Dobó Andor

Megjegyzések a szabályozási rendszerek stabilitásának vizsgálatához

Oskar Lange „Bevezetés a közgazdasági kibernetikába” című [1] könyvének a szabályozási rendszerek stabilitási elméletével foglalkozó fejezetében bemutatja, hogy a szabályozáselméletben alkalmazott matematikai módszerekhez hasonló módszerekkel miként oldhatók meg olyan feladatok, amelyek arra vonatkoznak, hogyan reagálnak élő (emberi és állati) szervezetek külső ingerekre. *Lange* hozzáteszi, majd később több példával is illusztrálja, hogy az ilyen kérdéseknek nemcsak a lélektanban van gyakorlati jelentőségük, hanem a gazdasági számításokban is.

A tárgyalás alapjául választott példát *S. Goldberg* [2] könyvéből (103. oldal) meríti. Eszerint, ha p_{n+1} annak a valószínűsége, hogy az állat a kísérletező által kívánt módon reagál $n+1$ ismétlés után az ingerek adott együttesére, akkor — az állatok viselkedésének statisztikai vizsgálata azt mutatja, hogy — p_{n+1} és p_n ún. *reakció valószínűségek* között a kapcsolat jó közelítéssel lineárisnak tekinthető. (Lábjegyzetben hozzáteszi, hogy a bemutatott példa azon a felfogáson alapul, amelyet *R. R. Bush* és *F. Mosteller* képviselnek “A Mathematical Model for Simple Learning” című cikkükben. Psychological Review, 1951.) A közöltek alapján tehát felírható az alábbi állandó együtthatójú differenciaegyenlet:

(1) $$p_{n+1} = a + mp_n,$$

ahol $0 \leq p_n \leq 1$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, valamint $m \geq 0$. Az (1)-et gyakran *tanulási egyenletnek* is nevezik, s a benne szereplő a és m paramétereket kísérletek útján határozzák meg.

Ezt követően *Lange* a további vizsgálatok céljából az (1) alakkal szemben „előnyösebb”

(1′) $$p_{n+1} = a + (1 - a - b)\, p_n = p_n + a\,(1 - p_n) - bp_n,$$

illetve

(1″) $$p_{n+1} - p_n = a(1 - p_n) - bp_n$$

alakokat választja, ahol az $m = 1 - a - b \geq 0$ mellett feltételezi azt is, hogy $a \geq 0, b \geq 0$, amiből $0 \leq a + b \leq 1$ következik. Ennek az „átírásnak” elsősorban az a jelentősége, hogy az a és b paramétereknek, mint súlyoknak könnyebbé válik az értelmezése. Az [1]-ben leírtak szerint: „az a paraméter olyan körülmények együttesétől függ, amelyek a kísérleti eredmények maximális javulása felé hatnak, a b paraméter pedig olyan körülményektől, amelyek a kísérleti eredmények maximális romlása irányába hatnak. Az a paraméter tehát a pozitív ingerek intenzitásának mérőszáma, a b paraméter pedig a negatív ingerek, vagy ún. *elleningerek* intenzitásának mérőszáma. Pozitív ingerek lehetnek például a jutalmak, negatív ingerek pedig a büntetések, vagy az állat reakciójával összekötött egyéb kellemetlenségek." Miután [1]-ben bizonyítást nyer, hogy ha létezik p_n határértéke, úgy

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{a}{a+b} = \frac{r}{1+r} = z \qquad (b > 0), \tag{2}$$

ahol $r = \frac{a}{b}$ az alkalmazott *oktatási módszer mérőszámának*, így a motiváció struktúrájának is felfogható. A szerző rámutat, hogy a kapott eredmény hogyan használható fel bizonyos gazdasági kérdések megoldására. Példaként vizsgálja a prémiumrendszert, pontosabban azt, hogy kifizetődik-e az ellenösztönzők ellen folytatott harc, ha azok hatása az ösztönzők megfelelő növelésével gyöngíthető?

