W. Grundmann—H. Krause

Szociális létesítmények együttes telepítése

1. A feladat megfogalmazása

Az ismertetendő matematikai modell célja GE_j-vel jelölt ($j = 1, \dots, n$) szociális létesítmények telepítési helyének és kapacitásának meghatározása. Emellett a szociális létesítmények több R_k, $k = 1, \dots, p$, csoportját (fajtáját) vesszük egyidejűleg figyelembe (pl. óvodákat, bölcsődéket, iskolákat). A különböző típusú szociális létesítményekre lehetséges $b_{l_k}^{(j)}$, $l_k = 1, \dots, r_k^{(j)}$ kapacitásszintek előre adottak. A kapacitásszintek előre megadott $\delta_{l_k}^{(j)}$ toleranciaszinteken belül megváltoztathatók. Egy telepítési helyen több fajta létesítmény is elhelyezhető, mint pl. egy óvoda és bölcsőde kombinálása. Így egy $(b_{l_1}^{(j)}, \dots, b_{l_p}^{(j)})$ vektor a szóbajövő létesítményfajták GE_j telephelyre vonatkozó egy lehetséges kapacitáskombinációját adja. A szociális létesítmények kapacitásait és telephelyeit ezután úgy kell meghatározni, hogy a fellépő összes költség minimális legyen. Ugyanakkor az S_i, $i = 1, \dots, m$ települések (melyek lakossága a_i) és a j-edik szociális létesítmény közötti fajlagos ingázási költség: $c_{ij}^{(k)}$ a létesítményfajtától, a $d_{l_k}^{(j)}$ beruházási költség pedig a $b_{l_k}^{(j)}$ kapacitásszinttől függőnek tekintendő.

A beruházási költségek kedvezőbbek, ha egy telephelyen többfajta létesítményt kombinálnak, mintha egy telephelyen kizárólag egy létesítmény típust használnak. Meghatározandók az x_{ij}^{k} változó-értékek, amelyek az i-edik településből a j-edik szociális létesítménybe ingázó személyek számát, ill. a szállítandó tárgyak mennyiségét megadják. Továbbá kiszámítandók az $y_{l_1, \dots, l_p}^{(j)}$ változók, amelyek kizárólag 1 és 0 értéket vehetnek fel, aszerint, hogy a $(b_{l_1}^{(j)}, \dots, b_{l_p}^{(j)})$ vektor által megadott kapacitáskombináció megvalósul-e, vagy nem.

2. Matematikai modell

2.1 *Matematikai modell több létesítménytípus esetére*

A cél megfogalmazása, az ingázási- és a beruházási költségekből adódó összköltség minimalizálása a következőt adja:

$$\operatorname{Min} G = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{ij}^{(k)} x_{ij}^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l_k=1}^{r_k^{(j)}} d_{l_1 \dots l_k \dots l_p}^{(j)} y_{l_1 \dots l_k \dots l_p}^{(j)}. \tag{1}$$

[1] Ez a dolgozat az NDK Építészeti Akadémiája Városépítési és Építészeti Intézete Településszerkezeti Osztályának megbízásából végzett kutatás eddigi eredményein alapul. Fordította *Kádas Sándor*.

Itt az első tag az ingázási költségeket, a második pedig a beruházási költségeket tartalmazza.

A mellékfeltételek, melyek mellett G minimalizálandó, a következők:

a) Minden GE_j telephelyre pontosan egy kapacitáskombináció választandó:

$$\sum_{l_1=1}^{r_1^{(j)}} \sum_{p} y_{l_1}^{(j)}, \ldots ,_{l_p} = 1, \quad j = 1, \ldots , n. \tag{2}$$

b) Minden S_i település igényét a k-adik szociális létesítményből ki kell elégíteni:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{k} = a_i^k \quad i = 1, \ldots , m; \; k = 1, \ldots , p. \tag{3}$$

c) Az előre megadott toleranciahatárok figyelembe vétele a következő mellékfeltétel-csoporttal oldható meg:

$$\sum_{l_v^{(j)}}^{r_v^{(j)}} (b_{l_v}^{(j)} - \delta_{l_v}^{(j)})\, y_{l_1}^{(j)}, \ldots ,_{l_v} \ldots _{l_p} \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{(v)} \leq \sum_{l_v}^{r_v^{(j)}} (b_{l_v}^{(j)} + \delta_{l_v}^{(j)})\, y_{l_1}^{j}, \ldots _{l_v} \ldots _{l_p} \tag{4}$$

$$j = 1, \ldots , n; \; v = 1, \ldots , p.$$

d) Feltételek a változókra:

$$\begin{gathered} x_{ij}^{(k)} \geq 0, \; i = 1, \ldots , m; \; j = 1, \ldots , n; \; k = 1, \ldots , p \\ y_{l_1}^{(j)} \ldots _{l_p} = 0 \text{ vagy } 1, \; j = 1, \ldots , n; \; l_k^{(j)} = 1, \ldots , r_k^{(j)}, \; k = 1, \ldots , \end{gathered} \tag{5}$$

2.2 *Matematikai modell egy létesítménytípus esetére*

Egy létesítménytípus esetén a következő modell adódik: Célfüggvény:

$$G = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{r^{(j)}} d_l^{(j)} y_l^{(j)} \to \text{Min!} \tag{6}$$

Mellékfeltételek:

a) $\sum_{l=1}^{r^{(j)}} y_l^{(j)} = 1 \qquad j = 1, \ldots , n$ (7)

b) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots , m$ (8)

c) $\sum_{l=1}^{r^{(j)}} (b_l^{(j)} - \delta_l^{(j)})\, y_l^{(j)} \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq \sum_{l=1}^{r^{(j)}} (b_l^{(j)} + \delta_l^{(j)})\, y_l^{(j)}, \qquad j = 1, \ldots , n$ (9)

d) $x_{ij} \geq 0, \; i = 1, \ldots , m; \; j = 1, \ldots , n$

$y_l^{(j)} = 0$ vagy $1, \; j = 1, \ldots , n. \; l = 1, \ldots , r^{(j)}.$ (10)

3. Megoldási eljárások

3.1 *A több létesítménytípust tartalmazó feladat megoldása*

Első lépés:

Az első lépésben először előállítunk az ingázási, ill. szállítási költségre egy T alsó korlátot. Ehhez meg kell oldani p db következő alakú, egyszerű szállítási feladatot:

$$I^{(k)} = \mathrm{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(k)} x_{ij}^{(k)} \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(k)} = a_i^k \quad i = 1, \ldots, m \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{(k)} \leq b_{r_k^{(j)}}^{(j)} + \delta_{r_k^{(j)}}^{(j)}, \; j = 1 \ldots, n \tag{13}$$

$$x_{ij}^{(k)} \geq 0. \tag{14}$$

Itt $b_{r_k^{(j)}}^{(j)}$ a GE_j telephely esetében a k-adik fajta létesítményre megadott legnagyobb kapacitást jelenti.

A meghatározandó I alsó korlátot p db szállítási feladat egymásutáni megoldása révén, az adódó $I^{(k)}$ értékek összegzésével kaphatjuk meg:

$$I = \sum_{k=1}^{p} I^{(k)} \tag{15}$$

Második lépés:

A második lépésben előállítjuk a növekvő I^{ϱ}, $\varrho = 1, \ldots, \alpha$ beruházási költségeknek megfelelő K^{ϱ} kombinációkat. Ezek azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy biztosítják minden létesítményfajtára az igény kielégítését. Hogy a K^{ϱ} kombinációkat megkapjuk, induljunk ki a következő szállítási feladat optimális megoldásából:

$$I = \sum_{j=1}^{n} \sum_{u=1}^{r} t_j^{(u)} z_j^{(u)} \to \mathrm{Min!} \tag{16}$$

$$\sum_{u=1}^{r} z_j^{(u)} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j^{(u)} \leq b_u \qquad u = 1, \ldots, r \tag{18}$$

$$z_j^{(u)} = 0 \text{ vagy } 1, \; j = 1, \ldots, n; \; u = 1, \ldots, r. \tag{19}$$

