Dobó Andor—Fenyves Ferenc—Szajcz Sándor

A hasonlósági függvény és néhány tulajdonsága

A számítógép-rendszerek tulajdonságainak összehasonlítására *Dobó* Andor 1972-ben bevezetett egy, a hasonlóságot kifejező mértéket. (Lásd: [1].) Ezt a mértéket [2]-ben (1975) általánosította nemcsak matematikai értelemben, hanem az alkalmazhatóság körének kiterjesztése révén is. Gyakorlati szempontból [2]-ben a következő problémakör volt a vizsgálat tárgya:

Tegyük fel, hogy a $T_1, T_2, \ldots, T_n$ tulajdonságú gyártmány számszerű jellemzőit a $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ vektor szolgáltatja. Ugyanezen tulajdonságokra nézve egy másik gyártmány számszerű jellemzői legyenek a $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ vektor által adottak. A $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ ismeretében keresendő olyan egyetlen számérték, amely a két gyártmány tulajdonságainak a hasonlóságát (vagy különbözőségét) elfogadhatóan jellemzi. Más szóval; keresendő a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektor (vagy súlyrendszer) hasonlóságát (vagy különbözőségét) kifejező egyetlen olyan mérőszám, amely lehetővé teszi többek között a termékek tulajdonságainak műszaki-gazdasági paraméterek és egyéb számszerű jellemzők alapján történő összehasonlítását, s a különbözőségek mérését. Ennek segítségével a termékek minőségének javításáról, gazdaságos ösztönzéséről, a későbbiek során pedig a termékek minőségi információrendszerének létrehozásáról intézkedhetünk. Ez utóbbi hivatott arra, hogy felhasználásával választ kapjunk: jelenleg melyik termék milyen „minőségi kategóriában" helyezkedik el, a műszaki-technikai fejlesztés elmaradása esetén az idő múlásával milyen kategóriába „esik" vissza; milyen tulajdonságát milyen mértékben kellene fejleszteni, hogy minimális munkaráfordítással, költséggel, stb. a gyártmány a kategorizálásban előbbre kerüljön, és így tovább. (A különféle mutatóknak a matematikai modellekben játszott szerepéről lásd például [4]-et.)

Az ilyen és hasonló szempontok előtérbe helyezése mellett [2]-részben az információelmélet eredményeire támaszkodva — a termékek tulajdonságai összehasonlításának a céljából definiálja a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektorok hasonlóságának egy lehetséges mértékét, amelyből speciális esetként származtatható az [1]-ben bevezetett mérték is. A [3]-ban *Dobó* Andor, *Fenyves* Ferenc és *Szajcz* Sándor a hasonlóság mértékét a vállalatok és számítógépek nagysága, teljesítménye közötti egyértelmű megfeleltetés céljára vették igénybe. A [6]-ban a szerzők módszert adtak a szakemberek véleményének értékelésére, s a hasonlósági függvényt három számítógép típus műszaki jellemzőinek az összehasonlítására használták. Az eddig kapott eredmények elemzése arra utal, hogy a hasonlóság mértéke mint többváltozós függvény, a gyakorlati alkalmazásoknál az elvárható praktikus követelményeknek megfelel. Magától értetődően nemcsak a termékek minősítésénél, hanem számos más célra, így pl. pontozásos játékoknál (jégtánc, torna), káderminősítésnél, ergonómiai, szociológiai, diagnosztikai, alkalmassági stb. vizsgálatoknál is felhasználható.

A hasonlóság mérőszámának megválasztása egyébként már régóta foglalkoztatja a szakembereket, s erről némi irodalmi áttekintést [2] is szolgáltat. Tulajdonképpen az identifikáció-elmélet egyik alapvető problémájának is felfoghatjuk e mérőszám keresését, mivel ez esetben az azonosítás mértékének a megválasztását, jellemzését szolgálja. Ilyen aspektusból és meggondolások mellett a hasonlóság vagy eltérés kimutatását vizsgáló tudományos módszereket, eljárásokat a „hasonlóság-elmélet" gyűjtőnév alá foglalt vizsgálatoknak is tekinthetjük. A hasonlóság-elmélet egzakt, axiomatikus megalapozásáról ma ugyan még nem igen beszélhetünk, de a problémakör gyakorlati jelentősége a közeljövőben minden bizonnyal erőteljesen erre irányítja majd a kutatók figyelmét.

Annál is inkább várható ez, mert például a bűnüldözésnél a személyazonosítás; a számítástechnikában az alakfelismerés, a statisztikai informatikában az ún. „automatikus osztályozás"[1] problémáinak a megválaszolása is valamilyen hasonlóságot kifejező mérték felhasználásán alapszik (lásd [7] 135–166. o.). A típusalkotással és osztályozással kapcsolatos kérdések megválaszolását a számítógép igénybevehetősége is nagymértékben befolyásolta, s ma már az automatikus osztályozás céljára kész programcsomagok is rendelkezésre állnak. Gyakorlati szempontból itt arról van szó, hogy sok esetben nagymennyiségű adat kiértékelés nélkül „ömlesztve" áll rendelkezésre; s még ezután kell a problémák elméleti hátterét tisztázni nem egyszer úgy, hogy a feldolgozás célját is menetközben kell kitűzni. Ma már az ilyen típusú problémák megoldását a „végrehajtást végző tanító nélkül tanuló algoritmusok" segítik elő, melyek végső fokon az adatfeldolgozás hatékony és univerzálisan használható módszerét adják. (Lásd még [9] 16. illetve 184. oldal.)

A hasonlóság néhány mérőszámát a [7] 5.4 táblázatában is megtalálhatjuk, s ez tartalmazza a *Russel* és *Rao*, *Sokal* és *Michener*, *Jaccard*, *Yule*, *Csuprov*-féle hasonlósági mérőszámokat. (Az utóbbi kettő negatív értéket is felvehet, ezért értelmezésük már kevésbé kézenfekvő!)

Az egyes módszerekről [7] nemcsak áttekintést nyújt, hanem rámutat a vitatható kérdésekre, valamint a gyakorlati alkalmazásokra is.

A továbbiakban eltekintünk a probléma gyakorlati vonatkozásaitól és kimondottan csak matematikai kérdésekkel foglalkozunk. Úgy is mondhatjuk hogy a hasonlóság-elmélet körébe vágó vizsgálatokat végzünk a [2]-ben definiált mértékre mint többváltozós függvényre vonatkozóan; s célunk e függvény néhány — gyakorlati szempontból fontos — tulajdonságának a kimutatása.

1. A hasonlósági függvény és származtatása

Legyen $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ és $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ két azonos dimenziójú vektor, ahol p_k és $q_k > 0$; minden k-ra. $\sum_{k=1}^{n} p_k = P$; $\sum_{k=1}^{n} q_k = Q$. A [2]-ben

[1] A szakirodalomban a megnevezés korántsem egységes. Használatos még: cluster analysis, numerikus taxonomia, csoportosítási algoritmus és más elnevezések.

Dobó Andor a **p** és **q** vektorok hasonlóságának egy lehetséges mértékéül definíciószerűen a

$$(1)\qquad H = H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \lambda\cdot\left[\frac{1}{PQ}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(p_i q_k)^{\alpha}}{(p_k q_i)^{\alpha-1}}\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}} =$$

$$= \lambda\cdot(PQ)^{\frac{\beta}{\alpha-1}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha} q_i^{1-\alpha}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k^{1-\alpha} q_k^{\alpha}\right)\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$$

kifejezést választotta, ahol $\beta > 0$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1$ való számok; $0 < \lambda = \lambda(P,Q) \leq 1$ a P és Q változóknak alkalmasan választott szimmetrikus függvénye, amelyre teljesül: $\lambda(P,Q) = 1$ akkor és csak akkor, ha $P = Q$.

A továbbiakban *az (1) alatti* $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ *függvényt hasonlósági függvénynek vagy a hasonlóság mértékének nevezzük.*

Látni fogjuk, hogy a $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ függvény származtatása a középérték-képzéssel függ össze. A középértékek általános elméletében az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok $p_1', p_2', \ldots, p_n'$ súlyokkal

$$\left(\text{ahol } p_i' = \frac{p_i}{\sum_{k=1}^{n} p_k};\quad p_i \in (0,\infty);\quad i = 1,2,\ldots,n\right)$$

vett középértékén általában egy

$$(2)\qquad \Phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i'\Phi(x_i)\right)$$

alakú kifejezést értünk, ahol $\Phi(x)$ egy a valós számokon értelmezett szigorúan monoton (növekvő, vagy csökkenő) és folytonos, de egyébként tetszőleges függvény; $\Phi^{-1}(y) = x$ az $y = \Phi(x)$ függvény inverzét jelenti.

$\Phi(x)$-et a (2) középértékhez tartozó KOLMOGOROV-NAGUMO függvénynek is szokták nevezni.

A (2) alatti kifejezést *homogén középérték*nek nevezzük, ha $m > 0$ valós szám esetén

$$(3)\qquad \Phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i'\Phi(mx_i)\right) = m\Phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i'\Phi(x_i)\right).$$

Ilyen előzmények után rétérünk $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ származtatására, mindvégig feltételezve a $\Phi(\mathrm{x})$-re tett kikötések teljesülését.

Első származtatás

Legyen $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q}) \overset{\text{def}}{=} \Phi^{-1}\big(\Phi(u)\cdot\Phi(v)\big) \overset{\text{def}}{=} uv$, ahol $\Phi(x)$, $x \geq 0$ esetén, folytonos nem negatív $\big($azaz $\Phi(x) \geq 0\big)$ és szigorúan monoton függvény;

$x_i, y_i \in (0,\infty)$; $p_i, q_i \in (0,\infty)$; ha $i = 1, 2, \ldots, n$ és $\sum_{i=1}^{n} p_i = P$; $\sum_{i=1}^{n} q_i = Q$;

továbbá az u és v értéke olyan, amelyre a

$$\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(\Phi(x_i) - \Phi(u))^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} q_i(\Phi(y_i) - \Phi(v))^2\right] \tag{4}$$

kifejezés értéke minimális.

Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} p_i[\Phi(z_i) - \Phi(w)]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi^2(z_i) - $$
$$- 2\Phi(w) \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi(z_i) + \Phi^2(w) \sum_{i=1}^{n} p_i$$

alapján (4) értéke

$$\Phi(u) = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi(x_i) \text{ és } \Phi(v) = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^{n} q_i \Phi(y_i)$$

esetén lesz minimális. Minthogy esetünkben $\Phi(x)$ invertálható függvény, ezért u-ra és v-re

$$u = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{P} \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi(x_i)\right)$$

ill.

$$v = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{Q} \sum_{i=1}^{n} q_i \Phi(y_i)\right)$$

adódik.

Mivel értelmezés szerint $\Phi(uv) = \Phi(u)\Phi(v)$, azért $\Phi(z) = z^r$. Azaz

$$u = \left(\frac{1}{P} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \text{ és } v = \left(\frac{1}{Q} \sum_{i=1}^{n} q_i y_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ha most $p_i > 0$, $q_i > 0$, minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re, akkor az

$$x_i = \lambda^{1/2}\left(\frac{p_i}{q_i}\right)^{-\beta}; \; y_i = \lambda^{1/2}\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{-\beta} \tag{5}$$

és

$$\frac{1}{r} = \frac{\beta}{1-\alpha} \; (\alpha \neq 1)$$

választással következik, hogy

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda \left[\frac{1}{PQ} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(p_i q_k)}{(p_k q_i)^{\alpha-1}}\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}}.$$

Vagyis $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ éppen az (1)-gyel definiált hasonlósági függvény.

Második származtatás

Legyen

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p'_i \Phi(x_i)\right) \Phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} q'_i \Phi(y_i)\right)$$

és a Φ függvény tegyen eleget a következő homogenitási feltételnek:

$$\Phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p'_i \Phi(mx_i) = m\Phi^{-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p'_i \Phi(x_i)\right); \ (m > 0) \tag{3'}$$

ahol

$$x_k = \lambda^{1/2}\left(\frac{p'_k}{q'_k}\right)^{-\beta}; \ y_k = \lambda^{1/2}\left(\frac{q'_k}{p'_k}\right)^{-\beta}; \ p'_k = \frac{p_k}{\sum_{i=1}^{n} p_i}; q'_k = \frac{q_k}{\sum_{i=1}^{n} q_i}; \ \big(p_k, q_k \in (0, \infty)\big)$$

$k = 1, 2, \ldots, n$ és $0 < \lambda \leq 1$ pedig alkalmasan választott paraméter.

Ismeretes (lásd: [8] 84. Tétel 68. oldal) a homogén középérték azon tulajdonsága, amely szerint $0 < x < \infty$ esetén a homogenitás maga után vonja a $\Phi(x) = x^r$, vagy $\Phi(x) = \log x$ teljesülését. Amennyiben $\Phi(x) = x^r$ és $\frac{1}{r} = \frac{\beta}{1-\alpha}$ $(\alpha \neq 1)$ akkor könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ezen választásokkal (1)-hez jutunk.

Ha pedig $\Phi(x) = \log x$, akkor

$$\Phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p'_i \Phi(x_i)\right)\Phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} q'_i \Phi(y_i)\right) = \lambda \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p'_i}{q'_i}\right)^{\beta(q'_i - p'_i)}.$$

A 2. Tétel alapján látni fogjuk, hogy ezen $\Phi(x) = \log x$ választás a $\lim\limits_{\alpha \to 1} H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ esetnek felel meg, s ezzel a közölt módon való származtatás egyértelművé válik.

2. A hasonlósági függvény tulajdonságai

Ha p'_k és q'_k valószínűség-eloszlást reprezentál és $J_\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q})$ jelenti az α-rendű JEFFREYS-féle invarianciát vagy más néven a J_α-divergenciát — ami felfogható a $\mathbf{p}'$ és $\mathbf{q}'$ eloszlások különbözősége mérőszámának — akkor, mivel definíció szerint (v.ö.: [2], [5])

$$J_\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{\alpha - 1}\log_2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(p'_i q'_k)^\alpha}{(p'_k q'_i)^{\alpha-1}} = \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\alpha - 1}\log_2\left[\frac{1}{PQ}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(p_i q_k)^\alpha}{(p_k q_i)^{\alpha-1}}\right]; \qquad (\alpha \neq 1).$$

ezért könnyen belátható a hasonlóság mértéke és a J_α-divergencia közötti azon kapcsolat, amelyet az alábbi tétel fejez ki:

1. Tétel:

Ha $\alpha \geq 0$, de $\alpha \neq 1$, akkor

(1′) $$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = H_{0,0}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, 2^{-\beta J_\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q})}; \quad (\beta \geq 0),$$

illetve

(6′) $$J_\alpha \mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{\beta}[\log_2 H_{0,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q}) - \log_2 H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q})]\,(\beta \geq 0).$$

Bizonyítás:

Mivel

$$H_{0,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \lambda(P,Q)\left(\frac{1}{PQ}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(p_i q_k)^0}{(p_k q_i)^{-1}}\right)^{\beta} = \lambda(P,Q)$$
$$= H_{\alpha,0}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = H_{0,0}(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

ezért

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = H_{0,0}(\mathbf{p},\mathbf{q})\left[\frac{1}{PQ}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(p_i q_k)^\alpha}{(p_k q_i)^{\alpha-1}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha-1}}.$$

Ha mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát vesszük, akkor egyszerű átrendezés után kapjuk, hogy ($\beta > 0$ esetén)

$$\frac{1}{\beta}[\log_2 H_{0,0}(\mathbf{p},\mathbf{q}) - \log_2 H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q})] = \frac{1}{\alpha-1}\log_2\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{PQ}\frac{(p_i q_k)^\alpha}{(p_k q_i)^{\alpha-1}}\right],$$

s minthogy az itt kapott egyenlőség jobb oldalán éppen a J_α divergencia áll, ezért a tétel be van bizonyítva.