Gazdasági szempontból levonja azt a következtetést, hogy a magas prémiumok alkalmazása helyett „olcsóbban" érhetjük el a kedvező eredményt az ellenösztönzők (veszteségek) csökkentésével, vagy teljes felszámolásával. Ha azt akarjuk, hogy $z \approx 1$ legyen, akkor azt általában könnyebben érhetjük el b értékének csökkentésével, mint a értékének növelésével, ami végsőfokon mindkét esetben r növelését célozza. Még másképpen: Ha $b \leq a$ és a értékét $\Delta > 0$ értékkel növeljük, akkor az így kapott $\frac{a+\Delta}{a+\Delta+b} = z_0$ érték mindig kisebb lesz a $z_1 = \frac{a}{a+b-\Delta}$ értékénél, ami tehát a növelése helyett b értékének ugyanazon $\Delta > 0$ értékkel való csökkentése mellett áll elő.

Különösen érdekes az a példa, amelyet Lengyelországban a parasztok ösztönzésére alkalmaztak azért, hogy olyan ipari növények termesztését fokozzák, amelyeknél számottevően gyakoriak a természeti csapások (fagyás, szárazság, jégverés stb.). *Lange* közli, hogy bizonyos növények felvásárlási árának jelentős felemelésével (tehát az ösztönzők növelésével) sem tudták elérni a vetésterületek lényeges növelését. Elérték viszont azt az ellenösztönzők megszüntetésével oly módon, hogy bevezették az ún. „szerződéses" növénytermesztés általános elemi kárbiztosítását, amely nem járt jelentős költséggel.

* * *

A jelen sorok írója nem tud arról, hogy hazánkban a gazdasági tevékenység bármely területén az itt közölt megfontolásokat konkrétabb formában alkalmazták volna.

Hogy az alkalmazás nemcsak lehetséges, hanem esetenként indokolt is, azt némileg érzékelteti pl. az üvegvisszaváltással foglalkozó 2/1978. (III. 31.) ÁH sz. rendelet, melynek lényege, az ún. *lépcsőzetes betétdíj bevezetés*.

Amennyiben az az optimális stratégia, hogy a forgalmazó az üvegszükségletét az összes meglevő üveg felhasználásával is próbálja kielégíteni, akkor az itt közöltek szerint az úgy érhető el könnyebben, ha az ellenösztönzőket csökkentjük. Ez azt jelenti, hogy igyekszünk csökkenteni azoknak a tényezőknek a hatását, amelyek az üvegvisszaváltás ellen hatnak.

Nyilván a visszaváltás ellen hat az alacsony betédíj és a kereskedelem érdektelensége. Ezek a hatások lényegesen befolyásolhatók a visszaváltási ár megválasztásával.

Úgy tűnik, hogy a rendelet a vásárlók magatartásával — ami függ a betétdíj alakulásától — kevésbé számol, hiszen egyes üvegeknél a betétdíj csökken. Feltehető viszont, hogy a betétdíj csökkenésével csökken a visszavitt üvegek száma is. E helyen nem bocsátkozunk a probléma részletesebb elemzésébe, csupán megjegyezzük, hogy bizonyos egyszerű feltételek mellett kimutatható, hogy a forgalmazó, a vásárló és áttételesen a kereskedelem is akkor jár jól, ha a betétdíjakat nem csökkentik, hanem emelik.

E példa kapcsán talán nem lenne érdektelen elgondolkodni azon, hogy esetenként mennyivel sikeresebbek, hatékonyabbak lehetnének a rendeletek, ha ahol csak lehet, jobban támaszkodnának a matematikai, gazdaságkibernetikai megfontolások, eredmények felhasználására, alkalmazására.

Miután napjainkban olyan fontossá és szükségessé vált az ipar termékszerkezetének az átalakítása, korszerűsítése, a vállalatok termékeinek tőkés piaci értékesítés irányába való elmozdítása, a kiemelt beruházások ösztönzése, ezért e területen is feltehetően hatékonyabbnak és gazdaságossabbnak bizonyulna olyan megoldások keresése, amelyek az ösztönzők felemelése helyett az ellenösztönzők megszüntetését céloznák.

Az ilyen irányú vizsgálatokhoz ezúttal a szerző úgy kíván hozzájárulni, hogy egyrészt felhívja a figyelmet a *Lange* által választott „tanulási egyenlet" a és b paraméterének egy újabb lehetséges értelmezésére, másrészt, hogy tisztáz bizonyos módszerbeli félreértéseket, s egyben a stabilitás „kihasználásának" mellőzésével adja meg az (1) egyenlet általános diszkrét megoldását,[1] amiből már (2) egyszerűen adódik. (Tehát nem tételezi fel előre az egyensúlyi állapot létezését, az bizonyos feltételek mellett adódik magától!)

Evégből jelölje A_n azt az eseményt, hogy a vizsgált állat a kísérletező által kívánt módon reagál n ismétlés után az ingerek adott együttesére. Az A_n esemény bekövetkezésének valószínűségét jelölje p_n; vagyis legyen $P(A_n) = p_n$. Azt az eseményt, amely abban áll, hogy az A_n esemény nem következik be, az A_n esemény ellentétének nevezzük és $\bar{A}_n$-sal jelöljük. Az A_{n+1} eseménynek az A_n eseményre mint feltételre vonatkozó feltételes valószínűséget jelölje a; vagyis legyen:

$$P(A_{n+1} | \bar{A}_n) = a, \tag{3}$$

$$P(\bar{A}_{n+1} | A_n) = b. \tag{4}$$

Mint ismeretes a teljes valószínűség tétele értelmében

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} | A_n)\, P(A_n) + P(A_{n+1} | \bar{A}_n)\, P(\bar{A}_n). \tag{5}$$

Mivel $P(\bar{A}_n) = 1 - p_n$ és $P(A_{n+1} | A_n) = 1 - b$, ezért (5) az alábbi alakban írható:

$$p_{n+1} = (1-b)\,p_n + a(1-p_n) = a + (1-a-b)\,p_n,$$

[1] Ez azért lényeges, mert elvileg létezhet a „stabilitás kihasználásától" független más, esetleg nem stabil megoldás is. Vagyis megoldások esetenként tágabb körben is lehetnek. Ilyen esetben viszont a formálisan alkalmazott technika, még ha megoldáshoz is vezet, olyan problémákat vet fel, amelyek mindenképpen magyarázatra szorulnak. A későbbiek során ezekről még részletesebben esik szó.

ami az $m = 1 - a - b$ jelölés mellett megfelel (1)-nek. Eszerint tehát *az a és b „paraméterek" mint súlyok feltételes valószínűséget jelentenek.* Az (1) megoldását az

$$f(x+1) - mf(x) = a \tag{6}$$

lineáris állandó együtthatójú differenciaegyenletnek az $f(0) = p_0$ kezdeti feltétel melletti megoldásaként kapjuk. Ha $m \neq 1$, akkor mint ismeretes (lásd [3] 554. o.) (6) általános diszkrét megoldása

$$f(x) = \frac{a}{1-m} + cm^x, \tag{7}$$

ahol most $c = p_0 - \dfrac{a}{1-m}$. Ebből kifolyólag

$$p_n = \frac{a}{a+b} + \left(p_0 - \frac{a}{a+b}\right)(1-a-b)^n. \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

Innen pedig, ha $|1 - a - b| < 1$ kapjuk, hogy

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \frac{a}{a+b}.$$

A lektorok hívták fel a figyelmem arra — s ezért ezúton is köszönetet mondok nekik — hogy az általam átfogalmazott modell a Markov-láncok egy speciális esetének is tekinthető, s mint ilyent viszont *Rényi Alfréd* az idézett irodalomnál jóval korábban kimerítően tárgyalt, illetve alkalmazott. (Vö.: [4] XIV. fejezet.)

Rényi tárgyalásában — az itteni jelöléseket megtartva — az interpretáció a következő:

Vizsgáljunk egy üzemben egy gépet, amelyet időnként bekapcsolnak, egy ideig használják, ezután kikapcsolják, egy idő múlva ismét bekapcsolják s.i.t. Bármely időpontban vizsgáljuk is a gépet, csak két lehetőség áll fenn; a gép működik (A_1 esemény), vagy nem működik (A_0 esemény).

Legyen P_{jk} annak a valószínűsége, hogy a gép $t + 1$ időpontban az A_k állapotban legyen, feltéve, hogy a t időpontban ($t \geq 0$ egész) az A_j állapotban volt ($j, k = 0, 1$). (Itt feltételezzük, hogy az átmenet-valószínűségek függetlenek attól, hogy a gép a t időpontot megelőző időpontokban mikor állt és mikor működött!). Ha $P_{01} = a, P_{10} = b$, akkor az átmenet-valószínűségek mátrixa:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

s annak valószínűségét, hogy a gép a $t = n$ időpontban működik a (8) alatti kifejezés adja, melyben p_0 annak a valószínűsége, hogy a $t = 0$ időpontban a gép működik. Ez esetben a $\lim\limits_{n \to \infty} p_n$ azt jelenti, hogy a Markov-lánc ergodikus; $\dfrac{1}{b}$, illetve $\dfrac{1}{a}$ pedig annak az időtartamnak az átlagos hossza, amely időn keresztül a gép egyfolytában működik, illetve nem működik. Az a és b-re nézve ez az értelmezés megkönnyíti a statisztikai adatok alapján való becslések elvégzését. Ekkor

(2′) $$\lim_{n\to\infty} p_n = z = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}},$$

s míg (2) szerint az átmenet-valószínűséget — vagyis b értékét —, addig (2′) szerint a várható értéket — vagyis $1/a$ értékét — kell csökkenteni.

* * *

Nyilvánvaló, hogy a probléma általánosabb megközelítéséhez jutunk, ha a (3) és (4) alatti feltételes valószínűségek az n értékétől függően alakulnak, illetve ha azok csak határesetben függetlenek n-től. A közölteknek egyik jelentősége éppen abban van, hogy segítségünkre lehet a feladat pontosabb modelljének a megkonstruálásánál, a paraméterek értelmezésénél és kísérleti meghatározásánál. Anélkül, hogy további részletekbe bocsátkoznánk, idetartozóan megemlítjük még, hogy *Lange* könyvében a kereslet és a kínálat egyensúlyát kifejező (3.32) alatti $ap_t = bp_{t-1} + \beta - \alpha$ egyenlet (lásd [1] 121.o) általános diszkrét megoldását is (7) szolgáltatja. Ez esetben

(9) $$p_t = \frac{\beta-\alpha}{a-b} + \left(p_0 - \frac{\beta-\alpha}{a-b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^t \qquad (a \neq b;\ t \geq 0),$$

ahol p_t valamely termék árát jelenti a t időszakban. A (9)-ből azonnal látható, hogy a piaci áralakulási folyamat stabilitásának a feltétele, hogy $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ legyen. Ekkor a kereslet és a kínálat az egyensúly felé törekszik. A paraméterek alakulásától függő további diszkutálást mellőzzük, csupán arról teszünk említést, hogy mivel a gyakorlatban $a < 0$, $b > 0$, $0 < \beta < \alpha$, ezért p_t általában nem monoton, hanem ingadozásokat mutató függvény.

Végezetül rá kívánunk mutatni arra, hogy a *Lange* által választott megoldástechnika[2] szerint $|b| > |a|$ esetén is az $a\hat{p} = b\hat{p} + \beta - \alpha$ egyenletnek $\hat{p} = \frac{\beta-\alpha}{a-b}$ a megoldása, jól lehet ez esetben $\lim_{t\to\infty} p_t \neq \hat{p}$. Ebből kifolyólag előfordulhat, hogy a matematikában kevésbé jártas alkalmazó „ha $\lim_{t\to\infty} p_t$ létezik, akkor az $\hat{p}$-vel egyenlő" alapon akkor is számol ily módon, amikor valójában nem lehet, vagyis amikor $|b| > |a|$. Elegendő ehhez bizonyítás nélkül a határérték létezésének a feltételezésével élni, ami alkalmazásoknál gyakran megesik. Matematikai szempontból tehát a megoldással és a megoldás módjával kapcsolatos kérdések tisztázása, a megfontolások „finomításának", az egyes lépések „indoklásának" az igénye nem alaptalan. Induljunk

[2] Ennek lényege, hogy feltételezzük a differenciaegyenlet által jellemzett függvénynek létezik $\hat{p}$-al jelölt határértéke. Ezt az eredeti egyenletbe helyettesítjük, majd az így kapott összefüggésből $\hat{p}$ értékét meghatározzuk. Ezt követően az eredeti egyenletbe a $\overline{p}_n = p_n - \hat{p}$ kifejezést helyettesítjük, s ezáltal gyakran $\overline{p}_n$-re már olyan egyenletet kapunk, amelyet könnyebben meg tudunk oldani.

ki először is abból, hogy $m = 1$ esetén (1)-nek a megoldásához a *Lange* által is használt úton nem juthatnánk el, mert akkor $\hat{p} - \hat{p} = a$ lenne, ami, ha $a \neq 0$, lehetetlen. Megoldás viszont ilyen esetben is van. Például $p_0 = b$ esetén $p_n = an + b$. Mint látható, ez esetben $\lim\limits_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n)$ létezik, de véges $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ nem. Ebből azonban még nem következik, hogy az [1]-ben több helyen is alkalmazott megoldás-technika csak $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ létezése esetén vezethet célhoz. Tudniillik, ha határérték egyáltalán nem létezik, a formálisan felírt egyenletnek $\hat{p}$-re nézve még lehet olyan megoldása, hogy a *Lange* által is alkalmazott technikával a vizsgált differenciaegyenlet megoldásához juthatunk. Példa lehet erre az $m = -1$ eset, mikoris $\hat{p} = \frac{a}{2}$ és így $p_n = \frac{a}{2} + \left(p_0 - \frac{a}{2}\right)(-1)^n$; itt tehát, ha $p_0 \neq \frac{a}{2}$, határérték nem létezik. A közölteknek az a magyarázata, hogy igen gyakran, a határérték létezésétől függetlenül, a formális felírás révén $\hat{p}$-ra olyan kifejezést kapunk, amely az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását adja. Ilyen esetben pedig $p_n - \hat{p} = \bar{p}_n$ a homogén egyenlet megoldása. Mint ismeretes (lásd [3] 553. o.), a *homogén egyenlet általános diszkrét megoldásának* (ami a homogén egyenlet összes partikuláris megoldásának lineáris kombinációjaként áll elő) *és az inhomogén egyenlet egy partikuláris diszkrét megoldásának az összege adja az inhomogén egyenlet általános diszkrét megoldását.* (Esetünkben: $p_n = \bar{p}_n + \hat{p}$). Az elmodottakra jó példa a

$$p_{n+1} - mp_n = a^n \qquad (a \neq m \neq 1;\ |a| < 1)$$

egyenlet megoldásának az előállítása. Most, ha $n \to \infty$ $\hat{p} = 0$, s így $\bar{p}_n = p_n$; vagyis ezen az úton nem tudjuk a homogén egyenlet megoldását adni. Ha viszont észre vesszük, hogy $p_n^* = \frac{a^n}{a - m}$ az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása, akkor már $\bar{p}_n = p_n - p_n^*$ a *Lange* által választott úton könnyen előállítható, s végeredményként kapjuk, hogy az általános diszkrét megoldás $p_n = \frac{a^n}{a - m} + cm^n$ alakú. Az itt közöltek ugyan matematikai „finomkodásnak" „precízkedésnek" és így az alkalmazás szempontjából feleslegesnek tűnhet, jelentőségük azonban még sem lebecsülendő. Az elmondottakat főleg azok tudják hasznosítani, akik a közgazdasági problémák megoldására felírt differenciaegyenleteket a *Lange* által is használt technikával „rutinszerűen" akarják megoldani, s ilyenkor az egyik-másik lépésnél ellentmondással, érthetetlenséggel találkoznak, és így az eljárással szemben elbizonytalanodnak. A közöltek feltehetően nagyobb biztonságot adnak a megoldástechnika helyes és célravezető kezeléséhez.

(Beérkezett: 1978. február 28.)

IRODALOM

1. LANGE, O.: Bevezetés a közgazdasági kibernetikába. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. GOLDBERG, S.: Introduction to Difference Equations. New York—London, 1958.
3. SZÉP, J.: Analízis. Budapest, 1972. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
4. RÉNYI, A.: Valószínűségszámítás. Budapest, 1954. Tankönyvkiadó.

NOTES ON THE STABILITY ANALYSIS OF CONTROL SYSTEMS

The author presents another new interpretation of the parameters a and b of the so called "learning equation" of form $p_{n+1} = a + (1 - a - b)p_n$ playing a role in the theory of stability of control systems, pointing out that they can be conceived as conditional probabilities, too. He deals with clarifying and answering mathematical problems of one of the "routine methods" widely spread (especially in economic literature) for the general solution of difference equations.

ОБ ИЗУЧЕНИИ СТАБИЛЬНОСТИ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Автор излагает новое толкование параметров «a» и «b», т. н. «уравнения учебы» $p_{n+1} = a + (1-a-b)p_n$, играющего определенную роль в теории стабильности систем регулирования, указывая на то, что они могут восприниматься и в качестве предполагаемой вероятности. Он занимается также и пояснением математических проблем по одному из принятых и распространенных методов решения общих дифференциальных уравнений (особенно в экономической литературе).