Itt legyen r az egymástól különböző összes lehetséges kapacitáskombinációk száma, melyeket a p dimenziós $(b_{l_1}^{(j)} \ldots b_{l_p}^{(j)})$ vektorok adnak meg; $t_j^{(u)}$ pedig jelölje a kapacitáskombinációnak megfelelő költséget. A lehetetlen kapacitáskombinációhoz tartozó telepítési költségre egy M érték (a szereplő költségegyütthatókhoz képest igen nagy szám) adandó meg. Végül b_u legyen az M-től különböző $t_j^{(u)}$ elemek száma.

A szállítási feladatnak megfelelő optimális megoldás általában a megfogalmazott feladatunkra nem lesz megengedett, azaz nem fogja kielégíteni a következő feltételeket:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{u=1}^{r} z_j^{(u)} b_{lk,u}^{(j)} \geq \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad k = 1, \ldots, p \tag{20}$$

Itt $b_{lk,u}^{(j)}$ az u-adik kapacitáskombinációt jellemző $(b_{l_1}^{(j)}, \ldots b_{l_p}^{(j)})$ vektor k-adik komponensének felel meg. Minden létesítményfajtára ki lesz így elégítve az összigény. Ha a szállítási feladatnak megfelelő optimális megoldás megengedett, akkor ezzel K^1-et már meghatároztuk. Ha ezzel szemben a fenti szállítási feladatnak megfelelő optimális megoldás nem megengedett, akkor a W. Lyska [3] által megadott eljárás segítségével, az optimális megoldás minimális „elrontásával" elő lehet állítani a második, harmadik legjobb megoldást. Ezután a kapott megoldásokra megvizsgálandó, hogy megfogalmazott feladatunkra vonatkozóan megengedettek-e. Így lépésenként, sorban adódnak a $K^1, K^2, \ldots, K^\alpha$ kombinációk, amelyek a növekvő $I^1, I^2, \ldots, I^\alpha$ beruházási költségeknek felelnek meg. Általában nem szükséges minden K^ϱ kombinációt meghatározni. Igen gyakran elég néhány K^ϱ, $\varrho = 1, 2, \ldots$ kombinációt meghatározni (l. ehhez a 3. lépést).

Harmadik lépés:

Az első lépésben meghatározott I alsó korlátból kiindulva, a második lépésben előállított K^ϱ, $\varrho = 1, \ldots, \alpha$ kombinációk felhasználásával kerül sor az optimális megoldás meghatározására. Ehhez vegyük először a K^1 kombinációt. Ehhez kiszámítjuk a hozzátartozó ingázási, ill. szállítási költséget, T^1-t. Ez p db egyszerű szállítási feladat megoldása révén kapható meg:

$$T^{(k)} = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(k)} x_{ij}^{(k)} \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{(k)} = a_i \quad i = 1, \ldots, m \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{(k)} \leq b_{lk,1}^{j} \quad j = 1, \ldots, n \tag{23}$$

$$x_{ij}^{(k)} \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n. \tag{24}$$

Itt $b_{lk,1}^{(j)}$ legyen a K^1 kombinációnak megfelelő, a k-adik létesítménytípusra vonatkozó kapacitás a GE_j telephelynél. T^1 a $T^{(k)}$ értékek k szerinti összegezéséből adódik:

$$T^1 = \sum_{k=1}^{p} T^{(k)}. \tag{25}$$

T^1 segítségével megkapható a K^1 kombinációnak megfelelő összköltség

$$G^1 = I^1 + T^1. \tag{26}$$

A G^1-ből kiindulva minden olyan K^ϱ kombináció kizárható a megoldáshalmazból, melyre fennáll:

$$T + I^\varrho > G^1. \tag{27}$$

Itt $\underline{T}$ az első lépésben az ingázási-, ill. szállítási költségre számított alsó korlát. Ha ez a feltétel már a T^2 beruházási költségű K^2 kombinációra teljesül, akkor $I^1 \leq I^2 \leq \ldots \leq I^\alpha$ és $\underline{T} \leq T^\varrho$, $\varrho = 1, \ldots, \alpha$ miatt minden K^ϱ, $\varrho \neq 1$ által megadott kombinációra fennáll:

$$G^1 < \underline{T} + I^\varrho \leq G^\varrho, \varrho \neq 1. \tag{28}$$

Ha ezzel szemben $\underline{T} + I^2 \leq G^1$ áll fenn, akkor a K^2 kombinációra p szállítási feladat megoldása által ismét a T^2 ingázási, ill. szállítási költséget kell meghatározni. Ha az I^2 és T^2-ből adódó G^2 összköltség kisebb G^1-nél, akkor ismét kizárható egy sor kombináció a vizsgálatból, nevezetesen azok, melyekre fennáll:

$$\underline{T} + I^\varrho > G^2. \tag{29}$$

Ha viszont G^2 nagyobb vagy egyenlő G^1-gyel, akkor K^3-at be kell vonni a vizsgálatba, feltéve, hogy az eddigi becslések alapján még nem lett kizárva, tehát meg kell határozni T^3-at, majd G^3-at, majd megvizsgálni, hogy G^3 kisebb-e G^1-nél. A leírt módon addig kell folytatni az eljárást, míg minden kombináció vagy kiesett, vagy meghatároztuk számára a G^ϱ értéket, s a megadott becslést végrehajtottuk. Eredményül a legalacsonyabb összköltségű, optimális megoldást kapjuk.

A 2. és 3. lépés összekapcsolása esetén általában nem szükséges az összes K kombinációt meghatározni.

3.2 *Az egy létesítménytípust tartalmazó feladat megoldása*

Az egy létesítménytípust tartalmazó feladat értelmezésének megfelelően röviden összeállítjuk a megoldó algoritmus 3 lépését.

Első lépés:

Egy $\underline{T}$ alsó korlát meghatározása (l. a 2.2 részt is), a következő szállítási feladat megoldásával:

$$\underline{T} = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{30}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_{rj}^{(j)} \qquad j = 1, \ldots, n \tag{32}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n, \tag{33}$$

ahol $b_{rj}^{(j)}$ a GE_j számára lehetséges maximális kapacitásszintet jelöli.

Második lépés:

A növekvő I^ϱ beruházási költségeknek megfelelő K^ϱ, $\varrho = 1, \ldots, \alpha$ kombinációk meghatározása Lyska eljárásának alkalmazásával a következő szállítási feladatra vezet:

$$I = \sum_{j=1}^{n} \sum_{u=1} t_j^{(u)} z_j^{(u)} \rightarrow \text{Min!} \tag{34}$$

$$\sum_{u=1}^{r} z_j^{(u)} = 1 \quad j = 1, \ldots, n \tag{35}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j^{(u)} \leq b \quad u = 1, \ldots, r \tag{36}$$

$$z_j = 0 \text{ vagy } 1, j = 1, \ldots, n; \; u = 1, \ldots, r. \tag{37}$$

Itt r az egymástól különböző lehetséges kapacitásszintek száma, $t_j^{(u)}$ pedig a kapacitásszintnek megfelelő költség. A lehetetlen kapacitásszinteknek megfelelő költségekre, mint szokásos, egy elég nagy M számot kell megadni. Lyska eljárásának alkalmazásakor a megadott szállítási feladat optimális megoldásának előállítására minden lépésben a (20) feltételt kell megvizsgálni. Csak ha ez a feltétel ki van elégítve, akkor kapjuk meg a meghatározandó K^ϱ kombinációk egyikét.

Harmadik lépés:

Az első lépésben meghatározott $\underline{T}$ alsó korlátból és a második lépésnél kapott K^ϱ, $\varrho = 1, \ldots,$ kombinációkból kiindulva most az optimális megoldás meghatározása következik. E célból először a K^1 kombinációhoz tartozó T^1 ingázási, ill. szállítási költség kerül kiszámításra. Ez a következő szállítási feladat megoldása révén adódik:

$$T^1 = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{38}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \ldots, m \tag{39}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_{lj}^{(j)} \quad j = 1, \ldots, n \tag{40}$$

$$x_{ij} \geq 0 \; i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n. \tag{41}$$

I^1 és T^1 segítségével kapjuk meg a K^1-nek megfelelő G^1 összköltséget. G^1-ből kiindulva most minden olyan K^ϱ kombináció kizárható a megoldások közül, melyre fennáll:

$$I + I^\varrho > G^1 \tag{42}$$

Ezután sorra vesszük a K^2, K^3 stb. kombinációkat és kiszámítjuk hozzájuk a T^2, T^3 stb. értékeket, majd, ha lehetséges, megfelelő becslések segítségével bizonyos K^ϱ kombinációkat törlünk. Az eljárást a leírt módon addig folytatjuk, amíg minden kombináció vagy kiesett, vagy meghatároztuk számára a G^ϱ értéket, s végrehajtottuk a megadott becslést. Eredményül a legkisebb költséget jelentő optimális megoldás adódik.

(Beérkezett: 1977. május 3.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. GRUNDMANN, W.: *Zur Lösung eines diskreten Standortproblems mittels einer kombinatorischen Methode.* Tanulmány, VII. Nemzetközi Mat. Koll., Weimar, 1975.
2. KRAUSE, H.—WEISE, G.: *Optimale Standortswahl unter Berücksichtigung von Produktions-, Investitions- und Transportkosten durch eine kombinatorische Methode.* A Weimari Főiskola Tudományos Folyóirata, 1967.
3. LYSKA, W.: *Ein Verfahren zum Ordnen der Basislösungen eines Transportproblems nach wachsenden Zielfunktionswerten.* Diplomamunka, Bergakademie Freiberg, 1972.

JOINT LOCATION OF SOCIAL WELFARE INSTITUTIONS

The problem formulated here is the optimization of the location of social welfare institutions (e.g. kindergartens, nurseries, schools) and the proportion of population of neighbouring settlements using these institutions. Optimization means the minimization of costs, while costs are made up of the costs of establishment of these institutions and of the travelling expenses of the inhabitants. It is economical to locate as many institutions at one place as possible what is expressed by the application of investment costs for combinations of institutions. In case of the available locations predetermined capacity levels can only be chosen — with some limit of tolerance — what brings about that the problem has discrete variables, too. The problem to be solved will be a mixed continuous-integer linear program. A "branch and bound" type algorhythm is outlined in the article which exploits the particularities of the mathematical problem and is separately described for models involving either one or more types of institutions, respectively.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТА ОБЩЕГО РАСПОЛОЖЕНИЯ СОЦИАЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

Данная задача формулируется как размещение социальных учреждений (например, детские сады, ясли, школы) и оптимизация соотношения населения прилагающих населенных пунктов, пользующегося этими учреждениями. Оптимизация означает минимализацию затрат, а сами затраты складываются из затрат на размещение учреждений и поездки в оба конца проживающих здесь людей. Экономичным является размещение в одном месте как можно большего числа учреждений и это находит свое выражение в определении ассигнований на капитальные вложения относительно различных комбинаций по их размещению. Что касается капитальных вложений, то в отношении рассматриваемых мест размещения между имеющимися уровнями мощностей мощно выбирать только лишь в пределах определенных допусков и это приводит к тому, что в данной задаче налицо также и дискретные переменные. Данная задача приводит к смешенной задаче линейного программирования и в отношении ее решения в статье излагается также и алгоритм типа «ветвей и границ» (branch and bound), выражающий также и специфику полученной математической задачи, которая отдельно описывается для модели, в которой фигурирует один или несколько типов учреждений.