A (6′) alatti kifejezés a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektorok hasonlóság-elméleti távolságának fogható fel, amely speciális esetben információelméleti távolságot jelent. A későbbiekben közölt vizsgálatok eredményeként ugyanis belátható, hogy $J_\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q})$ eleget tesz a „távolsági mérőszámokkal'' szemben támasztott azon követelményeknek, mely szerint:

$$1^\circ \quad J_\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q}) \geqslant 0$$
$$2^\circ \quad J_\alpha(\mathbf{p},\mathbf{p}) = 0$$
$$3^\circ \quad J_\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q}) = J_\alpha(\mathbf{q},\mathbf{p}).$$

A továbbiakban — célunknak megfelelően — a $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ függvény tulajdonságait vizsgáljuk.

2. Tétel:

(7) $$\lim_{\alpha\to1} H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = H_{0,0}(\mathbf{p},\mathbf{q})\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{p_k}{q_k}\right)^{\beta\left(\frac{q_k}{Q}-\frac{p_k}{P}\right)}.$$

Bizonyítás:

Mivel a

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = H_{0,0}(\mathbf{p},\mathbf{q})2^{-\beta J_\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q})}; \quad (\alpha \neq 1)$$

függvényben csak a

$$\mathbf{J}_\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{\alpha-1}\log_2 g(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\log_2 \frac{1}{PQ}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(p_iq_k)^\alpha}{(p_kq_i)^{\alpha-1}}$$

függ α-tól, ezért elég a $\lim\limits_{\alpha\to 1} J_\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q})$ határátmenetet vizsgálni.

Könnyen belátható, hogy $\lim\limits_{\alpha\to 1}\log_2 g(\alpha) = 0$, ezért alkalmazni lehet a l'Hospital szabályt. Így

$$\lim_{\alpha\to 1} J_\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{\log_2 g(\alpha)}{\alpha-1} = \lim_{\alpha\to 1}[\log_2 g(\alpha)]'.$$

Minthogy

$$[\log_2 g(\alpha)]' = \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)\ln 2} = \frac{1}{PQ\,g(\alpha)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_iq_k\left(\frac{p_iq_k}{p_kq_i}\right)^{\alpha-1}\log_2\frac{p_iq_k}{p_kq_i},$$

ezért

$$\lim_{\alpha\to 1} J_\alpha(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{PQ}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_iq_k\log_2\frac{p_iq_k}{p_kq_i} =$$

$$= \frac{1}{PQ}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[p_iq_k\log_2\frac{p_i}{q_i} - p_iq_k\log_2\frac{p_k}{q_k}\right] =$$

$$= \frac{1}{PQ}\sum_{i=1}^{n}(Qp_k - Pq_k)\log_2\frac{p_k}{q_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{p_k}{q_k}\right)^{\left(\frac{p_k}{P}-\frac{q_k}{Q}\right)} = \log_2\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{p_k}{q_k}\right)^{\left(\frac{p_k}{P}-\frac{q_k}{Q}\right)}.$$

Ennél fogva

$$\lim_{\alpha\to 1} H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = H_{0,0}(\mathbf{p},\mathbf{q})\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{p_k}{q_k}\right)^{\beta\left(\frac{p_k}{P}-\frac{q_k}{Q}\right)}.$$

Megjegyzések:

1. A $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ hasonlósági függvénynek az $\alpha = 1$ pontban megszüntethető szakadása van, ezért lehetséges, hogy

$$(1'')\qquad H_{1,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q}) \stackrel{\text{def}}{=} H_{0,0}(\mathbf{p},\mathbf{q})\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{p_k}{q_k}\right)^{\beta\left(\frac{q_k}{Q}-\frac{p_k}{P}\right)}\qquad(\beta \geqslant 0)$$

legyen. A továbbiakban $\alpha = 1$ esetén $H_{1,\beta}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ alatt az (1″) értendő.

2. Az iménti megjegyzés értelmében az 1. Tétel akkor is igaz, ha $\alpha = 1$.

A további vizsgálatok könnyebb kezelhetősége végett vezessük be a következő jelöléseket, legyen:

$$a_{(k-1)n+i} = \frac{p_iq_k}{PQ}$$

$$b_{(k-1)n+i} = \frac{p_iq_k}{p_kq_i}\qquad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

és

$$f(s) = \varphi(s)^{\frac{\beta}{s}} = \left[\sum_{i=1}^{m} a_i b_i^s\right]^{\frac{\beta}{s}}.$$

ahol $\beta > 0$, $m = n^2$ és $s = \alpha - 1 \neq 0$.

Könnyen belátható, hogy e jelölések felhasználásával $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ az alábbi alakban írható fel:

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\lambda(P, Q)}{f(s)} = \frac{H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{f(s)}.$$

Ezek után rátérünk az $f(s)$ függvény tulajdonságainak vizsgálatára.

1. Lemma:

Amennyiben $\alpha \neq 1$, akkor – ha van olyan $i = i_0$ index, amelyre $b_{i_0} \neq 1$, akkor $f(s)$ az s-nek ($s = \alpha - 1$) szigorúan monoton növekvő függvénye, ha pedig nincs ilyen index, azaz $b_i = 1$, minden $i = 1, 2, \ldots, m$ indexre, úgy $f(s) \equiv 1$.

Bizonyítás:

$$f'(s) = \beta f(s)\left[-\frac{\ln \varphi(s)}{s^2} + \frac{s\varphi'(s)}{\varphi(s)}\right].$$

Ha létezik olyan $i = i_0$ index, amelyre $b_{i_0} \neq 1$, úgy azt kell belátni, hogy az $f'(s) > 0$.

Mivel $x\ln x$ szigorúan konvex függvény a $(0, \infty)$ intervallumon, ezért ha létezik olyan i és j, melyekre $x_i \neq x_j$, $a_i \neq 0$, $a_j \neq 0$,akkor

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k} \ln \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k} < \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k x_k \ln x_k}{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k}.$$

Minthogy $\sum\limits_{j=1}^{m} a_j = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{p_i q_k}{PQ} = 1$ és létezik olyan i_0, melyre $b_{i_0} \neq 1$, melyből az is következik, hogy van olyan j_0, amire a $b_{j_0} = \frac{1}{b_{i_0}}$ teljesül, így a fenti egyenlőtlenségből $x_i = b_i^s$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i^s \ln\left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_i^s\right) < \sum_{i=1}^{m} a_i b_i^s \ln b_i^s,$$

melyből az

$$\ln \varphi(s) < \frac{s\varphi'(s)}{\varphi(s)}$$

egyenlőtlenség következik.

Osztva az egyenlőtlenség mindkét oldalát $s^2 > 0$-val, az

$$\frac{\ln \varphi(s)}{s^2} < \frac{\varphi'(s)}{s\varphi(s)}$$

azaz

$$\left(\frac{\varphi'(s)}{s\varphi(s)} - \frac{\ln \varphi(s)}{s^2}\right) > 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A $\beta f(s) > 0$ miatt ez azt jelenti, hogy $f'(s) > 0$, s ezzel a lemmát bizonyítottuk, az első esetre nézve. A második esetben, amikor $b_i^s = 1$ minden i-re $(1 \leq i \leq m)$ akkor az

$f(s) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_i^s\right)^{\frac{\beta}{s}} = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^{\frac{\beta}{s}} = 1$ minden $s \neq 0$ esetén, s ezt kellett bizonyítanunk.

3. Tétel:

A $\beta > 0$ és $\alpha \neq 1$ esetén, ha $\mathbf{q} \neq \frac{Q}{P}\mathbf{p}$, akkor $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ α-ban szigorúan monoton csökkenő, ha pedig $\mathbf{q} = \frac{Q}{P}\mathbf{p}$, akkor $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \lambda(P, Q)$.

Bizonyítás:

A $\mathbf{q} \neq \frac{Q}{P}\mathbf{p}$, feltételből következik, hogy a $\frac{p_i q_k}{p_k q_i} = 1$ nem teljesülhet minden $i, k = 1, 2, \ldots, n$ esetén, mivel ha teljesülne, úgy $\frac{p_i}{p_k} = \frac{q_i}{q_k}$ miatt, — mint az könnyen belátható —, a $\mathbf{q} = \frac{Q}{P}\mathbf{p}$ is teljesülne. Ez pedig azt jelenti, hogy $b_i = 1$ sem teljesül minden $i = 1, 2, \ldots, m$ esetén, így az 1. Lemma és a

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\lambda(P,Q)}{f(s)}$$

összefüggés miatt a tétel állítása az első esetben bizonyítva van.

A második esetben, azaz ha $\mathbf{q} = \gamma\mathbf{p}$, ahol $\gamma = \frac{Q}{P}$ teljesül, akkor

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P,Q)\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma p_i p_k}{\gamma P^2}\left(\frac{\gamma p_i p_k}{\gamma p_k p_i}\right)^{\alpha-1}\right]^{\frac{\beta}{\alpha-1}} = \lambda(P,Q).$$

Ezzel a tételt mindkét esetre nézve bizonyítottuk.

Megjegyzés:

E tétel alapján, ha $\mathbf{q} \neq \frac{Q}{P}\mathbf{p}$, akkor $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. $\alpha \to 1 - 0$ esetben szigorúan monoton csökkenően, $\alpha \to 1 + 0$ esetén pedig szigorúan monoton növekedően konvergál $H_{1,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$-hoz, melyből nyilvánvalóan következik, hogy $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a teljes $(-\infty, \infty)$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő α-ban. Ha pedig $\mathbf{q} = \frac{Q}{P}\mathbf{p}$, akkor (1″) alapján

$$H_{1,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q).$$

2. Lemma

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = B^\beta \qquad (\beta > 0),$$

ahol $B = \max\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$

Bizonyítás:

Jelölje L azon i indexek halmazát, amelyekre fennáll a $b_i = B$ egyenlőség, továbbá legyen $\varepsilon = \sum_{i\in L} a_i$. Könnyen belátható, hogy $0 < \varepsilon \leq 1$.

E jelölés felhasználásával kapjuk, hogy $s > 1$ esetén

$$\varepsilon B^s = \sum_{i\in L} a_i b_i^s \leq \sum_{i=1}^{m} a_i b_i^s \leq \sum_{i=1}^{m} B^s a_i = B^s,$$

azaz

$$\varepsilon B^s \leq \varphi(s) \leq B^s,$$

továbbá

$$\varepsilon^{\frac{1}{s}} B \leq (\varphi(s))^{\frac{1}{s}} \leq B.$$

Mivel $\lim_{s\to\infty} \varepsilon^{\frac{1}{s}} = 1$, ezért

$$\lim_{s\to\infty} (\varphi(s))^{\frac{1}{s}} = B,$$

amiből már következik, hogy

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = \lim_{s\to\infty} (\varphi(s))^{\frac{\beta}{s}} = B^\beta.$$

Megjegyzések:

1. $\lim_{s\to-\infty} f(s) = b^\beta$,

ahol $b = \min\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

Ugyanis

$$f(s) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_i^s\right)^{\frac{\beta}{s}} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i c_i^u\right)^{\frac{\beta}{u}}} = \frac{1}{f^*(u)},$$

ahol $c_i = \frac{1}{b_i}$ és $u = -s$;

továbbá

$$\max\{c_1, c_2, \ldots, c_m\} = \frac{1}{\min\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}} = \frac{1}{b},$$

így a lemma alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{s \to -\infty} f(s) = \frac{1}{\lim\limits_{u \to +\infty} f^*(u)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^\beta} = b^\beta.$$

2. $b_i = \frac{p_l q_k}{q_k p_l}$, ahol $k = \left[\frac{i}{n}\right] + 1$ és $l = i - (k-1)n$ ha $\frac{i}{n}$ nem egész szám, ha pedig $\frac{i}{n}$ egész szám, akkor $k = \frac{i}{n}$ és $l = n$. Így $b_i = 1$, ha $l = k$; olyan b_i-khez pedig, amelyeknél $l \neq k$, található olyan j index, melyre $b_i = \frac{1}{b_j}$. Ez azt jelenti, hogy vagy minden $i = 1, 2, \ldots, m$ esetén $b_i = 1$, vagy van olyan i és j index, melyre $b_i > 1$ és $b_j < 1$. Az első esetben $b = B = 1$, míg a második esetben $B = b_{i_0} > 1$, melynek reciproka — mint láttuk, ilyen b_{j_0} van, — adja a b értéket. Ezért minden esetben igaz, hogy $b = \frac{1}{B}$. Ennek alapján a következő is fennáll:

$$\lim_{s \to -\infty} f(s) = \frac{1}{B^\beta}.$$

4. Tétel:

$$\lim_{\alpha \to \infty} H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\lambda(P,Q)}{B^\beta} \qquad (\beta > 0).$$

Bizonyítás:

A tétel állítása a 2. Lemmából triviálisan következik.

Megjegyzések:

1. A 2. Lemma második megjegyzésében kapott eredményből következik, hogy

$$\lim_{s \to -\infty} H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P,Q)\, B^\beta.$$

2. $\alpha \geq 1$ esetén a

$$\frac{\lambda(P,Q)}{B^\beta} \leq H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq H_{1,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

$\alpha < 1$ esetén pedig a

$$H_{1,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq \frac{\lambda(P,Q)}{B^\beta}$$

egyenlőtlenség áll fenn.

5. Tétel :

Ha $p_i > 0$; $q_i > 0$ $i = 1, 2, \ldots, n$ és $\beta > 0$; $\alpha > 0$, akkor tetszőlegesen rögzített $\mathbf{p}$ és $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$ esetén $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq \lambda(P, Q)$, az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{q} = \gamma \mathbf{p}$, ahol $\gamma = \frac{Q}{P}$, $P = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

Bizonyítás:

Ha $\mathbf{q} = \gamma \mathbf{p}$, akkor $\alpha \neq 1$ esetén

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q) \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma p_i p_k}{\gamma P^2} \left(\frac{\gamma p_i p_k}{\gamma p_k p_i} \right)^{\alpha-1} \right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}} = \lambda(P, Q)$$

$\alpha = 1$ esetén pedig

$$H_{1,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{\gamma q_k} \right)^{\beta\left(\frac{Q}{P}\frac{p_k}{Q} - \frac{p_k}{P}\right)} = \lambda(P, Q).$$

Ha pedig $\mathbf{q} \neq \gamma \mathbf{p}$, akkor a 3. Tétel értelmében $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ szigorúan monoton csökkenő, ezért tetszőleges $\alpha > 0$-ra

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < H_{0,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q).$$

Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Az eddig kapott eredmények alapján könnyen belátható, hogy $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$; $\beta \geq 0$, $\alpha \geq 0$ esetén rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1° $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_{\alpha,\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

2° $0 \leq H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq 1$.

3° $\beta \neq 0$ esetén $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.

4° Ha tetszőleges $P > 0$, $Q > 0$ és $c > 0$ esetén

$\lambda(P, Q) = \lambda(cP, cQ)$, akkor

$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_{\alpha,\beta}(c\mathbf{p}, c\mathbf{q})$.

Valóban az 1° tulajdonság triviálisan teljesül, mert (1) alapján $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a p_i és q_i változók szimmetrikus függvénye ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Továbbá $\alpha \geq 0$ esetén, az 5. Tétel alapján:

$$0 \leq H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq \lambda(P, Q) \leq 1.$$

Mivel $\lambda(P, Q) = 1$, akkor és csak akkor teljesül, ha $P = Q$, továbbá $\mathbf{q} \neq \gamma \mathbf{p}$, ahol $\gamma = \frac{Q}{P}$, esetén $H_{\alpha,\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < \lambda(P, Q)$.

Így a 2° és 3° tulajdonság érvényessége bizonyított.

A 2° tulajdonság tetszőleges $\alpha < 0$ esetén nem igaz, mert például $n = 2$; $p_1 = 8$; $p_2 = 5$; $q_1 = 4$; $q_2 = 2$; $\alpha = -20$; $\beta = 21$ esetén

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 22{,}78\lambda(P, Q).$$

s ha itt $\lambda(P, Q) = \dfrac{2\sqrt{PQ}}{P+Q}$, akkor $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 19{,}69$. (Lásd még a 4, Tétel 2. megjegyzését!)

A 4° tulajdonság behelyettesítéssel egyszerűen adódik.

3. A hasonlósági függvény speciálisabb esetei

Az alábbi vizsgálatok a hasonlósági függvényben szereplő változók, illetve paraméterek speciálisabb választásaival függnek össze. Vizsgálatainknál már szerepet játszik a $\lambda(P, Q)$ szimmetrikus függvény megválasztása is. A következő tétel $\lambda(P, Q)$ konkrét megválasztásával függ össze.

6. Tétel:

Ha $\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\tau \geq 0$; $\beta > 0$; $Q < P$, akkor a

(8) $$\lambda(P, Q) = \left[\frac{4PQ}{(P+Q)^2}\right]^{2\beta+\tau}$$

választás esetén előálló:

(9) $$H^*_{\frac{1}{2},\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left[\frac{2\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{p_k q_k}}{P+Q}\right]^{4\beta}\left[\frac{2\sqrt{PQ}}{P+Q}\right]^{2\tau}$$

hasonlósági függvény szigorúan monoton növekedő függvénye q_j-nek a $[0, p_j)$ intervallumon, minden $j(1 \leq j \leq n)$-re.

Bizonyítás:

A $H^*_{\frac{1}{2},\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ függvény szóban forgó monotonitásának belátásához $\beta > 0$; $\tau \geq 0$ és (9) miatt elegendő kimutatni, hogy a

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{p_k q_k}}{P+Q} \quad \text{és} \quad K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2\sqrt{PQ}}{P+Q}$$

(pozitív értékű) függvények q_j-nek szigorúan monoton növekedő függvénye. minden $j(1 \leq j \leq n)$-re a $[0, p_i)$ intervallumon.

Ehhez pedig csak azt kell igazolni, hogy

$$\frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_j} > 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_j} > 0.$$

Mivel

$$\frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{P+Q}{2}\right)^{-2}\left(\frac{p_j \frac{P+Q}{2}}{\sqrt{p_j q_j}} - \sum_{k=1}^{n}\sqrt{p_k q_k}\right);$$

és $p_j > q_j$ miatt $p_j > \sqrt{p_j q_j}$,

valamint fennáll $\dfrac{P+Q}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{p_k q_k} > 0$;

ezért

$$\frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_j} > 0.$$

Másrészt

$$\frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{Q}}\left(\frac{P+Q}{2}\right)^{-2}\left(\frac{P}{2} - \frac{Q}{2}\right)$$

és $P > Q$ miatt

$$\frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_j} > 0.$$

Ezzel a 6. Tétel bizonyítása teljes.

Külön érdekessége van annak az esetnek, amikor $\beta = 1$; $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ valószínűségi eloszlásokat reprezentál. Ekkor $P = Q = 1$, s így $\lambda(P, Q) = 1$, továbbá

$$H_{\alpha,1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_k q_i \left(\frac{p_k q_i}{q_k p_i}\right)^{\alpha-1}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad (\alpha \neq 1).$$

Mindkét oldal logaritmusát véve kapjuk, hogy

$$-\log_2 H_{\alpha,1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\alpha - 1} \log_2 \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{p_i}{q_i}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha - 1} \log_2 \sum_{k=1}^{n} q_k \left(\frac{q_k}{p_k}\right)^{\alpha-1}.$$

Az információelméletben (Vö.: [5]) az

(10) $$I_\alpha(\mathbf{p}|\mathbf{q}) = \frac{1}{\alpha - 1} \log_2 \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{p_i}{q_i}\right)^{\alpha-1}$$

kifejezést a $\mathbf{q}$ *eloszlásnak a* $\mathbf{p}$ *eloszlással való helyettesítésénél fellépő* α*-ad rendű információnyerésnek nevezik.* (Más elnevezéssel I_α divergencia.) Nyilvánvalóan

$$-\log_2 H_{\alpha,1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = I_\alpha(\mathbf{p}|\mathbf{q}) + I_\alpha(\mathbf{q}|\mathbf{p}) = J_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

ahol $J_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ eloszlások különbözőségének a mérőszáma (J_α divergencia).

Ha $p_k = \dfrac{1}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ vagyis

ha $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}} = \left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n}\right\}$, akkor

$$I_\alpha(\mathbf{q}|\hat{\mathbf{p}}) = \log_2 n + \frac{1}{1 - \alpha} \log_2 \sum_{k=1}^{n} q_k^\alpha.$$

Ugyancsak az információelméletben az

$$I_\alpha(\mathbf{q}) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \sum_{k=1}^{n} q_k^\alpha \tag{11}$$

kifejezést a $\mathbf{q}$ *eloszláshoz tartozó* α*-ad rendű információmértéknek nevezik.*

Nyilvánvalóan

$$I_\alpha(\mathbf{q}|\hat{\mathbf{p}}) = I_\alpha(\hat{\mathbf{p}}) - I_\alpha(\mathbf{q})$$

$$I_\alpha(\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{q}) = \frac{\alpha}{1-\alpha} I_{1-\alpha}(\hat{\mathbf{p}}) - \frac{\alpha}{1-\alpha} I_{1-\alpha}(\mathbf{q}),$$

ahol

$$I_\gamma(\hat{\mathbf{p}}) = \log_2 n.$$

Az itt kapottakra való tekintettel

$$-\log_2 H_{\alpha,1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 n - I_\alpha(\mathbf{q}) - \frac{\alpha}{1-\alpha} I_{1-\alpha}(\mathbf{q}).$$

Ha $\alpha = 1$, akkor

$$-\log_2 H_{1,1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{n} (p_k - q_k) \log_2 \frac{p_k}{q_k} = I_1(\mathbf{p}|\mathbf{q}) + I_1(\mathbf{q}|\mathbf{p}) = J_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

ahol

$$I_1(\mathbf{q}|\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n} q_k \log_2 \frac{q_k}{p_k} = \lim_{\alpha \to 1} I_\alpha(\mathbf{q}|\mathbf{p}),$$

([10] az $I_1(\mathbf{q}|\mathbf{p})$ kifejezést a $\mathbf{q}$ eloszlásnak a $\mathbf{p}$ eloszlástól való információelméleti távolságnak nevezi.)

Ha $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}$, akkor

$$I_1(\mathbf{q}|\hat{\mathbf{p}}) = \log_2 n - \sum_{k=1}^{n} q_k \log_2 \frac{1}{q_k} = I_1(\hat{\mathbf{p}}) - I_1(\mathbf{q}),$$

s itt

$$I_1(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{n} q_k \log_2 \frac{1}{q_k} = \lim_{\alpha \to 1} I_\alpha(\mathbf{q}), \tag{12}$$

ami *nem más, mint a Shannon-féle entrópia* (1. rendű információ).

Könnyen belátható, hogy az entrópia (bizonytalanság) és a hasonlósági mérték között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{q}) &= \log_2 H_{1,1}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log_2 q_k = \\ &= \log_2 H_{1,1}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) + \sum_{k=1}^{n} \log_2 \frac{\frac{1}{n}}{q_k} = \log_2 H_{1,1}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) + n\, I_1(\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{q}). \end{aligned} \tag{13}$$

Megemlítjük, hogy az eloszlások eltérésének a J_α divergencián kívül további számos más mérőszámát is szokás használni. Így például az I_α divergenciát χ^2 eltérést stb. (Bővebbet lásd: [9] 38–42. o.)

Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk megemlítjük még, hogy a hasonlósági függvényt nemcsak diszkrét változók, hanem folytonos változók esetében is definiálhatjuk, értelmezhetjük.

Ha például $\mathbf{p} = f(x) \geq 0$ és $\mathbf{q} = g(x) \geq 0$ az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvények, akkor

$$H_{1/2,1/4}\big(f(x), g(x)\big) = H_{1/2,1/4}(f, g) = \lambda(P, Q) \int_a^b \sqrt{f(x)g(x)}\,dx, \tag{14}$$

ahol

$$P = \int_a^b f(x)dx; \quad Q = \int_a^b g(x)dx.$$

Ha $P = Q = 1$, akkor (14)-ből speciális esetként a *Hellinger*-integrált kapjuk, (Vö. [9] 40. o.), amelyet mint mérőszámot – többek között – az alakfelismeréssel kapcsolatos problémák megválaszolásánál használnak.

4. A hasonlóság mértékének alkalmazása függvényközelítés esetén

A) eset (interpoláció): Adott $x_0, x_1, \ldots, x_n$ interpolációs alappontokhoz tartozzanak az $y_0, y_1, \ldots, y_n$ értékek.

Legyen $p_k = y_k$; $q_k = g_n(x_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, ahol $g_n(x)$ egy n-edfokú polinom. Határozzuk meg a $g_n(x)$ polinomot úgy, hogy a $\mathbf{p} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ és $\mathbf{q} = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ vektorokra nézve

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1$$

teljesüljön. Ekkor a $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ hasonlósági függvény 2° tulajdonsága alapján szükségképpen fennáll, hogy

$$y_k = g_n(x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Mint ismeretes egy és csak egy olyan n-edfokú polinom létezik, amely (15)-nek eleget tesz, és ezt a polinomot például a jól ismert Lagrange-formula szolgáltatja. Ez esetben tehát:

$$g_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i,$$

ahol:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

$(i = 0, 1, \ldots, n)$, a Lagrange-féle interpolációs alappolinomok.

A továbbiakban rátérünk a *B)* eset (momentumok módszere) ismertetésére. Előbb azonban szükségünk lesz egy új fogalomnak a „*hasonlóság váratlansága mértéké*"-nek a bevezetésére.

Minden $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ vektorpárnak megfeleltetünk egy olyan $W_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ valós számot, amely csak a $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ hasonlósági mértéktől függ. Pontosabban szólva a $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ vektorpárhoz a

$$W_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = F\big(H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\big), \ (\beta > 0)$$

értéket rendeljük, ahol $F(x)$ monoton csökkenő függvény. Abban az esetben, amikor még az $F(xy) = F(x) + F(y)$ és $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\beta}$ is teljesül, akkor *a szóban levő számot a* **p** *és* **q** *vektorok hasonlósági váratlanságának nevezzük.*

Nem nehéz belátni, hogy a közölt feltételek mellett:

$$(16) \qquad W_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\beta} \log_2 \frac{1}{H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}, \quad (\beta > 0).$$

Az 1. Tétel alapján nyilvánvaló az alábbi állítás helyessége:

7. Tétel:

Ahhoz, hogy tetszésszerinti $\beta > 0$ esetén $W_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ β-tól független legyen, szükséges és elégséges, hogy $\lambda(P, Q) = 1$ legyen. Ekkor

$$(17) \qquad W_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} V_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = J_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

vagyis a hasonlóság váratlansága megegyezik a különbözőség mértékével.

1. Következmény

$V_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q) = 1$ azaz, ha $P = Q$.

B) eset (momentumok módszere):

Legyen $p_k = y_k$; $q_k = g(x_k;\, a_0, a_1, \ldots, a_s) = g(x_k;\, \mathbf{a})$, ahol $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_s)$ egyelőre ismeretlen paramétervektor, $g(x;\, \mathbf{a})$ tetszőleges függvény.

Feladat:

Ha az $x_k (> 0)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ értékekhez valamilyen módon (pl. méréssel, megfigyeléssel stb.) hozzárendeljük, meghatározzuk az $y_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ értékeket, akkor fennáll azon kérdés: hogyan válasszuk meg az **a** paraméter vektort ahhoz, hogy a közelítés a „lehető legjobb” legyen?

Egy lehetséges eljárás a következő:

Legyen:

$$\mathbf{X}^{(j)} = \begin{pmatrix} x_1^j & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_2^j & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & x_n^j \end{pmatrix}; \quad (j = 0, 1, \ldots, s).$$

Meghatározandók azon $a_0, a_1, \ldots, a_s$ értékek, amelyek esetén fennáll a

$$(18) \qquad J_\alpha(\mathbf{X}^{(j)}\mathbf{p}, \mathbf{X}^{(j)}\mathbf{q}) = V_\alpha(\mathbf{X}^{(j)}\mathbf{p}, \mathbf{X}^{(j)}\mathbf{q}) \qquad (j = 0, 1, \ldots, s)$$

összefüggés; más szóval az **a** vektort határozzuk meg úgy, hogy a hasonlóság váratlansága egyezzen meg a különbözőség mértékével.

Mivel $H_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q)$, továbbá $\lambda(P, Q) = 1$ teljesülésének kritériuma $P = Q$, azért (18)-ból következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^j y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^j g(x_k; \mathbf{a}); \qquad (j = 0, 1, \ldots, s).$$

Ez végső soron $s + 1$ számú egyenletet jelent az **a** komponenseire nézve; az eljárás szempontjából pedig a momentumok módszerére vezet.

Ha pl. $g(x; \mathbf{a}) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_s x^s$, akkor az a_l $(l = 0, 1, \ldots, s)$ paraméterek egyértelmű ,,legjobb'' becslésére ugyanazt kapjuk, mintha a legkisebb négyzetek módszerét alkalmaztuk volna (Vö.: [11] 376. o.)

5. A hasonlósági függvény valószínűségi változók esetén

Vizsgáljuk a

$$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

függvénynek azt az esetét, amikor

$$\alpha = \frac{1}{2}; \ \beta = \frac{1}{4} \text{ és } \mathbf{p} > \mathbf{0}; \ \mathbf{q} > \mathbf{0}.$$

Ekkor könnyen meggyőződhetünk arról, hogy

$$(19) \qquad H_{1/2,\,1/4}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q) \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k q_k}}{\sqrt{PQ}}.$$

Legyen:

$$(20) \qquad R(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{PQ}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k q_k}.$$

Ekkor:

$$(19') \qquad H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda(P, Q) \cdot R(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Az $R(\mathbf{p}, \mathbf{q})$-nak az alábbi valószínűségszámítási vonatkozású interpretációját adhatjuk:

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ teljesen független valószínűségi változók, melyre nézve $M(\xi_k) = m_k$, $D(\xi_k) = \sigma_k$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Legyenek továbbá $a_k \sigma_k = \sqrt{p_k} > 0$; $b_k \sigma_k = \sqrt{q_k} > 0$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ valós számok, és legyen:

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k(\xi_k - m_k)$$

$$\eta_2 = \sum_{k=1}^{n} b_k(\xi_k - m_k).$$

Ekkor:

$$M(\eta_1) = 0;\ M(\eta_2) = 0;$$

$$M(\eta_1\eta_2) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k q_k},$$

$$D(\eta_1) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_k} = \sqrt{P},$$

$$D(\eta_2) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \sigma_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} q_k} = \sqrt{Q},$$

és így η_1 és η_2 korrelációs együtthatójára fennáll az alábbi összefüggés:

$$(21) \qquad r(\eta_1, \eta_2) = \frac{M(\eta_1\eta_2) - M(\eta_1)\, M(\eta_2)}{D(\eta_1)\, D(\eta_2)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k q_k}}{\sqrt{PQ}} = R(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy $R(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a

$$\mathbf{p}^* = (\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}) \text{ és a } \mathbf{q}^* = (\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2}, \ldots, \sqrt{q_n})$$

vektorok iránycosinusa.

Ezzel a hasonlósági függvényt nemcsak a J_α divergenciával, hanem a korrelációs együtthatóval is kapcsolatba hoztuk.

Ha $\lambda(P, Q) = \dfrac{4PQ}{(P+Q)^2}$, akkor, az eddig kapott eredmények alapján könnyen belátható, hogy

$$(19'') \quad H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{4D(\eta_1)\, D(\eta_2)}{(D^2(\eta_1) + D^2(\eta_2))^2} M(\eta_1 \eta_2) = \frac{4D^2(\eta_1)\, D^2(\eta_2)}{[(D^2(\eta_1) + D^2(\eta_2))]^2} r(\eta_1, \eta_2)$$

$P = Q$ esetén pedig a $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = r(\eta_1, \eta_2)$ összefüggés is teljesül.

Megjegyzések:

1. Mivel

$$D^2(\eta_1 + \eta_2) = 2r(\eta_1, \eta_2) D(\eta_1) D(\eta_2) + D^2(\eta_1) + D^2(\eta_2),$$

ezért a (19′) és (20)-ra való tekintettel

$$(19''') \qquad H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{D^2(\eta_1 + \eta_2) - [D^2(\eta_1) + D^2(\eta_2)]}{2D(\eta_1)\, D(\eta_2)} \lambda(P, Q).$$

2. Az itt kapott eredmények rávilágítanak a $J_{1/2}$ divergencia valószínűségszámítási jelentésére is. Ugyanis a

$$(22) \qquad J_{1/2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 4 \log_2 \frac{\sqrt{PQ}}{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k q_k}}$$

összefüggés felhasználásával kapjuk, hogy

$$(22') \qquad J_{1/2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -4 \log_2 R(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -4 \log_2 r(\eta_1, \eta_2),$$

vagyis a $J_{1/2}$ divergencia a korrelációs együttható logaritmusának konstans-szorosa.

3. Tegyük fel, hogy η olyan valószínűségi változó, amely a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ teljesen független valószínűségi változók függvénye, mégpedig

$$\eta = h(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

ahol $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olyan n-változós valós függvény, amelynek az összes elsőrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak.

Legyen $M(\xi_k) = m_k$ és $D(\xi_k) = \sigma_k$.

A többváltozós Taylor-formula szerint

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h(m_1, m_2, \ldots, m_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_k}(x_k - m_k),$$

s itt a deriváltak az $x_k^* = m_k + \vartheta_k(x_k - m_k)$ $(0 < \vartheta_k < 1;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ helyen veendők. Amennyiben a ξ_k valószínűségi változók szórásai kicsinyek, akkor az m_k helyen vett $\frac{\partial h}{\partial x_k} = a_k$ tényezőket első közelítésben állandónak lehet venni és így

$$M(\eta) \approx h(m_1, m_2, \ldots, m)$$

$$D^2(\eta) \approx D^2\{h(m_1, m_2, \ldots, m_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_k}(\xi_k - m_k)\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial x_k}\right)^2 D^2(\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_k^2,$$

itt a parciális deriváltak az $m_1, m_2, \ldots, m_n$ helyen veendők.

Ha feltételezzük, hogy $M(\eta) = 0$, akkor $\eta \approx \sum_{k=1}^{n} a_k(\xi_k - m_k)$ közelítéssel élhetünk. A $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ismeretében az a_k együtthatók meghatározhatók s ezt a tényt felhasználhatjuk a p_k értékek megválasztásánál.

6. A kapott eredmények egy alkalmazása

Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk bemutatjuk, hogy az eddig kapott eredményeket hogyan lehet felhasználni sportteljesítmények értékelésére. Pontosabban az 1976. évi nyári olimpiaán elért eredmények alapján az országok közötti rangsorolással foglalkozunk.

Elöljáróban megemlítjük, hogy az utóbbi időben egyre gyakrabban találkozunk olyan törekvéssel, mely szerint egyes országok igyekeznek helyüket a sportvilágban objektíven meghatározni, azért, hogy a fejlődés érdekében teendő intzékedésekhez egyfajta támpontot kapjanak. (Bővebb információként lásd pl. [12].)

Tényként említendő, hogy az olimpián résztvevő országokat hivatalosan nem rangsorolják, de „nem hivatalos'' jelzőkitételekkel szinte minden országban készül az érmek száma vagy a további helyezések alakulásának figyelembevétele alapján valamilyen rangsorolás.

Hazánkban az első hat helyezés 7—5—4—3—2—1 pontszám hozzárendeléssel készült rangsorolás terjedt el, s ezt veszi alapul Köves Pál is [12]-ben amikor a megfelelő értékelő módszer kialakítását tűzi maga elé. A kiértékelési mód legegyszerűbb esetében a pontszámok összegének monoton csökkenő sorrendje adja a helyezések számát. A [12] a rangsor meghatározásánál már a népesség számának alakulására is tekintettel van, s a lélekszám logaritmusa és a pontszám logaritmusa között lineáris összefüggést tételez fel. Mi e helyen nem bocsátkozunk ilyen irányú vizsgálatokba, csupán az 1976-ban Montreálban rendezett nyári olimpiai eredmények alapján végzünk rangsorolást a [13]-ban található alapinformációk felhasználásával, figyelembevételével.

Számításaink során a következő módon jártunk el: A $\mathbf{p}$ vektor i-edik koordinátája 7 ha az i-edik versenyszámban egy ország csak egy versenyzőt (csapatot) indíthat, ellenkező esetben $7+5+4=16$, azaz a $\mathbf{p}$ vektor i-edik ($i=1, 2, \ldots, 198$) koordinátáját az i-edik versenyszámban egy ország által elérhető összpontok maximális száma adja meg.

A $\mathbf{q}$ vektor koordinátáit minden ország esetén az illető ország által az egyes versenyszámokban ténylegesen elért összpontok száma adja meg. A $\lambda(P, Q) = \dfrac{4PQ}{(P+Q)^2}$ választás mellett (19) alapján elvégzett számítások eredményét az alábbi táblázat tartalmazza:

Helyezés [13] szerint	Ország	Pontszámok	H(p,q) értékek	Helyezés a H(p,q) értékek szerint
1	Szovjetunió	790	0,614396	1
2	Német Demokratikus Köztársaság	636	0,494744	2
3	Egyesült Államok	609	0,478226	3
4	Német Szövetségi Köztársaság	282	0,207346	4
5	Lengyelország	192	0,139646	5
6	Románia	181	0,122666	6
7	Japán	168	0,097549	9
8	Bulgária	167	0,102193	8
9	Magyarország	155	0,104389	7
10	Kanada	108	0,075358	10
11	Olaszország	101	0,067864	11
12	Nagy-Britannia	96	0,054697	12
13	Kuba	88	0,040265	14
14	Csehszlovákia	75	0,041663	13
15	Franciaország	71	0,036493	15
16	Finnország	56	0,026886	16
17	Jugoszlávia	56	0,022302	19
18	Svédország	55	0,024707	18
19	Ausztrália	52	0,026113	17
20	Hollandia	41	0,016268	20
21	Új-Zéland	36	0,012894	22
22	Belgium	35	0,013736	21
23	Dél-Korea	34	0,010141	23

Helyezés [13] szerint	Ország	Pontszámok	H(p, q) értékek	Helyezés a H(p, q) értékek szerint
24	Svájc	24	0,006956	26
25	Brazília	24	0,009039	24
26	Spanyolország	23	0,007023	25
27	Dánia	18	0,004217	28
28	Norvégia	18	0,003947	29
29	Koreai Népi Demokratikus Közt.	17	0,004258	27
30	Irán	16	0,003874	31
31	Jamaica	15	0,003920	30
32	Mongolia	14	0,003404	32
33	Mexikó	13	0,002439	35
34	Portugália	12	0,003194	33
35	Ausztria	10	0,002623	34
36	Trinidad	8	0,001471	37
37	Írország	7	0,001615	36
38	Puerto Rico	7	0,001272	38
39	Venezuela	5	0,000521	39
40	Bermuda	4	0,000418	40–41
41	Pakisztán	4	0,000418	40–41

Meg kívánjuk jegyezni, hogy [12]-ben a lényegesen „radikálisabb" sorrend változtató tényezők alkalmazásakor is számolhatunk pontszámok helyett H értékekkel és az ilyen H értékek alakulása szerint rangsorolhatunk.

(Beérkezett: 1977. április 19.)

IRODALOM

[1] DOBÓ, A.: *Számítástechnikai eszközök és tulajdonságainak értékelése matematikai módszerekkel.* Budapest, 1972. KGM ISZSZI kiadvány.

[2] DOBÓ, A.: *A termékek tulajdonságainak számszerű jellemzése.* Minőség és Megbízhatóság IX(1975):5.

[3] DOBÓ, A.–dr. FENYVES, F.–SZAJCZ, S.: *A vállalatok és számítógép-rendszerek egyértelmű megfeleltetése.* Budapest, 1976. KIM részére készült tanulmány.

[4] DOBÓ, A.: *Minőség és hatékonyság.* Minőség és Megbízhatóság X(1976):4.

[5] RÉNYI, A.: *Az információelmélet néhány alapvető kérdése.* MTA III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei, X(1960):3.

[6] DOBÓ, A.–SZAJCZ, S.: *Szakvélemények értékelése valószínűségszámítási módszerekkel. I. rész.* Minőség és Megbízhatóság X(1976):6. *II. rész* u.o. XI(1977):1.

[7] PÁRNICZKY, G.: *A statisztikai informatika alapjai.* Budapest, 1976. Statisztikai Kiadó Vállalat.

[8] HARDY, G.H.–LITTLEWOOD, J. E.–PÓLYA, G.: *Inequalities;* Cambridge, 1952. University Press.

[9] FRITZ, J.: *Az alakfelismerés statisztikai módszerei.* Budapest, 1974. MTA Mat. Kut. Int. Kiadványa.

[10] RÉNYI, A.: *Napló az információelméletről.* Budapest, 1976. Gondolat Könyvkiadó.

[11] RÉNYI, A.: *Valószínűségszámítás.* Budapest, 1954. Tankönyvkiadó.

[12] KÖVES, P.: *Az olimpiai eredmények értékeléséhez.* Statisztikai Szemle 54(1976):11.

[13] Népsport; 1976. augusztus 3.

SIMILARITY FUNCTION AND SOME OF ITS PROPERTIES

In this paper we use the concept of similarity function as introduced in [2]. More exactly: Given two n-dimensional real vectors of positive components: $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ by the measure H expressing similarity of the two vectors we understand, by definition the expression

$$H \stackrel{\text{def}}{=} H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda \cdot (PQ)^{\frac{\beta}{\alpha-1}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha} q_i^{1-\alpha}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k^{1-\alpha} q_{\alpha}^{k}\right)\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$$

where α and β are real numbers satisfying the conditions $0 \leq \beta$ and $0 \leq \alpha \neq 1$ resp., $P = \sum_{k=1}^{n} p_k$, $Q = \sum_{k=1}^{n} q_k$, and λ is such a suitably selected function of the variables P and Q for which $0 < \lambda \equiv \lambda(P, Q) \leq 1$ holds, and here $\lambda(P, Q) = 1$, if, and only if $P = Q$.

In the first part of the paper the authors point out that the origin of the function $H_{\alpha,\beta}(p, q)$ is related to the formation of averages.

The second part contains results indicating the most important characteristics of the similarity function (e.g. proposition No. 1 stating the connexion with the Jeffreys divergence J_α; the possible interpretability of the similarity function in the case of $\alpha = 1$, etc).

Investigations of the third part are connected with the specification of the variables and parametres figuring in the similarity function here an important role is played already by the actual seelction of the symmetrical function $\lambda(P, Q)$.

The fourth part of the paper deals with applicability of the similarity measure to function approximation.

The fifth part reveals interdependencies of the similarity function related to the calculus of probabilities.

In the sixth and closing part of the paper the authors present a concrete application of the results, which is concerned with the evaluation of sporting results.

ГОМОГЕНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ОСОБЕННОСТИ

В рассматриваемой работе понятие гомогенической функции используется в соответствии с толкованием по (2). Точнее, в случае
данного

$$p = p_1, p_2, \ldots p_n$$

и

$$q = q_1, q_2, \ldots q_n$$

реального вектора с положительным компонентом измерения «n» по данной формулировке под величиною «H», выражающей гомогеничность этих двух векторов, следует понимать выражение

$$H \stackrel{\text{def}}{=} H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda \cdot (P\,Q)^{\frac{\beta}{\alpha-1}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha} q_i^{1-\alpha}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k^{1-\alpha} q_k^{\alpha}\right)\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$$

в котором α и β являются реальными цифрами, удовлетворяющими условию «$0 \leq \beta$» и «$0 \leq \alpha \neq 1$», $P = \sum_{k=1}^{n} p_k$, $Q = \sum_{k=1}^{n} q_k$ и, далее, «λ», являются такой удачно выбранной симметрической зависимостью переменных «P» и «Q», относительно которой реально «$0 < \lambda \equiv \lambda(P, Q) \leq 1$» и в данном случае $\lambda(P, Q) = 1$ тогда и только тогда, когда $P = Q$.

В последующем выражении $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ будем называть гомогенической зависимостью или гомогенической мерой измерения.

В первой части работы авторы указывают, что выведение функции $H_{\alpha,\beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ связано с формированием среднего значения.

Во второй части приводятся результаты, дающие основную характеристику гомогенической функции (например, возможное толькование первого положения, касающегося связи с дивергенцией J_α типа Jeffreys, если зависимость гомогеничности равна $\alpha = 1$).

В третьей части рассматриваются переменные и параметры гомотетической функции в аспекте более тщательного отбора; в данном случае большую роль играет и выбор симметрической функции $\lambda(P, Q)$.

В четвертой части работы рассматриваются возможности использования степени гомогеничности в аспекте подхода по функции.

В пятой части приводятся аспекте расчетов гомогенической функции с точки зрения теории вероятности.

В шестой завершающей части работы авторы на конкретном примере раскрывают использование получаемых результатов в отношении оценки спортивных достижений, точнее, определения классных мест стран на олимпийских играх.