# SZIGMA

## Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

Szerkeszti:

MARTOS BÉLA

Társszerkesztők:

ANDORKA RUDOLF, BOD PÉTER, IFJ. KREKÓ BÉLA, PONGRÁCZ TIBOR



*

E szám szerzői:

ANDORKA RUDOLF, a Központi Statisztikai Hivatal osztályvezetője, Dr. BRÓDY ANDRÁS, a közgazdaságtndományok doktora, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos tanácsadója, W. GRUNDMANN; Városépítési és Építészeti Intézet, NDK, HALABUK LÁSZLÓ, a KSH Ökonometriai Laboratóriumának osztályvezetője, HULYÁK KATALIN, a KSH Ökonometriai Laboratóriumának főelőadója, H. KRAUSE, Városépítési és Építészeti Intézet, NDK, MIHÁLYFFY LÁSZLÓ, kandidátus, a SZÁMKI munkatársa, Dr. MIKÓ GYULA adjunktus, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Matematika- és Számítástechnikai Tudományos Intézet munkatársa, NYÁRY ZSIGMOND, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, Dr. PONGRÁCZ TIBOR, az Állami Népességnyilvántartó Hivatal főosztályvezetője, SIMON ANDRÁS, a Konjunktúra- és Piackutató Intézet tudományos munkatársa

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1361 Budapest, Pf. 11.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (PKHI 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKH 215–96162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111–010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488., és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185–612. Előfizetési díj egy évre: 40,– Ft

Külföldön terjeszti a KULTÚRA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest Pf. 149

Mikó Gyula

# Sztochasztikus lineáris input-output modellek halmozott ráfordítási együtthatóiról

*Simonovits* cikkéből [1] ismeretes, hogy ha egy lineáris input-output modellben az $A$ közvetlen ráfordítási együtthatómatrix elemei teljesen független valószínűségi változók — úgy, hogy az $A'$ bármely realizációjára a pozitív domináns sajátérték $\lambda(A) < 1$ —, akkor a halmozott ráfordítási együtthatókat tartalmazó $Q$ matrixra igaz a következő egyenlőtlenség:

$$(E - \varepsilon\,[A'])^{-1} \leqq \varepsilon\,[(E - A')^{-1}]$$

(ahol $\varepsilon$ a várható érték képzés operátora, $'$ a valószínűségi változót jelöli, $E$ pedig az egységmátrix.)

Simonovits [1] azt is kimutatta, hogy

$$\varepsilon\,[(E - A')^{-1}_{ij}] \geqq (E - \varepsilon\,[A'])^{-1}_{ij} + \varepsilon[a'_{ij}](\sigma^2_{ii} + \sigma^2_{jj}) \quad i \neq j;\, i, j = 1, \ldots, n$$

és

$$\varepsilon\,[(E - A')^{-1}_{ii}] \geqq (E - \varepsilon\,[A'])^{-1}_{ii} + \sigma^2_{ii} \quad i = 1, \ldots, n,$$

ahol az $[A]_{ij} = a_{ij}$, és $D^2(a'_{ij}) = \sigma^2_{ij}$.

Gyakorlati szempontból igen fontos a halmozott ráfordítási együttható pontosabb behatárolása: felső és alsó korlát megadása (vagy — ha lehetséges — eloszlásának meghatározása) — esetleg az $a_{ij}$ valószínűségi változókra tett további feltételezések árán is.

## A vizsgálat közgazdasági indokolása

A Leontief-modell egyik alapvető felhasználási területe a tervezett nettó termelés (output) előállításához szükséges bruttó termelés (input) meghatározása.

Ha a modell közvetlen ráfordítási együtthatóit úgy tekintjük, mint olyan értékeket, amely körül a valódi — vagy pedig majd a tervezett időszakban bekövetkező — érték szóródhat (vagyis esetleg nem pontosan a számításban felhasznált érték jön létre), akkor a közvetlen ráfordítási együtthatókat valószínűségi változóknak foghatjuk fel. A valószínűségi változók kényelmetlen kezelhetősége miatt a közgazdasági gyakorlatban szokás a valószínűségi változókat várható értékükkel helyettesíteni. Ez az eljárás esetünkben a szükséges bruttó termelés *szisztematikus alátervezését* eredményezi. Ugyancsak kisebb értékeket ad a közvetlen ráfordítási együtthatók várható értékével való számolás a tartalommutatókra is (egységnyi bruttó termékben levő halmozott bérköltség, illetve halmozott nyereség; stb.).

A vizsgálatunk célja, hogy az említett alulbecslés (ill. alultervezés) hibáját csökkentse, illetve alsó és felső korlátot adjon a tervezett nettó termeléshez szükséges bruttó termelés nagyságára, valamint — az egyszerűbb esetekben — a halmozott ráfordítási együtthatóknak és a szükséges bruttó termelésnek — mint valószínűségi változóknak — az eloszlását is vizsgálja.

A továbbiakban két feltételezést alkalmazunk a közvetlen ráfordítási együttható, mint valószínűségi változó eloszlására. Vizsgáljuk meg röviden, hogy ezek a feltételezések mennyire felelnek meg a közgazdasági valóságnak!

*Első feltevés:* A közvetlen ráfordítási együttható, mint valószínűségi változó, szimmetrikus eloszlású. Nézzük meg, hogyan és mitől válik a közvetlen ráfordítási együttható valószínűségi változóvá! Valószínűségi változóvá válhat a közvetlen ráfordítási együttható (illetve ennek „őse", az ágazatok közötti termékáramlás) a számbavételi pontatlanságok miatt. Mivel a mérleg összeállítását igen sok adatból végzik (vízszintesen és függőlegesen is koordinálva az összegrovatokkal), a központi határeloszlástétel értelmében az egyes adatokban levő hibák az összegezés, valamint az adatszolgáltatás függetlensége és tömegessége miatt szimmetrikus eloszlás irányába (pontosabban a normális eloszlás felé) húzzák az összeg eloszlását. A másik tipikus eset, amikor nem a benne rejlő hibák miatt tekintjük valószínűségi változóknak a közvetlen ráfordítási együtthatókat, hanem azért, mert a jövőbeni értékeikről csak valószínűségeloszlási szinten van információnk. Ettől az információtól függ, hogy feltételezhetjük-e a szimmetrikus eloszlás létét.

*Második feltevés:* A közvetlen ráfordítási együtthatók, mint valószínűségi változók, teljesen független rendszert alkotnak. A valószínűségi változók függetlenségének hipotézisére a „szükség" viszi rá a gyakorlati alkalmazót és a módszer kidolgozóját is, mivel egyfelől (az alkalmazó részéről) többnyire nem ismert a valószínűségi változók összefüggésének rendszere, másfelől (a módszer kidolgozója szempontjából) pedig e hipotézis nélkül a formulák lényegesen bonyolultabbá, szinte használhatatlanná válhatnak. Természetesen esetünkben sem tehetjük fel teljes joggal, hogy a közvetlen ráfordítási együtthatók változása között nincs összefüggés, a függetlenség hipotézise azonban első megközelítésben eredményesen alkalmazható, mivel nyújt némi tájékoztatást. Ezt az információt olyan mértékben vehetjük figyelembe, amilyen mértékben a valóságot helyesen tükrözi a függetlenség feltételezése.

## Két lemma

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$Q = [E - \varepsilon(A')]^{-1}$$

$$Q' = (E - A')^{-1}$$

ill. $$q_{kl} = [Q]_{kl}$$

és $$q'_{kl} = [Q']_{kl}.$$

*I. lemma*

Legyen $A' = A + B$, és álljon fenn $\lambda(A + B) < 1$. Ekkor

$$(E - A')^{-1} = Q + QBQ + QBQBQ + QBQBQBQ + \dots$$

*Az I. lemma bizonyítása:*

$$(E-A')^{-1}=[E-(A+B)]^{-1}=$$
$$=Q\{[E-(A+B)](E-A)^{-1}\}^{-1}=Q\{[(E-A)-B](E-A)^{-1}\}^{-1}=$$
$$=Q(E-BQ)^{-1}=Q+QBQ+QBQBQ+QBQBQBQ+\ldots,$$ ahol az $(E-BQ)^{-1}$ Leontief-inverzet hatványsorba fejtettük.

*II. lemma*

Legyen $[B]_{ij}=\xi_{ij}$. Ekkor:

$$[E-(A+B)]_{kl}^{-1}=q'_{kl}=q_{kl}+\sum_i\sum_j q_{ki}q_{jl}\xi_{ij}+$$
$$+\sum_i\sum_j\sum_p\sum_q q_{ki}q_{jp}q_{qr}q_{sl}\xi_{ij}\xi_{pq}+$$
$$+\sum_i\sum_j\sum_p\sum_q\sum_r\sum_s q_{ki}q_{jp}q_{qr}q_{sl}\xi_{ij}\xi_{pq}\xi_{rs}+$$
$$+\sum_i\sum_j\sum_p\sum_q\sum_r\sum_s\sum_u\sum_v q_{ki}q_{jp}q_{qr}q_{su}q_{vl}\xi_{ij}\xi_{pq}\xi_{rs}\xi_{uv}+\ldots$$

*A II. lemma bizonyítása:*

Írjuk fel $B$-t diadikus felbontásban:

$$B=\sum_i\sum_j e_i e_j^*\xi_{ij}.$$

Az I. lemma, valamint az

$$[YV\ldots WZ]_{pu}=\sum_q\sum_r\ldots\sum_s\sum_t y_{pq}v_{qr}\ldots w_{st}z_{tu}$$

mátrix-algebrai azonosság felhasználásával azonnal adódik a II. lemma állítása.

## Alsó korlát a halmozott ráfordítási együtthatók várható értékére

*I. tétel*

Legyenek az $a'_{ij}$ közvetlen ráfordítási együtthatók szimmetrikus, teljesen független rendszert alkotó valószínűségi változók, és legyen $D^2(a'_{ij})=\sigma_{ij}^2$. Ekkor a halmozott ráfordítási együtthatók várható értékére fennáll az

$$\varepsilon(q'_{kl})\geqq q_{kl}+\sum_i\sum_j q_{ki}q_{jl}q_{ji}\sigma_{ij}^2$$

egyenlőtlenség.

*Az I. tétel bizonyítása*

Legyen $\xi_{ij}=a'_{ij}-\varepsilon(a'_{ij})$, azaz $\xi_{ij}=a'_{ij}-a_{ij}$. Így $\xi_{ij}=0$, és $\sigma_{ij}^2=$ $=D^2(a'_{ij})=D^2(\xi_{ij})=\varepsilon(\xi_{ij}^2)$. Ezért $\xi$ szimmetricitása miatt $\xi$ páratlanadik momentumai 0-val egyenlők. Tekintsük $q'_{kl}$ kifejtését a II. lemma alapján! A szereplő valószínűségi változók függetlensége miatt azoknak a tagoknak a várható értéke, amelyekben legalább egy valószínűségi változó a páratlanadik hatványon szerepel, 0-val egyenlő. A többi tag — ahol a valószínűségi változók csak páros hatványon szerepelnek — nem-negatívak (figyelembe véve azt is, hogy a halmozott ráfordítási együtthatók is nem-negatívak). A 0-val egyenlő, és a több valószínűségi változót tartalmazó tagokat elhagyva kapjuk az I. tétel állítását.

*II. tétel*

Ha a közvetlen ráfordítási együtthatók között — a szimmetrikus eloszlásúakon kívül — van jobbra aszimmetrikus eloszlású is, az I. tétel akkor is igaz.

*A II. tétel bizonyítása*

A jobbra aszimmetrikus valószínűségi változók páratlanadik centrális momentumai nem-negatívak, így az I. tétel esetén 0-vá vált tagok most nem-negatívak lesznek, ezért elhagyásuk az egyenlőtlenség kisebb oldaláról nem befolyásolja az egyenlőtlenség fennállását.

*I. következmény*

A fenti tételek alapján alsó korlátot adhatunk a tervezett nettó termeléshez szükséges bruttó termelést leíró vektor elemeire. Jelölje $c_k$ a $k$-adik ágazat nettó, $x_k$ pedig a bruttó termelését. Ekkor:

$$\varepsilon(x'_k) > \sum_l q_{kl} c_l + \sum_l \sum_i \sum_j q_{ki} q_{ji} q_{jl} \sigma_{ij}^2 c_l$$

Mivel $\sum_l q_{kl} c_l = x_l$, így

$$\varepsilon(x'_k) > x_k + \sum_i [q_{ki}(\sum_j q_{ji} x_j \sigma_{ij}^2)].$$

## A halmozott ráfordítási együtthatók eloszlása

*III. tétel*

Legyen a közvetlen ráfordítási együtthatók $A$ mátrixának — egy kivételével — minden eleme ismert konstans, csak az $a'_{ij}$ legyen valószínűségi változó, vagyis

$$A' = A + e_i e_j^* \xi,$$

ahol $a_{ij} + \xi \geq 0$. (Az $a'_{ij}$-re, illetve $\xi$-re *nem* kötjük ki a szimmetricitást!)

Ha

$$|\xi| < \frac{1}{q_{ij}}, \text{ akkor } q'_{kl} = q_{kl} + \frac{q_{ki} q_{jl} \xi}{1 - q_{ji} \xi}.$$

*A III. tétel bizonyítása*

Alkalmazzuk a II. lemmát, valamint a végtelen mértani sorozat összegképletét:

$$q'_{kl} = q_{ki} q_{jl} \xi + q_{ki} q_{ji} q_{jl} \xi^2 + q_{ki} q_{ji} q_{ji} q_{jl} \xi^3 + q_{ki} q_{ji} q_{ji} q_{ji} q_{jl} \xi^4 + \ldots =$$
$$= q_{kl} + q_{ki} q_{jl} \xi (1 + q_{ji} \xi + q_{ji}^2 \xi^2 + q_{ji}^3 \xi^3 + \ldots) =$$
$$= q_{kl} + \frac{q_{ki} q_{jl} \xi}{1 - q_{ji} \xi}, \text{ ha } q_{ji} \, |\xi| < 1.$$

*II. következmény*

Ha $\xi$ eloszlásfüggvénye $F(x)$, sűrűségfüggvény $f(x)$, akkor a $q'_{kl}$ halmozott ráfordítási együttható $G(x)$ eloszlás- és $g(x)$ sűrűségfüggvénye:

$$G(x) = F\left[\frac{1}{q_{ji}}\left(1 - \frac{\frac{q_{ki} q_{jl}}{q_{ji}}}{x - q_{kl} + \frac{q_{ki} q_{jl}}{q_{ji}}}\right)\right], \text{ illetve}$$

$$g(x) = \frac{q_{ki} q_{jl}}{\left[q_{ij}\left(x - q_{kl} + \frac{q_{ki} q_{jl}}{q_{ji}}\right)\right]^2} f\left[\frac{1}{q_{ji}}\left(1 - \frac{\frac{q_{ki} q_{jl}}{q_{ji}}}{x - q_{kl} + \frac{q_{ki} q_{jl}}{q_{ji}}}\right)\right].$$

*III. következmény*

A tervezett ágazati nettó termeléshez szükséges bruttó termelés — mint valószínűségi változó — a következő:

$$x'_k = x_k + q_{ki} x_j \frac{\xi}{1 - q_{ji} \xi}.$$

*1. Példa*

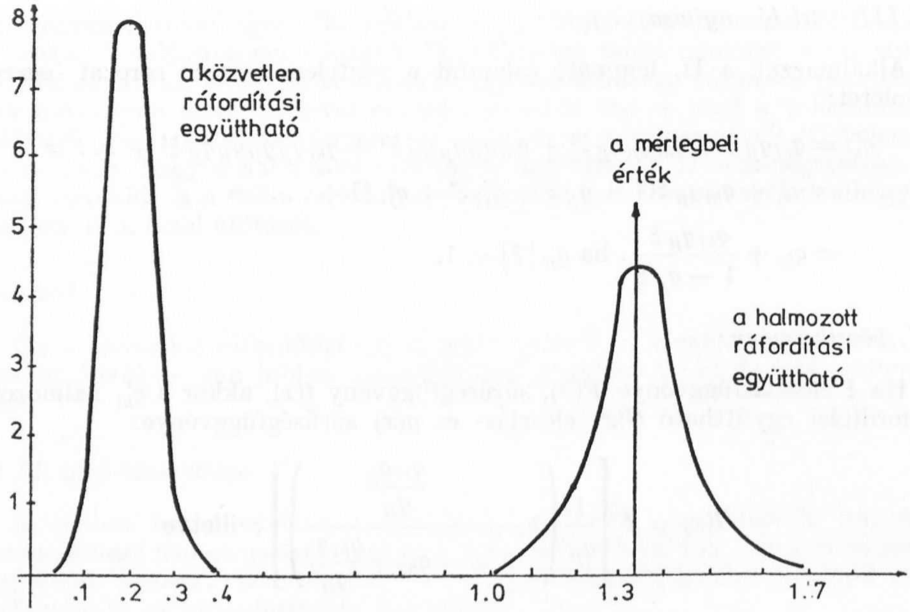
Nézzük meg, hogy ha a vegyiparnak ($v$) saját termeléséből való közvetlen felhasználását jelző ráfordítási együttható $a'_{vv}$ normális eloszlású valószínűségi változó

$$m = \varepsilon(a'_{vv}) = 0{,}2217$$
$$\sigma = D(a'_{vv}) = 0{,}05$$

paraméterekkel, akkor mi lesz a vegyiparnak a vegyipari termékekből való halmozott ráfordítását jelző $q'_{vv}$ együttható eloszlása! (Lásd az 1. ábrát.) (A mérleg alapján: $a_{vv} = 0{,}2217$ és $q_{vv} = 1{,}3492$.)

*2. Példa*

Vizsgáljuk meg, hogy a mezőgazdaság kemizálása — amit az 1 Ft értékű mezőgazdasági termékhez közvetlenül felhasznált vegyipari termékek értéké-




*1. ábra*

nek (mondjuk) 15%-os növekedése mutat — hogyan befolyásolja az egységnyi élelmiszeripari termékben „levő” — közvetlenül és közvetetten felhasznált — vegyipari termékek értékét; valamint ez a változás milyen mértékben növeli meg a bányászat, a vegyipar és a mezőgazdaság (adott nettó termelés biztosításához szükséges) bruttó termelésének nagyságát.

Az adatokat az 1972. évi, 21 ágazatos „A” típusú népgazdasági ÁKM-ből vettem.

A III. tétel alapján azt kapjuk, hogy az 1 Ft értékű mezőgazdasági termékhez közvetlenül felhasznált vegyipari termékek értékének fent leírt változása kb. 8%-kal emeli az egységnyi élelmiszeripari termékhez halmozottan felhasznált vegyipari termékek értékét.

A III. következmény alapján kiszámítható, hogy ez a változás a bányászati bruttó termelést kb. 1,9%-kal, a vegyipari bruttó termelést kb. 4,3%-kal, a mezőgazdasági bruttó termelést pedig 0,1%-kal emeli (mindegyik esetben az adott nagyságú nettó termelés biztosításához szükséges bruttó termelést). Ha a vegyipar esetén csak a közvetlenül a mezőgazdaságba irányuló termékmennyiséget emeltük volna 15%-kal, akkor ez csak 3,3%-os bruttó termelés emelkedést vont volna maga után, így — csak a vizsgált változásból adódóan — kb. 1%-kal aláterveztük volna a vegyipar szükséges bruttó termelését.

Vegyük figyelembe az eredmény szignifikáns voltának megítélésénél, hogy a $21 \times 21 = 441$ mérlegegyütthatóból csak egyetlenegyet változtattunk meg.

**Felső korlát a halmozott ráfordítási együtthatók várható értékére**

*IV. tétel*

Ha a III. tétel feltételein túlmenően $\xi$-re az is fennáll, hogy szimmetrikus eloszlású a $[-a, a]$ intervallumon, akkor:

$$\varepsilon(q'_{kl}) < q_{kl} + q_{ki} q_{ji} q_{il} \sigma^2 + \frac{q_{ki} q_{ji}^4 q_{il}}{(1 - q_{ji} a)^5} \sigma^2.$$

*A IV. tétel bizonyítása*

Írjuk fel $q'_{kl}$-t a III. tétel alapján — némileg átalakított formában — és képezzük $q'_{kl}$ várható értékét:

$$\varepsilon(q'_{kl}) = q_{kl} + \frac{q_{ki} q_{jl}}{q_{ji}^2} \left( \varepsilon \left( \frac{1}{\frac{1}{q_{ji}} - a} \right) - q_{ij} \right)$$

A továbbiakban az $\eta = \dfrac{1}{\frac{1}{q_{ij}} - \xi}$ valószínűségi változót kell vizsgálnunk. Egyszerűen adódik, hogy ha $\xi$ sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor az $\eta$ $h(x)$ sűrűségfüggvénye

$$h(x) = \frac{1}{x^2} f \left( \frac{1}{q_{ji}} - \frac{1}{x} \right), \qquad \text{az} \left[ \frac{1}{\frac{1}{q_{ji}} + a}, \frac{1}{\frac{1}{q_{ji}} - a} \right]$$

tartományon. Így

$$\varepsilon(\eta) = \int\limits_{(q_{ji}^{-1}+a)^{-1}}^{(q_{ji}^{-1}-a)^{-1}} x \frac{1}{x^2} f \left( \frac{1}{q_{ji}} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Bevezetve az $\dfrac{1}{q_{ji}} - \dfrac{1}{x} = z$ helyettesítést: $\varepsilon(\eta) = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{\frac{1}{q_{ij}} - z} f(z)\, dz.$

Fejtsük McLaurin-sorba az $\dfrac{1}{\frac{1}{q_{ji}} - z}$ kifejezést:

$$\frac{1}{\frac{1}{q_{ji}} - z} = q_{ji} - q_{ji}^2 z + q_{ji}^3 z^2 - q_{ji}^4 z^3 + \left( \frac{1}{\frac{1}{q_{ji}} - \nu} \right)^5 z^4,$$

ahol $\nu \in [-a, a]$. Helyettesítsük vissza a sorbafejtett kifejezést, és írjuk fel az integrált tagonként! Az egyes integrálok a $\xi$ valószínűségi változó momentumai, s mivel $\varepsilon(\xi) = 0$, és $\xi$ szimmetrikus:

$$\varepsilon(\eta) = q_{ji} + q_{ji}^3 \sigma^2 + \left(\frac{1}{\frac{1}{q_{ji}} - \nu}\right)^5 \int_{-a}^{a} z^4 f(z)\, dz.$$

A maradéktag értékének behatárolásánál a következőket kell meggondolni:

Mivel az integrál nem-negatív, s a $|\xi| < \frac{1}{q_{ji}}$ feltételezés miatt a szorzókonstans pozitív, $\varepsilon(\eta)$-ra a maradéktag elhagyásával alsó korlátot képezhetünk, amely $q'_{kl}$-re vonatkoztatva megfelel az I. tétel állításának (amikor csak az $a'_{ij}$ közvetlen ráfordítási együtthatót vesszük valószínűségi változónak).

A maradéktag maximális értékét akkor veszi fel, ha $\nu = a$. Az integrál értékét $\sigma^2$-tel felülbecsülhetjük, ha $|z| < 1$ (vagyis $|\xi| < 1$, ami a feladat közgazdasági tartalma miatt mindig fennáll). Így a vizsgált intervallumon $z^4 < z^2$, ezért

$$\int_{-a}^{a} z^4 f(z)\, dz < \int_{-a}^{a} z^2 f(z)\, dz = \sigma^2.$$

Tehát

$$\varepsilon(\eta) < q_{ij} + q_{ji}^3 \sigma^2 + \left(\frac{1}{\frac{1}{q_{ji}} - a}\right)^5 \sigma^2.$$

A kapott eredményt visszaírva $\varepsilon(\eta) = \varepsilon\left(\frac{1}{\frac{1}{q_{ji}} - \xi}\right)$ helyére, már adódik a IV. tétel állítása.

*(Beérkezett: 1977. május 24.)*

## IRODALOMJEGYZÉK

[1] SIMONOVITS, A.: *A Leontief-inverz alá-, illetve fölébecslésének egyik okáról* Szigma, 1973. 4. szám.

## ON CUMULATIVE INPUT COEFFICIENTS OF STOCHASTIC LINEAR INPUT-OUTPUT MODELS

Simonovits [1] has shown that if the elements of the matrix of direct input coefficients are fully independent probability variables then the Leontief-inverse (the matrix of cumulative input coefficients) computed from their expected values will be smaller than or equal to the expected value of Leontief-inverse containing probability variables, and also a lower limit has been given for the expected value of the inverse.

In the present article I am going to make proportions concerning the distribution of cumulative input coefficients as well as the lower and upper limits of their expected value in the following special cases:

a) lower limit for the excepted values of cumulative input coefficients if direct input coefficients are probability variables forming a fully independent system with symmetrical distribution;

b) distribution of cumulative input coefficients if only one single direct input coefficient is probability variable;

c) upper limit for the expected value of cumulative input coefficients if only one single direct input coefficient is probability variable and even this is of symmetrical distribution over a given interval.

## О КОЭФФИЦИЕНТАХ СОВОКУПНЫХ ЗАТРАТ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ВВОДА-ВЫВОДА

*Шимонович* [1] доказал, что если элементы матрицы коэффициентов прямых затрат являются полностью независимыми переменными вероятности, то инверсия *Леонтьева*, расчитанная на основании ожидаемых их значений (матрица коэффициентов совокупных затрат) меньше или равна ожидаемому значению инверсии Леонтьева, содержащей вероятностные переменные и, в то же время, она дает нижний предел ожидаемого значения инверсии.

В данной статье даются выводы относительно распределения, нижнего и верхнего предела ожидаемого значения коэффициентов совокупных затрат для следующих специальных случаев:

а) нижний предел ожидаемого значения коэффициента прямых затрат в том случае, если коэффициенты прямых затрат представляют собой переменные вероятностные с симметричным распределением, образующие полностью независимую систему;

б) распределение коэффициентов совокупных затрат в том случае, если вероятностной переменной является только один единственный коэффициент прямых затрат;

в) верхний предел относительно ожидаемого значения коэффициента совокупных затрат в том случае, если вероятностной переменной является только один единственный коэффициент прямых затрат и на данном интервале имеет симметричное распределение.

Bródy András

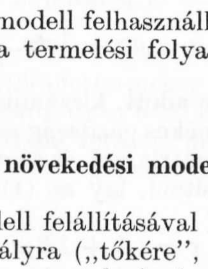
# A ciklus egy linearizált modellje*

A zárt dinamikus Leontief modell felhasználható a gazdasági ciklus közelítő leírására és számítására, ha a termelési folyamatok időszükségletét is megfelelően ábrázoljuk benne.

## A növekedési modell

A szokásos növekedési modell felállításával kezdjük: a termelési folyamatnak egy bizonyos terméktartályra (,,tőkére", ,,készletre") van szüksége. Ez a tartály minden időpillanatban tartalmának csak töredékét, mondjuk $1/t$-ed részét képes a termelési folyamat rendelkezésére bocsátani. Vagyis másképp fogalmazva, minden terméknek van egy átlagos vagy várható $t$ élettartama, létezése idején a tartályban levő készlet része. A tartály így a már megtermelt, de még fel nem használt termékeket tartalmazza.

Egyetlen termék esetében, az egyszerű újratermelésből kiindulva e körfolyamatot az 1. ábra szemlélteti.




*1. ábra*

Legyen a termelési áramlat mértéke (,,szélessége", ,,intenzitása") $x$. Az áramlat fenntartásához minden időpillanatban $ax$ mennyiségű ráfordítást kell a készletből elvonni. Az egyszerű újratermelés körülményei között $a = 1$. A folyamat, amelyet egyelőre ,,azonnal" végbemenőnek tekintünk, ugyanannyi terméket von el e készletből, mint amennyit pótol. Ezért a készlet, bármekkora legyen is, se nem csökken, se nem növekszik. Az egyszerű újra-

* Köszönetemet fejezem ki *Simonovits* Andrásnak és *Tarján* Tamásnak, akik az eredeti kézirat számos hibájára felhívták figyelmemet, s így segítettek azok kiküszöbölésében. Az 5. egyenlet nem teljesen szabatos voltán azonban együttesen sem tudtunk egyelőre javítani.

termelés újratermeli önmaga folytatásának feltételeit s érzéketlen a tőke nagysága iránt. Ha most $a < 1$, akkor az újratermelés bővítése lehetségessé válik, mivel a termelés eredménye nagyobb, mint ráfordítása, tudniillik $ax < x$. E ráfordításhoz azonban $t$-szerte nagyobb, tehát $atx$ nagyságú készlet szükséges előbbi feltevésünk szerint.

Ha mind a készletet, mind a termelés áramlatát $\lambda$ ütemben kívánjuk növelni, tehát ha $dx/dt = \dot{x} = \lambda x$ fennállását kívánjuk biztosítani, akkor a termelésnek ($x$), nemcsak a ráfordítást ($ax$), kell pótolnia, hanem ezenfelül a készleteket ($atx$), is növelnie kell $\lambda$ ütemben, azaz egy $\lambda atx$ nagyságú többletterméket kell létrehoznia.

A szükséges és a tényleges termelés egyenlőségét mondja ki a legegyszerűbb növekedési modell:

$$x = ax + \lambda atx. \tag{1}$$

Az egyenletből, ha $a$ és $t$ értéke adott, kiszámítható a megengedett $\lambda$ növekedési ütem. Az általános, $n$-termékes gazdaság esetében csupán az $a$ ráfordítási együtthatót kell az $A = \{a_{ik}\}$ mátrixszal, és az $at$ készletigényt a $B = \{b_{ik}\} = \{a_{ik}t_{ik}\}$ mátrixszal helyettesíteni, így az (1) egyenlet az ismert

$$x = (A + \lambda B)x \tag{2}$$

alakot ölti. E zárt dinamikus Leontief modellből a megengedett $\lambda$ növekedési rátán kívül most már a termelés $x$ egyensúlyi arányai is kiszámíthatók, amelyek e növekedést lehetségessé teszik.

## Az időszükséglet

Mindez jól ismert eredmény. Most kerül sor egy pótlólagos feltevés bevezetésére, amely azon alapul, hogy az 1. ábrában szereplő termelési folyamat vagy körforgás nyilvánvalóan nem mehet az „időn kívül" végbe, lefolytatása valamilyen megállapítható, mérhető időbe kerül.

Ez a tény a következőképpen fogalmazható meg:

*A $k$ termék előállításához az $a_{ik}$ anyagi ráfordításokon kívül egy bizonyos $g_k > 0$ idő is szükséges, amely alatt e ráfordítások késztermékké alakíthatók.*

Különlegesen hosszú időbe telik az új beruházások, gépek, felszerelések előállítása. Ezek, a közgazdasági irodalomban „keletkezési", „gesztációs" periódusoknak nevezett időtartamok adják a $g$ jelölést. Ezek az időtartamok mindig pozitívak. Valószínűleg nem nehéz megbizható statisztikai adatokat találni az egyes ágazatok jellemző termelési, „gesztációs" időszükségleteire. Ez néhány óra a sütődékben, néhány hónap a hajóépítésben, néhány év a vasútépítésben s.i.t.

Ezeket az időtartamokat már elméletileg vizsgálta W. Leontief [1] és P. Petri [2], amikor az úgynevezett általánosított inverzzel foglalkoztak — de felölelték őket a tőkére vagy készletekre vonatkozó feltevések közé. Természetesen a termelési áramlatokban található termékek is készletek (félkésztermékek vagy befejezetlen beruházások). Könnyű a két időtartamot, $t$ és $g$ értékét összegezni és együttesen kezelni, mint a tőke nagyságát együttesen megszabó időtartamot. Mégis helyes $g$ szerepét külön is figyelembe venni, mert ez új jelenségkörhöz vezet, amely a növekedési modell módosítását is szükségessé teszi. Erre tudomásom szerint *N. Georgescu-Roegen* tett először kísérletet egy $2 \times 2$-es nyílt dinamikus Leontief-rendszerrel kapcsolatban [3].

## A modell kiegészítése

Ha a termelési folyamat időszükséglete $g$, akkor a mondjuk $\tau$ időpontban megindított áramlat csak később, a $\tau + g$ időpontban fog a tartályhoz megérkezni, azaz ,,befejeződni''. Az egyenletes növekedés körülményei között azonban ez alatt az idő alatt is pótlólagos növekedés megy végbe, mégpedig $e^{\lambda g} \sim (1 + \lambda g)$ nagyságú.

Hogy tehát a növekedés egy adott egyenletes $\lambda$ ütemét fenntarthassuk, az előbbinél valamivel *nagyobb* többlettermékre van szükség. Nem elég, ha a termelési folyamat a saját ráfordításain felül egy $\lambda atx$ nagyságú többletet hoz létre, ezt még meg is kell tetéznie $\lambda g(\lambda atx)$ mértékben. Csak ezzel tud eleget tenni a saját termelési ideje alatt végbement pótlólagos növekedés pótlólagos igényének.

Így az (1) egyenlet megfelelően kibővül:

$$x = ax + \lambda atx + \lambda^2 atgx. \tag{1*}$$

Az általános eset egy új mátrix bevezetését teszi szükségessé, amely a

$$D = \{d_{ik}\} = \{b_{ik} g_k\} = \{a_{ik} t_{ik} g_k\}$$

alakban adható meg. Ennek segítségével a zárt Leontief-modell (2) egyenlete a

$$x = (A + \lambda B + \lambda^2 D)x \tag{2*}$$

alakban fejezhető ki. A megfelelő differenciálegyenlet az

$$x = Ax + B\dot{x} + D\ddot{x}$$

formát öltené.

A következőkben azonban egy ettől némiképpen eltérő differenciálegyenlet-rendszert fogunk felállítani a $D$ mátrix szerepének és a gazdasági szabályozás lehetőségeinek vizsgálata alapján.

A $D$ mátrix két időtényező szorzataként állítható elő. Úgy viszonyul a tőkelekötés $B$ mátrixához, mint az utóbbi a folyó ráfordítások $A$ mátrixához. Ha a tőke nem más, mint felhalmozott termelés, akkor az új $D$ mátrix felhalmozott készleteket, kétszeresen felhalmozott termelést jelöl. A rendszer ,,gyorsulási'' vagy ,,beindítási'' mátrixának nevezhetnénk, az elnevezés indokolására még visszatérünk.

A $D$ mátrix szerepét egy másik gondolatmenet is segít megvilágítani. Ha a (befejezett) termelés jelen színvonala $x$ nagyságú, akkor a jelenleg megindított áramlatnak $(1 + \lambda g)x$ nagyságúnak kell lennie, hiszen csak $g$ idő elteltével lesz belőle késztermék. A szükséges ráfordítás tehát $(1 + \lambda g)ax$ mértékű, s így a készlettartályban ennek $t$-szerese kell hogy legyen, azaz $atx + \lambda atgx$ mennyiségnek kell már felhalmozva lennie. Mátrix-írásmódban tehát a jelen pillanat tőkeigénye $Bx + \lambda Dx$ nagyságú. A pótlólagos $\lambda Dx = D\dot{x}$ elem azt a többletet fejezi ki, amelyre azért van szükség, mert a termelési folyamat nem ,,azonnali'', hanem meghatározott pozitív időtartamot vesz igénybe.

## Az egyensúlyi növekedés

Érdekes megvizsgálni, hogy ezek az összefüggések miért nem játszottak szerepet az eddigi elméleti megfontolásokban, és miért hanyagolhatók el, legalábbis a hagyományos számítások esetén, ameddig ezek csak a növekedési ütemre vagy az egyensúlyi arányokra vonatkoznak.

A (2*) egyenletben a $D$ mátrix a $\lambda^2$ együtthatóval szerepel. $\lambda^2$ értéke gyakorlatilag nem haladja meg a 2—3 ezreléket. Ha a $D$ mátrixnak van is hatása, e hatás a közgazdasági mérés szokásos hibahatárain alul marad s így *nem észlelhető.*

Még ha teljesen „szabatosan" is mérünk statisztikailag, a tőke ($Bx$) mérésekor tulajdonképpen már amúgy is a $(B + \lambda D)x$ értéket mérjük le, ugyanis az egyensúlyi helyzetben, azaz átlagosan valóban ennyi tőke van (a tartályban és az áramlatokban együttesen) lekötve. Ha most a (2) egyenletben a $B$ mátrix helyére a $B + \lambda D$ mért értéket írjuk, akkor ez azonosan átalakul a (2*) egyenletté, s azonos eredményekhez is vezet. A továbbiakban ezt el is fogadjuk, és beleértjük a $B$ mátrixba az egyébként elhanyagolható $\lambda D$ értéket is. Ennek az eljárásnak előnye, hogy a tőkeszükséglet kiszámításakor továbbra is csak egyetlen, a kibővítettnek tekintett $B$ mátrixszal kell szoroznunk.

Szabatosabban természetesen a (2*) egyenlet a

$$x = (1 - \lambda^2 D)^{-1} (A + \lambda B)\, x \tag{3}$$

alakra hozható. A sajátvektor módosított értékét valószínűleg jól számíthatjuk az alábbi iterációval

$$x_{k+1} = Ax_k + \lambda_k Bx_k + \lambda_k^2 Dx_k$$

$$\lambda_k = \frac{p^T(1 - A)\, x_k}{p^T(B + \lambda_{k-1} D)\, x_k}$$

ahol $p^T$ tetszőleges pozitív árvektor, amelyről feltesszük, hogy $p^T > p^T A$.

Mivel $(1 - \lambda^2 D)^{-1}$ az egységmátrixtól csak kevéssé eltérő és pozitív mátrix ($\lambda^2 D$ értéke igen kicsiny), világos, hogy $\lambda$ egyensúlyi értéke valamelyest kisebb lesz, mint ahogy az a (2) egyenlet alapján adódna, és az egyensúlyi termelési arányok vektora is a hosszabb termelési idejű termékek felé tolódik. Az eltérés azonban, mint láttuk, minimális, s ezért a gyakorlatban elhanyagolható.

## A nem egyensúlyi növekedés

Nem hanyagolható el azonban a $D$ mátrix kihatása, ha a gazdaság, egyensúlyi növekedési üteméből kilendülve, gyorsul vagy lassul — tehát éppen a gazdasági ciklus vizsgálata esetén. A ciklus folyamán a tényleges növekedési ráta, $\dot{x}/x$, ugyan csak enyhén ingadozik, mintegy 0,15 és —0,05 között, a hasonlóan képzett „gyorsulási ráta", $\ddot{x}/\dot{x}$, azonban plusz és minusz végtelen között minden értéket felvehet s általában fel is vesz.

Az egyenletes ütemű növekedésnek egyenletes gyorsulása van. Ugyanis a $\lambda$ ütemű exponenciális növekedés gyorsulása $\lambda^2$ értékű. Ezt nevezzük a

„normális" gyorsulásnak a továbbiakban. A gyorsulás „normális" igényét folyó ráfordítások iránt a $\lambda D\dot{x}$ szorzat adja meg. A gyorsulás tényleges ráfordításigénye azonban eltérhet ettől, értéke $D\ddot{x}$ és ha $\ddot{x} \neq \lambda\dot{x}$, akkor $D\ddot{x}$ jelentősen eltérhet a „normális" igénytől. A különbséget, $D(\ddot{x} - \lambda\dot{x})$ értékét a gyorsítás „abnormális" vagy nem-egyensúlyi ráfordításigényének nevezhetjük. Ez pozitív, ha a gyorsulás a normális felett, negatív ha alatta marad.

Számítható a gyorsulás tőkeigénye is, s mint látni fogjuk, ez bizonyul a fontosabb mennyiségnek.

A nem-egyensúlyi gyorsulás tőkeigényét — figyelembe véve, hogy bármely áramlat tőkeigényét a $B$ mátrixszal való szorzásból származtatjuk — a

$$BD(\ddot{x} - \lambda\dot{x}) = BD\ddot{x} - (1 - A)\,D\dot{x} \tag{4}$$

alakban írhatjuk. Itt a kifejezés második tagjának átalakításánál figyelembe vettük, hogy az egyensúly esetén

$$\lambda BD\dot{x} = (1 - A)\,D\dot{x}. \tag{5}$$

Az (5) egyenlet pontos, ha egyszektoros gazdaságra alkalmazzuk. Többszektoros gazdaság esetén azonban csak közelítő, bár a közelítés olyan, amely valószínűleg a gyakorlati számítási hibahatárokon belül marad. Helyesebb azonban egyenlőre olyan hipotézisnek tekinteni, amely a továbbiak matematikai kezelését egyszerűsíti.

## A szabályozás kérdéséről

Hogy a $D$ mátrix sajátos szerepét világosabban lássuk, meg kell gondolnunk, hogy a korábbi feltételezések értelmében a termelés szintje és növekedésének üteme közvetlenül nem befolyásolható. Mindkettő olyan folyamatok függvénye, amelyek már korábban indultak el — a *jelenlegi* szint és ütem a gazdasági rendszer *korábbi* története által adott. A jelen pillanatban csak későbbi időpontban „beérő" termelési áramlatokat indíthatunk meg — ezek intenzitását növelhetjük vagy csökkenthetjük.

Másképpen kifejezve: a szabályozható változó nem $x$, nem is $\dot{x}$, hanem $\ddot{x}$ — csak a rendszer gyorsulása vagy lassulása módosítható. Egy szemléltető példával élve: a létező olajkutak jelenlegi hozama történetileg adott, a kutak számának jelenlegi növekedését a korábban elindított fúrások száma ugyancsak meghatározza. Szabadon csak abban dönthetünk, hogy *most* a szokásosnál több vagy kevesebb kutatófúrást indítunk-e meg.

Azonban ez a szabadság sem teljes, hiszen az elindítható kutatófúrások, „új beruházások", vagyis a jelenleg beindítható jövőbeni többletáramlatok mértékét a rendelkezésre álló szabad, még másutt le nem kötött tőke mennyisége korlátozza. A közvetlenül *megfigyelhető* változó mindig is a *készlet*. Itt nem tárgyalt okokból és módokon mind a tőkés piaci mechanizmus, mind pedig a szocialista tervezés úgy szabályozza az újratermelés menetét, hogy a szabad készleteket a termelés ütemének gyorsítására fordítja, illetőleg e készletek hiánya esetén a termelés ütemének lassításával védekezik.

## A pálya egy egyenlete

Mivel a le nem kötött készleteket a modellben az $\int[(1-A)x-B\dot{x}]dt$ kifejezés adja meg, ezt egyenlővé téve a gyorsulás $BD\ddot{x}-(1-A)D\dot{x}$ tőkeigényével, mindkét oldal differenciálása után az alábbi egyenlethez jutunk:

$$(1-A)\,x-B\dot{x}=BD\dddot{x}-(1-A)\,D\ddot{x}. \tag{6}$$

Szándékosan nem használjuk sem a mozgásegyenlet, sem a szabályozási egyenlet kifejezést, mert a (6) egyenlet – Leontief eredeti modelljéhez hasonlóan – nem a rendszer valódi mozgását mutatja, hanem csak a rendszer bizonyos lehetséges pályáinak megfogalmazását szolgálja.

A (6) egyenlet a $\mathfrak{D}$ differenciáloperátor bevezetésével formálisan a

$$(1-A-B\,\mathfrak{D})\,(1+D\,\mathfrak{D}^2)\,x=0 \tag{7}$$

alakban írható. Világos, hogy ennek két fontos pozitív megoldása van. Az első a már ismert egyensúlyi megoldás, illetve ennek tárgyalt csekély módosítása. Ha ugyanis van olyan $x$, amelyre

$$x=(A+\lambda B)\,x, \tag{8}$$

akkor az $\bar{x}=(1+\lambda^2 D)^{-1}x$ vektor nyilván kielégíti a (7) egyenletet, s a kapott „egyensúlyi" egyenletesen gyorsuló megoldás a

$$x_t=e^{\lambda t}\,\bar{x}_0 \tag{9}$$

alakban írható fel.

Ez a megoldás már a sokkalta egyszerűbb (2) egyenletből is megközelíthető. Egyensúlyi megoldás lévén a $D$ mátrix nem játszik benne fontos szerepet, tehát a termelési folyamatok időtartama az egyensúlyi növekedés körülményei közt épp úgy elhanyagolható, mint ahogy a tőkeigényesség sem játszik szerepet az egyszerű újratermelésben.

## A ciklikus komponens

Van azonban egy fontos második pozitív megoldás is, s ez egy ciklikus komponens, $\tilde{x}$, amelyet a következőképpen számíthatunk ki: Legyen

$$\tilde{x}=\omega^2\,D\tilde{x}, \tag{10}$$

akkor

$$x_t=e^{\pm i\omega t}\,\tilde{x}_0 \tag{11}$$

nyilván szintén kielégíti a (7) egyenletet.

E megoldás a pozitív és irreducibilis $D$ mátrix egyértelműen számítható pozitív sajátvektora; a hozzá tartozó legnagyobb pozitív sajátérték négyzetgyökének reciproka adja meg a ciklikus komponens $\omega$ frekvenciáját.

Ha e megoldást behelyettesítjük a (6) egyenletbe, akkor az $e^{i\omega t}$ tényezővel való egyszerűsítés után és (10) figyelembevételével

$$(1-A)\,\tilde{x}-i\,\omega\,B\tilde{x}=-\,i\,\omega\,B\tilde{x}+(1-A)\,\tilde{x}. \tag{11}$$

A két oldal így azonosan egyenlővé válik.

E két fő (pozitív) megoldást elfogadva a gazdasági rendszer egy lehetséges pályáját a

(12) $$x_t = e^{\lambda t} \cdot \bar{x}_0 + \cos \omega t \cdot \tilde{x}_0$$

formába írhatjuk. Ez tehát egy az egyensúlyi $\bar{x}$ arányok mentén történő $\lambda$ ütemű növekedésből és egy erre rárakodó $\tilde{x}_0$ komponensű és $\omega$ frekvenciájú lengésből áll. A gazdasági ciklus hossza (feltéve, hogy mátrixainkat a szokásos módon az évre, mint egységre vonatkoztatva mértük): $T = 2\pi/\omega$ lesz.

Ismét hangsúlyozni kell, hogy a (12) egyenletben megadott megoldás csak egyszektoros gazdaságban szabatos és teljes. Többszektoros gazdaságban e megoldás közelítő lesz csak — mivel az (5) egyenlet nem szabatos. Ezenkívül nem is teljes a megoldás, hiszen a (7) egyenlet többi, egyenlőre még nem elemzett sajátértékei további megoldásokat is lehetővé tesznek. Ezekről egyenlőre még semmi más bizonyosat nem lehet állítani, mint hogy általában nagyobb abszolút értékűek, mint a fenti $\lambda$ és $\omega$, és hogy nem tartozhatnak hozzájuk pozitív sajátvektorok.

## Egy összevont becslés

Mivel egyelőre nincsenek megbízható és részletes adataink a termelési idők hosszáról, itt egy összevont számítással kell beérnünk. Az összevont (egytermékes) gazdaság esetében a $D$ mátrix egyetlen $d = bg$ skalárrá egyszerűsödik, amely tehát a tőkeigényesség és az átlagos termelési idő szorzata. A ciklus hossza $T = 2\pi/\omega = 2\pi(bg)^{1/2}$. Mivel az összevont tőkeigényesség $b = 3$ év nagyságrendű; s mivel $g$ értéke körülbelül 2 hónap körül lehet, ha számba vesszük a befejezetlen beruházások és befejezetlen termelés értékét a nemzeti vagyon kimutatásában: $d = 0{,}5$ év$^2$ adódik, amiből $\omega \sim 1{,}4$ és a ciklus hossza $T \sim 4{,}5$ év. Ez közel áll a valóságban tapasztalt átlagos ciklushosszhoz.

Ha elméletünk helyes, akkor, mint ez a $T = 2\pi(bg)^{1/2}$ képletből látható, a ciklus hosszát a mindenkori tőkeigényesség és a termelési idő geometriai átlaga határozza meg. Másképpen kifejezve a ciklus hossza a termékek élettartamának (vagy a tőke-termelés hányadosának), valamint a gesztációs periódusoknak négyzetgyökével arányosan növekszik.

A ciklikus komponens, $\tilde{x}$, számításának menetéből az is levezethető, hogy minél nagyobb egy termék viszonylagos súlya a társadalmi össztőkén belül, annál nagyobb a viszonylagos kilengése (amplitúdója) a ciklus folyamán. A rövid élettartamú és gyorsan előállított termékek termelése viszonylag egyenletes lesz, míg a hosszú élettartamú és lassan készülő termékek kilendülése a legnagyobb, ezek a különösen ,,válságérzékeny'' termékek.

*(Beérkezett: 1977. január 31.)*

## IRODALOMJEGYZÉK

1. LEONTIEF, W.: *The dynamic inverse.* (CARTER, A.—BRÓDY, A. ed.): Contributions to input-output analysis. Amsterdam, 1970. North Hollan Publishing Co.
2. PETRI, P.: *Convergence and temporal structure in the Leontief dynamic model.* (BRÓDY A.—CARTER, P. ed.): Input-output techniques. Amsterdam, 1972. North Holland Publishing Co. 563—73. l.
3. GEORGESCU-ROEGEN, N.: *Dynamic equilibrium and economic growth.* Paper prepared for the Colloquim of IAS. Vienna, July 3—5. 1974.

## A LINEARIZED MODEL OF THE CYCLE

Starting from Leontief's closed dynamic model and after the introduction of production times $g_k > 0$, a $D = \{d_{ik}\} = \{b_{ik}\, g_k\}$ matrix can be defined, which is obtained in such a way that the elements of the capital matrix, $B = \{b_{ik}\}$ are multiplied by the production times columnwise.

Then the equation of motion of the economic system can be given in the form $(1 - A)x - B\dot{x} = BD\dddot{x} - (1 - A)\, D\ddot{x}$. This has two important positive solutions, namely, the wellknown equilibrium solution ensuring growth at rate $\lambda$ and the cyclic component $\tilde{x} = \omega^2 D\tilde{x}$ that brings about fluctuation according to $\cos \omega\, t$. The length of the cycle, $T = 2\pi/\omega$, increases in proportion to the square root of the lifetime of rodpucts and of their production time.

## ЛИНЕАРИЗИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ЦИКЛА

Если исходить из замкнутой динамичной модели Леонтьева, то после введения времени производства $g_k > 0$ можно сформулировать матрицу $D = \{d_{ik}\} = \{b_{ik}\, g_k\}$, которая получается так, что элементы матрицы капиталоемкости $B = \{b_{ik}\}$ умножаются на время производства по каждому столбцу.

В этом случае уровнение экономической системы можно записать в виде $(1-A)x - B\dot{x} = BD\dddot{x} - (1-A)D\ddot{x}$. Это уравнение имеет два важных положительных решения, т. е. известное сбалансированное решение, обеспечивающее темпы роста, равные $\lambda$ и компонент цикла $\tilde{x} = \omega^2 D\tilde{x}$, который приводит к колебаниям по $\cos wt$. Продолжительность цикла $T = 2\pi/\omega$ увеличивается пропорционально квадрату срока службы изделий и времени производства.

Simon András

# A lakossági fogyasztás és megtakarítás vizsgálata ökonometriai módszerrel[1]

E cikk olyan kutatásról számol be, amely az összlakosság személyes jövedelemből származó kiadásait vizsgálja főbb kiadási csoportok szerint. A kutatás statisztikai alapját 1960—75-re vonatkozó idősorok adták. A módszer ezen idősorok közötti regressziós összefüggések keresése volt.

A vizsgálattal arra igyekeztünk számszerű választ adni, hogy a fogyasztói kiadásokat alapvetően a fogyasztók áraktól és jövedelmektől függő döntései, vagy az árakban nem megmutatkozó kínálati tényezők határozzák-e meg. Az alapvetően kifejezést azért használjuk, mert nem elégszünk meg azzal a nyilvánvalóan igaz kijelentéssel, hogy a fogyasztás alakulásában mind a fogyasztók viselkedése, mind a kínálat szerepet játszik. A matematikai statisztika eszközeivel felmérjük, hogy e hatások közül melyek azok, amelyek elég jelentősek ahhoz, hogy az említett nagy aggregátumok alakulását az elmúlt 15 évben szignifikánsan befolyásolták.

## Statisztikai bázis

A lakosság személyes jövedelméből származó kiadásokat vizsgáltuk, a [11] kiadvány ún. kiadási főcsoportjai szerint. E felosztásban a termékek következő csoportjai szerepelnek:

élelmiszerek
élvezeti cikkek
ruházkodási cikkek
fűtés, háztartási energia
tartós fogyasztási cikkek
egyéb iparcikkek
szolgáltatások.

A termékcsoportok árindexeinek a [11] kiadványban szereplő folyóáras, illetve változatlan áras adatok hányadosait tekintettük. Az így képzett deflátorok előnye a [11]-ben közölt árindexekkel szemben technikai jellegű: a volumenek és árak szorzata kiadja a folyóáras értékeket: így a változatlan áras fogyasztás becslése a deflátorok ismeretében a folyóáras fogyasztás becslését is megadja. A [11]-ben közölt árindexek — nyilván a volumen-, illetve ár-

[1] A kutatás kezdeti szakaszában *Patkós* Anna is részt vett és hozzájárult az itt közölt eredményekhez.

indexek számításánál alkalmazott különböző reprezentáció miatt — nem rendelkeznek ilyen tulajdonsággal. Így az adatok és a becslési eredmények konzisztenciájának biztosítása bonyodalmakat okozott volna. Megjegyezzük, hogy a regressziós egyenletek többségének becslését a [11] árindexeivel is elvégeztük. Az így kapott eredmények szignifikáns eltérést nem mutattak a deflátorokkal történt számítások eredményeihez képest.

A lakossági kiadások másik csoportja a lakásfelhalmozási kiadások. Ezek folyóáras értékei a [11]-ben szerepelnek. E termékcsoportra nincsen nyilvántartott árindex, ezért jobb híján a szocialista szektor lakásberuházásának árindexét tekintettük árindexnek. Ez lett az alapja a változatlan áras értékek kiszámításának is. Az alkalmazott árindex valószínűleg alábecsüli az ebben a szektorban mutatkozott áremelkedést, de talán feltehető, hogy a torzítás aránya az évek során egyenletes.

Minden mennyiségi és értékadatot egy főre számítottunk.

## Kiinduló elgondolás

Elképzelésünk az volt, hogy számításainkat két szakaszban végezzük. Először a kereslet szerepét igyekszünk igazolni anélkül, hogy a számításokba kínálati tényezőket vonnánk be, majd a számítások pozitív eredményei esetén megnézzük, hogy milyen kínálati tényezők figyelembevétele javítaná becslési eredményeinket.

Az elképzelés mögött az a hipotézisünk állt, hogy a lakossági kiadások értéke és megoszlása alapvetően a fogyasztók vásárlási döntéseiből vezethető le, olyannyira, hogy ezeknek a döntéseknek a számszerű hatása megmutatkozik a kínálati tényezők elhanyagolása esetén is. A kínálati tényezők legfeljebb valamelyest módosíthatják a becsült fogyasztói viselkedésen alapuló függvényeket. Számításaink jól igazolták ezt a feltevésünket, így az eredményeket is a vizsgálat logikájának megfelelő sorrendben közöljük.

## Kereslet és fogyasztás

A fogyasztói viselkedést leíró klasszikus keresleti függvény szerint a fogyasztói kiadások nagysága fogyasztói főcsoportok szerint a jövedelem és az ár függvénye.

A kiadási főcsoportokra az alábbi regressziós egyenleteket állítottuk fel:

Élelmiszerek

$$\log \text{ÉLM} = 0{,}471 \cdot \log \text{JÖV} - 0{,}103 \cdot \log (\text{PÉLM}/\text{PFOGY}) + 3{,}406.$$

ahol ÉLM — élelmiszerfogyasztás változatlan áron
JÖV — reáljövedelem
PÉLM — élelmiszerfogyasztás deflátora
PFOGY — összfogyasztás deflátora.

Ennél az egyenletnél az illeszkedés olyan szoros volt, hogy a gépi számítás pontossága nem tette lehetővé a becslés szórásának megkülönböztetését a

0-tól. Így a függvény paraméterei becslésének értékelésére sem volt lehetőség. Több információt ad a relatív növekményekre felírt egyenlet:

$$\underset{(4{,}95)}{\text{DÉLM} = 0{,}493 \cdot \text{DJÖV}} - \underset{(-1{,}23)}{0{,}169 \cdot \text{DPÉLM/PFOGY}} + \underset{(0{,}08)}{0{,}040}$$

$$R^2 = 0{,}669 \qquad DW = 1{,}56$$
$$SE = 0{,}63,$$

ahol a változók elé írt D a változó relatív növekményére utal.

Pl. a reáljövedelem relatív növekménye: $\text{DJÖV} = (\text{JÖVR}-\text{JÖVR}_{-1})/\text{JÖVR}_{-1}$ (a $-1$ index a változó egyéves késleltetett értékét jelöli),

$R^2$ — a többszörös korrelációs együttható, az egyenlet szabadságfokával korrigálva,

SE — a becslés standard hibája,

DW — a Durbin—Watson hányadosa,

az együtthatók alatti zárójelben levő szám az együtthatónak és az együtthatóbecslés szórásának a hányadosa (az ún. *t* érték).

Az egyenlet alapján megállapítható, hogy bár az élelmiszerfogyasztás árérzékenysége nem nagyon szignifikáns, az árrugalmasság egyéb tapasztalatokkal egyezően igen alacsonynak, 0,10—0,17-nek mutatkozik.

A többi termékcsoportra is elvégeztük a becslést növekmény formában, de az eredmények annyira hasonlítanak a logaritmusos formával kapott eredményekhez, hogy a továbbiakban csak az utóbbiakat közöljük.

Élvezeti cikkek

$$\log \text{ÉLV} = \underset{(35{,}5)}{1{,}375 \cdot \log \text{JÖV}} - \underset{(-5{,}69)}{1{,}064 \cdot \log (\text{PÉLV/PFOGY})} - \underset{(-14{,}9)}{5{,}55}$$

$$R^2 = 0{,}996 \qquad DW = 2{,}00$$
$$SE = 0{,}016,$$

ahol ÉLV — élvezeti cikkek fogyasztása változatlan áron
PÉLV — élvezeti cikkek deflátora.

Ruházkodás

$$\log \text{RUH} = \underset{(42{,}4)}{0{,}825 \cdot \log \text{JÖV}} - \underset{(-3{,}53)}{0{,}409 \cdot \log (\text{PRUH/PFOGY})} - \underset{(-2{,}39)}{0{,}456}$$

$$R^2 = 0{,}995 \qquad DW = 2{,}38$$
$$SE = 0{,}013,$$

ahol RUH — ruházkodási cikkek fogyasztása változatlan áron
PRUH — ruházkodási cikkek deflátora.

Fűtés, háztartási energia

$$\log \text{FŰT} = \underset{(18{,}9)}{1{,}221 \cdot \log \text{JÖV}} - \underset{(-2{,}28)}{0{,}411 \cdot \log (\text{PFŰT/PFOGY})} - \underset{(-8{,}96)}{5{,}470}$$

$$R^2 - 0{,}985 \qquad DW = 1{,}228$$
$$SE = 0{,}034,$$

ahol FŰT — fűtési kiadások változatlan áron
PFŰT — fűtési kiadások deflátora.

Tartós fogyasztási cikkek

$$\log \mathrm{TART} = \underset{(33,9)}{1,443} \cdot \log \mathrm{JÖV} - \underset{(-7,6)}{2,65} \cdot \log (\mathrm{PTART/PFOGY}) - \underset{(-17,2)}{7,17}$$

$$R^2 = 0,985 \qquad DW = 2,011$$
$$SE = 0,026,$$

ahol TART — tartós fogyasztási cikkek fogyasztása változatlan áron
PTART — tartós fogyasztási cikkek deflátora.

Egyéb termékek

$$\log \mathrm{EGY} = \underset{(2,43)}{0,541} \cdot \log \mathrm{JÖV} - \underset{(-1,24)}{0,345} \cdot \log (\mathrm{PEGY/PFOGY}) +$$
$$+ \underset{(5,00)}{0,707} \cdot \mathrm{EGY}_{-1} - \underset{(-2,61)}{3,062}$$

$$R^2 = 0,994 \qquad DW = 1,916$$
$$SE = 0,026,$$

ahol EGY — egyéb termékek fogyasztása változatlan áron
PEGY — egyéb termékek deflátora.

Az egyéb termékek fogyasztása — az alább említendő szolgáltatásokhoz hasonlóan — csak fokozatosan igazodik a jövedelem és az árak változásához. Erre utal a fogyasztás késleltetett értéke. A többi egyenletben ez a késleltetett érték nem mutatkozott szignifikánsnak.

Szolgáltatások

$$\log \mathrm{Sz} = \underset{(3,07)}{0,397} \cdot \log \mathrm{JÖV} - \underset{(-2,52)}{0,460} \cdot \log (\mathrm{PSZ/PFOGY}) +$$
$$+ \underset{(4,30)}{0,600} \cdot \mathrm{Sz}_{-1} - \underset{(-3,51)}{0,749}$$

$$R^2 = 0,998 \qquad DW = 1,914$$
$$SE = 0,0096,$$

ahol SZ — szolgálatásokra fordított kiadások változatlan áron
PSZ — szolgáltatásokra fordított kiadások deflátora.

Az egyenletekben többé-kevésbé kielégítő szignifikanciával megmutatkozott a jövedelem és az árak hatása a fogyasztásra. A becsült paraméterek is megfelelnek a józan ész alapján vártnak: pl. az élvezeti és a tartós fogyasztási cikkek jövedelem- és árrugalmassága viszonylag nagy, vagy a szolgáltatások fogyasztásában viszonylag lassan érvényesül az árváltozások hatása.

Az egyenletek eredményei összefoglalóan azt az ismert tényt mutatják, hogy a termékcsoportok egyikére sem jellemző az olyan globális hiány, hogy az áruellátás jegyrendszerrel, sorbanállással, vagy más, a piacot megkerülő elosztási formával történne. Mindig van annyi áru, hogy a fogyasztók az áraktól és jövedelmüktől függően többet, vagy kevesebbet vásároljanak. Ez a globális egyensúly természetesen korántsem kell, hogy azt jelentse, hogy az egyensúly termékenként is fennáll.

Mielőtt azonban e további tényezőkre rátérnénk, ismertetjük a fogyasztás jövedelem- és árrugalmasságainak egy alternatív becslési eredményét is. A becslés a kiadások lineáris modelljén alapszik. A modell *Klein—Rubin* [5] és *Stone* [9] nevéhez fűződik. Becslési eljárásunk Stone módszerét követte.

A modell a termékcsoportok fogyasztását az árak és az összes fogyasztás olyan lineáris függvényeként írja fel, amely függvény eleget tesz a keresletelmélet egyes, logikai úton levezetett tételeinek. Ilyen tételek a keresleti függvény homogenitása, additivitása és szimmetriája. Nem térünk ki ezek tárgyalására, erre vonatkozóan jó ismertető [8] vagy magyar nyelven [10]. Csak két megjegyzést teszünk ezzel kapcsolatban. Mindkettő a paraméterbecslés eredeti, korlátozás nélküli módszerét védelmezi a kiadások lineáris modelljével szemben.

Az eredetileg felállított egyenleteink szerint teljesül a keresleti függvény homogenitása (a kereslet a pénzjövedelem és az árak elsőfokú homogén függvénye) és ha a megtakarításokat a jövedelemnek fogyasztásra el nem költött maradékaként tekintjük, akkor az additivitás is triviálisan teljesül. A paraméterek a szimmetriafeltételt nem elégítik ki. Ez utóbbi azonban a fogyasztási függvény olyan tulajdonságain alapszik (differenciálhatóság), melyek létezése nem dönthető el egyértelműen.

A kiadások lineáris modelljében nem szerepelnek explicit módon a jövedelem- és árelaszticitások. Ha a modell egészét, mint a fogyasztás magyarázatának hű modelljét elfogadjuk, akkor ezek a paraméterek egyszerűen kiszámíthatók. Ha azonban nem vagyunk biztosak abban, hogy a modell összefüggései minden termékcsoportra érvényesek, akkor a modell becslési eredményeiből igen nehéz lenne megállapítani, hogy a jövedelem és az árak hatása végülis szignifikánsan mutatkozik-e a fogyasztásban. Ennek megállapítására alkalmasabbnak látszik az előbbi, termékcsoportonkénti egyenletbecslés.

A kiadások lineáris modellje — amint az az irodalomból ismert — a következő összefüggéseket feltételezi a fogyasztás, az árak és az összfogyasztás között:

$$p_i x_i - p_i \alpha_i = \beta_i \left( y - \sum_{k=1}^{n} p_k \alpha_k \right),$$

ahol $x_i$ az $i$-edik termékcsoport fogyasztásának volumene

$p_i$ az $i$-edik termékcsoport árindexe

$\alpha_i$ az ún. alapfogyasztás az $i$-edik termékcsoportból

$y$ az összes fogyasztás értéke

$\beta_i$ az $i$-edik termékcsoport részesedése az ún. többletfogyasztásból

A modell $\alpha_i$ és $\beta_i$ paramétereit Stone [9] módszerével becsültük. Az eredmények a következők:

| Termékcsoport | $\alpha_i$ | $\beta_i$ | Jövedelemrugalmasság 1968-ban[2] $\frac{\beta_i \cdot y_{1968}}{x_{i1968}\, p_i}$ | Saját árrugalmasság 1968-ban $\frac{\alpha_i}{x_{i1968}} - \frac{\alpha_i \cdot \beta_i}{x_i} - 1$ |
|---|---|---|---|---|
| Élelmiszerek | 4769 | 0,206 | 0,525 | 0,329 |
| Élvezeti cikkek | 1409 | 0,212 | 1,404 | 0,489 |
| Ruházkodás | 1341 | 0,114 | 0,913 | 0,337 |
| Fűtés | 367 | 0,046 | 1,267 | 0,338 |
| Tartós fogy. cikk | 427 | 0,098 | 1,634 | 0,551 |
| Egyéb termékek | 631 | 0,170 | 2,002 | 0,570 |
| Szolgáltatások | 1486 | 0,153 | 1,045 | 0,399 |

Mint láthatjuk, a modell alapján számított rugalmasságok igen hasonlóak az egyenletenként számított rugalmasságokhoz. Az árrugalmasságok termékcsoportonkénti szórása kisebbnek adódott, de a paraméterek nagyság szerinti rangsora lényegében nem változott. Az egyetlen kivétel az egyéb termékek, amelyre a modell alapján az eredeti egyenletekhez képest nagy jövedelemi- és árrugalmasságok adódtak.

Az eddigi becslések statisztikai paraméterei alapján beigazolódott az a feltevés, hogy a fogyasztásra a fogyasztók döntéseinek van hatása. Nem igazolódott még be, hogy a fogyasztás alakulásának nincsenek-e más — az árakban nem tükröződő — kínálati tényezői is. E tényezőket bevonva az egyenletekbe esetleg javítható a becsült függvények illeszkedése a tényadatokhoz.

Statisztikai megfigyelhetőség szempontjából kétféle ilyen kínálati tényezőt vizsgáltunk. Az egyik a személygépkocsi-kínálat, a másikat pedig összefoglalóan az áruellátás színvonalának nevezhetjük.

## Fogyasztás és autókínálat

A személyautók termékcsoportja az egyetlen olyan termékcsoport, amely rendelkezik a következő, vizsgálatunk szempontjából érdekes tulajdonságokkal:

a) Az elmúlt 15 évben tartósan hiány volt autókból olyan értelemben, hogy a gépkocsik hivatalos (állami) ára mellett egy-két évtől eltekintve a kereslet mindig meghaladta a kínálatot. Az ún. szabadpiaci (vagy fekete) áron — amely általában 0—15%-kal magasabb a hivatalos árnál[3] — természetesen mindig lehetett gépkocsit kapni.

b) Az autók termékcsoportja elég nagy volumenű és kínálata eléggé ingadozó ahhoz, hogy hatása a többi árucsoport fogyasztására statisztikailag szignifikánsan megmutatkozzék. (A lakásszolgáltatások is rendelkeznek mindezen tulajdonságokkal, a lényeges kínálati ingadozásokat kivéve. Ez utóbbi okból nem voltak számunkra érdekesek és nem emeltük ki a szolgáltatási csoportból.)

[2] A modell a megtakarításokat nem tartalmazza, a jövedelmet azonosnak tekinti az összfogyasztással, ezért ez a rugalmasság nem igazi jövedelemrugalmasság, inkább összfogyasztás-rugalmasságnak nevezhetnénk.

[3] Ez az információ részben az Autó-Motor folyóirat használtautó árjegyzéseiből, részben a szerző saját tapasztalataiból származik.

Az autóvásárlásról tehát minden regressziószámítás nélkül tudjuk, hogy volumenét a kínálat szabja meg. A kérdés, amire választ kerestünk, az volt, hogy a kínálat változásai hogyan hatnak a többi termékcsoport fogyasztására, a lakásfelhalmozási kiadásokra, illetve a megtakarításokra.

Arra gondolva, hogy a gépkocsi-vásárlás hatása az egyes árucsoportokra egyenként elenyésző lehet, de az összfogyasztásra a hatás már esetleg kimutatható, a gépkocsik nélküli összfogyasztás magyarázatára kerestünk olyan — az adatokhoz illeszkedő — függvényt, amelynek egyik magyarázó változója a gépkocsi-fogyasztás.

Az összfogyasztás magyarázatára szolgáló klsszikus függvény a fogyasztás volumenét a reáljövedelemmel és az előző évi fogyasztással magyarázza. Ez utóbbi változó jelenléte azt jelzi, hogy a fogyasztás csak fokozatosan követi a jövedelem alakulását — a fogyasztóknak bizonyos idő kell, amíg fogyasztói szokásaikat jövedelmüknek megfelelően megváltoztatják.[4] E függvényt a magyar viszonyokra kétféle formában becsültük:

$$\log \text{FOGY} = 0{,}772 \cdot \log \text{JÖV} + 0{,}171 \cdot \log \text{FOGY}_{-1} + 0{,}496,$$

ahol FOGY fogyasztás személyes jövedelemből változatlan áron, személygépkocsik nélkül.

E változatnál az illeszkedés megint olyan szoros volt, hogy a gépi számítás pontossága nem tette lehetővé a becslés szórásának megkülönböztetését a 0-tól. Ez lehetetlenné teszi az eredmények további finomítását. Célszerűbb volt ezért a változókat növekményformában felírni. Így sokkal élesebben mutatkoznak a változók értékeinek ingadozásai.

$$\text{DFOGY} = \underset{(12{,}7)}{0{,}763} \cdot \text{DJÖV} + \underset{(2{,}6)}{0{,}149} \cdot \text{DFOGY}_{-1} + \underset{(0{,}2)}{0{,}008} \tag{1}$$

$$R^2 = 0{,}928 \qquad \text{DW} = 2{,}188$$
$$\text{SE} = 0{,}0039.$$

Az autókínálat hatását a következő egyenletben számszerűsítettük:

$$\text{DFOGY} = \underset{(12{,}4)}{0{,}769} \cdot \text{DJÖV} + \underset{(1{,}32)}{0{,}107} \cdot \text{DFOGY}_{-1} - \underset{(-0{,}81)}{0{,}000053} \cdot \text{AUTO/AUTOB} +$$
$$+ \underset{(0{,}82)}{0{,}008} \tag{2}$$

$$R^2 = 0{,}924 \qquad \text{DW} = 2{,}135$$
$$\text{SE} = 0{,}004,$$

ahol AUTO = a személygépkocsi kínálat (= lakosság autóvásárlásai)
AUTOB = Exp (−36,79 + 4,325 · log JÖV).

Az AUTO/AUTOB változóval az autó szabadpiaci árát helyettesítjük. Ez utóbbira ugyanis nem áll rendelkezésre adat. Feltevésünk szerint az autókereslet változatlan ár mellett a jövedelemmel arányos ütemben nőne. Ennek

[4] A téma gazdag irodalmából [3], [1] és [2] alapvető jelentőségű.

a keresletnek a jövedelemelaszticitása regressziós számításunk szerint 4,325. Ha a tényleges autóvásárlások nagyobbak, mint az e függvény szerint számítottak, akkor az autókínálat viszonylag bőséges, a szabadpiaci árak lemennek, ha alacsonyabbak, akkor a kínálat viszonylag szűk, az előjegyzésbe vett vevők sora hosszabb, a szabadpiaci ár magasabb. A szűk kínálat, illetve magas ár miatt helyettesítés jön létre a fogyasztók autóvásárlása, más folyó kiadásai, vagy megtakarítása között. A (2) egyenlet paraméterei azt mutatják, hogy az autók és a többi termék fogyasztása közötti helyettesítés nem meggyőzően bizonyított. Az AUTO/AUTOB változó bevonása az (1) egyenletbe a függvény illeszkedési tulajdonságait nem javította (az $R^2$ és a SE valamelyest romlott is), a változó koefficiensének „t" értéke azonban mintegy 70%-ban valószínűsíti, hogy van helyettesítés a gépkocsik és az egyéb fogyasztás között.

Számításaink alapadatait nem közöljük. Ezért az olvasó az itt következő és a későbbiekben is felmerülő néhány gondolatot, melyek e számok ismeretére épülnek, kénytelen lesz anélkül elfogadni, hogy azokat ellenőrizni tudná. Az adatok nagyságrendjeinek és az autókínálat együtthatójának ismeretében az eredmények alábbi értelmezése adható:

1975-ben a jövedelmek alapján becsülhető 80 millió Ft-os gépkocsiigény növekedéssel szemben az autókínálat mintegy 18 millió Ft-tal csökkent. Az 1974-es helyzethez képest így létrejött 98 milliós hiány a fogyasztói kiadások átrendezését hozta magával. Ennek eredményeképpen e 98 millió Ft-ból 21 millió Ft a fogyasztás egyéb csoportjainál talált helyettesítésre. A fennmaradó 77 millió Ft szükségszerűen a lakásfelhalmozást vagy a megtakarításokat növelte, a továbbiakban feltárt számszerűséggel.

Az AUTO/AUTOB koefficiens becslésének nagy szórása miatt további igazolását kerestük az autófogyasztás helyettesítésnek. A termékek jellegénél fogva valószínű, hogy az elmaradt autóvásárlások a fogyasztási csoportok közül elsősorban a tartós fogyasztási cikkek vásárlásában jelentkeznek.

Az alábbi egyenlet igazolta a feltevést:

$$\log \text{TARTN} = \underset{(4,33)}{-2,58} + \underset{(20,19)}{1,05} \log \text{JÖV} - \underset{(0,94)}{2,56} \cdot \log \text{PTARTN/PFOGY} - \underset{(4,25)}{0,22} \log \text{AUTO/AUTOB}$$

$$R^2 = 0,972 \qquad DW = 1,710$$
$$SE = 0,039,$$

ahol TARTN — a tartós fogyasztási cikkek fogyasztása változatlan áron, a személygépkocsikat kivéve
PTARTN — TARTN deflátora.

Az AUTO/AUTOB változó együtthatója 1975-re azt mutatja, hogy a 98 milliós autóhiánynak a lakosságnál levő fedezetéből mintegy 35 millió a tartós fogyasztási cikkek vásárlásában csapódott le. Ennél az árucsoportnál az autókínálat hatása a kiadásokra sokkal szignifikánsabban mutatkozik, mint az összfogyasztásnál; a „t" érték alapján ez a szignifikancia több mint 99%-os.

A számszerű eredményeket nézve természetesen tudjuk, hogy ha csak tartós fogyasztási cikkekre 35 milliót költünk, akkor az összes termékre is többet kell költenünk a kapott 21 milliónál. Ez az ellentmondás azonban csak azt tükrözi, hogy a függvények paraméterei becsült értékek, és e becsült értékeknek nagy a szórása. Annyit mindenképpen mondhatunk, hogy a gépkocsikínálattól függően van helyettesítés a gépkocsik és a többi termék, elsősorban a tartós fogyasztási cikkek között, és az 1975. évi számokat tekintve azt is mondhatjuk, hogy ez a helyettesítés a gépkocsikínálat ingadozásainak mintegy 20—40%-ára terjed ki.

A lakásfelhalmozási kiadások és a megtakarítások későbbi vizsgálata azt indokolja, hogy e becslésnek inkább a felső határát tartsuk valószínűnek.

## Lakásfelhalmozási kereslet, autókínálat

A gépkocsikínálat ingadozásai folytán felszabaduló vagy lekötött pénzek az egyéb fogyasztáson kívül a lakásfelhalmozásban és a pénzmegtakarításokban csapódhatnak le, illetve onnan szabadulhatnak fel.

A lakásfelhalmozási kiadások vizsgálatánál is az volt a hipotézisünk, hogy e kiadások nagysága alapvetően a fogyasztók döntéseitől függ. A jövedelem és az árak mellett e döntésekben a hitelfeltételek is szerepet játszanak. Tudjuk, hogy a lakásépítési hitelnyújtás lényegében úgy történik, hogy minden évben rendelkezésre áll az OTP-nek egy tervezett hitelkeret, amelyet szétoszt az igénylők között. Az adott kamatlábak mellett az igények mindig meghaladják a szétosztható mennyiséget. A felvett hitelek mennyisége tehát (az autókínálathoz hasonlóan) a gazdaságpolitika által meghatározott és független a magánlakás-beruházók viselkedésétől.

Az alábbi egyenlet mutatja, hogy a lakásfelhalmozási kiadások jól magyarázhatók a jövedelem, a hitelek és a lakásépítési árak alakulásával:

$$\underset{}{\mathrm{LAK}} = \underset{(2{,}94)}{0{,}0479\,\mathrm{JÖV}} + \underset{(2{,}68)}{0{,}805\,\mathrm{HIT}} - \underset{(1{,}51)}{2{,}739 \cdot \mathrm{PL/PF}} - \underset{(1{,}09)}{74{,}8}$$

$$R = 0{,}918 \qquad DW = 1{,}710$$
$$SE = 51{,}8,$$

ahol LAK — a lakosság lakásfelhalmozási kiadásai, 1968-as árszinten
HIT — hitelfelvételi többlet reálértéke 1968-as árszinten
PL/PF — lakásépítési árindex/fogyasztás deflátora.

Hasonló eredményeket mutattak a változók logaritmusára és növekményeire felírt — itt nem közölt — egyenletek is.

A változók mértékegységeit összehasonlítva — melyeket az olvasó megintcsak nem ismer — az ár együtthatója átlagosan mintegy 0,4-es árelaszticitást mutat.

A hitelek 0,8-as együtthatója talán kicsit alacsonyabb a vártnál: azt mutatja, hogy a nagyobb hitelnyújtásnak csak 80%-a járul hozzá a lakásfelhalmozási kiadások növekedéséhez, 20%-a a készpénzhozzájárulást csökkenti. Elvileg elképzelhető lett volna az is, hogy a nagyobb hitel további készpénzhozzájárulást mozgósít (az együttható így lett volna nagyobb 1-nél).

A lakásfelhalmozás egyenletének illeszkedési tulajdonságai tovább javíthatók néhány további tényező figyelembevételével. E bonyolultabb összefüggések azonban már csak a növekményformában felírt egyenletben mutatkoznak meg.

Az alábbi egyenletben az autókínálat már ismert változóját és egy minőségi változót is szerepeltettünk. A minőségi változó az 1967—69-es évek kivételes tényezőit reprezentálja. 1967-ben ugyanis — előre ismerve az új mechanizmus bevezetésével kapcsolatos várható áremelkedéseket — igen nagy előrehozott kereslet mutatkozott. Ez a kiadásokban 1967-ben kiugrást, 1968—69-ben pedig az áremelkedés alapján egyébként indokolhatónál nagyobb csökkenést eredményezett.

Az egyenlet a következő:

$$\underset{(2{,}45)}{\mathrm{DLAK} = 0{,}287} \cdot \mathrm{DHIT} + \underset{(3{,}58)}{0{,}448} \cdot \mathrm{Q67\text{-}69} - \underset{(2{,}03)}{0{,}804}\ \mathrm{DPL/PF} -$$

$$\underset{(-2{,}15)}{-0{,}003}\ \mathrm{AUTO/AUTOB} + \underset{(2{,}44)}{0{,}372}$$

$$R = 0{,}651 \qquad DW = 1{,}500$$
$$SE = 0{,}1,$$

ahol Q67-69 minőségi változó, értéke 1967-re 1, 1968—69-re —0,5, a többi évre 0.

Az autókínálat változójának együtthatója, 1975. évi példánknál maradva, azt mutatja, hogy az 1975. évi hiány fedezetének további mintegy 40%-át lakásfelhalmozási kiadásként költötték el. Az autók és a fogyasztás, valamint lakásfelhalmozás közötti nagy helyettesítés meglepő eredmény. Logikai úton következtetve más eredményt várnánk. Úgy gondolnánk, hogy az a fogyasztó, aki esetleg évekig gyűjtött gépkocsira, nem könnyen téríthető el a gépkocsi vásárlásától. Ha kicsi az autókínálat, bízik benne, hogy ez nem lesz mindig így, inkább vár egy-két évig, amíg a helyzet javul és addig a pénzét félreteszi. Bármennyire is ésszerűnek látszik ez a gondolat, tény, hogy eddigi egyenleteink eredményei ennek ellentmondanak, sőt a továbbiakban vizsgált megtakarítási függvények sem illeszkednek bele ebbe a képbe. Nem állítjuk, hogy számításaink bizonyító erejűek, és vessük el az egyszerű megfontolásokat, de eredményeink talán további gondolkodásra késztetnek.

Az egyenletben a jövedelem hatását nem sikerült szignifikánsan kimutatni. Ennek oka lehet az, hogy a jövedelem feltehetően csak a lakáskiadások hosszú távú alakulását befolyásolja, ami az ilyen növekményalakban felírt függvényben nem mutatkozik. A lakásfelhalmozás alakulásának trendjét egyébként a függvényben szereplő konstans tag mutatja. E számot ugyanis mint állandó növekedési ütemet kell értelmeznünk.

A függvény illeszkedési tulajdonságainak javulása az előző egyenlethez képest jobban látható, ha az eredeti változót, a lakásfelhalmozási kiadások szintjét úgy becsüljük, hogy a becsült növekményeket minden évre hozzáadjuk e változó előző évi szintjéhez. Az így nyert becsléssel, LAKB-vel közelítjük a tényadatokat a következő egyenletben:

$$\mathrm{LAK} = \underset{(15{,}0)}{0{,}870} \cdot \mathrm{LAKB} + \underset{(1{,}97)}{75{,}9}$$

$$R = 0{,}94 \qquad DW = 1{,}69$$
$$SE = 44.$$

Mind a korrelációs együtthatót, mind a becslés standard hibáját tekintve, javult az illeszkedés.

## Az áruellátás szerepe a fogyasztásban

Tudott, hogy mind a fogyasztási cikkek, mind az építőanyagok piacán gyakran tapasztalható átmeneti, vagy tartós hiány egyik vagy másik termékből. A hiány ritkán teljes, inkább csak olyan, hogy nem áll rendelkezésre annyi a termékből, mint amennyi az adott árakon elkelne. A termékek általunk vizsgált összevont csoportosításában statisztikailag nem mutatható ki egy-egy termék hiányának a hatása.

Elvileg nem kizárt azonban, hogy az áruellátás általános helyzete statisztikailag valamiképpen megragadható legyen. Az áruellátás színvonalán itt annak valószínűségét értjük, hogy a fogyasztó általában megtalálja azt, amit vásárolni szeretne.

Mielőtt módszerünk tárgyalására rátérnénk, kissé bővebben kitérünk arra, mit is szeretnénk az áruellátással kapcsolatban vizsgálni. Arra keresünk választ, hogy a fogyasztó kiadásait hogyan módosítja az áruellátás színvonala. Ha az áruk beszerzése nehéz, hiányokba ütközik, akkor a fogyasztó

— vagy a hiányzó termék helyett megvesz olyan terméket, amelyet eredetileg nem szándékozott megvenni,
— vagy félreteszi a pénzt.

Az ily módon „kényszerből" vásárolt termékek mennyiségét nem tudjuk mérni, az előbbi döntések hatását tehát nem tudjuk matematikai statisztikai módszerrel vizsgálni.

A második esetben, az úgynevezett kényszermegtakarítások esetében elvileg van tere a matematikai statisztikának. Érdemes azonban a vizsgálat törekvéseit további előzetes meggondolások alapján szűkíteni. A kényszermegtakarítás olyan tiszta formája, amikor a fogyasztó azért kénytelen megtakarítani, mert egyáltalán nincs mire költeni a fennmaradt pénzét, Magyarországon biztos nem, de valószínűleg más országban sem létezik.[5] Előfordulhat azonban, hogy ha az áruellátás nagyon akadozik, több pénzt tart, mint amennyire a pénz egyéb funkcióinak ellátásához szüksége volna. Az alábbi gondolatmenet alapján nyilvánvaló, hogy az ilyen jellegű kényszermegtakarításokat nem az áruellátás szintje, hanem csak az ingadozásai befolyásolják. A fogyasztó ugyanis nyilván csak akkor tart több pénzt, ha várhatja, hogy a rossz áruellátás megjavul, és végül kényszermegtakarítását az eredeti céljainak megfelelően költheti el. Ha az áruellátás színvonalában nem várható változás, akkor semmi oka sincs rá, hogy több pénzt halmozzon fel, mint amennyit jövedelme és egyéb okok alapján lehetségesnek és szükségesnek tart. (Elméletileg természetesen lehet helyettesítés a hiány miatt kiesett fogyasztás és a megtakarítás egyéb funkciói között is, azonban úgy véljük, hogy ettől egy empirikus vizsgálatnál eltekinthetünk.)

Akiket ezek az előzetes meggondolások sem győztek meg arról, hogy hosszabb távon a megtakarításokat nem befolyásolja az áruellátás szintje, azoknak azt kell mondanunk, hogy ha volna is ilyen összefüggés, arra idősorokon alapuló ökonometriai vizsgálat alapján nem derülhetne fény. Ha ugyanis az ellátás színvonala nem mutat ingadozást (az évek során pl. nagyjából egyenle-

[5] Történt már olyan — sikertelen — kísérlet, amely országok közötti összehasonlítás alapján a fogyasztói megtakarítási hányad színvonala és a fogyasztás kínálat-determináltsága között próbált összefüggést kimutatni [7].

tesen rossz vagy jó), akkor hatása matematikai statisztikailag nem különíthető el más tényezőktől (pl. a jövedelmektől, vagy egy trendtől).

Fenti meggondolásainkban igyekeztünk elejét venni annak, hogy az olvasóban az áruellátás hatásának vizsgálatával szemben túlzott várakozások ébredjenek. Sajnos eredményeink a szerény várakozásoknak sem felelnek meg, hacsak nem tekintjük a negatív eredményeket is eredménynek.

Az áruellátás színvonalának ingadozásait kétféle módon próbáltuk számszerűsíteni. Egyik feltevésünk az volt, hogy a kereskedelem készletei kedvezően hatnak az áruellátásra. Erre elsősorban az 1968—69-es évek tapasztalatai adtak alapot. Ezekben az években gazdaságpolitikai eszközökkel nagymértékben lecsökkentették a kereskedelem készleteit, ami közismerten fennakadásokat okozott a kiskereskedelmi áruellátásban. A kereskedelmi készletalakulás bevonása az összfogyasztás egyenletének magyarázó változói közé mindezek ellenére nem javította a becslés paramétereit. Hasonlóan nem járt sikerrel az a kísérlet sem, hogy a fogyasztási cikkek importja, mint az áruellátás javítását célzó gazdaságpolitika mérőszáma, szignifikánsan mutatkozzék az egyenletben. E negatív eredményeket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy Magyarországon a belkereskedelmi áruellátás színvonalának ingadozásai nem olyan nagymértékűek, hogy szignifikánsan befolyásolják az összfogyasztás alakulását. Ez a megállapítás természetesen nem értékeli az áruellátás színvonalát, az lehetett ebben az időszakban nagyon jó is, meg rossz is.

## Áruellátás és lakásépítés

Több sikerrel járt az a kísérlet, hogy az áruellátás ingadozásainak hatását a magánlakás-építésre kimutassuk. Az áruellátás színvonalának számszerűsítésénél természetesen hipotézisekre voltunk utalva. Abból indultunk ki, hogy a népgazdasági beruházások évről évre változó mértékben szívnak el építőanyagokat és kötnek le építési kapacitásokat. Feltehetően ezek az ingadozások érezhetőek mind a belkereskedelem építőanyagellátásában, mind az építőipari vállalatok magánlakás-építési hajlandóságában. E hatásokat az összberuházások növekményével számszerűsítettük. A lakásfelhalmozás egyenlete így:

$$\begin{aligned}\mathrm{DLAK} = \underset{(4{,}62)}{0{,}655} \cdot \mathrm{DHIT} &- \underset{(-3{,}30)}{1{,}242} \cdot \mathrm{D\,(PL/PF)} - \underset{(-2{,}03)}{0{,}00264} \cdot \mathrm{AUTO/AUTOB} - \\ &- \underset{(-2{,}20)}{1{,}222} \cdot \mathrm{DB} + \underset{(3{,}34)}{0{,}375} \cdot \mathrm{Q67{-}69} \\ &R^2 = 0{,}738 \qquad \mathrm{DW} = 2{,}137 \\ &\mathrm{SE} = 0{,}092,\end{aligned}$$

ahol DB — a népgazdasági beruházások relatív növekménye.

A becslés paraméterei kétségtelenül javultak a beruházások nélküli változathoz képest, és a beruházások együtthatójának szignifikanciája is 90% körül van.

## Fogyasztás és lakásépítés

Végül még egy sikertelen kísérletről számolhatunk be: nem sikerült kimutatni, hogy a lakásépítést befolyásoló tényezők helyettesítést hoztak volna létre a lakáskiadások és a fogyasztási kiadások között. Ez a negatív eredmény természetesen megfelelt előzetes várakozásainknak, figyelembe véve e két kiadási csoport eltérő jellegét és funkcióját.

A lakásfelhalmozási kiadások ingadozásai tehát szükségképpen a megtakarításokban kell hogy jelentkezzenek.

## A lakossági megtakarítások

Az eddigi becslési eredmények automatikusan a megtakarítások becslését is adják, hiszen a hitelfelvételi többlettel megnövelt jövedelem, valamint a fogyasztás és lakásfelhalmozás különbsége azonosan egyenlő e megtakarításokkal. Az azonosság révén a fogyasztásra és a lakásépítésre ható egyes tényezőknek a megtakarításra gyakorolt hatása is nyomon követhető. Így pl. mint az előbb már megállapítottuk, a lakásépítést befolyásoló tényezők 100%-osan jelentkeznek a megtakarításokban. Az autókínálat 1975. évi csökkenése pedig az eddigiek alapján mintegy 20%-ban mutatkozik a megnövekedett megtakarításokban. Mindezek a kijelentések természetesen igen bizonytalanok, hiszen az alapul szolgáló számok becsléseinek igen nagy volt a szórása. Kétféle módon lehet az eredményeket újabb oldalról igazolni. Az egyik mód az, hogy ellenőrizzük, hogy a fogyasztásnak és a lakásfelhalmozásnak az egyenleteink alapján becsült értékeit behelyettesítve az említett azonosságba, a tényleges megtakarítás milyen becsléséhez jutunk. Alábbi egyenletünk mutatja az így becsült megtakarítások illeszkedését a tényadatokhoz.

$$\underset{}{\mathrm{MEGTAKF}} = \underset{(34{,}7)}{1{,}01} \cdot \mathrm{MEGTAKFB}$$

$$R^2 = 0{,}947 \qquad DW = 2{,}078$$
$$SE = 83{,}5$$

ahol MEGTAKF — lakossági megtakarítások folyóáron,
MEGTAKFB — lakossági megtakarítások becsült értéke.

Mint az egyenlet mutatja, az így nyert indirekt becslés igen jó közelítését adja a tényadatoknak.

Egy másik módja hipotéziseink más oldalról való igazolásának az, hogy egy regressziós egyenletben közvetlenül keressük a fogyasztás és a lakásfelhalmozás magyarázó változói és a megtakarítások közötti összefüggést.

A megtakarítások és a jövedelem közötti függvénykapcsolat formája nyilván nem azonos a fogyasztási függvény formájával. Nyilván nem a fogyasztóknál levő pénzmennyiség növekménye, hanem annak állománya az, amelyik a jövedelemmel arányos. A pénzállomány növekménye, vagyis a megtakarítások inkább a jövedelem növekményével hozhatók kapcsolatba. Ezt vettük figyelembe, amikor első megközelítésként Houthakker és Taylor [4] nyomán a következő függvényt becsültük a megtakarításokra:

$$\mathrm{MEGTAKF} = \underset{(3{,}67)}{0{,}339} \cdot (\mathrm{JÖVF}-\mathrm{JÖVF}_{-1}) + \underset{(3{,}85)}{0{,}590} \cdot \mathrm{MEGTAKF}_{-1} - \underset{(-0{,}44)}{25{,}00}$$

$$R^2 = 0{,}928 \qquad DW = 1{,}428$$
$$SE = 101{,}8,$$

ahol JÖVF — személyes jövedelem folyóáron.

Feltevésünk szerint ez az alapvető összefüggés módosulhat egyrészt a fogyasztást és a lakásfelhalmozást egyaránt befolyásoló szűkös autókínálat hatására, másrészt a lakásfelhalmozást meghatározó ár- és hitelfeltételek, valamint kínálati tényezők hatására.

A becslést két változó bevonásával próbáltuk javítani. Az egyik a lakásfelhalmozás magyarázó változóinak súlyozott átlaga volt, ahol a súlyok a lakásfelhalmozás egyenletében szereplő együtthatók, a másik pedig az autókínálat AUTO/AUTOB változója. Az utóbbi változó nem mutatkozott szignifikánsnak, így igazolta azt a már más úton nyert megállapítást, hogy az autókínálat változásainak hatása elsősorban a fogyasztásban és a lakásberuházásokban csapódik le. Az előbbi változó nagymértékben javította a becsült értékek illeszkedését a tényekhez:

$$\underset{(4{,}98)}{\mathrm{MEGTAKF} = 0{,}33} \cdot (\mathrm{JÖVF}-\mathrm{JÖVF}_{-1}) + \underset{(5{,}61)}{0{,}62} \cdot \mathrm{MEGTAKF}_{-1} - \underset{(-3{,}51)}{355} \cdot \mathrm{LAKVÁLT} - \underset{(-1{,}24)}{51{,}9}$$

$$R^2 = 0{,}963 \qquad DW = 1{,}099$$
$$SE = 73,$$

ahol LAKVÁLT – a lakásépítési feltételeket tükröző változó.

A lakásépítési feltételek változója relatív növekmények súlyozott összege. A változó együtthatójának nemcsak szignifikanciája, de nagyságrendje is olyan, hogy igazolva lássuk a már előzőleg levont következtetésünket, miszerint a lakásépítési kiadásokat nem helyettesítik a fogyasztási kiadások: a lakásfelhalmozás ingadozásainak hatása 100%-osan a megtakarításokban csapódik le.

## Takarékbetét felhalmozás

A megtakarítások becslésével a takarékbetétek formájában történő megtakarítások is jól becsülhetők. A betétállomány nyilvánvalóan függ a megtakarítások növekedésétől. Az emberek azonban csak akkor teszik takarékba megtakarított pénzüket, ha többé kevésbé bizonyosak abban, hogy egy ideig nem lesz rá szükségük. A betétek tehát csak fokozatosan alkalmazkodnak a pénzmegtakarításokhoz. Ennek megfelelően a betét-megtakarítás növekményei sokkal kevesebb ingadozást is mutatnak, mint a pénzmegtakarításé. A becsült függvény a következő volt:

$$\mathrm{DTAKB} = \underset{(9{,}27)}{0{,}174} \cdot \mathrm{DMEGTAKF} + \underset{(11{,}42)}{0{,}830} \cdot \mathrm{DTAKB}_{-1} - \underset{(-0{,}63)}{0{,}01}$$

$$R^2 = 0{,}934 \qquad DW = 1{,}737$$
$$SE = 0{,}02,$$

ahol TAKB – a takarékbetét felhalmozás folyó forintban.

A betétfelhalmozás növekményének késleltetett értéke igen nagy együtthatóval szerepel az egyenletben. Ez arra utal, hogy a betétmegtakarítás alkalmazkodása a pénzmegtakarításokhoz igen lassú. A megtakarítások 1%-os növekedése rövid távon (egy év alatt) a betétállományt csak 0,18%-kal növeli. Hosszabb időszakban a pénzmegtakarítások hatása a takarékbetét-változó késleltetett értékén keresztül közvetetten is érvényesül.

A késleltetett DTAKB értékeket rendre visszavezetve az előző évek pénzmegtakarításaira egy végtelen sorozat összegezőképlete alapján a pénzmegtakarítás hosszútávú hatásaként $0{,}17/(1-0{,}83) = 1$ adódik.

Ez azt jelenti, hogy ha feltesszük, hogy az 1%-os pénzmegtakarítás növekedés végtelen ideig fennmarad, akkor a betétfelhalmozás növekedése is 1%-os lesz.

*(Beérkezett: 1977. augusztus 23.)*

## IRODALOMJEGYZÉK


1. Ando, A.—Modigliani, F.: *The life cycle hypothesis of saving.* American Economic Review 53. 1953.
2. Duesenberry, J.: *Income, savings and the theory of consumer behavior.* Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1949.
3. Friedman, M.: *A theory of the consumption function.* Princeton: National Bureau of Economic Research, 1957.
4. Houthakker, H.—Taylor, L.: *Consumer demand in the U.S.* Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1970.
5. Klein, L. R.—Rubin, H.: *A constant utility index of the cost of living.* Review of Economic Studies 15 (1948—49).
6. Lackó, M.: *Lakossági megtakarítás és ellátási helyzet* Közgazdasági Szemle, 1976/5.
7. Portes, R.—Winter, D.: *The market for consumption goods in centrally planned economies: preliminary estimates.* 1976. Kézirat.
8. Powell, A. A.: *Empirical analytics of demand systems.* Lexington Books, 1974.
9. Stone, R.: *Linear expenditure systems and demand analysis: an application to the pattern of British demand.* Economic Journal 64, No. 255 (September 1954).
10. Tényi, Gy.: *Fogyasztási modellek.* Szigma, V/3—4. 1972.
11. *A lakosság jövedelme és fogyasztása 1975.* Központi Statisztikai Hivatal, 1976.



## ANALYSIS OF CONSUMER'S EXPENDITURES WITH ECONOMETRIC METHOD

The author tries quantitatively to separate the factors that have determined the consumer's expenditures in Hungary during the last 16 years. The author is especially interested in the role of the consumer's choices and the possible role of scarce supply.

The results show, that income and prices have a determinant effect in all commodity groups.

The scarce supply of cars and building material has an effect on the expenditures of the following way:

— consumers are ready for substitution between cars and other consumer's goods as well as between cars and residential construction.

— consumers do not substitute consumer's goods for residential construction; of conditions for building are unfavourable, savings will rather increase.

It could not be proved, that the level of stocks in retail trade or the level of imports of consumer's goods as indicators of the quality of supply would influence the volume of consumption.



## ИЗУЧЕНИЕ ПОТРЕБЛЕНИЯ И СБЕРЕЖЕНИЙ НАСЕЛЕНИЯ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

В данной статье изыскивается конкретный ответ на то, что в формировании расходов населения какую роль играют решения, принимаемые потребителями в зависимости от доходов и цен и какую роль играют факторы предложения, не находящие своего отражения в ценах.

Результаты подтверждают, что по всем группам изделий розничные цены являются определяющими факторами потребления.

Становится очевидным, что поведение потребителей в совокупности таково, что в зависимости от условий предложения, т. е. цен

— они готовы на подмену в отношении автомашин и прочего потребления, а также между автомашинами и жилищным строительством;
— не подменяется жилищное строительство на потребление и если условия по жилищному строительству являются неблагоприятными, то это скорее приводит к увеличению денежных накоплений.

Не удалось доказать того, что уровень товарного обеспечения торговли оказывает воздействие на объем потребления, однако стало явной предположение, заключающееся в том, что обеспечение строительными материалами, и наличие строительных мощностей оказывает влияние на индивидуальное жилищное строительство.

HULYÁK KATALIN

# Idősorok rövidtávú előrejelzése ARIMA modellekkel[1]

## 1. Bevezetés

Míg a statisztikai elemzések egy csoportjánál feltételezzük, hogy megfigyeléseink egymástól függetlenek, a gazdasági, társadalmi stb. jelenségek megfigyeléséből nyert idősoraink értékei általában egymástól függőek, s éppen e belső függőség jellemzi a vizsgált jelenséget. Az ARIMA modellek a belső függőséget megragadva, olyan modellekkel írják le a statisztikai idősorokat, amelyekkel az idősorok jövőbeli értékei általában sikeresen előrejelezhetők.

A hetvenes évek elején G. E. P. *Box* és G. M. *Jenkins* [1], [2] egységes rendszerbe foglalták e modellek elméleti tulajdonságait és kidolgozási folyamatukat. Az említett szerzők kidolgozták az ARIMA modellek egységes modellrendszerét, s e rendszerből való választás stratégiáját. E modellekkel a legkülönfélébb idősorok viszonylag kevés paraméter felhasználásával leírhatók és előrejelezhetők. Az előrejelzett értékekhez megbízhatósági intervallumokat is rendelhetünk, és új információk beérkezésével az előrejelzések folyamatosan korszerűsíthetők a számítások ismételt elvégzése nélkül.

A modellek lényegében nem térnek el a sztochasztikus modellek (azok közül is az egy-egyenletes regressziós modellek) ismert típusától, s becslésük és felhasználásuk is ismert módszerek és tesztek szerint történik. Módszertani nehézséget csupán a nem-lineáris összefüggések paraméterbecslése okozhat, amely problémák a könyvtári programok alkalmazásával fokozatosan leküzdhetők.

Míg a korábbi idősorelemzési módszerek általában csak a módszer kiválasztását hagyták a felhasználóra, alkalmazásuk pedig már automatikus; a Box—Jenkins-féle módszerek alkalmazása nem teljesen automatizálható. Mind a modell kiválasztásánál, mind becslésénél és ellenőrzésénél a felhasználónak nagyobb szabadsága van a beavatkozásra az alkalmazás összes fázisában.

Az ARIMA modellek kedvező tulajdonságai mellett meg kell említenünk a módszer hátrányait is. Éppen a felhasználó nagyobb döntési szabadsága miatt fennáll a rossz döntések valószínűsége, annak a veszélye, hogy rosszul választunk. Mivel a módszer nem teljesen automatizálható, csak a módszert értő és ismerő végezheti az előrejelzést. Mindebből az is következik, hogy ugyanazokat az adatokat elemezve különböző felhasználók, különféle modelleket specifikálhatnak, s így előrejelzésük is különböző lehet. Végül meg kell említenünk, hogy csak viszonylag hosszú idősorok birtokában célszerű ARIMA modellek specifikálása.

[1] A VII. Magyar Operációkutatási Konferenciára (Pécs 1977) benyújtott dolgozat módosított változata.

Box és Jenkins alapművének [2] 1970-ben történt publikálása óta, egyre többen végeznek alkalmazási kísérleteket az ARIMA modellekkel, pl.: [3], [4], [5]. A Központi Statisztikai Hivatal Ökonometriai Laboratóriumában folyó idősorelemzési munka egyik részeként mi is kísérletet tettünk e módszer hazai ismertetésére és alkalmazására [6]. Jelen dolgozat e munkát ismerteti nagy vonalakban.

Először az ARIMA modellek fajtáit és jellemző tulajdonságaikat tárgyaljuk. Utána bemutatjuk a modellszerkesztés és előrejelzés folyamatát. Áttérve az alkalmazásokra, először magyar idősorokkal végzett számítások következnek, majd ismertetjük azokat az eredményeket, amelyeket NDK és lengyel gazdasági idősorok ARIMA modellekkel történő előrejelzésével nyertünk.

## 2. Az ARIMA modellek típusai

Az ARIMA modellek azon az alapvető elméleti feltevésen nyugszanak, hogy minden olyan idősor, amelynek egymásutáni értékei függenek egymástól, független véletlen ingadozásokból (fehér zajból) generálható [7]. Ezeket a véletlen ingadozásokat $a_t$, $a_{t-1}$, . . .-vel fogjuk jelölni, s feltesszük, hogy várható értékük 0 és varianciájuk $\sigma^2_{a}$. Az $a_t$ fehér zaj változó valamilyen szűrőn keresztül haladva generálja a $z_t$ idősort. A modell éppen ezt a szűrőt jelenti, azaz azt a formulát szolgáltatja, amely $a_t$-ből a $z_t$ idősort állítja elő. A modell változói között tehát csak az $a_t$, $a_{t-1}$, . . . és a $z_t$, $z_{t-1}$, . . . változók szerepelnek. Röviden ismertetjük azt az ötféle modelltípust, amelyekkel, feltevések szerint, midenféle idősor közelíthető. Ezek a modellek, rövidített nevükön, az AR-típusú, a MA-típusú, az ARMA-típusú, az ARIMA és a szezonális ARIMA modellek.

*Az ARIMA modellek tárgyalásához szükséges néhány alapvető operátor:*

Az idősorok sztochasztikus modelljeinek leírásában támaszkodunk az operátoros jelölésmódra, illetve az operátorokkal végzett műveletekre: az operátorszámításra. E helyen csak a tárgyaláshoz elengedhetetlenül szükséges operátorokat definiáljuk. (Bővebben foglalkozik az operátorokkal [6].)

A $B$ *késleltető operátort* a következőképpen definiáljuk:

$$Bz_t = z_{t-1}.$$

A $B$ inverz operátora $B^{-1}$:

$$B^{-1} z_t = z_{t+1}.$$

A $\nabla$ *differencia operátor* a következő:

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1}.$$

A $B$ és a $\nabla$ operátor közötti összefüggés:

$$\nabla z_t = (1 - B) z_t.$$

Meg kell említenünk az operátorok *polinomjait*, mert a továbbiakban általában azok szerepelnek. Ezekkel a polinomokkal műveletek ugyanúgy végezhetők, mint a közönséges algebrában a polinomokkal.

E bevezetés után térjünk rá az ARIMA modellek különböző típusaira.

a) *Autoregresszív (AR) modellek*

Igen sok időbeli folyamat reprezentálására hatékonyan alkalmazhatók a $p$-ed rendű autoregresszív modellek. Ezekkel a modellekkel valamely idősor $t$-időszaki értékét saját, korábbi $t-1$, $t-2, \ldots t-p$. időszaki értékeinek, valamint az $a_t$ változónak lineáris függvényeként fejezzük ki:

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \varphi_2 z_{t-2} + \ldots + \varphi_p z_{t-p} + a_t$$

vagy:

$$\varphi(B) z_t = a_t,$$

ahol $\varphi(B)$ $p$-ed rendű autoregresszív operátorpolinom:

$$\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \ldots - \varphi_p B^p.$$

Különösen gyakran használjuk az elsőrendű AR(1) és a másodrendű AR(2) modelleket:

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + a_t,$$

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \varphi_2 z_{t-2} + a_t.$$

b) *Mozgóátlagolású (MA) modellek*

Ebben a formában a $z_t$ változót csupán az $a_t$ (fehér zaj) változó: $a_t$, $a_{t-1}$, $\ldots, a_{t-q}$ értékeinek véges aggregátumaként állítjuk elő:

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q},$$

vagy

$$z_t = \theta(B) a_t,$$

ahol $\theta(B)$ a $q$-ad rendű mozgóátlagolás operátora:

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q.$$

Ezzel az operátorpolinommal lényegében $a_t$-ből mozgó átlagokat képezünk, de úgy, hogy a mozgó átlag súlyainak sem összegére, sem előjelére, semmiféle kikötést nem teszünk.

Az elsőrendű MA(1) folyamat modellje:

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}.$$

c) *Vegyes típusú, autoregresszív és mozgóátlagolású (ARMA) modellek*

Az idősorok mind rugalmasabb modellekkel való közelítése érdekében fejlesztették ki az autoregresszív és mozgóátlagolású tagokat egyaránt tartalmazó, vegyes jellegű ARMA modelleket. Ezeknek a modelleknek a magyarázó változói között az idősor megelőző értékeihez nem egy egyszerű véletlen változó járul, hanem annak tetszésszerinti mozgóátlagolású aggregátuma. Ez utóbbi változó szerepeltetése a klasszikus regressziós modellek véletlen változójára tett szigorú feltételeket lényegesen fellazítja. Ezért a modell:

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \ldots + \varphi_p z_{t-p} + a_t - \theta a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q},$$

vagy:

$$\varphi(B) z_t = \theta(B) a_t.$$

Az ARMA modellek már kétféle dimenzióval, $p$-vel és $q$-val jellemezhetők, amelyek az autoregresszivítás, ill. a mozgóátlagolás rendjét jelentik.

A legegyszerűbb, elsőrendű autoregresszív és elsőrendű mozgóátlagolású ARMA (1,1) modell a következő:

$$z_t - \varphi_1 z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}.$$

d) *ARIMA modellek nem stacionárius idősorokra*

Az a), b), c) pontban ismertetett modellek elsősorban stacionárius idősorokra alkalmazhatók. Igen sok idősor – különösen az erős fejlődési tendenciát mutató gazdasági jelenségeket leíró sorok – nem stacionárius jellegűek. Ezek a nem stacionárius sorok általában bizonyos fokú differenciáikra nézve már stacionáriusak. Ha ezekre a differenciákra írunk fel ARMA modellt, akkor nyerjük az ARIMA modellt.

Ha $w_t = \nabla^d z_t$-vel jelöljük a $z_t$ idősor $d$-edik differenciáinak képzését, akkor a modell:

$$\varphi(B)\, w_t = \theta(B)\, a_t.$$

Az eredeti $z_t$ adatokból:

$$\eta(B)\, z_t = \varphi(B)(1-B)^d z_t = \theta(B)\, a_t,$$

ahol a $\eta(B)$ általánosított autoregresszív operátor a $d$-ed fokú differenciák képzését is magába foglalja. Így az ARIMA modell háromféle dimenzióval ($p$, $d$, $q$-val) jellemezhető, ahol $p$ az autoregresszivitás rendje, $d$ a differenciaképzés foka, $q$ pedig a mozgóátlagolás rendje. Az ARIMA modellek speciális esetként, mind az AR ($p$, $o$, $o$) modellt, mind a MA ($o$, $o$, $q$) modellt, mind az ARMA ($p$, $o$, $q$) modelleket tartalmazzák. Gyakorlati alkalmazások szerint a legtöbb idősor közelíthető az ARIMA modellek valamelyikével $p$, $d$ és $q$ alacsony (1–2) értékei mellett. Kivételt képeznek a szabályos ingadozásokat tartalmazó, szezonális idősorok.

A leggyakrabban felhasznált ARIMA modelltípusok:

1. A (0,1,1) modell:

$$\begin{aligned} \nabla z_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} \\ &= (1-\theta_1 B)\, a_t. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p &= 0 \\ d &= 1 \\ q &= 1 \end{aligned}$$

2. A (0,2,2) modell:

$$\begin{aligned} \nabla^2 z_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \\ &= (1-\theta_1 B - \theta_2 B^2)\, a_t. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p &= 0 \\ d &= 2 \\ q &= 2 \end{aligned}$$

3. Az (1,1,1) modell:

$$\begin{aligned} \nabla z_t - \varphi_1 \nabla z_{t-1} &= a_t - \theta_1 a_{t-1} \\ (1-\varphi_1 B)\nabla z_t &= (1-\theta_1 B)\, a_t. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p &= 1 \\ d &= 1 \\ q &= 1 \end{aligned}$$

e) *Szezonális ARIMA modellek*

Az idősorelemzés témakörében a szabályos ingadozások, a szezonális és ciklikus hullámzások vizsgálata igen elterjedt. A módszerek túlnyomó többsége az idősorokat előbb komponenseire: a trend-, a szezonális és a véletlen tényezőre bontja, majd ezeket külön-külön határozza meg. Előrejelzésnél azután a külön-külön előrejelzett tényezőket építik egymásra, s így származtatják az idősor előrejelzett értékét. Az ARIMA modellek szezonális idősorok közelítésére is kiterjeszthetők és jól alkalmazhatók anélkül, hogy az idősort komponenseire bontanák. Sőt e modellek alkalmazásánál nem kell előre eldöntenünk egy idősorról, hogy az szezonális vagy nem-szezonális, hanem a módszer alkalmazása során dől el, hogy a konkrét sor milyen modellel írható le optimálisan.

A szezonális ARIMA modellel az idősorokban érvényesülő belső függőséget két irányban vizsgáljuk. Az egyik, az egymásután következő havi (vagy negyedévi) megfigyelések egymásutáni folyamatos függősége, amire az előző típusú modellek is épülnek. A másik hatás, a különböző évek azonos hónapjai (negyedévei) között fennálló függőség; amely éppen a szabályos ingadozásokat tartalmazó sorok jellemző sajátsága. Mindkét függőségi rendszerre felírunk egy ARIMA modellt, majd ezeket egymásra építve kapjuk a következő szezonális (multiplikatív) ARIMA modellt:

$$\varphi(B)\Phi(B^s)\nabla^d\nabla^P z_t = \theta(B)\Theta(B^s)a_t,$$

ahol $\varphi(B)$ a modell „nem-szezonális" $p$-ed rendű autoregresszivitását kifejező operátorpolinom,

$\Phi(B^s)$ a modell „szezonális" $P$-ed rendű autoregresszivitását kifejező operátorpolinom,

$\theta(B)$ a modell „nem-szezonális" $q$-ad rendű mozgóátlagolását kifejező operátorpolinom,

$\Theta(B^s)$ a modell „szezonális" $Q$-ad rendű mozgóátlagolását kifejező operátorpolinom.

Ebben a modellben egy $(p, d, q)$ dimenziójú és egy $(P, D, Q)$ dimenziójú modellt építettünk egymásra $s$ periódusú szezonalitást feltételezve. Ez a legáltalánosabb forma, amelyet $(p, d, q)\cdot(P, D, Q)_s$-ad rendű szezonális ARIMA modellnek nevezünk. A legtöbb szezonális idősor ennek az általános modellnek egyszerű változataival leírható, ahol $p$, $d$, $q$ és $P$, $D$, $Q$ értékei 0 vagy 1 értéket vesznek fel.

Elvégzett számításainkban (lásd a 4. pontban) igen nagy szerepe volt a szezonális idősorok előrejelzésének. Csaknem mindegyik választott idősorunk tartalmazott szabályos szezonális ingadozást. Ezekre a sorokra viszont minden esetben egy egyszerű szezonális modellt a $(0,1,1)\cdot(0,1,1)_{12}$ típusú ARIMA modellt tudtuk alkalmazni, amely explicit formában a következő:

$$z_t - z_{t-1} - z_{t-12} + z_{t-13} = a_t - \theta a_{t-1} - \Theta a_{t-12} + \theta\Theta a_{t-13},$$

azaz

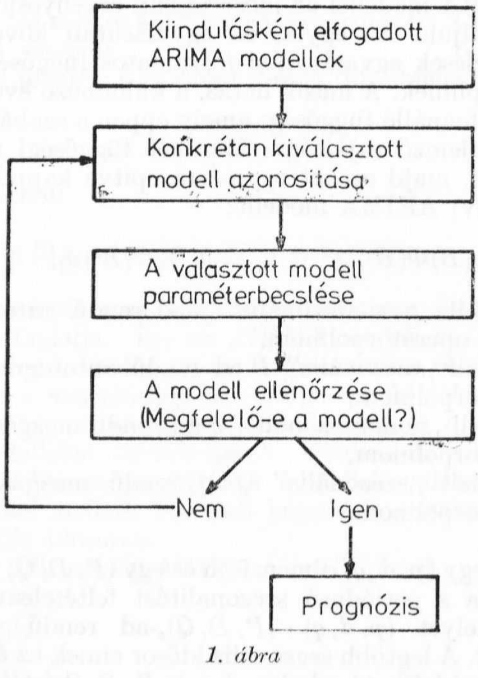
$$\nabla\nabla_{12}z_t = (1-\theta B)(1-\Theta B^{12})a_t.$$

Ez a modell olyan speciális szezonális ARIMA modell, amelynek mindössze két paramétere van: $\theta$ és $\Theta$.

## 3. A modellszerkesztés folyamata

A jelenségekről, gazdasági folyamatokról rendelkezésre álló információnk nem elégséges ahhoz, hogy meg tudnánk szerkeszteni a folyamatok egzakt matematikai modelljeit. Ezért arra vagyunk utalva, hogy hiányos elméleti ismereteinket az empirikus információkkal kiegészítve és alátámasztva, ökonometriai modelleket szerkesszünk. Statisztikai idősorok elemzésénél maguk az idősorok tartalmazzák azt az empirikus ismeretanyagot, aminek alapján, ismerve a sztochasztikus folyamatok főbb típusainak jellemző vonásait, a megfelelő ARIMA modellt fel tudjuk írni.

A konkrét idősorra megfelelő modellt egy iterációs eljárással választjuk ki és számszerűsítjük, amelynek lényegét az 1. ábra blokk-diagramja szemlélteti.




*1. ábra*

Első lépésként a szóbajöhető modellek körét leszűkítjük. Ilyenkor a vizsgált idősorral végzett előzetes számítások alapján megállapítjuk a legjobban indokolt ARIMA modell (vagy modellek) $p$, $d$, és $q$ értékeit, majd kezdőértéket számolunk a paraméterekre. Ezt a szakaszt nevezzük a *modell azonosításának* (vagy identifikációnak). Az azonosítás során az idősorból becsült autokorrelációkra és parciális autokorrelációkra támaszkodunk. Ezek a becsült mutatószámok az elméleti függvények közelítései, s ezért viselkedésükből következtethetünk az elméleti függvények tulajdonságaira. A különböző típusú ARIMA folyamatok elméleti autokorreláció és parciális autokorreláció függvényeinek jellemző sajátosságai viszont ismeretesek. A kétféle információ összevetése képezi a modellazonosítás alapját. Az identifikáció szempontjából nem közömbös, hogy a becsült mutatószámoknak mekkora a standard hibája. Ezért ebben a szakaszban a becsült autokorrelációk standard hibáját is megvizsgáljuk. Az azonosítás lezárul, ha a modelltípus(ok) kiválasztása megtörtént, a paraméterekre induló értékeket számoltunk és a becsült standard hibák elképzeléseink relatív helyességét támasztják alá.

A második szakaszban határozzuk meg a paraméterek végleges értékét. Ahhoz, hogy a paraméterek jó (hatásos) becslését nyerjük, rendelkezésre álló adatainkat is hatékony módon kell felhasználnunk a *becslés* érdekében. E hatékony módszerek közül (mint általában a statisztikai modellek illesztésénél) kiemelkednek a maximális esélyességen alapuló, és a legkisebb négyzetek elvén alapuló módszerek. Problémát jelenthet, hogy a linearitás feltétele nem áll fenn az ARIMA modellek összes paraméterére. Míg a $\varphi$ autoregresszív paraméterekre lineáris függvényeket nyerünk, a mozgó-átlagolás $\theta$ paramétereinek normál-egyenletei nem-lineáris függvények. Ezért a mozgó átlagolású tagot is tartalmazó általános ARIMA modellek becslését a nem lineáris legkisebb négyzetek valamelyik iterációs módszerével becsüljük. Gyakorlati számítások szerint általában 4—6 iterációs lépés biztosítja a konvergenciát.

A becsült paraméterek hibáinak ellenőrzése már a modellszerkesztés következő szakaszának a *modell ellenőrzésének* a része. A modell felhasználása előtt meg kell vizsgálnunk az illesztett modell jóságát. Sokféle statisztikai vizsgálat ismeretes a modellek jóságának elemzésére. E tesztek közül az ARIMA modellek ellenőrzésére a reziduumokon alkalmazott eljárások a legelterjedtebbek. Ezek a módszerek nemcsak a modell viszonylagos megfelelő, ill. nem-megfelelő voltáról tájékoztatnak, hanem feltárják a hiányosságok jellegét is, s így útmutatást adnak a modell javítására is. Ha a modell ellenőrzése olyan súlyos hiányosságokat hoz felszínre, hogy a modell tovább nem tartható, akkor visszatérünk a modell-típus újabb azonosítására. Ebben az esetben a modell inkorrektségéről tanúskodó reziduumokat használjuk fel a második identifikációs szakaszban. Erre a második iterációs lépésre ritkán kerül sor.

Ha az ellenőrzés elfogadható eredményeket hoz, rátérünk az ARIMA modellek tulajdonképpeni felhasználási területére az *előrejelzésre*. A modell olyan rekurzív formulát szolgáltat, amellyel az idősor múltbeli értékeit felhasználva a jövőbeli értékeket előrejelezhetjük. Az előrejelzéshez szükségünk van a modell paramétereire, az $z_t$ és az $a_t$ múltbeli ismert értékeire. A még nem ismert értékek helyére várható értéküket helyettesítjük.

Az előrejelzéshez kapcsolódva megbizhatósági intervallumokat számolunk. Amennyiben a prognózist folyamatosan végezzük, lehetőségünk van az új beérkező információk alapján az előrejelzések folyamatos korszerűsítésére is, anélkül, hogy az összes számítást újra el kellene végeznünk.

## 4. Gyakorlati alkalmazások

A következőkben bemutatjuk az ARIMA modellek felhasználását illusztráló számításainkat és azok eredményeit.

a) Először *tizenöt hazai idősor ARIMA modelljeit* szerkesztettük meg. Az idősorokat úgy választottuk, hogy közöttük különféle — gazdasági, demográfiai, szezonális és nem-szezonális — típusú idősorok legyenek. Egységesen 120 megfigyelésből álló idősorokat vizsgáltunk, az 1964—1973. évi időszak havi adatainak alapján. Azt tűztük ki célul, hogy e tizenöt sorra alkalmazzuk az ARIMA modelleket, s előrejelezzük a sorok havi értékeit az 1974—1975.

évekre. A modell-azonosítás stádiumában úgy jártunk el, hogy maximálisan figyelembe vettük a szóbajöhető modelleket, s így a tizenöt sorra negyven modellt specifikáltunk. A kiválasztott modellek paramétereinek induló értékét a becsült autokorrelációkból számoltuk. A választott modellek között szezonális és nem-szezonális modellek, autoregresszív és mozgó átlagolású tagot tartalmazó és vegyes modellek is szerepeltek. Ezért a modellek becslését a legáltalánosabb ARIMA modellre kidolgozott programmal kellett végezni. A *Marquardt*-féle algoritmust [8] felhasználva, a legkisebb négyzetek nem lineáris modellre alkalmazott iteratív módszerével becsültük a paramétereket. Minden modell becslésénél legfeljebb tíz iterációs lépést próbáltunk ki. E tíz lépés alatt vagy elértük a konvergenciát (azaz a paraméterértékeket megközelítettük 1%-os pontossággal) vagy kiírattuk a tizedik lépés eredményeit. Huszonnyolc modell esetében általában 3—4, de legfeljebb 6 iterációs lépés után az eljárás konvergált. A továbbiakban csak ezekkel a modellekkel dolgoztunk. Bár ennek a huszonnyolc modellnek a becslési eredményei jónak mondhatók, mégsem sikerült minden egyes idősorra legalább egy „jó" modellt előállítani. Voltak viszont olyan idősorok, amelyekre 2—3 egymáshoz közeleső eredményeket hozó „jó" modellt illesztettünk. A becslést követően megállapítottuk, hogy kiválasztott idősorainak csaknem kivétel nélkül szezonális ingadozást tartalmaztak, s a szezonális modellek közül kiemelkedett fontosságban a $(0,1,1)\ (0,1,1,)_{12}$ típusú multiplikatív modell. Ezért az előrejelzést nem végeztük el az összes modellel, hanem egységes program alapján csak a $(0,1,1)\ (0,1,1)_{12}$ típusú modellekkel. Amire a számítások elkészültek előrejelzésünk ex-post jellegű lett, így össze tudtuk vetni az előrejelzett értékeket a tényadatokkal.

Az előrejelzések pontosságát az 1974. és 1975. évi havi tényadatok alapján egy $\delta$-val jelölt mutatóval mértük. Ez a mutatószám az eltérések abszolút értékének a tényadatokhoz viszonyított átlagos százalékos értékét fejezi ki:

$$\delta = \frac{\sum\limits_{l} |z_{t+l} - \hat{z}_t(l)|}{\sum\limits_{l} z_{t+l}}.$$

Az előrejelzési intervallum ($L = 24$) elég hosszú ahhoz, hogy elemezhessük az intervallum hosszának és az előrejelzés pontosságának összefüggését. Így kiszámítottuk a $\delta$ mutatót $L = 6$, $L = 12$ és $L = 24$ esetében, vagyis a félévvel, egy évvel és két évvel előre számított prognózisokat elemeztük.

A következő táblázat a $\delta$ mutatókat tartalmazza[2]

A félévvel előre számított előrejelzések általában jól sikerültek. A tíz idősor közül nyolc esetében az előrejelzés átlagos hibája 5% alatt maradt; négy idősornál $\delta$ még a 3%-ot sem érte el. Az 5. sz. idősornál $\delta$ közel 7%-os értékű, a 10. sz. idősornál pedig a 10%-ot is meghaladta.

Az egy évvel előre számított előrejelzéseknél határozottan romlottak az eredmények. Már csak négy idősornál maradt 5% alatt az előrejelzés hibája. Másik négy idősornál 5% és 10% közé esett $\delta$ értéke. A maradék két idősornál a 10%-ot is meghaladta a hiba.

[2] Az előrejelzések részletes eredményeit és a konfidencia intervallumokat a [6] sz. forrás B függeléke tartalmazza.

| | $\delta(\%)$ | | |
|---|---|---|---|
| | L=6 | L=12 | L=24 |
| 1. Élveszületések száma | 4,4 | 11,7 | 12,6 |
| 2. Halálozások száma | 4,3 | 6,6 | 8,0 |
| 3. Építőipari foglalkoztatottak | 2,1 | 2,9 | 3,7 |
| 4. Gépipari munkások átlagbére | 2,9 | 2,8 | 3,7 |
| 5. Széntermelés | 3,6 | 5,7 | 6,0 |
| 6. Teherszállítás teljesítménye | 6,9 | 6,6 | 6,9 |
| 7. Távolsági személyszállítás teljesítménye | 3,7 | 3,0 | 2,5 |
| 8. Élelmiszer-forgalom | 1,9 | 1,9 | 2,1 |
| 9. Ruházaticikk-forgalom | 2,8 | 5,9 | 5,8 |
| 10. Magyarországra látogató külföldiek | 12,8 | 25,2 | 26,7 |

A két évvel előre számított értékeknél az előrejelzések pontossága vagy nem változott, vagy csak igen csekély mértékben romlott az egyéves számításokhoz képest.

A táblázat alapján megállapítható, hogy az előrejelzések pontossága érzékenyen reagál az előrejelzési intervallum hosszának változtatására, de nem arányosan. Míg a félévhez viszonyítva az egy éves előrejelzések pontossága erősen lecsökkent, az egy éves és a két éves előrejelzések pontossága között nem mutatkozott lényeges különbség. Ugyancsak szembetűnő, hogy míg az előrejelzési intervallum kiterjesztése a viszonylag pontos ($\delta < 3\%$) előrejelzések pontosságát alig változtatja, addig a kevésbé jó vagy rossz előrejelzések fokozott mértékben romlanak.

Mivel a hosszabb intervallumra előre készített előrejelzések csak részben tekinthetők sikeresnek, s illusztrációképpen is, megvizsgáltuk az előrejelzések korszerűsítésének kérdését is.

A korrekcióknál az előrejelzésekkel egy időben számított $\psi$ súlyokra (lásd [6]-ban a 105. oldalon), valamint az időközben beérkező tényadatokra támaszkodtunk.

A következő táblázatban a teljes kétéves (1974—75) időszak eredeti és korszerűsített előrejelzéseinek hibáit hasonlítjuk össze:

| | $\delta(\%)$ | |
|---|---|---|
| | eredeti | korszerűsített |
| | előrejelzések alapján | |
| 1. Élveszületések száma | 12,6 | 3,8 |
| 2. Halálozások száma | 8,0 | 3,7 |
| 3. Foglalkoztatottak az építőiparban | 3,7 | 0,5 |
| 4. Gépipari munkások átlagbére | 3,7 | 2,4 |
| 5. Széntermelés | 6,0 | 4,2 |
| 6. Teherszállítás teljesítménye | 6,9 | 5,2 |
| 7. Személyszállítás teljesítménye | 2,5 | 2,3 |
| 8. Élelmiszer-forgalom | 2,1 | — |
| 9. Ruházaticikk-forgalom | 5,8 | 4,1 |
| 10. Magyarországra látogató külföldiek | 26,7 | 9,8 |

Az előrejelzések korszerűsítése utáni eredmények egyértelműen igazolják e lépés fontosságát, mivel lényegesen csökkentettük az előrejelzési hibákat. Összefoglalóan megállapítottuk:

1. Amennyiben csak fél évre készítettünk előrejelzést, a tíz sorból nyolc sorra jó ($\delta < 5\%$) eredményeket kaptunk.
2. A hosszabb, egy- és kétéves előrejelzéseknél csak a korszerűsített előrejelzésekkel tudtunk hasonlóan jó ($\delta < 5\%$) eredményeket elérni.
3. A tíz sorból egy idősornál a hiba minden változatnál magas volt, s ezt még a korrekció sem csökkentette elfogadható szintre, ezért e sor előrejelzésére nem volt alkalmas módszerünk.

b) A hazai idősorokon elvégzett számítások a módszer illusztrációját szolgálták, s ahogy említettük, az idősorokat is úgy választottuk, hogy a mintában sokféle tartalmú idősor szerepeljen. Az eredmények alapján megállapíthattuk, hogy a gazdasági jellegű idősorok (foglalkoztatottság, kereskedelmi forgalom stb.) előrejelzése jobban sikerült az ARIMA modellekkel, mint az egyéb jellegű (pl. demográfiai, meteorológiai) idősoroké. Ugyanezt támasztotta alá az a kísérlet is, amelynek során néhány szocialista ország gazdasági idősoraira végeztünk rövidtávú előrejelzéseket ARIMA modellekkel. Néhány szocialista ország gazdasági jelenségeinek dinamikai elemzése céljából, különböző országok hasonló jellegű idősoraira végzünk előrejelzést különböző idősorelemzési módszerek felhasználásával. E kutatási téma kapcsán előrejelzéseket végeztünk a $(0,1,1) \cdot (0,1,1)_{12}$ típusú szezonális ARIMA modellel is. A kísérlet azért is érdekes a módszer kipróbálása szempontjából, mert ezeknél a számításoknál csak viszonylag rövid (60 megfigyelésből álló) idősorokra támaszkodhattunk, amelynek alapján 12 megfigyelésre előre készítettünk prognózisokat. Az előrejelzések és a tényadatok összevetése tájékoztat az egyes módszereknek, s így az alkalmazott ARIMA modellnek az előrejelzési képességéről. A munka jelenlegi stádiumában, az NDK és Lengyelország néhány gazdasági idősorán elvégzett összehasonlító elemzés után azt mondhatjuk, hogy az ARIMA modellel, a többi alkalmazott módszerhez viszonyítva jobb vagy legalább olyan jó eredményeket értünk el.

A következő táblázatban bemutatjuk az NDK és lengyel idősorok előrejelzésének néhány eredményét. Az előrejelzések pontosságának elemzésére itt is a $\delta$ mutatót használjuk.

| NDK gazdasági idősorok | $\delta(\%)$ |
|---|---|
| Ipari termelés indexe | 1,97 |
| Elektromos energia | 2,03 |
| Építőipari termelés | 2,86 |
| Teherszállítás — autó | 4,30 |
| Teherszállítás — vasút | 1,87 |
| Személyszállítás | 4,34 |
| Felvásárlás — tej | 2,17 |
| Felvásárlás — tojás | 3,36 |
| Kiskereskedelmi áruforgalom | 1,99 |
| Kiskereskedelmi élelmiszer-forgalom | 2,91 |
| Kiskereskedelmi iparcikkforgalom | 3,05 |

| Lengyel gazdasági idősorok | $\delta$(%) |
|---|---|
| Ipari termelés és szolgáltatások nettó értéke | 3,04 |
| Teherszállítás — vasút | 3,03 |
| Személyszállítás — vasút | 2,04 |
| Kiskereskedelmi élelmiszer-forgalom | 2,96 |
| Nem élelmiszer-cikkek forgalma | 2,12 |
| Felvásárlás — tej | 3,03 |

*(Beérkezett: 1977. november 30.)*

## IRODALOMJEGYZÉK

1. Box, G. E. P.—Jenkins, G. M.: *Some recent advances in forecasting and control I.* Applied Statistics 17. 91. 1968.
2. Box, G. E. P.—Jenkins, G. M.: *Time series analysis forecasting and control.* San Francisco, 1970. Holden Day.
3. Bray, J.: *Dynamic equations for economic forecasting with the G.D.P. — unemployment relation and the growth of G.D.P. in the U.K. as an example.* J. R. Statist. Soc. A. 134, 167. 1971.
4. Newbold, P.—Granger, C. W. J.: *Experience with forecasting univariate time series and the combination of forecasts.* J. R. Statist. Soc. A. 137.131. 1974.
5. Leskinem, E.—Teräsvirta, T.: *Forecasting the consumption of alcoholic beverages in Finland: A Box-Jenkins approach.* European Economic Review, Vol. 8. No. 4. 1976.
6. Hulyák, K.: *Idősorok sztochasztikus modelljei,* Ökonometriai Füzetek 13. sz. Budapest, 1977.
7. Yule, G. U.: *On a method of investigating periodicities in disturbed series with special reference to Wölfer's sunspot numbers.* Phil. Trans. A 226, 267. 1927.
8. Marquardt, D. W.: *An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters.* Journal Soc. Ind. Appl. Math. 11, 431, 1963.
9. Goldfeld, S. M.—Quandt, R. W.: *Non-linear methods in econometrics.* Amsterdam, 1972. North Holland.

## SHORT-TERM FORECAST OF TIME SERIES BY ARIMA MODELS

The article reports on the work done while constructing ARIMA models of individual time series and making short-term forecasts of time series on the basis of the models. The systematization of theoretical characteristics and elaborating processes of ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) models is due to G.E.P. *Box* and G.M. *Jenkins.* According to the assumption of this method many different kinds of time series can be well described by some type of ARIMA models using a relatively small number of parameters and relying on the interdependence between consecutive elements of the time series. As a matter of fact, these models do not deviate much from the well-known type of stochastic, simple equation regression models and their estimation, evaluation and predictive application is also based on well-known techniques and tests.

In our experimental computations ARIMA models of fifteen time series were constructed at first. Time series were chosen in such a way that time series of various types — economic, demographic, seasonal and non-seasonal — could be found among them. Models were quantified on the basis of monthly data for the years 1964—1973 of the time series, i.e. on 120 observations, each. The best approximation was obtained most frequently by using a simple seasonal model of type ARIMA $(0,1,1) \cdot (0,1,1)_{12}$. With this model forecasts of the monthly data of ten time series for the years 1974 and 1975 were made then in the framework provided by this method updated forecasts for the same data were made.

Following the computations made with domestic time series short-term forecasts were made with the model ARIMA $(0,1,1) . (0,1,1)_{12}$ also for some economic time series of the GDR and Poland.

# КРАТКОСРОЧНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛЕЙ «АРИМА»

В данной статье описывается работа, в ходе которой составлялись модели «АРИМА» по индивидуальными временным рядам и на основании моделей осуществлялось краткосрочное прогнозирование временных рядов. Систематизация теоретических свойств и процессов разработки моделей «АРИМА» (Autoregressive Integrated Moving Average) связано с именами Г. Э. Бокс и Г. М. Дженкинс. В соответствии с предположением, выдвигаемым в рамках этого метода, посредством использования внутренних взаимосвязей следующих друг за другом элементов временных рядов большая часть самых различных временных рядов может быть хорошо описана каким-либо типом модели «АРИМА» при наличии относительно небольшого числа параметров. Эти модели, по существу, не отличаются от известного типа стохастической регрессивной модели с одним уровнением и оценка, использование при прогнозировании происходит также в соответствии с известными методами и тестами.

При проведении экспериментальных расчетов вначале были составлены модели «АРИМА» по 15 временным рядам. Ряды времени отбирались так, чтобы среди них были различные по типу временные ряды (экономические, демографические, сезонные и несезонные). В цифровом виде модели составлялись на основании месячных данных по рядам времени за 1964—1973 гг., т. е. 120 наблюдений. Наилучшее приближение при наибольшей частоте достигалось посредством одной простой сезональной модели, т. е. модели «АРИМА» тип $(0,1,1) \cdot (0,1,1)_{12}$ С помощью этой модели по 10 временным рядам прогнозирование проводилось по данным за 1974 и 1975 гг., а в последующем с помошью этого метода проводилось модернизированное прогнозирование.

После проведения расчетов по отечественным временным рядам краткосрочные прогнозы с использованием модели «АРИМА» тип $(0,1,1) \cdot (0,1,1)_{12}$ составлялись для ГДР и ПНР в отношении некоторых экономических временных рядов.

Halabuk László

# A népgazdaság ökonometriai modellezésének néhány időszerű kérdése[1]

1. Ebben a cikkben a népgazdasági szintű ökonometriai modellek — röviden makroökonometriai modellek — néhány időszerű kérdésével kívánok foglalkozni. A felvetődő problémák, gondolatok, kérdések és kétségek alapját nemcsak a magyar modellek, hanem a többi szocialista ország ökonometriai modelljei, sőt a tőkés országokban készített makroökonometriai modellek is adják. Természetes azonban, hogy mégis elsősorban a szocialista országokban készült modellek állnak érdeklődésünk középpontjában.

A legkézenfekvőbb megállapítás, hogy a makroökonometriai modellek alig követhető ütemben sokasodnak, számuk ugrásszerűen nő. Ma már a modellek összehasonlításával foglalkozó irodalom is jelentős, sőt előfordul az összehasonlító irodalom rendszerezése, szemléje is. A fejlődésnek — a szocialista országokban is — természetesen vannak pozitív eredményei és negatív tünetei is. A fejlődés pozitív eredményei közé sorolhatók

— az ágazatok, fogyasztási cikkcsoportok stb. szerinti dezaggregálás növekedése és így részletesebb információ biztosítása;
— a méretek növekedése, amelyet a dezaggregálás mellett újabb funkcióknak és összefüggéseknek a megfigyelés körébe vonása idéz elő;
— a valamely szektort vagy szempontot előtérbe helyező ,,célmodellek" kifejlesztése;
— az ökonometriai modellek kombinációja más technikákkal (input-output, idősor-modellek stb.);
— általában az önállóbb gondolkodás a gazdasági valóság realisztikus ábrázolása érdekében.

A szocialista országok modellezői igen gyors ütemben fejlődnek föl a nyugati országok modellezői vonalába, és a későbbi indulásból adódó lemaradást gyors ütemben hozzák be. Ennek a fejlődésnek azonban negatív kísérőjelenségei figyelhetők meg, amelyek főleg két okra vezethetők vissza.

A felzárkózási törekvés sürgető hatására a specifikáció gyakran hibákat tartalmaz, vét az okozati kapcsolatok logikája ellen; ugyanakkor kritikátlanul vesz át, a valósággal való egyeztetés nélkül, megközelítési módokat. Mindezek hatásaképpen sok látszatmegoldás született és sok probléma megoldását hirdetik megalapozatlanul. A következőkben *néhány olyan területet érintünk, amelyeken időszerűnek tűnik az előrelépés.* Ilyenek

— az oksági lánc biztosítása;
— a dinamikus specifikáció tökéletesítése;

[1] A VII. Magyar Operációkutatási Konferencián (Pécs, 1977. október 11—14.) tartott előadás némileg módosított szövege.

— a keresleti és kínálati megközelítés jobb megalapozása;
— a blokkok szerepének felülvizsgálata;
— a tervezéssel való kapcsolat tisztázása.

A következő megállapítások részben közismertek, részben újabb keletűek, részben — tudomásom szerint — újakként felvetődő gondolatok. Természetesen nem zárható ki egy ilyen áttekintésből a szubjektivitás motiváló hatása; ez a tény azonban azzal enyhíthető, hogy a felvetett gondolatok sokkal inkább problémák, mint megoldások.

2. A problémák tárgyalása előtt *célszerű azonosítani* azt *a modelltípust*, amelyre a felvetett problémák vonatkoznak. Az alábbiakban olyan modellekkel foglalkozunk, amelyek a gazdasági változók közötti feltételezett összefüggéseket fogalmazzák meg, alapjuk tehát egy gazdasági hipotézisrendszer; az összefüggések vizsgálatára statisztikai megfigyelésekből indulnak ki; a kapcsolatok sztochasztikus jellegű kvantifikálására regressziós egyenletek szolgálnak; ezek a regressziós egyenletek szimultán rendszert alkotnak. A félreértések lehető elkerülését célozza az is, hogy megadjuk ennek a modelltípusnak általános alakját, amely a következő:

$$\mathbf{YC} + \mathbf{XB} + \mathbf{U} = \mathbf{O}, \tag{1}$$

ahol $\mathbf{Y}$ az endogén változók $T \times M$ megfigyelési mátrixa,
$\mathbf{X}$ a predeterminált változók $T \times K$ megfigyelési mátrixa,
$\mathbf{U}$ a maradéktagok $T \times M$ mátrixa,
$\mathbf{C}$ az endogén változók $M \times M$ együtthatómátrixa,
$\mathbf{B}$ a predeterminált változók $K \times M$ együtthatómátrixa.

Ha az összefüggésrendszert a megfigyelési időszak bármely $t$ időszakára alkalmazzuk, akkor — az (1) mátrixegyenlet $t$-ik soraként — az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\mathbf{y}'(t)\,\mathbf{C} + \mathbf{x}'(t)\,\mathbf{B} + \mathbf{u}'(t) = \mathbf{O}', \tag{2}$$

amely részletesebben kiírva az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} &c_{11}\,y_1(t) + \ldots + c_{M1}\,y_M(t) + b_{11}\,x_1(t) + \ldots + b_{K1}\,x_K(t) + u_1(t) = 0. \\ &\vdots \\ &c_{1M}\,y_1(t) + \ldots + c_{MM}\,y_M(t) + b_{1M}\,x_1(t) + \ldots + b_{KM}\,x_K(t) + u_M(t) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

3. Ebben a pontban annak az *oksági lácnak* a jellegével és problematikájával foglalkozunk röviden, amelyet az egyes ökonometriai modellek kifejezésre juttatnak. Ez a kérdés szorosan kapcsolódik az általunk felvetendő többi kérdéshez. Az oksági kapcsolat kérdésében élénken fejeződnek ki a tőkés, illetőleg szocialista országokban készített modellek eltérő tulajdonságai. Az eltérések részben gazdaságelméleti, részben a gazdasági élet irányításából és mechanizmusából származó különbségekből erednek. A következőkben két kérdésre térünk ki: az egyik a modell általános szerkezeti formáiban az oksági kapcsolatokra vonatkozóan kifejezésre jutó felfogásbeli különbség, a másik pedig azoknak a konkrét specifikációs hibáknak rövid áttekintése, amelyeket a gazdasági élet okozati összefüggéseivel szemben logika és realizmus tekintetében el szoktak követni.

Bevezetőben bemutattuk a szimultán egyenletrendszer típusú modellek legáltalánosabb matematikai formáját (strukturális formában specifikált interdependens modell). Ebből a modelltípusból könnyűszerrel eljuthatunk a rekurzív modell szűkebb fogalmához. Rekurzív modellnek azt a modellt tekintjük, amelyben az egyenletek olyan sorrendbe rendezhetők, hogy minden egyes endogén változó kifejezhető csak predeterminált változók és megelőző egyenletekben megmagyarázott endogén változók függvényeként. A rekurzív forma esetében a (3) rendszer a

$$
(4)\quad
\begin{array}{l}
e_{11}y_1(t) + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad d_{11}x_1(t) + \ldots + d_{K1}x_K(t) + u_1(t) = 0 \\
e_{12}y_1(t) + e_{22}y_2(t) + \qquad\qquad\qquad d_{12}x_1(t) + \ldots + d_{K2}x_K(t) + u_2(t) = 0 \\
\vdots \\
e_{1M}\,y_1(t) + e_{2M}\,y_2(t) + \ldots + c_{MM}\,y_M(t) + d_{1M}x_1(t) + \ldots + d_{KM}x_K(t) + u_M(t) = 0
\end{array}
$$

rendszerré alakul át.

Természetesen mind a strukturális, mind a rekurzív specifikáció csak keretet jelent, amelyen belül bármelyik endogén vagy predeterminált változó együtthatója a priori (külső) információ alapján 0-val egyenlőnek tekinthető.[2]

Nyilvánvaló, hogy az általános típustól a speciális felé haladva, az összefüggésrendszer egyszerűsítésével az oksági kapcsolatok a változók között egyre világosabbá, áttekinthetőbbé válnak. Sajnos, egyúttal hasonló arányban távolodunk el a valóságtól is. Nyilvánvaló, hogy a népgazdaság megszámlálhatatlan tényezőből és még inkább megszámlálhatatlan egymásrahatásból áll. Ezek az egymásrahatások viszont a legkevésbé sem egyirányúak. A termelés szférájába eső aktusok kétségtelenül hatnak a termelt javak felhasználásának szférájára és a felhasználási szféra aktusai is hatnak a termelési szférára a közvetítő csatornák, folyamatok sokaságán keresztül (árak, bérek, jövedelmek, beruházások, kapacitások, termelékenység stb.).

Ezeknek a nagyon vegyes irányítású vektoroknak az egyenirányítása olyan vállalkozás volna, mint például annak az elhatározása, hogy a világon meglevő útvonalak mindegyikén haladjon a forgalom keletről nyugati irányban, vagy fordítva, vagy hogy az égbolton a nap járásával egyezően haladjanak a felhők keletről nyugatra. Sajátságos jelensége az ökonometria történetének, hogy vannak az elméletnek képviselői, köztük olyan neves tudós is, mint *Wold*, akik a rekurzív specifikáció mellett törnek lándzsát.[3] Mindez nem változtat azon a tényen, hogy a rekurzív specifikáció erőszakot tesz a közgazdasági folyamatok ábrázolásában és ilyen értelemben megsérti a modell által kifejezendő oksági láncot. Az újratermelési folyamat kétségtelenül jobban hasonlít egy véget nem érő, változó szinten, összetételben, intenzitásban folyó körforgáshoz, mint valahol elkezdődő és valahol befejeződő áramlások sokaságához.

Sajnos, mégis az a helyzet, hogy az újratermelési folyamat egyes fázisai domináns szerephez jutnak a tőkés országok modelljeiben, más fázisai pedig

[2] A rekurzív modelltől a direkt redukált formában specifikált modellt az különbözteti meg, hogy utóbbiban egyenletenként egy — egymástól különböző — endogén változó kivételével minden endogén változó együtthatója 0. Amint tehát a rekurzív modell az általános interdependens modell speciális esete, ugyanúgy a direkt redukált formában specifikált modell is speciális eset a rekurzív modellhez viszonyítva.

[3] Meg kell azonban jegyezni, hogy a rekurzív forma hívei főleg módszertani (pl. becslési) szempontokból indulnak ki.

a szocialista országok modelljeiben. A tőkés országok modelljeiben az aggregált kereslet (aggregate demand) játszik központi szerepet, a szocialista országok modelljeiben pedig a termelési kapacitások fejlesztése (élő vagy holt munka vonatkozásában). A következőkben természetesen elsősorban a szocialista országok modelljeit tartjuk szem előtt.

Az újratermelési folyamat vég nélküli voltának elhanyagolása főképp abban állapítható meg, hogy a végső felhasználás tételeinek a termelésre gyakorolt hatása nem kap megfelelő szerepet; a modellezők erre kevesebb figyelmet fordítanak, mint a termeléstől a felhasználásig vezető útra. A közelmúltig kevés olyan modell készült a szocialista országokban, amely a lakosság fogyasztásának a termelésre való visszacsatoló hatását konkrétan kidolgozná, holott nyilvánvaló, hogy ilyen visszahatás a valóságban létezik. Ez a hiányosság akkor sem fogadható el, ha tudjuk is, hogy a fogyasztásra vonatkozó adatok nem fejezik ki a valóságos teljes keresletet, hanem annak csak megvalósult, realizált részét; ha tudjuk is tehát, hogy a fogyasztási adatok nem megfelelő indikátorai a keresletnek, még a készletváltozás mutatóival együtt sem, és ha tudjuk is, hogy a kereslet hatását a termelésre részben kormányzati, gazdaságpolitikai eszközök illetőleg változók közvetítik. (Külön pontban foglalkozunk a fordított irányú kapcsolatok egyes újabb modellekben való szerepeltetésének kérdésével.)

Nem megfelelő módon kidolgozott az ökonometriai modellekben a külkereskedelemnek a termelésre való hatása sem.

A legkevésbé kialakult azonban a végső felhasználás kategóriái közül a beruházások termelésre való hatásának a specifikációja. Ezen a téren tulajdonképpen kettős okozati hatás igényel gondosabb megfogalmazást. Az egyik a beruházásoknak a beruházási javakat előállító ágazatok termelésére való hatása, a másik pedig az (üzembehelyezett) beruházásoknak az állóeszközállományra, illetőleg a kapacitásra való hatása. A probléma különösen ott csúcsosodik ki, ha egy modellben az állóeszköz-állományt predetermináltnak tekintik (ami igen sok érvvel támasztható alá), a beruházásokat pedig endogénnak (ami szintén hatásosan indokolható). Nyilvánvaló viszont, hogy a beruházások endogén minősítése mellett az állóeszköz-állomány nem tekinthető predetermináltnak. A tőkeképződés magyarázatának gyenge volta a szocialista országok modelljeinek egyik legnagyobb fogyatékossága.

Bizonyos változók magyarázatának és bizonyos hatások megfogalmazásának elhanyagolása az oksági lánc ellen elkövetett hibák egyik csoportját képezi. Egy másik fajta hibát, ennek az ellentétét jelenti a túldeterminálás, vagyis egyes kategóriák, változók több irányból, egymástól függetlenül történő meghatározása. Ennek a legtipikusabb esete az az ellentmondás, amely dezaggregált modellekben abból adódik, hogy a valamennyi szektorra, ágazatra kidolgozott magyarázó egyenlet mellett külön magyarázó egyenletet állítanak föl az ágazatok, szektorok stb. összességére is. Ha például egymástól függetlenül magyarázzuk valamely termelő ágazat termelésének alakulását *és* az egész termelési szféra termelésének alakulását, akkor a kétféle determináció egybevágóságát semmi sem biztosítja, azok ellentmondásba kerülhetnek (például az előrejelzés, vagy általában a modell valamely működtetése során). Ugyanez vonatkozik a fogyasztás dezaggregált specifikációjára. A megoldás ebben az esetben csak az lehet, ha vagy a részek összességének, vagy valamely résznek külön sztochasztikus meghatározásától eltekintünk. Ez a megoldás sem problémamentes azonban. Tekintsük például egy népgazdaság $n$ termelő ágazatát. Ha mind az $n$ ágazatot sztochasztikus úton meghatározzuk, akkor ezek összege egy identitással adódik, amelyre mint fő aggregátumra már nem készíthetünk más fő aggregátumok segítségével magyarázó egyenletet. Ha viszont $n-1$ ágazatra és az $n$ ágazat egészére készítünk sztochasztikus magyarázó egyenleteket, akkor az $n$-ik ágazat reziduális szerepet kap. Így ez az ágazat nem kap sztochasztikus magyarázatot, változója nem tekinthető endogénnek; ugyanakkor nem érezzük olyan predeterminált változónak sem, amely egy kívülről jövő hatást képvisel, hiszen éppen úgy endogén jellegű, mint a többi ágazat változója, sőt reziduális jellegénél fogva talán még inkább.

Végül az oksági lánc megsértésének harmadik típusát képviseli, amikor a keresleti-kínálati meghatározásban vagy más megközelítésben a termelés és felhasználás egyensúlya a modellben nincs biztosítva. Ez kétféleképpen fordulhat elő. Vagy teljesen hiányzik az egyensúlyt kifejező identitás, vagy (akár van ilyen, akár nincs) a termelés és felhasználás definíció szerint azonos változójára egymástól függetlenül készül magyarázó egyenlet. Helyesen csak azonossági egyenlet léte és a túldetermináció elkerülése oldhatja meg a problémát.

4. A makroökonometriai modellezés egyik legsürgetőbb feladatának látszik a *dinamika* megfelelő érvényre juttatása a modellszerkesztésben, a specifikációban, és a modell működtetésében. Tekintsük át röviden a dinamika megjelenési formáit az ökonometriai modellekben. Vegyük sorra az egyetlen változóból (idősorból) álló modelleket, a regressziós egyenletből álló modelleket és a szimultán egyenletrendszereket.

Valamely idősor alakulásának belső szabályszerűségeit a leggyakrabban valamely trend mechanikus illesztésével vagy autoregresszív modell konstruálásával vizsgálják. A trendek illesztésének legtöbb módszere közismert. Nem kell itt sokat szólni az autoregresszív modellek készítéséről sem. Ezeknek lényege, hogy az idősor valamely $t$ időszakbeli értékét az idősor korábbi értékeivel és egy véletlen tényezővel magyarázzák. Az elsőrendű autoregresszív modell formája:

$$(6) \qquad y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

általános formája pedig

$$(6) \qquad y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \ldots + \alpha_K y_{t-K} + \ldots + \varepsilon_t.$$

Az autoregresszív folyamatok legkorszerűbb és legrendszeresebb módszertani közelítését, illetőleg feldolgozását az ARMA modellek adják. A különféle módszereket összehasonlító és minősítő szempontok közül kettőt emelünk ki: előnyös az előrejelzés szempontjából, ha időben visszafelé haladva a távolabbi megfigyelések szerepe az előrejelzésben csökken; és ugyancsak előnyös, ha az előrejelzés távlatának hosszabbításával az előrejelzés alapjául szolgáló időszak — már előrejelzett értékek felhasználásával — megnyújtható vagy előbbre helyezhető.

Egy egyenletes modell esetében a dinamika kifejezésének domináns eszköze az elosztott késleltetés modellje. Ennek általános formája

$$(7) \qquad y_t = \alpha_0 x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t.$$

Ennek az általános elosztott késleltetési modellnek becslése nyilvánvaló nehézségekkel jár, hiszen végtelen sok együtthatót kellene becsülni véges minta alapján. Különféle feltevéseket alkalmaznak az $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ együtthatók egymáshoz való viszonyára. Ha e feltevések közül azt választjuk, hogy az együtthatók értéke geometriai sorozatnak megfelelően csökken, egy egyszerű matematikai átalakítás segítségével az előző általános formából kihozható az

(8) $$y_t = \alpha x_t + \beta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

forma.

Ily módon az elosztott késleltetési modell autoregresszív modellé válik, egyúttal két változóra és két becsülendő paraméterre redukálódik. Azt kívánjuk azonban hangsúlyozni, hogy sem a polinom jellegű elosztott késleltetésnél, sem az abból származtatott autoregresszív jellegű modellnél nem küszöbölhető ki a specifikációból, és így a becslésből sem, bizonyos önkényesség.

Szimultán egyenletrendszer esetében a multiplikátorok testesítik meg a legteljesebben a modell által kifejezett dinamikát. Ismeretes, hogy a strukturális formából az

(9) $$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Pi}' \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t,$$

illetőleg az

(10) $$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{B}\mathbf{z}_t + \mathbf{v}_t$$

formához juthatunk, amely az endogén változók alakulását predeterminált változókra vezeti vissza, tehát kiküszöböli az egyidejű endogén változók okozati kapcsolatát. Néhány további átalakítás segítségével eljuthatunk az

(11) $$\mathbf{y}_t = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{C}_r \mathbf{z}_{t-r} + \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{A}^r \mathbf{v}_{t-r}$$

végső formához, amelyben már késleltetett endogén változók sem szerepelnek, hanem az endogén változók csupán exogén változók függvényében fejeződnek ki.

Az endogén változók és az exogén változók kapcsolatát a $\mathbf{C}_r$ mátrix fejezi ki, amelynek mérete $M \times K$, ahol $M$ az endogén változók, $K$ az exogén változók száma. Ez a mátrix minden $r$ késleltetésre felírható. Így az $R$ számú multiplikátor mátrix alapján fölírható például olyan $\mathbf{C}_k$ mátrix is, amely $M \times R$ méretű és valamelyik exogén változó hatását valamennyi endogén változóra és valamennyi $r = 0, \ldots R$ késleltetésre tartalmazza. Jelenlegi ismereteink szerint a szimultán rendszer esetében a multiplikátorok nyújtják a dinamika feltárásának legjobb lehetőségét.

Nem tartozik a gondolatmenethez, de megemlíthető, hogy a dinamika vizsgálatánál igen nagy szerephez jut egy aggregációs hatás. Ez pedig a valóságban meglevő késleltetési hatás és a megfigyelési időegység méretének viszonyától függ. Ha ugyanis például a megfigyelés éves, de valamely hatás késleltetése esetleg 2–3 hónapos, akkor e késleltetési hatásnak csak kisebb-nagyobb része kerül bele az éves adatokba.

Milyen szerepet kapnak egy makroökonometriai modell esetében az áttekintett konstrukciók? Akár autoregresszív formájú, akár polinomiális formájú elosztott késleltetés esetében a specifikációt megelőző (a priori) elemzés szükséges olyan kérdések tekintetében, mint

— a polinom tagjainak száma,
— az együtthatók értékének egymáshoz való viszonya (például geometriai típusú)
— az együtthatók értéke stb.

Ezek az előzetes elemzések, amint említettük, vagy egyszerű elhatározással, vagy bizonyos döntési kritériumokkal társulnak; hozzá kell még fűzni, hogy a kritériumok szintén döntések eredményei.

A multiplikátorokat a becslés, a redukálás, a végső forma elkészítése után nyerjük. Mind ez ideig kevéssé hasznosították őket, aminek okai közt talán a legfontosabbak, hogy a modell megfigyelési folyamatának befejező állomását képezik, és hogy talán az elkészített modellek többsége nem elég dinamikus.

Az elmondottak szerint a modellezési munka egyes fázisaiban más-más megközelítési és kifejezési módok kapnak szerepet. A specifikáció során elsősorban az elosztott késleltetés vagy ennek valamilyen transzformációja áll az előtérben. A modellkészítés legutolsó fázisában viszont a multiplikátorok jelennek meg, amelyek az exogén és endogén változók közötti kapcsolatok késleltetési hatásainak teljes rendszerét fejezik ki. A késleltetési hatások megállapításának és kifejezésének e két módja nyilvánvalóan nem független egymástól. Véleményem szerint azonban a kétféle meghatározás és kifejezési mód kapcsolata nem részesül elég figyelemben. Az induló késleltetési specifikációnak nyilvánvalóan meghatározó szerepe van a multiplikátor-rendszer számszerűségeire, bár általában e függőség végigvezetését illetőleg elemzését sem végzik elég explicit módon. Végképp nincs tudomásom azonban arról, hogy a multiplikátoroktól valamiféle visszacsatolást kísérelték volna meg az induló késleltetési specifikációra. Nem volna talán reménytelen vállalkozás egy arra irányuló kísérlet, hogy a multiplikátorok vizsgálatát bevonjuk abba a széleskörű specifikációs elemzésbe, amely minden komolyan megalapozott modell készítésének első fázisa. Ezzel tulajdonképpen a specifikációt egy iteratív folyamat részévé tennénk. Első megközelítésben úgy tűnik, hogy ezt az eljárást olyan esetekben lehetne alkalmazni, amikor az eredeti késleltetési specifikáció az egyes egyenletek szempontjából (7) formájú; közelítésképpen azonban használható talán az eredeti specifikáció (6), illetőleg (8) formája esetén is. Hosszas módszertani és kísérletezési munkát igényel annak a kérdésnek megválaszolása, hogy ez az eljárás mennyire volna matematikailag formalizálható.

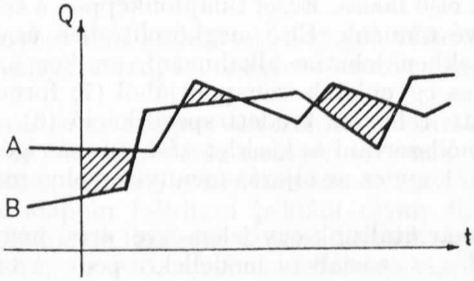
5. Az előzőkben már utaltunk egy jelenségre: arra, hogy a tőkés modellekre a kereslet $\rightarrow$ termelés, a szocialista modellekre pedig a termelés $\rightarrow$ fogyasztás kapcsolat kidolgozottsága jellemző, a visszakapcsolás többé-kevésbé elhanyagolt. A következőkben a termelés, forgalom és fogyasztás *keresleti, illetőleg kínálati megközelítésének kérdését* érintjük. Az uralkodó tőkés elmélet szerint az aggregált kereslet a piac közbejöttével biztosítja a termelés megfelelő színvonalát. Anélkül, hogy ennek a felfogásnak alapvető bírálatával foglalkoznánk, mégis utalhatunk arra, hogy a kereslet fogalmát itt a megvalósult fogyasztás, illetve a vásárlások helyettesítik, hogy a termelésről a fogyasztásra való visszakapcsolás csak erősen közvetett, továbbá, hogy az egyensúly hiányának olyan súlyos jelenségeit mint a munkanélküliség vagy a rossz konjunktúra más tünetei nehezen lehetne olyan adaptációs folyamatnak a keretében magyarázni, amikor a termelés a kereslethez alkalmazkodik.

A kínálat-orientált szocialista modelleknél a nehézségek egyrészt abból adódnak, hogy a kapacitásoknak (munkaerő és tőke), valamint a kapacitás kihasználásának nincsenek megfelelő indikátorai, hogy gyenge vagy teljesen hiányzik a visszacsatolás a felhasználásról a termelésre stb.

A keresleti, illetőleg kínálati megközelítésnek az eddig adott alapmodellje némi módosításra szorul az utóbbi évek tükrében. Korrekciós törekvések vannak a nyugati modellezők körében az elhanyagolt termelési oldal dezaggregálására, a szocialista országokban pedig a keresleti megközelítés alkalmazására. A nyugati törekvéseknek egy típusa az, hogy a termelést ÁKM jellegű megközelítéssel kezelik. A szocialista szemlélettel ellentétben azonban az ÁKM-et csak másodlagos értelemben hasznosítják, amennyiben a fogyasztás eredet szerinti dezaggregálása alapján a termelő ágazatokkal szembeni igények megállapítására használják.

A szocialista országokban nagy lendületet vett a keresleti megközelítés megalapozása. Ennek egyik módja az, hogy mind keresleti, mind kínálati irányból kísérletet tesznek a termelés és forgalom megfogalmazására. Az eddig ismeretes kísérletekkel kapcsolatban azonban meg lehet állapítani, hogy nem elég világos a kétféle irányból meghatározott termelési színvonalnak a modell többi részével való kapcsolata, hogy a specifikációs kísérletek meglehetősen szokványos megfogalmazásokat vesznek át, továbbá, hogy a kétféle megközelítés közötti választás kérdése tisztázatlan stb.

Úgy véljük, hogy a megoldás az eddigieknél megalapozottabb eljárást igényel. Induljunk ki két lehetséges helyzetből. Szolgáljon a derékszögű koordináta-rendszer abszcissza-tengelye az idő, ordináta-tengelye pedig a termelés mennyiségének jelzésére. Legyen $A$ a termelési kapacitásokból (munkaerő és tőke) kiindulva meghatározott termelési színvonal, és legyen $B$ a kereslet által igényelt színvonal. Ebben az esetben két helyzet lehetséges, vagy $A$ vagy $B$ nagyobb mint a másik (1. ábra).




*1. ábra*

A bevonalkázott területek azt az időszakaszt jelzik, amelyben a kapacitások meghaladják a keresletet, és az eltérés mennyiségét, a két görbe közötti üresen hagyott területek pedig a fordított helyzetet.

Első megközelítésben a következőket mondhatjuk: olyan helyzetben, amikor az igény (kereslet) meghaladja a kapacitást, a termelés színvonalát a kapacitás határozza meg és a kapacitást meghaladó többletigényeknek az alakulása a folyó termelés szempontjából irreleváns (természetesen nem az a kapacitások alakítása szempontjából). A fordított helyzetben, amikor az igények nem érik el a termelés kapacitását, a termelés színvonalát az igények határozzák meg és a termelési kapacitásoknak a termelés meghatározásában játszott szerepe legalábbis csökken. A termelési színvonal meghatározásában tehát a szűk keresztmetszetet képviselő — alacsonyabb szintet megjelölő — tényezőrendszer szerepe a döntő vagy legalábbis elsődleges. A fentiekből következik, hogy aszerint, hogy a kapacitás vagy az igények színvonala haladja-e meg a másikat, a modell specifikációjában is a megfelelő tényezőket kell érvényesíteni. Tehát egy olyan termelési egyenlet írható fel, amelyben mind a kapacitásból adódó meghatározó tényezők, mind az igényeket képviselő tényezők szerepelnek és valamilyen kapcsolási technika (például egy $\{0,1\}$ változó) beiktatásával biztosítjuk a megfelelő tényezők szerepeltetését illetőleg szüneteltetését. Ha a paraméterbecslést ily módon preparált megfigyelési időszak alapján hajtjuk végre, akkor legalábbis elvben biztosítjuk azt, hogy a keresleti, illetőleg kínálati tényezők paramétereinek becslésében csak azok a megfigyelési pontok kapnak szerepet, amelyekben a megfelelő tényezők valóban effektív szerepet játszottak.

Nem volna korrekt, ha a vázolt elgondolásokhoz nem fűznénk hozzá az őket kísérő problémákat. Ilyenek a következők:

— nem könnyű megtalálni az átkapcsolás alapjául szolgáló indikátorokat, más szóval eldönteni, hogy egy-egy időszakban a kínálati vagy keresleti tényezők voltak-e (lényegesen) meghatározóbbak;[4]

— nem tételezhető fel, hogy a jelzett elgondolás teljes határozottsággal érvényesül; különösen nem-markáns helyzetekben, vagyis amikor a keresleti-kínálati erőviszonyok nem térnek el erőteljesen;

— bonyolult kérdést jelent a késleltetési tényezők beépítése a fenti modellbe;

— nem várható, hogy igények $<$ kapacitás helyzetben a termelés rugalmasan csökken; ennek oka lehet egy „vezetői szórakozottság", egy késleltetési effektus vagy valamely szociálpolitikai, gazdaságpolitikai meggondolás;

— a termelés specifikációjának megoldásra váró kérdése a tőkekapacitás és ennek kihasználásának mérése, a munkaerő-kapacitás és ennek kihasználásának mérése, továbbá a kereslet számára megbizhatóbb indikátorok biztosítása annál, mint amelyet az egyidejű, vagy megelőző vásárlások volumene jelent.

6. Ezek után az ökonometriai modellekben alkalmazott *blokkok* kérdését érintjük. Ha történeti visszapillantást teszünk, megállapíthatjuk, hogy az ökonometriai modellek eleinte nem operáltak blokkokkal. A kapcsolatok dezaggregált alkalmazása vezetett olyan mellérendelt relációkra, amelyeket már blokkoknak neveztek. A fejlődés legújabb fázisa produkálta olyan önálló egységenként a blokkokat, amelyek tulajdonképpen mint autonóm egységek állnak szemben a modell többi részével.

A „blokk" kifejezés tehát két fogalmat takar. Lazán értelmezve blokkoknak nevezik a formailag hasonló, vagy egy bizonyos funkcionális témára vonatkozó relációk sokaságát. Szigorúan véve azonban akkor beszélhetünk blokkokról, ha a blokkon belüli relációknak szorosabb a kapcsolatuk egymással, mint

[4] Elegánsabb volna az indikátorokat a modell által kitermeltetni, bár kétséges, hogy ez megoldható-e; nem jelent viszont *ökonometriai* problémát az indikátoroknak a modellen kívülről való biztosítása.

más blokkok relációival; szorosabb értelmében a blokk fogalmához tehát egy belső kohézió tartozik.

A blokkok képzésének több irányító elve lehet. Az egyik konstrukció esetében a modell egyenleteit kiindulásképpen két blokkra bontják, egy aggregált és egy dezaggregált blokkra. (A dezaggregált blokk egységként való kezelését természetesen korlátozza a relációk száma és egy bizonyos méreten túl a dezaggregált blokk már csak több blokkra különválasztva alkalmazható.) Az ilyen blokkszerkezet mind a becslésnél, mind a modell működtetésénél igen érdekes iteratív eljárásra ad lehetőséget. Akár az aggregált, akár a dezaggregált blokkból indulunk ki, ennek eredményei átvihetők a másik blokkra, majd ismét vissza és így tovább, amíg — konvergencia esetén — az eredményeik stabilizálódnak. Ha arra gondolunk, hogy az aggregált blokk változói részben aggregált szintű sztochasztikus megközelítéssel, részben azonban a megfelelő dezaggregált változók szummálásával nyerhetők, akkor nyilvánvaló, hogy megfelelő gondossággal kell biztosítani az eredmények konformitását.

Ugyanezt kell hangsúlyozni az olyan blokkrendszer esetében, ahol az egyes funkciók, funkciócsoportok alkotják a blokkokat és a blokkokon belül szerepelnek az odatartozó dezaggregált és aggregált változók.

Egy harmadik blokk-képző szempont lehet a regionális elv. A régiók alkotják a blokkokat, ha akár Magyarországon belül a megyékre, akár világméretekben az egyes országokra, mint blokkokra gondolunk. (Például a világkereskedelmi LINK modell.)

A blokkokkal való operálás fő indítéka a kényszer volt. Egy bizonyos egyenletszámon túl az egyedi relációk áttekinthetősége kérdésessé válik; ugyanakkor a méretek növekedésével együtt növekednek a becslés problémái is. Ezeknek és hasonló problémáknak az áthidalására jó szolgálatot tesznek a blokkok. A modellezők feladata azonban az, hogy ezeken a kényszerszülte lehetőségeken túl felfedezzék, meglássák és kihasználják azokat az értékes lehetőségeket, amelyeket a blokkrendszerek alkalmazása kínál. Ezek közé tartozik egyes kérdések finomabb matematikai kezelése. Ilyennek tekinthető a termelési szférának a termelési függvények eszközeivel, a fogyasztási szférának pedig a fogyasztási modellek módszereivel — a modell magván kívül — való feldolgozása és e külső blokkok eredményeinek a központi blokkba való bevitele. E két példa utal a „satellite" modellek — tulajdonképpen a központi modellről leszakadt blokkok — kidolgozásában rejlő lehetőségekre. Mindettől a jobb specifikáció, végső soron a gazdasági valóság jobb közelítése várható.

Alapvetően fontos, de meghaladja ennek a cikknek a kereteit a blokkok, illetőleg a „satellite"-ok közötti kapcsolások kérdése.

Végül egy pár szót az úgynevezett blokkrekurzív modellekről, vagyis az olyan modellekről, amelyekben a rekurzivitás nem az egyenletek között, hanem a blokkok viszonylatában áll fenn. Már kifejezést adtunk annak a véleményünknek, hogy rekurzív működésű népgazdaságok nincsenek. Ugyanakkor azonban nehéz lemondani a rekurzivitás által nyújtott módszertani, becslési előnyökről. A két szempont közötti kompromisszum gyermeke a blokkrekurzív modell. A rekurzív modellekkel szembeni negatív álláspont a blokkrekurzív modellek esetében csak annyiban enyhíthető, amennyiben e modellek rekurzív volta is eltér a teljes rekurzivitástól. Ez az eltérés kétféle módon következik be. Egyrészt a blokkrekurzív modelleken belül a blokkok bármilyen szerkezetűek, tehát interdependensek is lehetnek, másrészt a legnevezetesebb blokkrekurzív modellek is csak több-kevesebb — bevallott — következetlenséggel és elnagyolással tudják a blokkrekurzivitást produkálni. (Nehezen megemészthető problémája a blokkrekurzív modelleknek az is, hogy bizonyos változók majd endogén, majd predeterminált mezben kénytelenek megjelenni.)

7. A szocialista országok modellezői az utóbbi években egyre több szót ejtenek *az ökonometriai modellezés és a tervezés kapcsolatá*ról, az ökonometriai modelleknek a tervezés céljaira való hasznosításáról. Erre irányuló óhajukról rengeteget lehet olvasni a szovjet, lengyel, cseh, szlovák, NDK — és persze a magyar — modellezők írásaiban. Másrészt azonban a kérdést sehol sem sikerült eddig érdemlegesen megoldani, de még megalapozni sem. Nagyon sok téves elképzelés van forgalomban e kérdésben. Az alábbiakban egy primitív rendszerezésre teszünk kísérletet.

A tervezés és a modellezés kapcsolatai direktek és indirektek.

Indirekt kapcsolatokon értjük az ökonometriai modellezés eredményeinek a tervezésben tudati háttérként való felhasználását. Másszóval az ökonometriai modellezésnek minden eredménye, amely gazdasági ismeretünket bővíti, a tervezés minőségéhez való hozzájárulás. Anélkül, hogy e közismert tény részletezésébe bocsátkoznánk, az elemzés, a szimuláció és az előrejelzés lehetőségeire kell gondolni.

Elemzés: az ökonometriai modell paramétereinek értéke összehasonlításokat tesz lehetővé, például az időbeli fejlődés, az ágazatok különbözősége tekintetében, a fogyasztási árucsoportok szempontjából, a munkának, illetve a tőkének a termelés eredményeihez való hozzájárulása szempontjából, a jövedelemnek és az árnak a fogyasztás meghatározásában játszott szerepe szempontjából. A szimuláció lehetőséget nyújt befolyásolható, vagy befolyásolhatatlan külső hatások továbbgyűrűző hatásának végigkísérésére; az előrejelzés pedig a ceteris paribus legvalószínűbb pályát választja ki.

Két példát említünk arra, hogy az ökonometriai modellezők milyen további ténymegállapító kutatásokra vállalkozhatnának. Az egyik a dinamika fokozott vizsgálata, a másik a feszültségek feltárása.

A népgazdasági elemzésekben a mérleg-elv alapvető fontosságú. Nyilvánvaló, hogy nem lehet például lemondani arról, hogy a nemzeti jövedelem termelése és végső felhasználása azonos legyen. Az is nyilvánvaló azonban, hogy a mérleg-elv lényegét tekintve statikus kiindulású és nagyon kevés történik annak tisztázására, hogy a népgazdasági folyamatok autoregresszív tulajdonságai a bővített újratermelésben milyen szerepet játszanak. Nagy jelentőségű áttörést jelentett ebben a tekintetben az ÁKM, amely a halmozott együtthatókkal tulajdonképpen a dinamika irányában tett óriási lépést. Ugyanez várható az ÁKM-mérlegek, illetve modellek dinamizálásától. Rá kell mutatni azonban arra, hogy az ÁKM lényegében folyamatokat, áramlásokat mutat be és nem elég rugalmas bizonyos diszkrét impulzusok különféle fajtáinak a megragadásában, például kormányzati intézkedéseknek, szabályozók továbbgyűrűző hatásának az elemzésében. Ami a halmozott együtthatókban megmutatkozó dinamikai jelleget illeti, itt az a probléma, hogy az elvben végtelen számú továbbgyűrűzéshez nem rendelhető időskála.

A másik terület, ahol az ökonometria további elemzéssel tartozik, a feszültségek feltárása. A népgazdasági mérlegek, közöttük az ÁKM, enm alkalmas vagy csak korlátozott mértékben alkalmas a feszültségek megállapítására. A készlet alakulása, a külkereskedelmi egyenleg altételei sokatmondóak lehetnek ugyan, de már például a munkaerő-hiányról, keresleti-kínálati egyensúlyhiányról, kapacitáshiányról vagy kapacitáskihasználási problémákról alig nyerhető tájékozódás. Úgy tűnik, hogy az ökonometriai modellek itt nagy belső tartalékkal rendelkeznek, bár a feltárás és elemzés módszerei még nagyrészt kidolgozatlanok. (Eszközök lehetnek a reziduumok elemzése, stabilitás-vizsgálatok, nem-lineáris függvénykapcsolatokkal való kísérletezés, fordulópontok előrejelzése stb.)

A direkt kapcsolatok részben az ökonometriai modell felől a terv irányában, részben a terv felől a modell irányában hatnak. Az ökonometria részben a terv készítése, részben a terv megvalósítása során, részben egyes konkrét célok megvalósításában nyújthat segítséget. A tervkészítés során tulajdonképpen az ,,indirekt kapcsolatok'' címszó alatt említett elemzés, szimuláció és előrejelzés fokozott intenzitású felhasználása játszhat szerepet. A tervmegvalósítás során az ökonometria szakaszosan, rövidülő szakaszokra végezhet előrejelzést, és így a tervmegvalósítás ellenőrzésében kaphat szerepet. Ennek során két tervperiódus közötti állapot realisztikusabb felmérésében, valamint az érvényes tervtől való eltérésekből adódó intézkedésekre utalásban nyújthat segítséget.

A terv felől az ökonometriai modell felé irányuló hatás lényege bizonyos tervszámoknak, tervcéloknak a modellbe való beépítése. Ezzel kapcsolatban három kérdés merülhet fel:

— milyen tervszámokat építsünk be a modellbe magyarázó változóként,
— predetermináltttá válnak-e a tervből átvett magyarázó változók,
— milyen formában kell a tervcélokat a modellben szerepeltetni?

Ha azonosítanánk magunkat azzal a nézettel, hogy ,,fontos, alapvető tervszámokat kell a modellbe beépíteni, és ezek mint modellen kívüli hatások exogénnak minősíthetők'', akkor nagyon elnagyolt és torzított választ adnánk. Vajon predetermináltttá válik-e egy változó attól, hogy a tervben szerepel? Nyilván nem, hiszen gyakorlatilag minden változó, amely a modellben szerepel, a tervben is megtalálható. A predeterminált változóknak két nagy csoportja különböztethető meg: az egyikbe az olyan külső hatások tartoznak, amelyeket a gazdaságpolitika, a tervezés nem tud befolyásolni, a másikba éppen azok, amelyek a gazdaságpolitika, a tervezés kezében eszközt jelenthetnek a modellben érvényesülő belső összefüggés-rendszer befolyásolására. Ha tehát a modellbe tervszámokat építünk be, akkor ezek olyanok lehetnek, amelyek a gazdaságpolitika, a gazdaságirányítás számára beavatkozási pontokat és lehetőségeket nyújtanak, és ezeket valóban predetermináltnak kell nyilvánítani. Éppen ez teszi a modellt olyan eszközzé, amely a gazdaságpolitika és gazdaságirányítás behatásainak reakciórendszerét képes kimutatni. Nincs értelme viszont a tervből olyan változókat átvenni, amelyeket a tervben éppen úgy, mint a modellben eredményváltozóknak, eredőknek tekinthetünk.[5] (A tervezés által — legalábbis a középtávú tervezés viszonylatában — befolyásolhatatlan predeterminált változók például a demográfiai tényezők, az időjárás hatása, a megfigyelési időszak induló tőkeállománya, induló termelési szintje. A tervezők döntési kompetenciája körébe tartoznak viszont például a beruházások ágazatok közti elosztása, ágazati bér- és árarányok kialakítása, a külkereskedelmi mérleg stb.)

[5] Távolabbi problémának tűnik a modellnek az endogén változók feltételezett értékei alapján való működtetése; ez természetesen érinti a tervszámok felhasználásának kérdését is.

Végül nem érdektelen talán annak említése, hogy a tervszámokat a modellben nemcsak a szokásos állomány- vagy folyamat-idősorok formájában, hanem ezektől eltérő változatos formában is figyelembe lehet venni. Így például célszerű lehet a beruházási terv-célokat allokációs mutatószámok formájában (ágazati beruházás/összes beruházás) a modellbe bevinni. Az ágazatok munkaerő foglalkoztatási preferálását például egy relatív ágazati bér-mutató fejezheti ki a modellben. Ugyanígy relatív-árak alkalmazhatók. Sajátságos mutató lehet a középtávú modell viszonylatában az ötéves tervcél évenként kumulált teljesítésének mutatója.

8. Az előadottakhoz néhány befejező megjegyzés kívánkozik.

Az érintett problémák csak mintát képviselnek az aktuális, megoldásra váró problémák szélesebb köréből. A válogatás természetesen szubjektív. Ennek ellenére érvényesült benne két válogatási elv: a szerző igyekezett az irodalomban és a szakmai vitafórumokon középponti helyzetet elfoglaló problémákat kiemelni és egyúttal olyanokat, amelyek alkalmasak a gazdasági és módszertani szempontok integrálódásának a bemutatására. Az érintett problémák utalnak az ökonometriai eljárás összetett jellegére és arra a felismerésre, hogy ökonometriai siker csak valamely gazdasági probléma meglátásától és a megoldáshoz szükséges módszer megtalálásától várható.

*Az ökonometriai kutatás eltolódása a módszer-orientáltság felől a probléma-orientáltság felé* a korszerű ökonometriai munka fő jellemvonása, amely világszerte érvényesül. Különösen így van ez azonban Magyarországon és általában a szocialista országokban, ahol a fejlődés belső erői következtében az elmúlt egy-két évtizedben a módszerek aránytalanul nagy szerepet kaptak a problémamegoldó tevékenység kárára; indokolt tehát a helyes arányok minél lendületesebb ütemű kialakítása.

*(Beérkezett: 1977. december 21.)*


## SOME TOPICAL QUESTIONS OF ECONOMETRIC MODELLING OF THE NATIONAL ECONOMY

Among those preparing econometric models some questions have come to the limelight in recent years that are particularely important for a more realistic and efficient modelling of the national economy. From among these questions the author deals with the following ones:

— the elaboration of the unbroken causal chain in the course of specification;
— the perfection of dynamic specification: more consequent articulation of time delays and of dynamics in general specification as well as the analysis of dynamics by means of the model;
— a better foundation of demand and supply approach, the elaboration of combinative procedures;
— the revision of the role of blocks;
— the clarification of the relationship between econometric modelling and planning.

When discussing the problems the author makes comparisons between the procedures applied by modellers of capitalist and socialist countries, respectively. Beside criticising the methods actually applied the author tries to contribute some ideas to the solution of the problems discussed.

## НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА

В последние годы среди разработчик эконометрических моделей во все большей мере на передний план выдвигаются некоторые такие вопросы, которые являются в особенности важными с точки зрения как можно более реального и эффективного моделирования народного хозяйства. Из них автор рассматривает следующие вопросы:

— развертывание неразрывной цепи причинности в результате спецификаций;
— совершенствование динамичной спецификации: более последовательное проведение в спецификации задержек по времени и, вообще, динамики, а также анализ динамики с помощью модели;
— лучшее обоснование подхода в аспеке спроса и предложения, разработка комбинаторных методов;
— пересмотр роли, которую играют блоки;
— уяснение связей между эконометрическим моделированием и планированием.

В ходе рассмотрения проблем автор сравнивает методику моделирования в капиталистических и социалистических странах. Наряду с критикой применяемых в настоящее время методов он стремится некоторыми своими соображениями способствовать решению рассматриваемых проблем.

W. GRUNDMANN—H. KRAUSE

# Szociális létesítmények együttes telepítése

## 1. A feladat megfogalmazása

Az ismertetendő matematikai modell célja $GE_j$-vel jelölt $(j = 1, \ldots, n)$ szociális létesítmények telepítési helyének és kapacitásának meghatározása. Emellett a szociális létesítmények több $R_k$, $k = 1, \ldots, p$, csoportját (fajtáját) vesszük egyidejűleg figyelembe (pl. óvodákat, bölcsődéket, iskolákat). A különböző típusú szociális létesítményekre lehetséges $b^{(j)}_{l_k}$, $l_k = 1, \ldots, r^{(j)}_k$ kapacitásszintek előre adottak. A kapacitásszintek előre megadott $\delta^{(j)}_{l_k}$ toleranciaszinteken belül megváltoztathatók. Egy telepítési helyen több fajta létesítmény is elhelyezhető, mint pl. egy óvoda és bölcsőde kombinálása. Így egy $(b^{(j)}_{l_1}, \ldots, b^{(j)}_{l_p})$ vektor a szóbajövő létesítményfajták $GE_j$ telephelyre vonatkozó egy lehetséges kapacitáskombinációját adja. A szociális létesítmények kapacitásait és telephelyeit ezután úgy kell meghatározni, hogy a fellépő összes költség minimális legyen. Ugyanakkor az $S_i$, $i = 1, \ldots, m$ települések (melyek lakossága $a_i$) és a $j$-edik szociális létesítmény közötti fajlagos ingázási költség: $c^{(k)}_{ij}$ a létesítményfajtától, a $d^{(j)}_{l_k}$ beruházási költség pedig a $b^{(j)}_{l_k}$ kapacitásszinttől függőnek tekintendő.

A beruházási költségek kedvezőbbek, ha egy telephelyen többfajta létesítményt kombinálnak, mintha egy telephelyen kizárólag egy létesítmény típust használnak. Meghatározandók az $x^k_{ij}$ változó-értékek, amelyek az $i$-edik településből a $j$-edik szociális létesítménybe ingázó személyek számát, ill. a szállítandó tárgyak mennyiségét megadják. Továbbá kiszámítandók az $y^{(j)}_{l_1}, \ldots, {}_{l_p}$ változók, amelyek kizárólag 1 és 0 értéket vehetnek fel, aszerint, hogy a $(b^{(j)}_{l_1}, \ldots, b^{(j)}_{l_p})$ vektor által megadott kapacitáskombináció megvalósul-e, vagy nem.

## 2. Matematikai modell

2.1 *Matematikai modell több létesítménytípus esetére*

A cél megfogalmazása, az ingázási- és a beruházási költségekből adódó összköltség minimalizálása a következőt adja:

$$\operatorname{Min} G = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c^{(k)}_{ij} x^{(k)}_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l_k=1}^{r^{(j)}_k} d^{(j)}_{l_1} \ldots {}_{l_k} y^{(j)}_{l_1} \ldots {}_{l_p}. \tag{1}$$

[1] Ez a dolgozat az NDK Építészeti Akadémiája Városépítési és Építészeti Intézete Településszerkezeti Osztályának megbízásából végzett kutatás eddigi eredményein alapul. Fordította *Kádas Sándor*.

Itt az első tag az ingázási költségeket, a második pedig a beruházási költségeket tartalmazza.

A mellékfeltételek, melyek mellett $G$ minimalizálandó, a következők:

a) Minden $GE_j$ telephelyre pontosan egy kapacitáskombináció választandó:

$$\sum_{l_1=1}^{r_1^{(j)}} \sum_{p} y_{l_1}^{(j)}, \ldots, {}_{l_p} = 1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

b) Minden $S_i$ település igényét a $k$-adik szociális létesítményből ki kell elégíteni:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{k} = a_i^k \quad i = 1, \ldots, m; \; k = 1, \ldots, p. \tag{3}$$

c) Az előre megadott toleranciahatárok figyelembe vétele a következő mellékfeltétel-csoporttal oldható meg:

$$\sum_{l_v^{(j)}}^{r_v^{(j)}} (b_{l_v}^{(j)} - \delta_{l_v}^{(j)})\, y_{l_1}^{(j)}, \ldots, {}_{l_v} \ldots {}_{l_p} \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{(v)} \leq \sum_{l_v}^{r_v^{(j)}} (b_{l_v}^{(j)} + \delta_{l_v}^{(j)})\, y_{l_1}^{j}, \ldots {}_{l_v} \ldots {}_{l_p} \tag{4}$$

$$j = 1, \ldots, n; \; v = 1, \ldots, p.$$

d) Feltételek a változókra:

$$\begin{aligned} & x_{ij}^{(k)} \geq 0, \; i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n; \; k = 1, \ldots, p \\ & y_{l_1}^{(j)} \ldots {}_{l_p} = 0 \text{ vagy } 1, \; j = 1, \ldots, n; \; l_k^{(j)} = 1, \ldots, r_k^{(j)}, \; k = 1, \ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

## 2.2 *Matematikai modell egy létesítménytípus esetére*

Egy létesítménytípus esetén a következő modell adódik: Célfüggvény:

$$G = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{r^{(j)}} d_l^{(j)}\, y_l^{(j)} \to \text{Min!} \tag{6}$$

Mellékfeltételek:

a) $$\sum_{l=1}^{r^{(j)}} y_l^{(j)} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{7}$$

b) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{8}$$

c) $$\sum_{l=1}^{r^{(j)}} (b_l^{(j)} - \delta_l^{(j)})\, y_l^{(j)} \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq \sum_{l=1}^{r^{(j)}} (b_l^{(j)} + \delta_l^{(j)})\, y_l^{(j)}, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{9}$$

d) $$\begin{aligned} & x_{ij} \geq 0, \; i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n \\ & y_l^{(j)} = 0 \text{ vagy } 1, \; j = 1, \ldots, n. \; l = 1, \ldots, r^{(j)}. \end{aligned} \tag{10}$$

## 3. Megoldási eljárások

### 3.1 *A több létesítménytípust tartalmazó feladat megoldása*

*Első lépés:*

Az első lépésben először előállítunk az ingázási, ill. szállítási költségre egy $T$ alsó korlátot. Ehhez meg kell oldani $p$ db következő alakú, egyszerű szállítási feladatot:

$$I^{(k)} = \text{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(k)} x_{ij}^{(k)} \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(k)} = a_i^k \quad i = 1, \ldots, m \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{(k)} \leq b_{r_k^{(j)}}^{(j)} + \delta_{r_k^{(j)}}^{(j)}, \; j = 1 \ldots, n \tag{13}$$

$$x_{ij}^{(k)} \geq 0. \tag{14}$$

Itt $b_{r_k^{(j)}}^{(j)}$ a $GE_j$ telephely esetében a $k$-adik fajta létesítményre megadott legnagyobb kapacitást jelenti.

A meghatározandó $I$ alsó korlátot $p$ db szállítási feladat egymásutáni megoldása révén, az adódó $I^{(k)}$ értékek összegzésével kaphatjuk meg:

$$I = \sum_{k=1}^{p} I^{(k)} \tag{15}$$

*Második lépés:*

A második lépésben előállítjuk a növekvő $I^\varrho$, $\varrho = 1, \ldots, \alpha$ beruházási költségeknek megfelelő $K^\varrho$ kombinációkat. Ezek azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy biztosítják minden létesítményfajtára az igény kielégítését. Hogy a $K^\varrho$ kombinációkat megkapjuk, induljunk ki a következő szállítási feladat optimális megoldásából:

$$I = \sum_{j=1}^{n} \sum_{u=1}^{r} t_j^{(u)} z_j^{(u)} \to \text{Min!} \tag{16}$$

$$\sum_{u=1}^{r} z_j^{(u)} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j^{(u)} \leq b_u \qquad u = 1, \ldots, r \tag{18}$$

$$z_j^{(u)} = 0 \text{ vagy } 1, \; j = 1, \ldots, n; \; u = 1, \ldots, r. \tag{19}$$

Itt legyen $r$ az egymástól különböző összes lehetséges kapacitáskombinációk száma, melyeket a $p$ dimenziós $(b_{l_1}^{(j)} \ldots b_{l_p}^{(j)})$ vektorok adnak meg; $t_j^{(u)}$ pedig jelölje a kapacitáskombinációnak megfelelő költséget. A lehetetlen kapacitáskombinációhoz tartozó telepítési költségre egy $M$ érték (a szereplő költségegyütthatókhoz képest igen nagy szám) adandó meg. Végül $b_u$ legyen az $M$-től különböző $t_j^{(u)}$ elemek száma.

A szállítási feladatnak megfelelő optimális megoldás általában a megfogalmazott feladatunkra nem lesz megengedett, azaz nem fogja kielégíteni a következő feltételeket:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{u=1}^{r} z_j^{(u)} b_{lk,u}^{(j)} \geq \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad k = 1, \ldots, p \tag{20}$$

Itt $b_{lk,u}^{(j)}$ az $u$-adik kapacitáskombinációt jellemző $(b_{l_1}^{(j)}, \ldots b_{l_p}^{(j)})$ vektor $k$-adik komponensének felel meg. Minden létesítményfajtára ki lesz így elégítve az összigény. Ha a szállítási feladatnak megfelelő optimális megoldás megengedett, akkor ezzel $K^1$-et már meghatároztuk. Ha ezzel szemben a fenti szállítási feladatnak megfelelő optimális megoldás nem megengedett, akkor a W. Lyska [3] által megadott eljárás segítségével, az optimális megoldás minimális „elrontásával" elő lehet állítani a második, harmadik legjobb megoldást. Ezután a kapott megoldásokra megvizsgálandó, hogy megfogalmazott feladatunkra vonatkozóan megengedettek-e. Így lépésenként, sorban adódnak a $K^1, K^2, \ldots, K^\alpha$ kombinációk, amelyek a növekvő $I^1, I^2, \ldots, I^\alpha$ beruházási költségeknek felelnek meg. Általában nem szükséges minden $K^\varrho$ kombinációt meghatározni. Igen gyakran elég néhány $K^\varrho$, $\varrho = 1, 2, \ldots$ kombinációt meghatározni (l. ehhez a 3. lépést).

*Harmadik lépés:*

Az első lépésben meghatározott $I$ alsó korlátból kiindulva, a második lépésben előállított $K^\varrho$, $\varrho = 1, \ldots, \alpha$ kombinációk felhasználásával kerül sor az optimális megoldás meghatározására. Ehhez vegyük először a $K^1$ kombinációt. Ehhez kiszámítjuk a hozzátartozó ingázási, ill. szállítási költséget, $T^1$-t. Ez $p$ db egyszerű szállítási feladat megoldása révén kapható meg:

$$T^{(k)} = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(k)} x_{ij}^{(k)} \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(k)} = a_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{(k)} \leq b_{lk,1}^{j} \qquad j = 1, \ldots, n \tag{23}$$

$$x_{ij}^{(k)} \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n. \tag{24}$$

Itt $b_{lk,1}^{(j)}$ legyen a $K^1$ kombinációnak megfelelő, a $k$-adik létesítménytípusra vonatkozó kapacitás a $GE_j$ telephelynél. $T^1$ a $T^{(k)}$ értékek $k$ szerinti összegezéséből adódik:

$$T^1 = \sum_{k=1}^{p} T^{(k)}. \tag{25}$$

$T^1$ segítségével megkapható a $K^1$ kombinációnak megfelelő összköltség

$$G^1 = I^1 + T^1. \tag{26}$$

A $G^1$-ből kiindulva minden olyan $K^\varrho$ kombináció kizárható a megoldáshalmazból, melyre fennáll:

$$T + I^\varrho > G^1. \tag{27}$$

Itt $\underline{T}$ az első lépésben az ingázási-, ill. szállítási költségre számított alsó korlát. Ha ez a feltétel már a $T^2$ beruházási költségű $K^2$ kombinációra teljesül, akkor $I^1 \leq I^2 \leq \ldots \leq I^\alpha$ és $\underline{T} \leq T^\varrho$, $\varrho = 1, \ldots, \alpha$ miatt minden $K^\varrho$, $\varrho \neq 1$ által megadott kombinációra fennáll:

$$G^1 < \underline{T} + I^\varrho \leq G^\varrho, \varrho \neq 1. \tag{28}$$

Ha ezzel szemben $\underline{T} + I^2 \leq G^1$ áll fenn, akkor a $K^2$ kombinációra $p$ szállítási feladat megoldása által ismét a $T^2$ ingázási, ill. szállítási költséget kell meghatározni. Ha az $I^2$ és $T^2$-ből adódó $G^2$ összköltség kisebb $G^1$-nél, akkor ismét kizárható egy sor kombináció a vizsgálatból, nevezetesen azok, melyekre fennáll:

$$\underline{T} + I^\varrho > G^2. \tag{29}$$

Ha viszont $G^2$ nagyobb vagy egyenlő $G^1$-gyel, akkor $K^3$-at be kell vonni a vizsgálatba, feltéve, hogy az eddigi becslések alapján még nem lett kizárva, tehát meg kell határozni $T^3$-at, majd $G^3$-at, majd megvizsgálni, hogy $G^3$ kisebb-e $G^1$-nél. A leírt módon addig kell folytatni az eljárást, míg minden kombináció vagy kiesett, vagy meghatároztuk számára a $G^\varrho$ értéket, s a megadott becslést végrehajtottuk. Eredményül a legalacsonyabb összköltségű, optimális megoldást kapjuk.

A 2. és 3. lépés összekapcsolása esetén általában nem szükséges az összes $K$ kombinációt meghatározni.

### 3.2 *Az egy létesítménytípust tartalmazó feladat megoldása*

Az egy létesítménytípust tartalmazó feladat értelmezésének megfelelően röviden összeállítjuk a megoldó algoritmus 3 lépését.

*Első lépés:*

Egy $\underline{T}$ alsó korlát meghatározása (l. a 2.2 részt is), a következő szállítási feladat megoldásával:

$$\underline{T} = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{30}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_{rj}^{(j)} \qquad j = 1, \ldots, n \tag{32}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n, \tag{33}$$

ahol $b_{rj}^{(j)}$ a $GE_j$ számára lehetséges maximális kapacitásszintet jelöli.

*Második lépés:*

A növekvő $I^\varrho$ beruházási költségeknek megfelelő $K^\varrho$, $\varrho = 1, \ldots, \alpha$ kombinációk meghatározása Lyska eljárásának alkalmazásával a következő szállítási feladatra vezet:

$$I = \sum_{j=1}^{n} \sum_{u=1} t_j^{(u)} z_j^{(u)} \to \text{Min!} \tag{34}$$

$$\sum_{u=1}^{r} z_j^{(u)} = 1 \quad j = 1, \ldots, n \tag{35}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j^{(u)} \leq b \quad u = 1, \ldots, r \tag{36}$$

$$z_j = 0 \text{ vagy } 1, j = 1, \ldots, n; \ u = 1, \ldots, r. \tag{37}$$

Itt $r$ az egymástól különböző lehetséges kapacitásszintek száma, $t_j^{(u)}$ pedig a kapacitásszintnek megfelelő költség. A lehetetlen kapacitásszinteknek megfelelő költségekre, mint szokásos, egy elég nagy $M$ számot kell megadni. Lyska eljárásának alkalmazásakor a megadott szállítási feladat optimális megoldásának előállítására minden lépésben a (20) feltételt kell megvizsgálni. Csak ha ez a feltétel ki van elégítve, akkor kapjuk meg a meghatározandó $K^\varrho$ kombinációk egyikét.

*Harmadik lépés:*

Az első lépésben meghatározott $\underline{T}$ alsó korlátból és a második lépésnél kapott $K^\varrho$, $\varrho = 1, \ldots,$ kombinációkból kiindulva most az optimális megoldás meghatározása következik. E célból először a $K^1$ kombinációhoz tartozó $T^1$ ingázási, ill. szállítási költség kerül kiszámításra. Ez a következő szállítási feladat megoldása révén adódik:

$$T^1 = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{38}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \ldots, m \tag{39}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_{lj}^{(j)} \quad j = 1, \ldots, n \tag{40}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n. \tag{41}$$

$I^1$ és $T^1$ segítségével kapjuk meg a $K^1$-nek megfelelő $G^1$ összköltséget. $G^1$-ből kiindulva most minden olyan $K^\varrho$ kombináció kizárható a megoldások közül, melyre fennáll:

$$\underline{I} + I^\varrho > G^1 \tag{42}$$

Ezután sorra vesszük a $K^2$, $K^3$ stb. kombinációkat és kiszámítjuk hozzájuk a $T^2$, $T^3$ stb. értékeket, majd, ha lehetséges, megfelelő becslések segítségével bizonyos $K^\varrho$ kombinációkat törlünk. Az eljárást a leírt módon addig folytatjuk, amíg minden kombináció vagy kiesett, vagy meghatároztuk számára a $G^\varrho$ értéket, s végrehajtottuk a megadott becslést. Eredményül a legkisebb költséget jelentő optimális megoldás adódik.

*(Beérkezett: 1977. május 3.)*

## IRODALOMJEGYZÉK

1. GRUNDMANN, W.: *Zur Lösung eines diskreten Standortproblems mittels einer kombinatorischen Methode.* Tanulmány, VII. Nemzetközi Mat. Koll., Weimar, 1975.
2. KRAUSE, H.—WEISE, G.: *Optimale Standortswahl unter Berücksichtigung von Produktions-, Investitions- und Transportkosten durch eine kombinatorische Methode.* A Weimari Főiskola Tudományos Folyóirata, 1967.
3. LYSKA, W.: *Ein Verfahren zum Ordnen der Basislösungen eines Transportproblems nach wachsenden Zielfunktionswerten.* Diplomamunka, Bergakademie Freiberg, 1972.

## JOINT LOCATION OF SOCIAL WELFARE INSTITUTIONS

The problem formulated here is the optimization of the location of social welfare institutions (e.g. kindergartens, nurseries, schools) and the proportion of population of neighbouring settlements using these institutions. Optimization means the minimization of costs, while costs are made up of the costs of establishment of these institutions and of the travelling expenses of the inhabitants. It is economical to locate as many institutions at one place as possible what is expressed by the application of investment costs for combinations of institutions. In case of the available locations predetermined capacity levels can only be chosen — with some limit of tolerance — what brings about that the problem has discrete variables, too. The problem to be solved will be a mixed continuous-integer linear program. A "branch and bound" type algorhythm is outlined in the article which exploits the particularities of the mathematical problem and is separately described for models involving either one or more types of institutions, respectively.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТА ОБЩЕГО РАСПОЛОЖЕНИЯ СОЦИАЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

Данная задача формулируется как размещение социальных учреждений (например, детские сады, ясли, школы) и оптимизация соотношения населения прилагающих населенных пунктов, пользующегося этими учреждениями. Оптимизация означает минимализацию затрат, а сами затраты складываются из затрат на размещение учреждений и поездки в оба конца проживающих здесь людей. Экономичным является размещение в одном месте как можно большего числа учреждений и это находит свое выражение в определении ассигнований на капитальные вложения относительно различных комбинаций по их размещению. Что касается капитальных вложений, то в отношении рассматриваемых мест размещения между имеющимися уровнями мощностей мощно выбирать только лишь в пределах определенных допусков и это приводит к тому, что в данной задаче налицо также и дискретные переменные. Данная задача приводит к смешенной задаче линейного программирования и в отношении ее решения в статье излагается также и алгоритм типа «ветвей и границ» (branch and bound), выражающий также и специфику полученной математической задачи, которая отдельно описывается для модели, в которой фигурирует один или несколько типов учреждений.

# KÖNYVEKRŐL

DENKINGER GÉZA: Korszerű matematikai alapismeretek. Budapest, 1977. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 632 p.

A Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó a „Korszerű matematikai ismeretek gazdasági szakemberek számára" című könyvsorozattal olyan kézikönyveket ad az olvasók kezébe, amelyekből korszerű és egységes tárgyalásban megismerheti azokat a matematikai fogalmakat és módszereket, amelyek a matematikai közgazdaságtan, ökonometria és operációkutatás megértéséhez szükségesek. A sorozatnak ez a kötete a legalapvetőbb jellegű, mert röviden összefoglalja azt a sokfajta matematikai ismeretet, amelyre a többi, már megjelent és készülő kötet épül.

Ebből következik, hogy ez a kötet a matematikának a legkülönbözőbb ágaival foglalkozik. A halmazelmélet alapfogalmaiból és — ezek felhasználásával — a számfogalom felépítéséből (természetes, racionális, valós számok) indul ki. A következő fejezetekben a függvényeket és egyenleteket, majd az egyenletrendszereket és a megoldásuknál felhasznált determinánsokat, végül az egyenlőtlenségeket tárgyalja. Mivel az ugyanezen sorozatban megjelent „Lineáris algebra", Krekó Béla munkája, részletesen foglalkozik a lineáris egyenletrendszerek megoldásával, itt csak bevezetést kap az olvasó a témakörbe. Az egyenlőtlenségekről szóló fejezetben tárgyalja a számtani, mértani, harmonikus és négyzetes középértékek közötti egyenlőtlenségi viszonyokat és e középértékek használatát.

Ezután több fejezet foglalkozik a geometriával, a trigonometriával és az analitikus geometriával. Ebben a részben külön fejezet tárgyalja a vektor fogalmát és a vektorokkal végzett műveleteket.

A következőkben a végtelen számsorozatok bemutatásából kiindulva, a függvénytanon, azon belül a függvények határértékének és folytonosságának tárgyalásán keresztül vezet el a differenciálszámításhoz, amelyet a primitív függvény és a határozatlan integrál rövid leírásával fejez be.

Ezt követően visszakanyarodik a számfogalomhoz és bevezeti a komplex szám fogalmát, tárgyalja annak abszolút értékét és trigonometriai alakját, valamint a komplex számokkal végzett műveleteket. Ehhez kapcsolódik a polinomok tárgyalása.

Végül az utolsó fejezet bevezet a kombinatorikába és ennek segítségével tárgyalja a binomiális és polinomiális tételt.

A könyvek ez a vázlatos tartalmi ismertetése is mutatja, hogy a szerző — noha bevezető jellegű könyvet írt — nem egyszerű feladatra vállalkozott, mert a matematikának nagyon sokféle területét kellett átfognia, mindegyiken foglalkoznia kellett az alapvető ismeretekkel, de a részletes tárgyalásba terjedelmi okok miatt — és mivel az a többi kötetek feladata — nem mehetett bele.

Feladatának azt a részét, hogy megismertesse az olvasót e sokféle terület alapismereteivel, igen jól megoldotta. Tárgyalásmódja ugyanis arról a tudásszintről indul ki, amellyel a matematikában kevéssé képzett közgazdász is biztosan rendelkezik. Ennek azért van különösen nagy jelentősége, mert a matematika tudományának és a matematika hazai oktatásának rohamos fejlődése és változása következtében a közgazdász társadalom különböző nemzedékei, sőt talán azonos nemzedékeknek különböző tagjai is, nagyon eltérő szintű és jellegű matematikai ismereteket szereztek. Ezért a magasabb szintű és speciális témákkal foglalkozó matematikai közgazdaságtani munkák megértése a közgazdászok egy része számára egyszerűen azért okoz nehézséget, mert a használt matematikai fogalmakat nem tanulták vagy másféleképpen tanulták. Ennek a könyvnek az áttanulmányozása hozzásegíti az olvasót — a közgazdaságtudományi tanulmányokra készülő középiskolás diákot és a több évtizeddel ezelőtti matematikai oktatásban részesült „öreg" közgazdászt egyaránt — ezeknek a matematikai alapfogalmaknak megismeréséhez, korszerű értelmezéséhez.

Számon kérhetnénk a könyvtől egy olyan második feladat megoldását is, hogy a tárgyalt matematikai alapismereteket valamilyen egységes rendszerben ismertesse. Valóban van a munkának bizonyos egységes szemlélete, nevezetesen a halmazelméleti alapfogalmak használata a fejezetek jelentős részében. Mégsem lehet azt mondani, hogy az olvasó fogalmat kapna arról, hogy a matematikának ezek a különböző ágai hogyan kapcsolódnak egymáshoz. Mentségére felhozhatjuk azonban, hogy a korábban kiadott hasonló matematikai kézikönyvek, amelyeket a közgazdászok használtak, szintén nem adtak egységesített képet.

A könyv másik hiányossága, hogy viszonylag nagyon kevés példát tartalmaz a közgazdasági valóság köréből. El kell ismerni, hogy egyes tárgyalt területeken, például az analitikus geometriában, nehéz lenne ilyen példákat találni. Másrészt a példák számának szaporítása a könyv amúgy is nagy terjedelmét tovább növelné. A kevés leírt gazdasági példa azonban nagyon közel hozza, érthetővé teszi az olvasó számára a tisztán matematikai részeket. Ezért érdemes lenne mégis azon gondolkozni, hogy esetleges későbbi kiadásokba nem volna-e érdemes több példát felvenni. Ilyenek lehetnének a különböző fajta függvényekkel leírható gazdasági jelenségek példái, vagy további példák a differenciálszámítással megoldható gazdasági problémákra.

Összefoglalóan: a könyvet nagyon ajánlani lehet mindazoknak, akik biztos és korszerű matematikai megalapozást akarnak szerezni ahhoz, hogy a matematika bonyolultabb közgazdaságtudományi és gyakorlati gazdasági alkalmazásait megértsék.

ANDORKA RUDOLF

OPERÁCIÓKUTATÁS A GYAKORLATBAN (Szerkesztette: Stáhl János) 1976. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 264 o.

A könyv 13 gazdaságmatematikai cikket tartalmaz, amelyek az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat (mai nevén SZÁMKI) Operációkutatási Önálló Osztályának 1964—1974 közötti tevékenységéről adnak kivonatos áttekintést.

Az első fejezetben *Kovács Álmos* a vállalati stratégia és a beruházások optimalizálásának lehetőségeivel foglalkozik a nyereségszabályozási rendszer hatásainak figyelembevételével. A vállalatok tevékenységét jelentős mértékben a magas részesedési alapra való törekvés határozza meg, ezért a szerző a célfüggvény egyik alternatívájaként $N/(sB+E)$ „hatékonysági" mutató maximalizálását tűzi ki feladatul (N = nyereség, B = bérköltség, E = eszközérték, s = bérszorzó). Megvizsgálja, hogy az éves tervezés lineáris programozási modelljében milyen főbb eltéréseket okoz, ha a nyereség helyett e mutató maximalizálása szerepel a célfüggvényben és hogyan értelmezhető a duális feladat a „hatékonysági" mutató optimalizálása esetén. Az éves tervezési modellek vizsgálata után a hosszabb időszakok vállalati beruházási politikájának optimalizálási modelljét írja fel, majd olyan nagyvállalatok belső irányítási lehetőségeit tekinti át, ahol önálló elszámolási egységként működő gyáregységek üzemelnek. [Vö.: Szigma *5* (1972) 249—268 és *6* (1973) 105—114.] Matematikai vonatkozásokban a cikk a hiperbolikus programozásra, az általánosított Lagrange módszerre és a Dantzig—Wolfe-féle dekompozíciós eljárásra támaszkodik. Bemutatja, hogy a feladatok duális megoldása hogyan használható fel a felvetett problémák alaposabb elemzéséhez. A fejezetben elmondottakat nagyon jól fel lehet használni a gyakorlati vállalati tervezésben, de ehhez természetesen a rendszernek a konkrét vállalathoz és az aktuális szabályozáshoz való illesztése szükséges.

A „Lineáris programozási modellek a széntermelés és elosztás éves szintű optimalizálására" c. fejezetben *Kovács Álmos* nagyon szellemesen használta ki az általánosított szállítási feladatban, illetve ezek árnyékárainak felhasználásában rejlő lehetőségeket. A feladat itt egy olyan termelési, szállítási és felhasználási terv meghatározása, amely minimális összköltséggel biztosítja az adottnak tekintett fogyasztói igények kielégítését.

Jelentős eredményekhez vezetett a duális feladat megoldásának, az árnyékáraknak az értelmezése. Az optimális megoldáshoz tartozó árnyékárak segítségével olyan árrendszer dolgozható ki, amely összhangot teremt a központi termelési és elosztási terv, valamint az egyes fogyasztók egyéni érdekei között. Az ehhez tartozó közgazdasági meggondolásokat a szerző részletesen tárgyalja, a gondolatmenetet pedig egy számpéldával is illusztrálja. A fejezet később részletesen kitér a termelés és felhasználás időbeli eltéréseinek problémáira az éves szénelosztás során, valamint a szénosztályozók termelési problémáira, illetve ezek hatása figyelembevétele módjaira.

A *Nagy Péterné* által írott fejezet a „Tiszalöki öntözőrendszer vízkormányozási modelljei" címmel azokat a munkákat foglalja össze, amelyeket az INFELOR a Tiszamenti Regionális Vízmű és Vízgazdálkodási Vállalat debreceni kirendeltségéhez tartozó Tiszalöki Öntözőrendszer (TÖR) számára végzett, hogy annak főként tapasztalati alapon történő működtetését egzaktabb módszerekkel segítse. [Vö.: Szigma *8* (1975) 176–183.]

A szerzők a csatornarendszernek egy $G = [N, A]$ kör nélküli irányított gráfot feleltettek meg, ahol a gráf $N$-beli csúcspontjai a rendszer zsilipjeinek, ill. csatornatalálkozási pontjainak, $A$-beli élei pedig az ezek között elhelyezkedő szakaszoknak (csatorna, fürt) felelnek meg. Az élek irányítását a víz lefolyása adja. Az élek kapacitás adatai a csúcspontok figyelembevételével jól definiálhatók (egy-egy pont általában több úton is megközelíthető). A $G$ gráfot a szerző úgy feleltette meg a rendszernek, hogy az igényeket mindig az élekhez rendelte hozzá. A rendszerekbe juttatott vízmennyiség a zsilipek állításával szabályozható.

A szerző a probléma megoldásához a modellbeli hálózatot úgy alakította át, hogy az a Ford–Fulkerson által kidolgozott out of kilter algoritmussal megoldható legyen. A modelleket 1974–75-ben sikerrel próbálták ki.

A fenti problémákhoz kapcsolódik az „Öntözőrendszer egy-egy fürtjének vízkormányozása" c. fejezet, amely a TÖR K-IV fürtjénél bevezetett eljárást mutatja be. A fürt vízkormányozása ún. felülről vezényelt öntözőrendszerek elve szerint működik. A csatornában a vízszinttartás kötelező, a csatorna egyes pontjain az igénylők csak a megemelkedett vízmennyiséget vehetik ki. Egy nappal előbb be kell jelenteni, hogy az igénylők mikor és mennyi vizet kérnek és a fővízkivétel zsilipállásait ennek teljesítése érdekében kell szabályozni. Ez naponta ismétlődő, bonyolult számításokat igényel.

*Mócsi Zoltánné* a fejezetben két modellt mutat be lépcsős függvények megfogalmazásával. Az egyikben $f(t)$ lépcső függvény segítségével a vízveszteség minimálásával foglalkozik, ahol a $t_i$ töréspontokhoz tartozó értékek adják a zsilipállítási időpontokat, $f(t)$ pedig a $t$ időpontban biztosítandó $m^3/S$ vízintenzitási értékeket. A feladatot a dinamikus programozás eredményeire támaszkodva két változatban oldották meg. Az elsőben a zsilipállítások közötti időtartamot korlátozták és ezen belül a célfüggvény a minimális vízveszteséget kereste, a másodiknál a fellépő vízveszteséget korlátozva a zsilipállítást minimálták. A második modellnél 60–70%-os napi csökkentést értek el. A program futási ideje IBM 360/40 gépen 3 perc volt.

Mócsi Zoltánné másik cikke az INFELOR munkatársainak egy vállalati belső anyagmozgatás racionalizálására kidolgozott közelítő eljárásáról ad összefoglalást. A szállítást az üzem különböző épületei között maximálisan három tagú „vonatok"-kal (vontatók, pótkocsik) bonyolítják le. A feladat: egy időintervallumot alapul véve a legalacsonyabb költségek mellett kell biztosítani az egységek ellátását különböző anyagokkal és félkésztermékekkel, a termékek szállítását központi raktárakba. A modell szállítóeszköz beruházási terv kidolgozásához is felhasználható. A kidolgozott algoritmus heurisztikus és optimalizációs eljárásokra épül. Az a módszer a gyakorlatban hatékonynak bizonyult, könnyen általánosítható.

*Lampl Tamás* a „Szállítási és termelési optimalizálás" című fejezetben egy az INFELOR és a Gabona Tröszt munkatársai által 1966–68. évben kidolgozott és számítógépen lefuttatott modellről ad tájékoztatást. A feladat az országos búza- és lisztszállításoknak, valamint az egyes malmok őrlési tervének szimultán optimalizálása volt. A feladat modelljében a betakarítás után a megyei raktárakban (raktár körzetekben) tárolt búzakészletből indulnak ki, amelyeket kb. 200 malomba kell szállítani a termelésnek és a fogyasztásnak megfelelő ütemben. A malmok a búzából 4 féle őrleményt gyártanak, amelyeket azután különböző fogyasztó körzetekbe továbbítanak. A malmok különböző őrlési technológiákkal dolgozhatnak és termelési költségeik is különbözőek. A feladat: az éves lisztellátási probléma megoldása minimális szállítási és termelési költségek mellett a kapacitás és technológiai feltételek figyelembevételével.

A feladat nagy méretei a számítások kétszintű elvégzését indokolták. A megoldáshoz a szerzők egy egyszerű, a szállítási feladatból képzett többlépcsős modellt dolgoztak ki. 1968-ban ekkora szállítási feladatot – $781 \times 561$ – még nem oldottak meg Magyarországon és jelentős eredménynek volt tekinthető, hogy az INFELOR kidolgozta az előző fejezetben is felhasznált gráfreprezentáción alapuló programrendszert, amely kitűnően használta ki a tároló kapacitást és igen gyors. (Az alkalmazott számítógép 8K-s belső tárolóval rendelkező MINSZK-2 volt!)

*Lampl Tamás* és *Maróti László* az „Egy tömegcikkipari vállalat termékösszetételének optimalizálása dekompozíciós módszerrel" c. fejezetben egy csavargyártással foglalkozó vállalat gépeinek optimális leterhelésére, termékösszetétele éves és negyedéves optimalizálására készült gazdaságmatematikai modellt és számítógép programrendszert mutat be. A gyár három gyáregységében kb. 10 000 különböző fajtájú és méretű csavarfélét és kötőelemet gyártanak. A megmunkálás 5–6 egyszerű technológiai szakaszra bontható, és minden termékre alternatív technológiák lehetségesek. A cél a piaci igények és központi előírások maximális fedezettség melletti teljesítése. Mindebből látható, hogy a kutatók egy nagyméretű – 10 000 feltételből és többszázezer változóból álló – lineáris programozási feladatként kezelhetnék a qroblémát. A szerzők a méretekből adódóan kezelhetetlenné vált LP feladatot visszavezették az általános szállítási (vagy gépterhelési) problémára. A szerzők egy a Benders-féle elven alapuló dekompozíciós eljárást dolgoztak ki. A szektorfeladatok közül a szállítási feladat típusoknál a gráfreprezentáción alapuló algoritmus FORTRAN nyelven kidolgozott programját, az általánosított szállítási feladat megoldására a szintén FORTRAN-ban megírt duál szimplex módszert alkalmazták.

A szerzők részletesen bemutatják a modellezésnél megoldott problémákat, ismertetik a rendszer által igényelt és szolgáltatott adatok körét és az egész modellt nagyon elismerésre méltó módon elhelyezik az adatfeldolgozási környezetben. A rendszer üzemszerű alkalmazásának bevezetése folyamatban van. [Vö.: Szigma *9* (1976) 133–147.]

*Pintér Zsuzsa* a „Készletmodellek alkalmazásai"-ról számol be. A fejezet első részében különböző vállalatoknál alkalmazott egyenletesen ütemezett anyagfelhasználást és előre megadott megbizhatósági szintet feltételezve Prekopa–Ziermann modelleken alapuló megoldásokat ismertet, az adott időszakban egyenlő és különböző mennyiségű tetszőleges időpontokban beérkező szállítmányokat alapul véve. A szerző az eljárásoknál alkalmazza az ABC analízist a szignifikáns anyagféleségek meghatározására. Matematikai modelljét egy adatfeldolgozó rendszerbe építette be, figyelembe véve az input és output adatok célszerű kezelésének problémáit is. A fejezet második része egy minimumköltséges készletmodellt mutat be, amellyel azt vizsgálták, hogy egy gázpalack töltő vállalat mekkora háztartási palackkészlettel rendelkezzen ahhoz, hogy a vevők igényeinek véletlenszerűséget figyelembe véve az egy-egy negyedévre jutó készletezési költség minimális legyen. A szerző Wiener folyamatnak tekintve az igényfolyamatot minimálta a költségfüggvényt.

„Egy öntöde termelésirányítási módszerének" kidolgozásáról ír *Benedikt Vera* az EVIG öntödei gyáregységénél végzett munka alapján. A cél az öntöde negyedévet átfogó ütemtervének kidolgozása volt, figyelembe véve azt a követelményt, hogy a kupolóból óránként nyerhető vasat anyagveszteség nélkül folyamatosan fel lehessen használni. A kidolgozott modell figyelembe veszi az igényeket, a kapacitásokat, a technológiai előírásokat és a kisgépes formázótechnológiához tartozó konvejor terhelési problémáit is. A rendszer részei a következők: adatfeldolgozás, rendelésállomány-feldolgozás, és aktualizálás, a termelés matematikai modelljei, a termelés ütemezés programrendszere, output táblázatok. A problémát a szerző egy (0, 1)-es egész értékű feladat formájában fogalmazta meg, amelyre nem optimumot, hanem csak megengedett megoldást keresett. A fejezet részletesen leírja a feladat matematikai modelljét, a megoldáshoz alkalmazott eljárásokat, az outputként kapott fontosabb táblázatokat, a paraméterezési lehetőségeket és a számítógépes tapasztalatokat. [Vö.- Szigma *8* (1975) 29–35.]

Egészen más jellegű problémával foglalkozik *Koncz Gabriella* a következő fejezetben, ahol „Kutatás-fejlesztés hálótechnikai módszereken alapuló tervezési és irányítási rendszere" címmel a MEDICOR Művek Kutató és Fejlesztő Intézete gyártmányfejlesztéssel kapcsolatos munkáinál alkalmazott eljárásokról számol be.

A rendszer két részből áll: tervezési, valamint operatív ellenőrzési és irányítási részből. A munka során a szerző a gyakorlatban jól kihasználta a hálótervezési módszerekben rejlő lehetőségeket.

A fejezet végén a MEDICOR-nál szerzett alkalmazási tapasztalatokról kapunk rövid áttekintést. A modell hasonló típusú problémákra másutt is jól alkalmazható.

A *Mócsi Zoltánné* által írt a „Postai szállítások ütemezése" című fejezetben a Posta Vezérigazgatóság számára – az INTRANSZMAS mint fővállalkozó megbízásából – készült modellekről kapunk tájékoztatást. A feladat: postai szállítások hozzárendelése az igénybevehető gépkocsiparkhoz, ahol valamennyi szállítmány adott időintervallumon belül kell hogy valahonnan elinduljon, ill. valahová megérkezzék. A modellnek tehát figyelembe kell vennie az elszállítandó volumeneket, a gépkocsik kapacitás és időkorlátait, minimálnia kell a „felhasznált" gépkocsik számát.

A szerző a problémára két közelítő megoldást dolgozott ki, mivel az egzakt optimum megkeresése ezen ismételten futtatandó feladat esetében irreálisan magas gépidőfelhasználást tett volna szükségessé.

Az első eljárás ún. lista elven alapul, ahol a szállításoknak nincs kitüntetett pontja, tetszőleges szállítások összefűzhetők, ha ezt a kapacitás és időparaméterek megengedik. Az eljárás alkalmazása a gépkocsi kapacitások kihasználása szempontjából jó, a gépkocsik programja ugyanakkor meglehetősen bonyolult, a sok lehetséges megoldás és ellenőrzési munka miatt pedig eléggé gépidő igényes. Jól áttekinthető megoldást ad a második eljárás, amely bejárandó „körök" egymásutánját rendeli a gépkocsiparkhoz, azaz egy-egy gépkocsi csak egy-egy körben meghatározott terítés és gyűjtés végrehajtása után tér át a következő körre. Az eljárás hátránya, hogy a gépkocsi egy-egy körön belül keletkező üres idejét nem lehet más szállítással kitölteni. A fejezet részletesen ismerteti a modelleket, az algoritmusokat, kitér a megoldás általánosításának kérdéseire. Elismerésre méltó a megoldás azért is, mert nem kész modelleket és eljárásokat alkalmaz, hanem az operációkutatás alapcélkitűzéseinek megfelelően a feladatból és az ehhez kapcsolódó gyakorlati megfontolásokból kiindulva keresi a racionális megoldást.

*Kelemen Katalin—Vári Anna* „A magyar szénhidrogénipar strukturális döntéseinek vizsgálatára alkalmas szimulációs modell" c. fejezetben részletesen leírja a szénhidrogénipar figyelembe vett sajátosságait, a kidolgozott modell főbb funkcióit, ismerteti a szimuláció folyamatot, a kísérleti eredmények elemzésére alkalmazott módszereket. A fejezet befejező részében a szerzők beszámolnak a kísérleti futtatások eredményeiről. A kísérleti futtatásnál az érvényesség vizsgálata céljából a kísérletet úgy hajtották végre, hogy a szimulált periódus múltbeli időszakot is magába foglalt, ami lehetővé tette, hogy az eredményeket a tényadatokkal összevessék. Példaként bemutatják egyetlen termék keresleti és kínálati idősorait, valamint az ezeken végzett spektrálelemzés eredményeit.

Az utolsó fejezet egy ismert termelésszervezési problémával foglalkozik „A tárcsaleszabások optimalizálása" címmel. A *Lampl Tamás* által felvetett probléma: adott hosszúságú, szélességű és mennyiségű anyagból adott méretű és meghatározott volumenű munkadarabokat milyen szabástervek alapján szabjunk a vágási hulladék (ill. a költség) minimálása mellett. A feladatot a szerző két lépésben oldja meg. Az elsőben az összes szabási változatot határozza meg elektronikus számítógép segítségével. Mivel a vizsgált üzemben edényeket gyártnak, ez gyakorlatilag különböző átmérőjű körök (tárcsák) különböző „szabásminták" szerinti elhelyezést jelenti a gyáregységenként használatos eltérő hosszúságú és szélességű lemezeken. A szabásminták meghatározása bonyolultabb probléma. (Pl. minimálisan 73%-os anyagfelhasználását tekintve az 1000 × 2000 mm-es méretre 6—7000 változat adható meg a feladatban szereplő termékek korlátai mellett.) A második lépcsőben a szabásmintát és a rendelésállomány ismeretében a szerző egy lineáris programozási modellt ír fel, amelyiknek célfüggvénye a keletkező hulladék mennyiségét minimálja.

Összefoglalásul elmondhatjuk, hogy a cikkgyűjtemény hasznos olvasmány mind az operációkutatást alkalmazni kívánók, mind az operációkutatók számára. Mondanivalója általában egyszerűen megfogalmazott, könnyen érthető és áttekinthető. Sok terület alkalmazási tapasztalatáról ad képet, jól tükrözi az operációkutatásban rejlő lehetőségeket ezek gazdálkodásának hatékonyabbá tételében. A megoldások az esetek többségében némi absztrakcióval általánosíthatók és így más vállalatoknál, vagy gazdasági területeken is alkalmazhatók.

PONGRÁCZ TIBOR

KLACEK, J.—TOMS, M.: Pracovní síla a modelování reprodukčního procesu. (Munkaerő és az újratermelési folyamat modellezése.) Praha, 1976. Academia, 273 p.

A szerzők neve Magyarországon is jól ismert azok körében, akik termelési és munkaerő-függvényekkel, ökonometriai modellekkel és módszerekkel foglalkoznak. Ebben a könyvükben, amely részben korábbi kísérleteik, nagyobbrészt azonban legújabb kutatási eredményeik kitűnő összefoglalásának tekinthető, a munkaerő és az újratermelési folyamat modellezésével foglalkoznak a szerzők. Könyvük négy fejezetből áll, amelyek közül az első két fejezet elsősorban módszertani kérdéseket tárgyal, míg a harmadik és a negyedik a módszerek gyakorlati alkalmazását mutatja be.

Az első fejezetben a szerzők mindenekelőtt az alapfogalmakat, a munkaerő és az újratermelési folyamat összefüggésének egyes elemeit fejtik ki. Ilyenek: az újratermelési modell alkalmas formájának kiválasztása, a termelési erőforrások korlátozottsága, a foglalkoztatottság és az állóeszközök közötti kapcsolat, a kapacitások, a munkaerő-tartalékok, az állóeszközök átlagos élettartama, a termelési tényezők helyettesíthetősége, az optimális kihasználás, valamint az újratermelés modelljében érvényesülő kauzális kapcsolatok.

Különleges fontosságú kérdés a munkaerő és az állóeszközök egymáshoz való aránya. Az állóeszköz-munkaerő arány jelentőségét fokozza, hogy a munkaerő állóeszköz-felszereltségén kívül dinamikájában a termelési tényezők helyettesíthetőségére is utal, sőt a technikai fejlettség mutatójára is. A szerzők a csehszlovák ipar egyes ágazatainak állóeszköz-ellátottságát részletesen, táblázatos formában is bemutatják (1960—1971 között); első helyen minden esetben a bányászat és az energiatermelés áll. Az együttható 1964-től kezdődően mindenütt a felszereltség növekedéséről tanúskodik.

Az állóeszköz kihasználtságáról átfogó statisztikai adatok nincsenek; a jelenség csak minták alapján vizsgálható (így az Állami Tervbizottság 1960. és a Szövetségi Statisztikai Hivatal 1971. évi adatai alapján). A szerzők bemutatják mindazokat a mutatókat, amelyekkel az állóeszközök kihasználtságát mérték. Így a kihasználtság nyers mutatóját (a használaton kívüli állóeszközök százalékaránya) a ledolgozott munkaórák és a potenciális idő-alap arányán alapuló finomabb mutatót, a trend-vonaltól való eltérés mutatóját, sőt a villamosenergia-felhasználás mutatóját is. A felsoroltak, valamint további mutatók alapján összehasonlításokat tesznek a szerzők Csehszlovákia és más országok között is. A mondottak áttekintését ábrák is megkönnyítik.

A termelés változójának makroökonómiai szinten a nemzeti jövedelem, ill. bruttó szemléletben a társadalmi termék felel meg; ugyanakkor az állóeszköz-kihasználtság mérése — valamint a továbbiakban a gazdasági potenciál számítása — nehezebb problémákat vet fel. (Hogy csak egyet említsünk: ide tartozik a föld termelési potenciáljának a meghatározása is.) A szerzők mindenesetre hangsúlyozzák a kapacitáskihasználás és a potenciális termelés megkülönböztetésének fontosságát. A kapacitáskihasználás eredménye olyan termékvolumen, amely a termelő erőforrások teljes kihasználása mellett jön létre; ugyanakkor a potenciális termelés azt a termékvolument jelenti, amely a megkívánt — ideális esetben az optimális — erőforrás-kihasználás mellett jön létre.

További alfejezetek egyrészt a gazdasági potenciál és a kapacitás-kihasználás prognosztikus modelljével foglalkoznak, különböző függvénytípusok alapján, másrészt a foglalkoztatottsági struktúra, ill. a gazdasági aktivitás rövid távon belül történő változásait elemzik; különös tekintettel azokra a kérdésekre, amelyek a szocialista gazdaság körülményei között fordulnak elő. Ezek között kitüntetett szerepe van például a női foglalkoztatottság alakulásával, valamint a teljes foglalkoztatottsággal kapcsolatban kifejtetteknek.

A mű második része elsősorban a modellek empirikus adataival foglalkozik. Már önmagában is érdekes a gazdasági aktivitás alakulásának az áttekintése. Csehszlovákiában 1953 és 1971 között a foglalkoztatottság 0,69 százalékról 0,83 százalékra nőtt; a nőké 1955 és 1971 között 0,59 százalékról 0,70 százalékra. A tanulmány a foglalkoztatottság hosszú- és rövidtávú perspektíváinak a bemutatására is kitér. Hosszú távon mindenekelőtt a munkaerő minőségének fokozása jön figyelembe, tekintettel a munkaerőtartalékok csekély voltára. Ábrán is bemutatják a szerzők az ipari foglalkoztatottság és a termelés alakulását 1950 és 1971 között, ami sok érdekes tanulság levonását teszi lehetővé. Hasonlóképpen grafikonok teszik szemléletesebbé a munkatermelékenység és az egyes ipari ágazatok termelés közötti összefüggések alakulását.

A következőkben a munkatermelékenység-ingadozás lehetséges tényezőit, valamint a termelékenység és a foglalkoztatottság összefüggésének egyes kérdéseit tárgyalja a tanulmány. Két problémakör érdemel ezen belül különös figyelmet: egyik a munkaerő rövid távon belül érvényesülő „kvázi-fix" jellege; a másik a munkaerő-foglalkoztatottsági modell változói között fennálló dinamikus kapcsolat, más szóval: a változók időbeli „késleltetésének" a kérdése. Bemutatják az „osztott késleltetés" kérdéskörét, ennek a gyakorlatban való kezelését, így mindenekelőtt a Koyck-féle transzformáció módszerét. További alfejezetek a munkaerőmérleg problémáival, a munkaerő-alakulásra ható tényezőkkel és a foglalkoztatottság prognosztizálásával foglalkoznak.

A harmadik és a negyedik rész gyakorlati orientációjú. Így a harmadik fejezet az éves adatokra, a negyedik a negyedéves adatokra épülő modellek paramétereinek a becslésével és a becsült eredmények elemzésével foglalkozik. A gyakorlati közgazdász számára ezek a fejezetek különösen becsesek. Munkaerő- és termelési makrofüggvényeket különféle változatokban és többféle analitikai alakban írnak fel a szerzők, így lineáris és loglineáris formában, hatványfüggvény alakjában stb. A függő változó rendszerint az ipari munkaerő-foglalkoztatottság, a magyarázó változók között a trend, a korábbi év munkaerő-foglalkoztatottsága és az egy munkásra eső ledolgozott munkaóra-mennyiség mellett kiemelt súllyal szerepel az ipari termelés. Egyes változatok az ipar egésze és külön-külön az egyes ipari ágazatok összefüggéseit, mások a nem-mezőgazdasági szektor összefüggéseit globálisan becsülik. További alternatívák az előbbi magyarázó változók mellé az állóeszközöket is beiktatják. (Ezzel kapcsolatban érdeklődésre tarthat számot a fejezet végén található 1. számú Függelék, amely az állóeszközök problémáit tárgyalja a termelési függvényben. A becsült eredmények — a szokásos szignifikancia-tesztek feltüntetésével — táblázatos formában is láthatók. Rendkívül sokat mondók a különböző eredmények összehasonlításai és a szerzőknek gyakorlott közgazdászra valló megállapításai. A munkaerő-függvényeket közép- és hosszútávú előrebecslés céljára is felhasználták. Termelési függvényeket tizenhat ipari szektorra mutatnak be; magyarázó változók a foglalkoztatottság, a korábbi időszak termelése, a trend és az állóeszközök. Rövid távon (1968—1970) végzett ex post prognózisok és szimulációs kísérletek eredményei teszik teljessé ennek a fejezetnek az anyagát.

A viszonylag rövid negyedik fejezet a foglalkoztatottsági függvény negyedéves adatokon becsült változatát, ezzel együtt a negyedéves adatok összeállításában követett módszert mutatja be, amely a szezonalitást is figyelembe veszi. Foglalkozik a termelés és a foglalkoztatottság rövidtávú dinamikájának az elemzésével, valamint bemutatja a loglineáris negyedéves modellek számszerű eredményeit és a felhasznált idősorokat. A művet igen gazdag irodalomjegyzék zárja be.

A könyv olyan közgazdászok kutatási eredményeit és megállapításait tartalmazza, akik a módszertanban és a gyakorlati közgazdasági kérdésekben egyaránt jártasak; korszerű matematikai módszerekkel dolgoznak, s megállapításaikat jó statisztikai anyagra alapozzák. Mindezek alapján a könyv igen jó ökonometriai munka, amelyből rendkívül sok és alapos ismeretanyag nyerhető. Sajnálatos, hogy nyelvi okokból a könyv a kutatók szűk körének hozzáférhető csupán, és nem tartalmaz idegen nyelvű összefoglalót sem.

NYÁRY ZSIGMOND

# *TUDOMÁNYOS ÉLET*

## IV. Matematikai Programozási Konferencia Mátrafüred, 1977. április 18—22.

Ez a konferencia folytatása azoknak a rendezvényeknek, melyeket a Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete „Matematikai Programozási Téli Iskola" néven 1973. óta rendszeresen megszervez.[1] 1976-ban a Téli Iskola megszervezése a IX. Nemzetközi Matematikai Programozási Szimpózium miatt — melyet Budapesten tartottak 1976. augusztus 23—27. között — elmaradt, 1977-ben pedig technikai okok — a Magyar Tudományos Akadémia mátrafüredi üdülőjének tatarozása — miatt a szokásostól eltérő időben és helyen rendezték meg a konferenciát, melynek az Avar Szálló igen kellemes keretet adott.

Mint az elmondottakból is kiderül, rövid múltra visszatekintő rendezvényről van szó, amely azonban máris komoly tradíciókkal büszkélkedhet, s ezekhez a szervezők ezúttal is hűek maradtak. Mik ezek a tradíciók? Erre legtömörebben az ismert közmondás megfordításával lehet válaszolni: a Matematikai Programozási Iskola szervezői keveset markolnak, de sokat fognak. A rendezvénynek az a célja, hogy a résztvevők a matematikai programozás egyes területeinek legfrissebb eredményeiről jól áttekinthető képet kapjanak. Ezt a célt úgy lehet elérni, hogy mind a résztvevők, mind pedig az előadások száma viszonylag kevés, az egyes előadások időtartama viszont nem túl rövid: hozzávetőleg egy óra. Az előadásokat meghívott előadók tartják, akik általában nem (illetve nem kizárólag) a saját eredményeiket ismertetik, hanem a matematikai programozás egyes fejezeteivel kapcsolatos kutatások helyzetéről és időszerű kérdéseiről nyújtanak áttekintést.

A IV. Matematikai Programozási Konferencián tíz ország képviseletében százan vettek részt, a résztvevők kétharmada volt magyar. Összesen 23 előadás hangzott el, ezek közül hármat magyar előadó tartott. A konferencia előadásait tárgykörök szerint a következőképpen lehet csoportosítani.

(a) Az *egészszámú programozás* témakörébe tartozott az összes előadásoknak csaknem harmadrésze, és ezen belül is nagy súllyal szerepeltek kombinatorikus problémák. Az utazó ügynök problémájára vonatkozó kutatások helyzetének jellemzésével két előadó is foglalkozott, és egyikük egy új rekordról is beszámolt, nevezetesen arról, hogy kétszáznál több csomópontot tartalmazó feladatot is sikerült megoldani. Egy minden eddiginél hatékonyabb algoritmusról szólt egy másik előadó a korlátlan kapacitású ellátó központok telepítésének problémájával kapcsolatban, melyet a következőképpen lehet megfogalmazni:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq 1, \ (j = 1, 2, \ldots, n); \ y_i - x_{ij} \geq 0, \ (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_{ij} \text{ és } y_{ij} \ (0, 1)\text{-es változók}; \quad \sum_{i=1}^{m} (f_i y_i + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}) \to \min.$$

Az említettek mellett szerepelt az előadásokban a hátizsák-feladat, szerepeltek továbbá általános (0, 1)-es lineáris programozási feladatok és közvetlen gyakorlati alkalmazásokhoz kapcsolódó problémák is. Több előadás tanúsága szerint az egészszámú feladatok egy tág osztályára azok az eljárások a leghatékonyabbak, melyek részben a feladatoknak megfelelő lineáris program és ennek duálisa közötti kapcsolatra, részben

[1] A II. Matematikai Programozási Téli Iskoláról Strazicky Beáta számolt be a Szigma 1974. évi 1—2. számában (129—133. p).

pedig az eljárás és korlátozás módszerére épülnek. Ez utóbbinak egy olyan változatáról számolt be az egyik előadó, melynél az elágazási alternatívákat be lehet építeni a feladat feltételei közé; ez a lehetőség jelentős számítástechnikai előnyökhöz vezet.

(b) Viszonylag nagyszámú előadás képviselte a *nemlineáris programozás* témakörét is. Az előadások egy része elméleti jellegű volt; ezekben olyan kérdések szerepeltek, mint a konvex halmazok szeparálására vonatkozó eredmények általános feltételek mellett (projektív terekben, szorzat-terekben stb.), a linearitás és a konvexitás fogalmának módosítása és ezek alkalmazása az optimalizálásban, továbbá a halmazértékű függvényeknek a nemdifferenciálható optimum-feladatokban való alkalmazása. Több előadó foglalkozott a büntető-függvények módszerének és a vele rokon eljárásoknak a tökéletesítésével és általános feltételek melletti alkalmazhatóságának kérdésével. Az említettek mellett a nemlineáris programozással kapcsolatos előadásokban szerepeltek parametrikus problémák és konkrét gyakorlati alkalmazásokból származó feladatok — mint például a kevert programozás alkalmazása rugalmas tartószerkezetek tervezésében —, továbbá feltétel nélküli szélsőértékfeladatok megoldására alkalmas eljárások is. Ez utóbbiak közül az ún. hibrid algoritmusokat érdemes megemlíteni; ezeket az

$$A_p^{r_p} A_{p-1}^{r_{p-1}} \dots A_1^{r_1}\, x \to x$$

hozzárendelés segítségével lehet formalizálni, ahol $x \in R^n$, $f\colon R^n \to R$ és $i = 1, 2, \dots, p$ esetén $A_i^{r_i}$ egy olyan iteratív algoritmus $r_i$ számú lépésének egymás után való elvégzését jelöli, mely alkalmas a $\min \{f(x) \mid x \in R^n\}$ feladat megoldására. A hibrid algoritmusokkal kapcsolatban kedvező számítástechnikai tapasztalatokról számoltak be.

(c) Viszonylag kevés számú előadás hangzott el a *sztochasztikus programozással* és a *vektorterekben való programozással* kapcsolatban. A sztochasztikus programozással foglalkozó előadások egyikében az alábbi feladat megoldására mutatott be elegáns elméleti megfontolásokon alapuló eljárást az előadó: maximalizáljuk az $\inf E_F\{c^T x - \varphi(x; A, b)\}$ kifejezést az $A$ mátrixból és a $b$, $c$ vektorokból álló „hipervektor" $F$ eloszlásainak egy adott $\mathfrak{F}$ halmazán, ahol $\varphi$ adott büntető függvény, és $x$ a valós $n$-dimenziós tér adott $X$ részhalmazának az eleme. Ennek a témakörnek egy másik előadásában a sztochasztikus programozás alkalmazásáról volt szó optimális víztároló rendszer tervezésére. A fizikai valóság modellezése itt a következő feladatra vezetett: annak feltételezése mellett, hogy az árvízveszély elhárításának a valószínűsége adott $P$ valószínűségnél nagyobb, és $0 \leq K_i \leq V_i$, a $\sum\limits_i [c_i(K_i)] + E(\mu)]$ mennyiséget kell minimalizálni, ahol $K_i$ az $i$-edik tároló ismeretlen kapacitása, $V_i$ ennek adott felső korlátja, $c_i(K_i)$ az $i$-edik tároló építésének a költsége, $\mu$ pedig az árvíz bekövetkezésekor esedékes kártérítés mennyisége.

A vektorterekkel kapcsolatos optimum-feladatokkal foglalkozó előadók egyike Hilbert-téren értelmezett konvex függvények szubgradiens eljárással való minimalizálásának lehetőségeit ismertette, egy ugyanebbe a témakörbe tartozó másik előadásnak pedig konvex terekben definiált programozási feladatok primál-duál kapcsolata volt a tárgya, sztochasztikus programozásban és vezérléselméletben alkalmazható eredményekkel.

A konferenciával kapcsolatos benyomásokat minden bizonnyal jól tükrözi az a vélemény, melyet e sorok írója a konferencia egyik külföldi résztvevőjétől hallott, aki egyben meghívott előadó is volt, és az előző évben a Matematikai Programozási Szimpóziumon is részt vett Budapesten. Ez a külföldi résztvevő a két rendezvény (a budapesti és a mátrafüredi) összehasonlítása alapján úgy találta, hogy mind az előadásához kapcsolódó reflexiók, mind pedig a személyes szakmai kapcsolatok kialakításának szempontjából számára a mátrafüredi konferencia volt a hasznosabb.

MIHÁLYFFY LÁSZLÓ

## Köszönet a kötet lektorainak!

A Szigma 1977. évfolyamához benyújtott cikkeket — a szerkesztőség állandó munkatársain kívül — a következő külső munkatársak lektorálták:

Bacskay Zoltán
Bíró András
Csepinszki Andor
Dancs István
Forgó Ferenc
Gács Péter
Hulyák Katalin
Kádas Sándor
Kotász Gyuláné
Kovács László Béla
Köves Pál
Meszéna György
Molnár Ferencné
Neményi Vilmos
Nyers József
Párniczky Gábor
Peák István
Pillis Pál
Réti János
Simonné Mosolygó Nóra
Simonovits András
Szabó Judit
Szepesi György
Tarján Tamás
Vita László
Zalai Ernő

Áldozatkész munkájukért ezúton is köszönetet mond a szerkesztőség.

1828–1978
MEGJELENT
AZ AKADÉMIAI KÖNYVKIADÁS
150. ÉVÉBEN

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója.
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1978. III. 17 – Terjedelem: 7 (A/5) ív
78.5622 Akadémiai Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Bernát György

# CONTENTS



## BOOK REVIEWS



## SCIENTIFIC LIFE



# СОДЕРЖАНИЕ



## О КНИГАХ



## НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 12,— Ft
Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX: 26793
ISSN 0039—8128

# TARTALOM



## KÖNYVEKRŐL



## TUDOMÁNYOS ÉLET



1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST