Bródy András

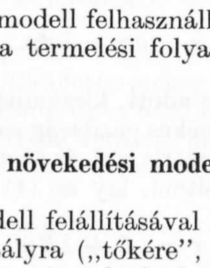
# A ciklus egy linearizált modellje*

A zárt dinamikus Leontief modell felhasználható a gazdasági ciklus közelítő leírására és számítására, ha a termelési folyamatok időszükségletét is megfelelően ábrázoljuk benne.

## A növekedési modell

A szokásos növekedési modell felállításával kezdjük: a termelési folyamatnak egy bizonyos terméktartályra („tőkére", „készletre") van szüksége. Ez a tartály minden időpillanatban tartalmának csak töredékét, mondjuk $1/t$-ed részét képes a termelési folyamat rendelkezésére bocsátani. Vagyis másképp fogalmazva, minden terméknek van egy átlagos vagy várható $t$ élettartama, létezése idején a tartályban levő készlet része. A tartály így a már megtermelt, de még fel nem használt termékeket tartalmazza.

Egyetlen termék esetében, az egyszerű újratermelésből kiindulva e körfolyamatot az 1. ábra szemlélteti.




*1. ábra*

Legyen a termelési áramlat mértéke („szélessége", „intenzitása") $x$. Az áramlat fenntartásához minden időpillanatban $ax$ mennyiségű ráfordítást kell a készletből elvonni. Az egyszerű újratermelés körülményei között $a = 1$. A folyamat, amelyet egyelőre „azonnal" végbemenőnek tekintünk, ugyanannyi terméket von el e készletből, mint amennyit pótol. Ezért a készlet, bármekkora legyen is, se nem csökken, se nem növekszik. Az egyszerű újra-

* Köszönetemet fejezem ki *Simonovits* Andrásnak és *Tarján* Tamásnak, akik az eredeti kézirat számos hibájára felhívták figyelmemet, s így segítettek azok kiküszöbölésében. Az 5. egyenlet nem teljesen szabatos voltán azonban együttesen sem tudtunk egyelőre javítani.

termelés újratermeli önmaga folytatásának feltételeit s érzéketlen a tőke nagysága iránt. Ha most $a < 1$, akkor az újratermelés bővítése lehetségessé válik, mivel a termelés eredménye nagyobb, mint ráfordítása, tudniillik $ax < x$. E ráfordításhoz azonban $t$-szerte nagyobb, tehát $atx$ nagyságú készlet szükséges előbbi feltevésünk szerint.

Ha mind a készletet, mind a termelés áramlatát $\lambda$ ütemben kívánjuk növelni, tehát ha $dx/dt = \dot{x} = \lambda x$ fennállását kívánjuk biztosítani, akkor a termelésnek $(x)$, nemcsak a ráfordítást $(ax)$, kell pótolnia, hanem ezenfelül a készleteket $(atx)$, is növelnie kell $\lambda$ ütemben, azaz egy $\lambda atx$ nagyságú többletterméket kell létrehoznia.

A szükséges és a tényleges termelés egyenlőségét mondja ki a legegyszerűbb növekedési modell:

$$x = ax + \lambda atx. \tag{1}$$

Az egyenletből, ha $a$ és $t$ értéke adott, kiszámítható a megengedett $\lambda$ növekedési ütem. Az általános, $n$-termékes gazdaság esetében csupán az $a$ ráfordítási együtthatót kell az $A = \{a_{ik}\}$ mátrixszal, és az $at$ készletigényt a $B = \{b_{ik}\} = \{a_{ik}t_{ik}\}$ mátrixszal helyettesíteni, így az (1) egyenlet az ismert

$$x = (A + \lambda B)x \tag{2}$$

alakot ölti. E zárt dinamikus Leontief modellből a megengedett $\lambda$ növekedési rátán kívül most már a termelés $x$ egyensúlyi arányai is kiszámíthatók, amelyek e növekedést lehetségessé teszik.

## Az időszükséglet

Mindez jól ismert eredmény. Most kerül sor egy pótlólagos feltevés bevezetésére, amely azon alapul, hogy az 1. ábrában szereplő termelési folyamat vagy körforgás nyilvánvalóan nem mehet az „időn kívül" végbe, lefolytatása valamilyen megállapítható, mérhető időbe kerül.

Ez a tény a következőképpen fogalmazható meg:

*A k termék előállításához az $a_{ik}$ anyagi ráfordításokon kívül egy bizonyos $g_k > 0$ idő is szükséges, amely alatt e ráfordítások késztermékké alakíthatók.*

Különlegesen hosszú időbe telik az új beruházások, gépek, felszerelések előállítása. Ezek, a közgazdasági irodalomban „keletkezési", „gesztációs" periódusoknak nevezett időtartamok adják a $g$ jelölést. Ezek az időtartamok mindig pozitívak. Valószínűleg nem nehéz megbizható statisztikai adatokat találni az egyes ágazatok jellemző termelési, „gesztációs" időszükségleteire. Ez néhány óra a sütődékben, néhány hónap a hajóépítésben, néhány év a vasútépítésben s.i.t.

Ezeket az időtartamokat már elméletileg vizsgálta W. Leontief [1] és P. Petri [2], amikor az úgynevezett általánosított inverzzel foglalkoztak — de felölelték őket a tőkére vagy készletekre vonatkozó feltevések közé. Természetesen a termelési áramlatokban található termékek is készletek (félkésztermékek vagy befejezetlen beruházások). Könnyű a két időtartamot, $t$ és $g$ értékét összegezni és együttesen kezelni, mint a tőke nagyságát együttesen megszabó időtartamot. Mégis helyes $g$ szerepét külön is figyelembe venni, mert ez új jelenségkörhöz vezet, amely a növekedési modell módosítását is szükségessé teszi. Erre tudomásom szerint *N. Georgescu-Roegen* tett először kísérletet egy $2 \times 2$-es nyílt dinamikus Leontief-rendszerrel kapcsolatban [3].

## A modell kiegészítése

Ha a termelési folyamat időszükséglete $g$, akkor a mondjuk $\tau$ időpontban megindított áramlat csak később, a $\tau + g$ időpontban fog a tartályhoz megérkezni, azaz ,,befejeződni''. Az egyenletes növekedés körülményei között azonban ez alatt az idő alatt is pótlólagos növekedés megy végbe, mégpedig $e^{\lambda g} \sim (1 + \lambda g)$ nagyságú.

Hogy tehát a növekedés egy adott egyenletes $\lambda$ ütemét fenntarthassuk, az előbbinél valamivel *nagyobb* többlettermékre van szükség. Nem elég, ha a termelési folyamat a saját ráfordításain felül egy $\lambda atx$ nagyságú többletet hoz létre, ezt még meg is kell tetéznie $\lambda g(\lambda atx)$ mértékben. Csak ezzel tud eleget tenni a saját termelési ideje alatt végbement pótlólagos növekedés pótlólagos igényének.

Így az (1) egyenlet megfelelően kibővül:

$$x = ax + \lambda atx + \lambda^2 atgx. \tag{1*}$$

Az általános eset egy új mátrix bevezetését teszi szükségessé, amely a

$$D = \{d_{ik}\} = \{b_{ik} g_k\} = \{a_{ik} t_{ik} g_k\}$$

alakban adható meg. Ennek segítségével a zárt Leontief-modell (2) egyenlete a

$$x = (A + \lambda B + \lambda^2 D)x \tag{2*}$$

alakban fejezhető ki. A megfelelő differenciálegyenlet az

$$x = Ax + B\dot{x} + D\ddot{x}$$

formát öltené.

A következőkben azonban egy ettől némiképpen eltérő differenciálegyenletrendszert fogunk felállítani a $D$ mátrix szerepének és a gazdasági szabályozás lehetőségeinek vizsgálata alapján.

A $D$ mátrix két időtényező szorzataként állítható elő. Úgy viszonyul a tőkelekötés $B$ mátrixához, mint az utóbbi a folyó ráfordítások $A$ mátrixához. Ha a tőke nem más, mint felhalmozott termelés, akkor az új $D$ mátrix felhalmozott készleteket, kétszeresen felhalmozott termelést jelöl. A rendszer ,,gyorsulási'' vagy ,,beindítási'' mátrixának nevezhetnénk, az elnevezés indokolására még visszatérünk.

A $D$ mátrix szerepét egy másik gondolatmenet is segít megvilágítani. Ha a (befejezett) termelés jelen színvonala $x$ nagyságú, akkor a jelenleg megindított áramlatnak $(1 + \lambda g)x$ nagyságúnak kell lennie, hiszen csak $g$ idő elteltével lesz belőle késztermék. A szükséges ráfordítás tehát $(1 + \lambda g)ax$ mértékű, s így a készlettartályban ennek $t$-szerese kell hogy legyen, azaz $atx + \lambda atgx$ mennyiségnek kell már felhalmozva lennie. Mátrix-írásmódban tehát a jelen pillanat tőkeigénye $Bx + \lambda Dx$ nagyságú. A pótlólagos $\lambda Dx = D\dot{x}$ elem azt a többletet fejezi ki, amelyre azért van szükség, mert a termelési folyamat nem ,,azonnali'', hanem meghatározott pozitív időtartamot vesz igénybe.

## Az egyensúlyi növekedés

Érdekes megvizsgálni, hogy ezek az összefüggések miért nem játszottak szerepet az eddigi elméleti megfontolásokban, és miért hanyagolhatók el, legalábbis a hagyományos számítások esetén, ameddig ezek csak a növekedési ütemre vagy az egyensúlyi arányokra vonatkoznak.

A (2*) egyenletben a $D$ mátrix a $\lambda^2$ együtthatóval szerepel. $\lambda^2$ értéke gyakorlatilag nem haladja meg a 2—3 ezreléket. Ha a $D$ mátrixnak van is hatása, e hatás a közgazdasági mérés szokásos hibahatárain alul marad s így *nem észlelhető.*

Még ha teljesen „szabatosan" is mérünk statisztikailag, a tőke ($Bx$) mérésekor tulajdonképpen már amúgy is a $(B + \lambda D)x$ értéket mérjük le, ugyanis az egyensúlyi helyzetben, azaz átlagosan valóban ennyi tőke van (a tartályban és az áramlatokban együttesen) lekötve. Ha most a (2) egyenletben a $B$ mátrix helyére a $B + \lambda D$ mért értéket írjuk, akkor ez azonosan átalakul a (2*) egyenletté, s azonos eredményekhez is vezet. A továbbiakban ezt el is fogadjuk, és beleértjük a $B$ mátrixba az egyébként elhanyagolható $\lambda D$ értéket is. Ennek az eljárásnak előnye, hogy a tőkeszükséglet kiszámításakor továbbra is csak egyetlen, a kibővítettnek tekintett $B$ mátrixszal kell szoroznunk.

Szabatosabban természetesen a (2*) egyenlet a

$$x = (1 - \lambda^2 D)^{-1} (A + \lambda B)\, x \tag{3}$$

alakra hozható. A sajátvektor módosított értékét valószínűleg jól számíthatjuk az alábbi iterációval

$$x_{k+1} = Ax_k + \lambda_k Bx_k + \lambda_k^2 Dx_k$$

$$\lambda_k = \frac{p^T(1 - A)\, x_k}{p^T(B + \lambda_{k-1} D)\, x_k}$$

ahol $p^T$ tetszőleges pozitív árvektor, amelyről feltesszük, hogy $p^T > p^T A$.

Mivel $(1 - \lambda^2 D)^{-1}$ az egységmátrixtól csak kevéssé eltérő és pozitív mátrix ($\lambda^2 D$ értéke igen kicsiny), világos, hogy $\lambda$ egyensúlyi értéke valamelyest kisebb lesz, mint ahogy az a (2) egyenlet alapján adódna, és az egyensúlyi termelési arányok vektora is a hosszabb termelési idejű termékek felé tolódik. Az eltérés azonban, mint láttuk, minimális, s ezért a gyakorlatban elhanyagolható.

## A nem egyensúlyi növekedés

Nem hanyagolható el azonban a $D$ mátrix kihatása, ha a gazdaság, egyensúlyi növekedési üteméből kilendülve, gyorsul vagy lassul — tehát éppen a gazdasági ciklus vizsgálata esetén. A ciklus folyamán a tényleges növekedési ráta, $\dot{x}/x$, ugyan csak enyhén ingadozik, mintegy 0,15 és —0,05 között, a hasonlóan képzett „gyorsulási ráta", $\ddot{x}/\dot{x}$, azonban plusz és minusz végtelen között minden értéket felvehet s általában fel is vesz.

Az egyenletes ütemű növekedésnek egyenletes gyorsulása van. Ugyanis a $\lambda$ ütemű exponenciális növekedés gyorsulása $\lambda^2$ értékű. Ezt nevezzük a

„normális” gyorsulásnak a továbbiakban. A gyorsulás „normális” igényét folyó ráfordítások iránt a $\lambda D\dot{x}$ szorzat adja meg. A gyorsulás tényleges ráfordításigénye azonban eltérhet ettől, értéke $D\ddot{x}$ és ha $\ddot{x} \neq \lambda\dot{x}$, akkor $D\ddot{x}$ jelentősen eltérhet a „normális” igénytől. A különbséget, $D(\ddot{x} - \lambda\dot{x})$ értékét a gyorsítás „abnormális” vagy nem-egyensúlyi ráfordításigényének nevezhetjük. Ez pozitív, ha a gyorsulás a normális felett, negatív ha alatta marad.

Számítható a gyorsulás tőkeigénye is, s mint látni fogjuk, ez bizonyul a fontosabb mennyiségnek.

A nem-egyensúlyi gyorsulás tőkeigényét — figyelembe véve, hogy bármely áramlat tőkeigényét a $B$ mátrixszal való szorzásból származtatjuk — a

$$BD(\ddot{x} - \lambda\dot{x}) = BD\ddot{x} - (1 - A)\,D\dot{x} \tag{4}$$

alakban írhatjuk. Itt a kifejezés második tagjának átalakításánál figyelembe vettük, hogy az egyensúly esetén

$$\lambda BD\dot{x} = (1 - A)\,D\dot{x}. \tag{5}$$

Az (5) egyenlet pontos, ha egyszektoros gazdaságra alkalmazzuk. Többszektoros gazdaság esetén azonban csak közelítő, bár a közelítés olyan, amely valószínűleg a gyakorlati számítási hibahatárokon belül marad. Helyesebb azonban egyenlőre olyan hipotézisnek tekinteni, amely a továbbiak matematikai kezelését egyszerűsíti.

## A szabályozás kérdéséről

Hogy a $D$ mátrix sajátos szerepét világosabban lássuk, meg kell gondolnunk, hogy a korábbi feltételezések értelmében a termelés szintje és növekedésének üteme közvetlenül nem befolyásolható. Mindkettő olyan folyamatok függvénye, amelyek már korábban indultak el — a *jelenlegi* szint és ütem a gazdasági rendszer *korábbi* története által adott. A jelen pillanatban csak későbbi időpontban „beérő” termelési áramlatokat indíthatunk meg — ezek intenzitását növelhetjük vagy csökkenthetjük.

Másképpen kifejezve: a szabályozható változó nem $x$, nem is $\dot{x}$, hanem $\ddot{x}$ — csak a rendszer gyorsulása vagy lassulása módosítható. Egy szemléltető példával élve: a létező olajkutak jelenlegi hozama történetileg adott, a kutak számának jelenlegi növekedését a korábban elindított fúrások száma ugyancsak meghatározza. Szabadon csak abban dönthetünk, hogy *most* a szokásosnál több vagy kevesebb kutatófúrást indítunk-e meg.

Azonban ez a szabadság sem teljes, hiszen az elindítható kutatófúrások, „új beruházások”, vagyis a jelenleg beindítható jövőbeni többletáramlatok mértékét a rendelkezésre álló szabad, még másutt le nem kötött tőke mennyisége korlátozza. A közvetlenül *megfigyelhető* változó mindig is a *készlet.* Itt nem tárgyalt okokból és módokon mind a tőkés piaci mechanizmus, mind pedig a szocialista tervezés úgy szabályozza az újratermelés menetét, hogy a szabad készleteket a termelés ütemének gyorsítására fordítja, illetőleg e készletek hiánya esetén a termelés ütemének lassításával védekezik.

## A pálya egy egyenlete

Mivel a le nem kötött készleteket a modellben az $\int[(1-A)x-B\dot{x}]dt$ kifejezés adja meg, ezt egyenlővé téve a gyorsulás $BD\ddot{x}-(1-A)D\dot{x}$ tőkeigényével, mindkét oldal differenciálása után az alábbi egyenlethez jutunk:

$$(1-A)\,x-B\dot{x}=BD\dddot{x}-(1-A)\,D\ddot{x}. \tag{6}$$

Szándékosan nem használjuk sem a mozgásegyenlet, sem a szabályozási egyenlet kifejezést, mert a (6) egyenlet – Leontief eredeti modelljéhez hasonlóan – nem a rendszer valódi mozgását mutatja, hanem csak a rendszer bizonyos lehetséges pályáinak megfogalmazását szolgálja.

A (6) egyenlet a $\mathfrak{D}$ differenciáloperátor bevezetésével formálisan a

$$(1-A-B\mathfrak{D})\,(1+D\,\mathfrak{D}^2)\,x=0 \tag{7}$$

alakban írható. Világos, hogy ennek két fontos pozitív megoldása van. Az első a már ismert egyensúlyi megoldás, illetve ennek tárgyalt csekély módosítása. Ha ugyanis van olyan $x$, amelyre

$$x=(A+\lambda B)\,x, \tag{8}$$

akkor az $\bar{x}=(1+\lambda^2 D)^{-1}x$ vektor nyilván kielégíti a (7) egyenletet, s a kapott „egyensúlyi" egyenletesen gyorsuló megoldás a

$$x_t=e^{\lambda t}\,\bar{x}_0 \tag{9}$$

alakban írható fel.

Ez a megoldás már a sokkalta egyszerűbb (2) egyenletből is megközelíthető. Egyensúlyi megoldás lévén a $D$ mátrix nem játszik benne fontos szerepet, tehát a termelési folyamatok időtartama az egyensúlyi növekedés körülményei közt épp úgy elhanyagolható, mint ahogy a tőkeigényesség sem játszik szerepet az egyszerű újratermelésben.

## A ciklikus komponens

Van azonban egy fontos második pozitív megoldás is, s ez egy ciklikus komponens, $\tilde{x}$, amelyet a következőképpen számíthatunk ki: Legyen

$$\tilde{x}=\omega^2\,D\tilde{x}, \tag{10}$$

akkor

$$x_t=e^{\pm i\omega t}\,\tilde{x}_0 \tag{11}$$

nyilván szintén kielégíti a (7) egyenletet.

E megoldás a pozitív és irreducibilis $D$ mátrix egyértelműen számítható pozitív sajátvektora; a hozzá tartozó legnagyobb pozitív sajátérték négyzetgyökének reciproka adja meg a ciklikus komponens $\omega$ frekvenciáját.

Ha e megoldást behelyettesítjük a (6) egyenletbe, akkor az $e^{i\omega t}$ tényezővel való egyszerűsítés után és (10) figyelembevételével

$$(1-A)\,\tilde{x}-i\omega\,B\tilde{x}=-\,i\omega\,B\tilde{x}+(1-A)\,\tilde{x}. \tag{11}$$

A két oldal így azonosan egyenlővé válik.

E két fő (pozitív) megoldást elfogadva a gazdasági rendszer egy lehetséges pályáját a

$$x_t = e^{\lambda t} \cdot \bar{x}_0 + \cos \omega t \cdot \tilde{x}_0 \tag{12}$$

formába írhatjuk. Ez tehát egy az egyensúlyi $\bar{x}$ arányok mentén történő $\lambda$ ütemű növekedésből és egy erre rárakodó $\tilde{x}_0$ komponensű és $\omega$ frekvenciájú lengésből áll. A gazdasági ciklus hossza (feltéve, hogy mátrixainkat a szokásos módon az évre, mint egységre vonatkoztatva mértük): $T = 2\pi/\omega$ lesz.

Ismét hangsúlyozni kell, hogy a (12) egyenletben megadott megoldás csak egyszektoros gazdaságban szabatos és teljes. Többszektoros gazdaságban e megoldás közelítő lesz csak — mivel az (5) egyenlet nem szabatos. Ezenkívül nem is teljes a megoldás, hiszen a (7) egyenlet többi, egyenlőre még nem elemzett sajátértékei további megoldásokat is lehetővé tesznek. Ezekről egyenlőre még semmi más bizonyosat nem lehet állítani, mint hogy általában nagyobb abszolút értékűek, mint a fenti $\lambda$ és $\omega$, és hogy nem tartozhatnak hozzájuk pozitív sajátvektorok.

## Egy összevont becslés

Mivel egyelőre nincsenek megbízható és részletes adataink a termelési idők hosszáról, itt egy összevont számítással kell beérnünk. Az összevont (egytermékes) gazdaság esetében a $D$ mátrix egyetlen $d = bg$ skalárrá egyszerűsödik, amely tehát a tőkeigényesség és az átlagos termelési idő szorzata. A ciklus hossza $T = 2\pi/\omega = 2\pi(bg)^{1/2}$. Mivel az összevont tőkeigényesség $b = 3$ év nagyságrendű; s mivel $g$ értéke körülbelül 2 hónap körül lehet, ha számba vesszük a befejezetlen beruházások és befejezetlen termelés értékét a nemzeti vagyon kimutatásában: $d = 0{,}5$ év$^2$ adódik, amiből $\omega \sim 1{,}4$ és a ciklus hossza $T \sim 4{,}5$ év. Ez közel áll a valóságban tapasztalt átlagos ciklushosszhoz.

Ha elméletünk helyes, akkor, mint ez a $T = 2\pi(bg)^{1/2}$ képletből látható, a ciklus hosszát a mindenkori tőkeigényesség és a termelési idő geometriai átlaga határozza meg. Másképpen kifejezve a ciklus hossza a termékek élettartamának (vagy a tőke-termelés hányadosának), valamint a gesztációs periódusoknak négyzetgyökével arányosan növekszik.

A ciklikus komponens, $\tilde{x}$, számításának menetéből az is levezethető, hogy minél nagyobb egy termék viszonylagos súlya a társadalmi össztőkén belül, annál nagyobb a viszonylagos kilengése (amplitúdója) a ciklus folyamán. A rövid élettartamú és gyorsan előállított termékek termelése viszonylag egyenletes lesz, míg a hosszú élettartamú és lassan készülő termékek kilendülése a legnagyobb, ezek a különösen ,,válságérzékeny'' termékek.

*(Beérkezett: 1977. január 31.)*

## IRODALOMJEGYZÉK

1. LEONTIEF, W.: *The dynamic inverse.* (CARTER, A.—BRÓDY, A. ed.): Contributions to input-output analysis. Amsterdam, 1970. North Hollan Publishing Co.
2. PETRI, P.: *Convergence and temporal structure in the Leontief dynamic model.* (BRÓDY A.—CARTER, P. ed.): Input-output techniques. Amsterdam, 1972. North Holland Publishing Co. 563—73. l.
3. GEORGESCU-ROEGEN, N.: *Dynamic equilibrium and economic growth.* Paper prepared for the Colloquim of IAS. Vienna, July 3—5. 1974.

## A LINEARIZED MODEL OF THE CYCLE

Starting from Leontief's closed dynamic model and after the introduction of production times $g_k > 0$, a $D = \{d_{ik}\} = \{b_{ik}\, g_k\}$ matrix can be defined, which is obtained in such a way that the elements of the capital matrix, $B = \{b_{ik}\}$ are multiplied by the production times columnwise.

Then the equation of motion of the economic system can be given in the form $(1 - A)x - B\dot{x} = BD\dddot{x} - (1 - A)\, D\ddot{x}$. This has two important positive solutions, namely, the wellknown equilibrium solution ensuring growth at rate $\lambda$ and the cyclic component $\tilde{x} = \omega^2 D\tilde{x}$ that brings about fluctuation according to $\cos \omega\, t$. The length of the cycle, $T = 2\pi/\omega$, increases in proportion to the square root of the lifetime of rodpucts and of their production time.

## ЛИНЕАРИЗИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ЦИКЛА

Если исходить из замкнутой динамичной модели Леонтьева, то после введения времени производства $g_k > 0$ можно сформулировать матрицу $D = \{d_{ik}\} = \{b_{ik}\, g_k\}$, которая получается так, что элементы матрицы капиталоемкости $B = \{b_{ik}\}$ умножаются на время производства по каждому столбцу.

В этом случае уровнение экономической системы можно записать в виде $(1 - A)x - B\dot{x} = BD\dddot{x} - (1 - A)D\ddot{x}$. Это уравнение имеет два важных положительных решения, т. е. известное сбалансированное решение, обеспечивающее темпы роста, равные $\lambda$ и компонент цикла $\tilde{x} = \omega^2 D\tilde{x}$, который приводит к колебаниям по $\cos wt$. Продолжительность цикла $T = 2\pi/\omega$ увеличивается пропорционально квадрату срока службы изделий и времени производства.