előadás is lehet briliáns, feltéve, hogy írója briliáns módon alkalmazza a szóban forgó tudomány bizonyított tételeit új igazságok kimondására és bizo-nyítására. Másrészt egyetlen egy ökonometria előadás sem nyeri el pusztán attól a tudo-mányos újdonság rangját, hogy matematikai módszereket alkalmaz.

Mindezeket előre bocsátva sem hallgathatom el azonban azt a tényt, hogy az e kon-ferenciára benyújtott mintegy 300 előadás túlnyomó többségében (az éloszóban előadásra nem kerülő, csupán írásban ismertetésre benyújtott dolgozatokat is beleértve) az alkal-mazott matematikai módszerek meghaladják a hazai matematikai-közgazdasági vizsgá-latokban általában szokásos matematikai és gondolati apparátust.

Állításaimat alátámasztandó felsorolok néhány előadást az említett közgazdasági (gazdaságpolitikai) előadások közül.

D. A. Livesey (Cambridge) „Lehetséges irányok” a rövidtávú gazdaságirányításban” c. tanulmányában Zoutendijk egy módszerét alkalmazta ahhoz, hogy numerikusan meg-határozhasson az U.K. gazdasága részére rövid távú gazdasági stratégiákat. Az alkal-mazott algoritmus lehetővé teszi az érzékenységvizsgálatokat, valamint a visszacsatolást.

Piet W. Moerland (Rotterdam) „A vállalat optimális viselkedésformái” c. előadásában olyan modell kifejlesztéséről számol be, amely lehetővé teszi adott állami előírások figyelembevétele mellett a vállalat reálfolyamatainak és pénzügyi folyamatainak egyidejű optimalizálását.

Néhány, ugyancsak a gazdaságpolitikai osztályba sorolt szekciónak már elnevezése is önmagáért beszél így pl. „Gazdaságirányítás bizonytalansági tényezők mellett”, „Gazdasági növekedés és akkumuláció”, „Játékelmélet”, „Egyensúlyelmélet”, „Az index számok elmélete és alkalmazása” stb. A bizonyítást ezzel be is fejezem.

Az ökonometria előadások osztályába főképpen az ökonometria modellekkel, re-gressziós becslésekkel, szimultán lineáris és nem-lineáris egyenletek paraméter-becslési problémáival, input-, output és szektorális modellek paraméterbecslési problémáival, termelési függvényekkel és nemlineáris beruházási döntési függvényekkel, a nemzet-gazdaságok irányítási és tervezési modellezési kérdéseivel s nem utolsósorban közgazda-sági idősorok becslési és előrejelzési problémáival foglalkoztak. Ez utóbbi témában fel-tűnően sok szó esett a Box és Jenkins által az utóbbi 10 év alatt kifejlesztett modern idő-sorelemzési módszerekről, amelyeket — elsősorban hosszabb, legalább 50 elemű idő-sorokra — sikerrel alkalmaztak.

Idősorok interdependens rendszerével foglalkozott az egyetlen magyar előadás is, amely a konferencián elhangzott, „Dinamikus főkomponens analízis” címen. Az előadás szerzői Bánkvi György (OT Számítástechnikai Központ), Veliczky József (OT Számítás-technikai Központ) és jelen sorok írója.

Mindkét nagy osztály előadásait az jellemezte, hogy a kockázati tényezők, a bizony-talanság számításvátele, a sztochasztikus modellezés jelentős súlyt kapott bennük. A korábban — más aspektusból említett — 25 : 55 arány itt az előadások megoszlását tekintve a dinamikus és sztochasztikus modellek, eljárások, valamint a statikus modellek és eljárások között 75 : 25-re módosul, a sztochasztikus meggon-dolások javára. Ismét egy elgondolkodtató tény.

Két érdekes és figyelemre méltó gondolatokat taglaló előadást külön is megemlítenék.

P. Newbold (Nottingham) „Idősorok via ökonometria modellelítés” című előadásában azt fejtegette, hogy az ökonometria modellek felépítésében sokkal nagyobb mértékben kellene támaszkodni az eddigiekben elsősorban paraméterbecslési célokat szolgáló empirikus idősorok együttes rendszerében a modellépítés szempontjából is hasznosítható információkra.

R. Harris (Kingston) „Ex ante versus ex post efficiencia bizonytalanságok mellett: néhány javaslat erőforrások allokációjának mechanizmusára” című előadásában azzal a problémával foglalkozik, hogy egy ex post efficiens erőforrás allokációhoz található-e ex ante olyan decentralizált erőforrás-allokáció mechanizmus, amely egyensúlyi állapotot teremt s megfordítva, lehetséges-e olyan ex ante decentralizált erőforrás allokáció mechanizmust találni úgy, hogy az e mechanizmuson belüli ex ante választások esetén létezik az allokációs mechanizmus egyensúlyi állapora és minden egyensúlyi allokáció ex post Pareto efficiens. A szerző azt bizonyítja, hogy általában nem lehetséges, csak speciális feltételek és megkötések teljesülésekor.

A szekció-előadásokon kívül két alkalommal nagy plenáris ülésekre is sor került. Az elsőt H. Uzawa (Tokió) tartotta a dinamikus disequilibrium elméletről, a másodikat J. Chipman (Minnesota) az aggregáció-elméletről. Ez utóbbi előadás Fisher-Schultz emlékülés volt.

Magyarországról örvendetes módon 14 kiküldött vehetett részt ezen a kitűnően szervezett színvonalas konferencián.

ZIERMANN MARGIT

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Agócs András

Kézirat nyomdába érkezett; 1977. VIII. 9. Terjedelem: 9,45 (A/5 ív)
77.4806 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

TAMÁS FÉNYES—JÓZSEF SÁRI: Periodically changing economic processes.....	1
TAMÁS TARJÁN—GYÖRGY TÉNYI: Experiment for modelling the investment procedure	11
ANDOR DOBÓ—FERENC FENYVES—SÁNDOR SZAJCZ: Similarity function and some of its properties	25
KAMILLA LÁNYI: A paradox in forecasting.....	49
ANDRÁS BAKÓ—PÉTER KAS: Determining the k-th shortest path by matrix method	61
FERENC SZIDAROVSKY: The non-differentiable oligopoly problem.....	69
JENNIFER M. ROBINSON: Managerial sketches of the steps of modelling.....	75

BOOK REVIEWS

P. RÓZSA: Linear algebra and applications. B. KREKÓ: Linear algebra. (<i>László Mihályffy</i>)	97
H. NIKAIIDO: Convex structures and economic theory. (<i>Péter Medvegyev</i>).....	99
O. D. DUNCAN: Introduction to structural equation models. (<i>Rudolf Andorka</i>)	101

SCIENTIFIC LIFE

GYÖRGY MESZÉNA: The Mathematical-Economic Section of the Hungarian Economic Society is 15 years old.....	105
MARGIT ZIERMANN: ESEM '76	106

СОДЕРЖАНИЕ

Тамаш Феньеш—Йожеф Шари: Периодически изменяющиеся экономические процессы	1
Тамаш Тарьян—Дьердь Теньи: Эксперимент по моделированию процесса капиталовложения	11
Андор Добо—Ференц Феньвеш—Шандор Сайц: Гомогеническая функция и некоторые ее особенности	25
Камилла Ланьи: Один из парадоксов прогнозирования	49
Андраш Бако—Петер Каш: Определение наиболее короткого пути «К» методом матрицы	61
Ференц Сидаровски: Проблема недифференцируемого олигополя	69
Дженнифер М. Робинсон: Замечания относительно организации работы по моделированию	75

О КНИГАХ

Пал Рож: Линейная алгебра и ее примечания. Бела Креко: Линейная алгебра (<i>Ласло Михайффи</i>)	97
Х. Никаидо: Выпуклые структуры и экономическая теория (<i>Петер Медведьев</i>)	99
О. Д. Данкен: Введение в модели структурного уравнения (<i>Рудольф Андорка</i>)	101

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Дьердь Месена: Математико-экономической секции Венгерского экономического общества исполнилось 15 лет	105
Маргит Цирманн: «ЭСЕМ '76»	106

Ára: 24,— Ft

Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX: 26793
ISSN 0039—8128

TARTALOM

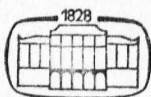
FÉNYES TAMÁS—SÁRI JÓZSEF: Periódikusan változó közgazdasági folyamatok.....	1
TARJÁN TAMÁS—TÉNYI GYÖRGY: Kísérlet a beruházási folyamat modellezésére	11
DOBÓ ANDOR—FÉNYVES FERENC—SZAJCZ SÁNDOR: A hasonlósági függvény és néhány tulajdonsága.....	25
LÁNYI KAMILLA: Egy előrejelzési paradoxon	49
BAKÓ ANDRÁS—KAS PÉTER: A k-adik legrövidebb útvonal meghatározása mátrix módszerrel	61
SZIDAROVSKY FERENC: A nem-differenciálható oligopol probléma.....	69
JENNIFER M. ROBINSON: Karcolatok a modellezési munka megszervezéséről.....	75

KÖNYVEKRŐL

RÓZSA P.: Lineáris algebra és alkalmazásai. KREKÓ B.: Lineáris algebra (<i>Mihályffy László</i>)	97
NIKAIDO, H.: Convex structures and economic theory (<i>Medvegyev Péter</i>).....	99
DUNCAN, O. D.: Introduction to structural equation models. (<i>Andorka Rudolf</i>)	101

TUDOMÁNYOS ÉLET

MESZÉNA GYÖRGY: 15 éves a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai Közgazdasági Szakosztálya	105
ZIERMANN MARGIT: ESEM '76.....	106



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST