Kornai János—Jörgen W. Weibull

A piac normál állapota hiánygazdaságban: egy sorbanállási modell

1. Bevezetés

Tanulmányunk tárgya egy olyan gazdaság, amelyre krónikus hiány és sorbanállás (az eladók piaca) jellemző. Ez a kelet-európai szocialista országok gazdaságának számos területéről elmondható, de más gazdasági rendszerekben is megjelenhet a hiány, például a lakáspiacokon szabályozott lakbérek esetén, vagy néhány fejlett tőkés ország egészségügyi szolgáltatásainál, vagy a fogyasztói javak piacán a fejlődő országokban.

Növekvő az érdeklődés az olyan gazdaságok elmélete iránt, amelyek nincsenek egyensúlyban a walrasi értelemben, sőt állapotuk messze esik attól. (Lásd például a következő munkákat: *Clower* (1965), *Barro—Grossman* (1971, 1974), *Benassy* (1975), *Malinvaud* (1977). Cikkünkkel ehhez a kutatási irányzathoz szeretnénk hozzájárulni. A téma nagyon tág és sok oldalról közelíthető meg.[1] Munkánk csak néhány kérdést érint, s jórészt mikroökonómiai szempontokat emel ki. Célunk az, hogy leírjuk egy piacot, amely nincs walrasi egyensúlyban, és mégis stacionárius állapotú, alapvető jellemzőit folytonosan helyreállítja. Bár eljutottunk matematikailag igazolható tételekhez, nem is annyira ezeket tekintjük kutatásunk fő eredményének, mint inkább a probléma *elemzési módját*, vagyis azokat a speciális szempontokat, amelyek segítségével a krónikus hiány közepette működő piacot leírjuk és elemezzük.

A cikk egy nagyon egyszerű modellt dolgoz ki, hogy elemzési módjába az olvasót bevezesse. A későbbiekben fogunk olyan cikkeket publikálni, amelyek feloldják a legszorosabb feltevések némelyikét és jobban tükrözik a feladat összetettségét. (Egy készülő második cikkben tárgyalni fogjuk az árut kereső vevő esetét, ún. „keresési modell" segítségével.) Itt csak egy dologról kell említést tennünk, mégpedig a sorbanállási rendszerek determinisztikus, illetve sztochasztikus modellezéséről. Más modellekkel szemben, amelyek sztochasz-

[1] A szerzők egyike, *Kornai* János hosszabb ideje foglalkozik a hiány tanulmányozásával. A jelenlegi munka előzményei a Kornai (1971, 1974, 1977) művek. Kornai János 1977-ben előadássorozatot tartott a stockholmi egyetemen, „A hiány gazdaságtana" címmel. Az előadások anyagának alapján könyv készül, amely a hiány elméletét több különböző oldalról fejti ki majd. A J. *Weibull*al közösen végzett kutatás, amelyet itt és egy következő második cikkben adunk közre, így része a hiánygazdaságtan szélesebb tanulmányozásának.

Kornai János felhasználja az alkalmat, hogy kutatásai támogatásáért háláját fejezze ki a Stockholmi Egyetem Nemzetközi Gazdasági Tanulmányok Intézetének (Institute for International Economic Studies) és a svéd kollégáknak a tőlük kapott ösztönzésért. Jörgen Weibull köszönettel tartozik a Swedish Council for Building Research támogatásáért, és a stockholmi Royal Institute of Technology matematikai osztályán dolgozó kollégáinak az alkotó bírálatokért.

Mindkét szerző hálás Lars-Göran *Mattson*nak, Ingemar *Nåsell*nek, és Johan *Philip*nek értékes javaslataikért és megjegyzéseikért. A cikket magyarra fordította *Szabó Judit*.

tikusak, ez a modell determinisztikus. Ez a megközelítés azt a meggyőződésünket tükrözi, hogy a krónikus hiánnyal jellemezhető helyzetekben a sztochasztikus elem másodlagos a rendszert szabályozó kölcsönös összefüggésekhez és visszacsatolási mechanizmusokhoz képest. Bár egy általános modellnek tartalmaznia kell a sztochasztikus jelleget is, egyes alapvető összefüggések determinisztikus keretben is megmagyarázhatók.[2]

Még egy előzetes megjegyzésünk van. *Leíró* elméletet adunk meg itt, és nem foglalkozunk normatív kérdésekkel. A hiány és a sorbanállás az élet tényei. Nem helyeseljük és nem is rosszalljuk őket – megértésükre törekszünk.

2. A modell: Általános leírás

A modell determinisztikus stock-flow modell, és közönséges differenciálegyenlet-rendszerként írjuk föl, két részletben. A 2. részben a modellt meglehetősen általános módon tárgyaljuk, inkább kvalitatív jellegű és mikroszintű fogalmakkal, a bemutatás és az értelmezés kedvéért. A 3. részben térünk ki a technikai részletekre és megadjuk a teljes leírást.

2.1. *A piac szerkezete*

Egyetlen *G áru* piacát tanulmányozzuk. Ez lehet egy bizonyos áru vagy lehet különböző áruk aggregátuma. Az árut oszthatatlan egységekben viszik piacra, egy vásárló egy vétel alkalmából csak egy egységet vesz. (Például egy autót vagy egy hűtőszekrényt . . .)

Egyetlen *eladó* van. (Egy monopolista, vagy az egyedi eladók aggregátuma.)

A vásárlók száma n. A vásárlók összességét részekre osztjuk, ezeket a vásárlók *csoportjainak* nevezzük. Valamennyi csoportnak megvan a maga jellemző viselkedési módja a piacon. Az i sorszámú csoport reprezentatív tagját *i típusú vásárlónak* mondjuk. A csoportok száma k, az i sorszámú csoportnak n_i tagja van;

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

A résztvevők száma (egy eladó; $n_1, n_2, \ldots, n_k$ vásárló) az időben állandó.

Bár a modell, ahogy azt a 3. részben formális módon definiáljuk, determinisztikus, „hibrid" modellnek is tekinthető, amely sztochasztikus komponensek középértékei között állapít meg determinisztikus összefüggéseket. Figyelni fogjuk például a vevők döntéseinek sorozatát, amikor vásárolnak. Minden ilyen döntési pontban a vásárlók csoportjainak aggregált viselkedését modellezzük *flow* egységekkel: a vásárlók beáramlását a döntési pontba és kiáramlásuk részarányát a döntési pontból, amely a döntési lehetőségeknek felel meg (az egyes döntési pontokban mindig csak két lehetőség van). Ezek a determinisztikus áramlási arányok azonban tekinthetők úgy, mint a sztochasztikus jellegű egyéni döntési viselkedési átlagai, a részarányok döntési valószínűségekként azonosíthatók. A modell más helyein determinisztikus sebességekről fogunk beszélni. Úgy, mint az áramlási részarányok, ezek is értelmezhetők a

[2] Köszönettel tartozunk Lars-Göran *Mattsonnak*, ő javasolta ezt a megközelítést először.

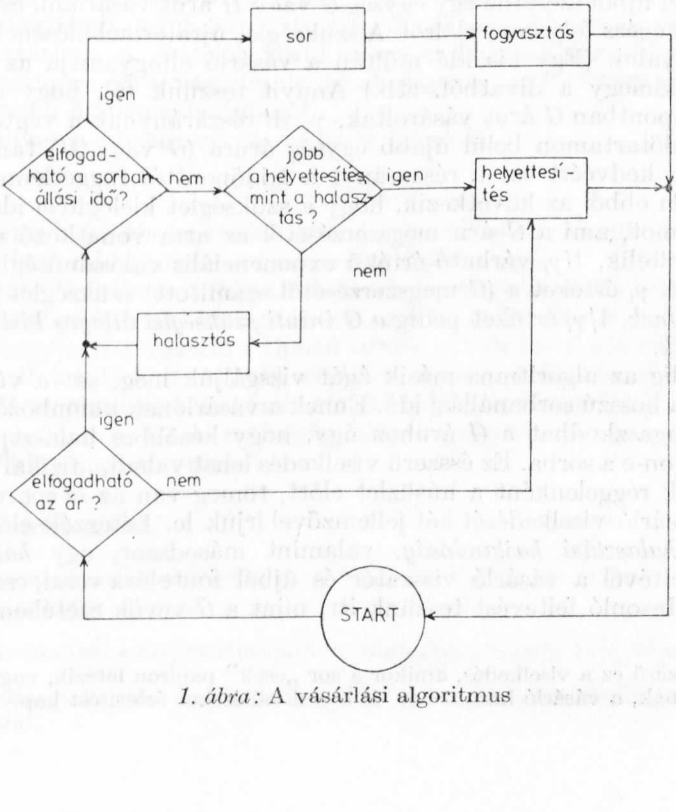
sztochasztikus egyéni viselkedés átlagaiként. A determinisztikus modell feltevéseinek szemléltetésére gyakran fogunk ilyen mikroszintű, sztochasztikus értelmezéseket adni. A sztochasztikus sorbanállási modellek irodalmában erre a megközelítésre időnként „hidrodinamikai megközelítés" elnevezéssel hivatkoznak, lásd pl. *Kleinrock* (1976) könyvét.

2.2. *A vásárlási algoritmus*

A vásárlás dinamikus folyamat, döntések sorozata. Mivel a vásárlás néhány viselkedési szabály szerint alakul, e folyamat egy *algoritmussal* írható le. Az ilyen algoritmus szerkezete természetesen a különböző vásárlási helyzetekben különböző lehet. Az itt következő elemzésben egyetlen speciális algoritmussal dolgozunk, amely szerintünk tükrözi a valóságos helyzetek néhány elemét és analitikusan is követhető. Az 1. ábrán blokkdiagrammal szemléltetjük a vásárlási folyamatot.

Csatlakozunk az i típusú egyéni fogyasztóhoz vásárlási körútján. A fogyasztó a starthelyről indul.

Az első eldöntendő kérdés a következő lesz. Megvegye-e a G árut, amelyet modellünk piacán kínálnak, vagy inkább az azt helyettestő H jószágot vegye meg egy másik piacon (amely már kívül esik modellünkön)? A H jószág lehet egy bizonyos közeli helyettesítő, de lehet a G áru közeli és nem-közeli helyettesítőinek aggregátuma is. Föltesszük, hogy a jövedelem és a vásárlást befolyásoló egyéb tényezők adottak és az időben nem változnak. Ezen a döntési helyen az ár az egyetlen jelzés, pontosabban a $\pi = p_G/p_H$ *árarány*.



1. ábra: A vásárlási algoritmus

A vásárló kiinduló *vásárlási hajlandóságát* $a_i(\pi)$-vel jelöljük. Ez a π-nek nem-növekvő (rendszerint csökkenő) függvénye. Adott π árarány mellett $a_i(\pi)$ lesz az i típusú vásárlók azon része, amely a G áru irányába indul el és nem keresi H-t. Mikroszintű fogalmakkal $a_i(\pi)$ annak valószínűségeként értelmezhető, hogy a vásárló kiinduláskor a G árut preferálja a H áruval szemben. Egy hagyományos választási pontot körvonalaztunk itt. Az $a_i(\pi)$ függvény egy szokásos, a viszonylagos áraktól függő keresleti függvény, csak alakja különbözik a megszokottól, mivel a további elemzéshez erre a speciális formára van szükségünk.

Felhívjuk a figyelmet a „kiinduló" jelzőre. Ez arra a tényre utal, hogy $a_i(\pi)$, amely az eredeti vásárlási szándékokat tükrözi, tehát a vásárlási körút kezdetére jellemző, később, a hiány láttán, felülvizsgálásra kerülhet. Vagyis egy *hipotetikus*, a hiánnyal nem számoló keresletet fejez ki. Az i csoport vásárló tagjainak $a_i(\pi)$ hányada kívánja pénzét G-re költeni, *feltéve, hogy* az áru a kínálati oldalon késedelem nélkül rendelkezésre áll.

Vásárlónk eljut az eladás helyére, ahol sorbanállás van. Habozni fog, beálljon-e a sorba? Föltesszük, hogy döntését egyetlen tényező befolyásolja, mégpedig a várható *sorbanállási idő*, w. Minél nagyobb w, annál jobban vonakodik a vásárló beállni a sorba. Az $f_i(w)$ szám fejezi ki a *sorbanállási hajlandóságot*. Ez azt mutatja, hogy azon i típusú vásárlók közül, akik G árut szeretnének vásárolni, $f_i(w)$ részarány fog beállni a sorba, és a maradék $(1 - f_i(w))$ részarány pedig nem kíván sorbanállni.

Tegyük föl egy pillanatra, hogy vásárlónk az első részcsoporthoz tartozik és sorbanáll. Várakozik türelmesen vagy türelmetlenül, míg ki nem szolgálják és azután hazamegy az újonnan megszerzett áruval. Feltételezzük, hogy némi idő elteltével újból szeretne egy egység G vagy H árut vásárolni, és ismét megkezdődik az egész folyamat elölről. A szükséglet újratermelődésének okait nem fogjuk tárgyalni. (Egy kis idő múltán a vásárló elfogyasztja az árut, vagy az elavul, kimegy a divatból, stb.) Annyit teszünk föl, hogy azok közül, akik a t időpontban G árut vásároltak, $\gamma_i \cdot \mathrm{d}t$ részaránynak a végtelen kicsiny $(t, t+\mathrm{d}t)$ időtartamon belül újabb egység árura (G vagy H) támad igénye. A kényelem kedvéért ezt a részarányt a t időponttól függetlennek vesszük. Mikroszinten ebből az következik, hogy a szükséglet kielégítési időt, azaz azt az időtartamot, ami a G áru megszerzésétől az arra vonatkozó újabb igény fellépéséig eltelik, $1/\gamma_i$ várható értékű exponenciális valószínűségi változónak tekintjük. A γ_i értéket a (G megszerzésétől számított) szükséglet *újratermelődési sebességnek*, $1/\gamma_i$ értéket pedig *a G iránti szükséglet átlagos kielégítési idejének nevezzük*.

Most pedig az algoritmus másik ágát vizsgáljuk meg, azt a vásárlót, akit elriasztott a hosszú sorbanállási idő. Ennek a vásárlónak különböző lehetőségei vannak. Ragaszkodhat a G áruhoz úgy, hogy későbbre halasztja a döntést arról, beálljon-e a sorba. Ez ésszerű viselkedés lehet valódi, „fizikai" sor esetén: sorok állnak reggelenként a húsüzlet előtt, tömeg van az orvos várószobájában.[3] A vásárló viselkedését két jellemzővel írjuk le. Létezzék először egy b_i-vel jelölt *halasztási hajlandóság*, valamint másodszor, egy *halasztási idő*. Ez idő elteltével a vásárló visszatér és újból fontolóra veszi, csatlakozzék-e a sorhoz. Hasonló feltevést teszünk itt, mint a G-vevők esetében, feltesszük,

[3] Nem ésszerű ez a viselkedés, amikor a sor „csak" papíron létezik, vagyis ha sorszámokat osztanak, a vásárló hazamehet, és sorrakerüléskor értesítést kap.

hogy a végtelen kicsiny $(t, t + dt)$ időtartamon belül az i csoport halasztóinak $\varrho_i \cdot dt$ része visszatér, hogy újra fontolóra vegye csatlakozását a sorhoz. Mikroszinten: a halasztási idő $1/\varrho_i$ várható értékű valószínűségi változó. A ϱ_i értéket *visszatérési sebességnek* nevezzük, és $1/\varrho_i$ az *átlagos halasztási idő*.

Azok számára, akik nem állnak be a sorba, de nem is halasztják el ezt a döntést, fennáll a lehetőség, hogy a G árut H-val helyettesítsék. Ezt *kényszerhelyettesítésnek*, az elfogadhatatlanul hosszú sorokban megmutatkozó hiány által kikényszerített helyettesítésnek nevezzük. Voltak *önkéntes* helyettesítők: G és H viszonylagos árának mérlegelése után az i típusú fogyasztók $\big(1 - a_i(\pi)\big)$ része. Most azonban újabb helyettesítők követik őket, már nem önkéntes alapon. A viszonylagos ár alapján ők G-t részesítenék előnyben H-val szemben, de a hosszú sorbanállási idő miatt felülvizsgálják eredeti keresletüket és a H mellett döntenek. A kényszerhelyettesítés az a kulcsjelenség, aminek segítségével megérthetjük, mi történik krónikus hiány esetén. A *kényszerhelyettesítési hajlandóságot* $c_i(\pi)$-vel jelöljük. (Ugyanúgy, mint a kiinduló vásárlási szándék, a kényszerhelyettesítési hajlandóság is csak a viszonylagos áraktól függ.)

A harmadik lehetőség feladni mind G mind H vásárlását, egyszerűen a rájuk szánt pénz megtartásával. Ezt *kényszermegtakarításnak* nevezhetjük.[4]

Ezen alternatívák tudatában néhány erős egyszerűsítést vezetünk be a fenti leíró modellbe. Kizárjuk a kényszermegtakarítás lehetőségét, és feltesszük a következőt. Ha a vásárló nem akar rögtön csatlakozni a G sorához, de ezt a döntést nem is halasztja el, akkor el kell fogadnia a kényszerhelyettesítést és H árut kell vásárolnia. A H áru mindig azonnal rendelkezésre áll. Feltevésünk egy lehetséges értelmezése a következő: A H áru „a G-től különböző áruk" összességét képviseli, mint összetett áru. A legnagyobb hiány esetén is van *valami* a raktárban. A vásárlók közül sokan hajlamosak bármi áron elkölteni pénzüket valamire. Ez a vásárlói döntések nagyon nagy részére egészen valósághű feltevés a hiánygazdaságban.[5]

Feltevésünket a következő összefüggés fejezi ki:

$$b_i + c_i = 1.$$

Az egyszerűbb jelölés kedvéért csak a $c_i(\pi)$ kifejezést fogjuk használni, és a halasztási hajlandóságot $\big(1 - c_i(\pi)\big)$-vel jelöljük majd.

A H áru megvásárlásakor (legyen az önkéntes vagy nem önkéntes) a vásárló számára ugyanúgy lesz egy kielégítési idő, mint a G áru esetében. Nevezetesen, feltesszük, hogy a H-t vásárló i típusú vevők $\varkappa_i \cdot dt$ része újabb igénnyel lép fel (G vagy H iránt) a $(t, t + dt)$ végtelen kicsiny időintervallumban. A $\varkappa_i$ értéket a (H megszerzésétől számított) *szükséglet újratermelődési sebesség*nek, $1/\varkappa_i$ értéket pedig a *H iránti szükséglet átlagos kielégítési idejének* nevezzük.

Ezzel a ciklus végére értünk.

2.3. *A vásárlói attitűd*

Összegezve a *vásárlói attitűdöt*, az a következő függvényekkel és paraméterekkel jellemezhető:

[4] Az első alternatíva, a döntés elhalasztása átmenetileg szintén kényszermegtakarítást jelent.

[5] A kényszermegtakarítást a kutatásainkból származó más publikációkban fogjuk részletesen tárgyalni.

$a_i(\pi)$ = kiinduló vásárlási hajlandóság π relatív ár mellett.
$f_i(w)$ = sorbanállási hajlandóság w hosszúságú sorbanállási idő mellett.
$c_i(\pi)$ = kényszerhelyettesítési hajlandóság π viszonylagos ár mellett.
$(1-c_i(\pi))$ = halasztási hajlandóság π viszonylagos ár mellett.
γ_i, $\varkappa_i$ = a G, illetve H megszerzésétől számított szükséglet újratermelődési sebességek.
ϱ_i = visszatérési sebesség.

A fenti függvények és paraméterek az i sorszámú csoport attitűdjét fejezik ki. Megjegyezhető, hogy az attitűd, mint vektor, csak két „jelzés" függvénye: a π viszonylagos áré és a w sorbanállási időé. Emellett a vásárló meggondolásai e két jelzéssel kapcsolatban egymást követő, különálló pontok a vásárlási algoritmusban. Így a vásárló, ha már egyszer elfogadta az árat, a sorbanállási időt az ártól függetlenül nézi. (Technikai nehézségek nélkül elemezhető az ár és a sorbanállási idő együttes mérlegelése.)

Helyénvaló itt egy rövid összehasonlítást tenni a szokásos piaci modellekkel. Mint már említettük, az algoritmus első lépésében a hagyományos leírást követjük: a keresleti függvény a viszonylagos ártól függ. A szokásos modell itt véget is ér azzal a hallgatólagos feltevéssel; ez elegendő ahhoz, hogy ismerjük a vásárló szándékait. Ha az az eladó által megadott ár mellett egy bizonyos árumennyiséget szeretne megvásárolni, minden bizonnyal megkapja. Elismerjük, hogy ez a hallgatólagos feltevés többé-kevésbé jogosult ott, ahol a túlkereslet csak kivételes és időleges jelenség. Ez a feltevés alkalmazható az olyan piac leírására, ahol automatikus mechanizmusok azonnal megszüntetik a túlkeresletet. A *krónikus* hiány körülményei között azonban ugyanez a hallgatólagos feltevés jogosulatlanná válik, a vásárlói attitűd leírása nem állhat meg ennél a pontnál. Fel kell vetni a kérdést: mi történik az első lépés, azaz a kiinduló kereslet meghatározása után? Az olyan gazdaságban, ahol a túlkereslet kivételes, a vásárlás egy ütemben végbemehet: a döntés a vásárlási szándékról és a tényleges vásárlás kevéssé különül el az időben. A másik oldalon, egy hiánygazdaságban, a vásárlás csakis időbeli folyamatként írható le, meg kell nézni az eredeti döntést, aztán annak többszöri felülvizsgálatát a további lehetőségek közötti választást stb. Ennek megfelelően vezettük be a modellbe a következő lehetőségeket: sorbanállás, halasztás, kényszerhelyettesítés. (Következő cikkünkben még egy alternatíva megjelenik majd: a hiányzó áru *keresése*.)

2.4. *A vásárlók állapotváltozói*

Bármely rögzített t időpontban minden egyes vásárló négy különböző állapot közül pontosan egyben van. Az egyes állapotokban levő vásárlók számát a modellben a következő négy *állapotváltozó*val adjuk meg:

$x_{1i}(t)$ = azon i típusú vásárlók száma, akik sorbanállnak a t időpontban, röviden: a *sorbanálló vásárlók*;
$x_{2i}(t)$ = azon i típusú vásárlók száma, akik korábban egy egység G-hez jutottak és a t időpontban még nem kezdik újra a vásárlási folyamatot megint, röviden: a *G-vel kielégített vásárlók*;

$x_{3i}(t)$ = azon i típusú vásárlók száma, akik korábban egy egység H-hoz jutottak és a t időpontban még nem kezdik el újra a vásárlási folyamatokat, röviden: *a H-val kielégített vásárlók*;

$x_{4i}(t)$ = azon i típusú vásárlók száma, akik korábban elhalasztották a döntést arról, hogy beálljanak-e a sorba, és a t időpontban még nem veszik újból fontolóra a kérdést, röviden: *a halasztó vásárlók*.

$$x_{1i}(t)+x_{2i}(t)+x_{3i}(t)+x_{4i}(t)=n_i, \qquad i=1,\ldots,k$$

$$x_j(t)=\sum_{i=1}^{k}x_{ji}(t). \qquad j=1,2,3,4.$$

A modell elemzésében a fenti változókat valós, de nem feltétlenül egész számoknak tekintjük. Bármely $t\geq 0$ időpontban az

$$(x_{11}(t),x_{12}(t),\ldots,x_{1k}(t),x_{21}(t),\ldots,x_{2k}(t),x_{31}(t),\ldots,x_{3k}(t),x_{41}(t),\ldots,x_{4k}(t))$$

vektort a vásárlói rendszer t melletti állapotának mondjuk. Megfordítva, bármely nem negatív valós $(x_{11},x_{12},\ldots,x_{4k})$ vektort, amely minden i sorszámra kielégíti az $x_{1i}+x_{2i}+x_{3i}+x_{4i}=n_i$ egyenlőséget, *a rendszer teljesíthető állapotának* nevezzük.

2.5. *A kiszolgálási kapacitás és kiszolgálási sebesség*

A 2.2—2.4. pontokban a vásárlókról beszéltünk. Most rátérünk az eladó jellemzésére.

Az eladó *kiszolgálási kapacitását* λ-val jelöljük. Ez az egységnyi idő alatt kiszolgálható vásárlók számának maximuma. Egy raktárt nézve λ a kiinduló készletektől és a raktárba érkező szállítmányoktól függ. Egy termelő vállalat esetében λ a kiinduló készletektől és a termelési kapacitástól függ. Figyelmen kívül hagyjuk a készleteket, és feltételezzük, hogy λ az időtől független, exogén módon rögzített paraméter.

Mivel a sor hosszát, x_1-et itt folytonos változónak vesszük, természetes lenne azt mondani, hogy *a kiszolgálási sebesség*, azaz az időegység alatt kiszolgált vásárlók tényleges száma legyen λ, ha $x_1>0$ és legyen nulla, ha $x_1=0$. Másképpen mondva: amíg sor van, a teljes kiszolgálási kapacitás működik és ha nincs sor, leáll a kiszolgálás (akit éppen kiszolgálnak, az is a sorhoz tartozik). Az s kiszolgálási sebességnek ez az „átkapcsolás" jellegű függése az x_1 sorhossztól azonban $x_1=0$-ban szakadásos, és a vásárlói rendszer dinamikájának elemzésekor technikailag zavaró lenne egy ilyen szakadás. Ezért a nem folytonos összefüggést folytonossal helyettesítjük, és ezt határérték elemzéssel egészítjük ki. Pontosabban: az s kiszolgálási sebesség legyen először az alábbi módon függvénye az x_1 sorhossznak:

$$s(x_1(t))=\lambda\cdot h_\sigma(x_1(t)), \tag{2.1}$$

ahol h_σ egy folytonos függvény, amely a $[0,\sigma]$ intervallumban nullától egyig növekszik, a $[\sigma,+\infty]$ intervallumban pedig azonosan egyenlő eggyel. A σ paramétert „kisimító együtthatónak" nevezzük, és feltételezzük róla, hogy egy kicsiny, pozitív állandó. Később megengedjük majd, hogy a σ nullához, és így a folytonos (2.1) összefüggés az eredeti, szakadásos „átkapcsolási szabályhoz" tartson.

2.6. A sor

Az eladó és a vevők cselekvései – egy hely kivételével – kölcsönösen függetlenek egymástól. Az egymásrahatás egyetlen helye a sor. Itt találkoznak: a sor az összekötő kapocs, amely a rendszer szereplőit egymástól kölcsönösen függővé teszi. A sor lehet „fizikai", azaz állhat várószobában vagy üzletben várakozó egyénekből, vagy „papíron létező", azaz kérések vagy megrendelések halmaza az eladó irodájában. A sorbanállási időről feltesszük, hogy azt a vásárlók pontosan ismerik, azaz, feltesszük, hogy az $f_i(w)$ sorbanállási hajlandóság w argumentuma a valóságos sorbanállási idő. Továbbmenve, feltételezzük, hogy a sorban nincsenek előjogok, tehát egy újonnan jövő pontosan annyit fog várakozni a kiszolgálásra, mint az összes előtte álló. Összefoglalva:

$$w(t) = x_1(t)/\lambda. \tag{2.2}$$

Meg kell jegyeznünk, hogy ez az egyenlőség megközelítésként néhány olyan esetre is alkalmazható, amikor a G áruért több sor áll. Nevezetesen, ha sok sor van, és a vásárló mindig azt választja, amelyben a legrövidebb a sorbanállási idő, akkor a különböző sorokhoz tartozó sorbanállási idők a kiegyenlítődés felé tartanak és a sorok aggregátumára alkalmazható a (2.2) egyenlőség.

A sorban különböző vásárlói csoportokba tartozó emberek állnak. Általában véve ezek a csoportok többé-kevésbé jól összekeverednek a sorban. Az analitikus követhetőség érdekében mindamellett feltesszük, hogy a sorok homogén módon kevertek. Jelölje $s_i(t)$ a kiszolgált, i típusú vásárlók kiáramlását a t időpontban:

$$s_i(t) = \begin{cases} \dfrac{x_{1i}(t)}{x_1(t)} \cdot s(x_1(t)), & \text{ha} \quad x_1(t) > 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x_1(t) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Másszóval feltesszük, hogy a kiszolgált i típusú vásárlók kiáramlása a sorból a sorbanálló összes vásárlón belüli részükkel arányos. A vásárlói rendszer egy kezdeti vagy átmeneti állapotára ez valóban durva megközelítés lehet (hisz a sor elejét alkothatják egyetlen csoport sorbanálló tagjai, megelőzve az összes többi csoport sorbanálló tagjait). Egy stacionárius állapotra azonban helyénvaló a homogenitási feltevés, mint amit a független egyéni viselkedés biztosít.[6] Az s_i értéket az *i típusú vásárlók kiszolgálási sebességé*nek nevezzük majd, $(i = 1, 2, \ldots k)$, $s = s_1 + s_2 + \cdots + s_k$.

3. A modell: formális összefoglalás

A modell intézményi valamint mikro-közgazdaságtani vonatkozásainak megvilágítása után a 2. részt némileg megismételve, a formális leírás összegzése következik.

[6] A (2.3) feltevés logikai szempontból zavaró. Nevezetesen, ha egynél több vásárlói csoport van, ellentétbe kerülhet (2.2) értelmezésével, ahol a sor szigorú sorrendet jelent. A (2.2) egy alternatív értelmezése, amely összhangban van (2.3)-al, az, hogy a sor tagjait véletlen módon szolgálják ki. Feltéve, hogy a kiválasztás egyenlő esélyű mindenki számára és egy vásárló kiszolgálási ideje $1/\lambda$, a (2.2) egyenlet megadja a várható sorbanállási időt, és (2.3) pedig a különböző csoportok kiszolgálási sebességét.

3.1. Exogén paraméterek és függvények

A következő *paraméterekről* feltételezzük, hogy exogén módon adott, rögzített valós számok: λ, π, γ_i, $\varkappa_i$, ϱ_i $(i = 1, 2, \ldots k)$. Legyen R_+ a nem-negatív valós számok halmaza és $[0, 1]$ a zárt egységintervallum. A következő *függvényekről* feltételezzük, hogy exogén módon adott, rögzített függvények az R_+ halmazon, és értékeiket a $[0, 1]$ intervallumon veszik fel:

$$f_i, a_i, c_i, h_\sigma \qquad (i = 1, 2, \ldots k).$$

3.2. Technikai feltevések az exogén paraméterekről és függvényekről

Fő feltevéseinket a modell kvalitatív tulajdonságai foglalják magukban. E tulajdonságokat a 2. részben tárgyaltuk. Itt a feltevéseknek egy részleges összefoglalását adjuk meg; csak azokat sorojuk fel közülük, amelyek az exogén paraméterek és függvények matematikai specifikációjához szükségesek. Egy részük csak ismétlése a korábbi verbális megfogalmazásoknak, másokat ezen a helyen vezetünk be. (Vegyük észre, hogy a függvényekről feltett tulajdonságok azok egész R_+ értelmezési tartományában érvényesek.)

A1: A λ, γ_i $\varkappa_i$ és ϱ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ paraméterek valamennyien pozitívak. $\varrho_i > \varkappa_i$ minden i esetén. A π paraméter nem-negatív.

A2: Az f_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ függvények mind nem-növekvők és differenciálhatók, $f_i(0) = 1$. Továbbmenve f_i', az f_i első deriváltja folytonos $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

A3: Az a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ függvények valamennyien nem-növekvők és folytonosak, $\lim\limits_{\pi \to \infty} a_i(\pi) = 0$.

A4: A c_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ függvények valamennyien nem-csökkenők és folytonosak. Ha valamely i esetén $a_i(\pi) = 0$, akkor $c_i(\pi) > 0$.

A5: A h_σ függvény (ahol $\sigma > 0$ rögzített szám) a $[0, \sigma]$ intervallumban növekvő. Továbbmenve, h_σ'', a h_σ második deriváltja folytonos, valamint $h_\sigma(0) = 0$, és $h_\sigma(x) = 1$ minden $x \geq \sigma$ esetében.

Ezek a feltevések néhány megjegyzést igényelnek.[7] Először, A1-ben kimondjuk, hogy az átlagos H-kielégítési idő $(1/\varkappa_i)$ meghaladja az átlagos halasztási időt $(1/\varrho_i)$. Más szóval a fogyasztási időhöz képest „rövid távú" halasztásokban gondolkodunk.

Másodszor, A4-ben feltesszük, ha a viszonylagos ár olyan magas, hogy az i típusú vásárlók kiinduló vásárlási hajlandósága nulla, akkor a kényszerhelyettesítésre való hajlandóságuk pozitív lesz.

Harmadszor, a h_σ kisímító függvényhez kell megjegyzést tennünk. A következőkben először egy tetszőleges h_σ kisímító függvényből fogunk kiindulni, rögzített $\sigma > 0$ értékkel. Azután megengedjük majd, hogy σ nullához tartson és határértékben vonjuk le eredményeinket, (ami nem azonos a $\sigma = 0$ esettel).

[7] Egy f függvényt növekvőnek (nem-csökkenőnek) mondunk, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x)_1 < f(x_2)$ [illetve $f(x_1) \leq f(x_2)$]. Csökkenőnek (nem-növekvőnek) mondjuk, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$ [illetve $f(x_1) \geq f(x_2)$].

3.3. Dinamikus összefüggések

Mint feljebb már jeleztük, egy közönséges differenciálegyenlet-rendszerrel le fogjuk írni az $x_{1i}(t)$, $x_{2i}(t)$, $x_{3i}(t)$ $x_{4i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, állapotváltozók időbeli alakulását. A rendszer a következő ($i = 1, 2, \ldots, k$):

$$\dot{x}_{1i} = a_i \cdot f_i(w) \cdot (\gamma_i \cdot x_{2i} + \varkappa_i \cdot x_{3i}) + f_i(w) \cdot \varrho_i \cdot x_{4i} - s_i; \tag{3.1}$$

$$\dot{x}_{2i} = s_i - \gamma_i \cdot x_{2i}; \tag{3.2}$$

$$\dot{x}_{3i} = [1 - a_i + a_i \cdot c_i \cdot (1 - f_i(w))] \cdot (\gamma_i \cdot x_{2i} + \varkappa_i \cdot x_{3i}) + + c_i \cdot (1 - f_i(w)) \cdot \varrho_i \cdot x_{4i} - \varkappa_i \cdot x_{3i}; \tag{3.3}$$

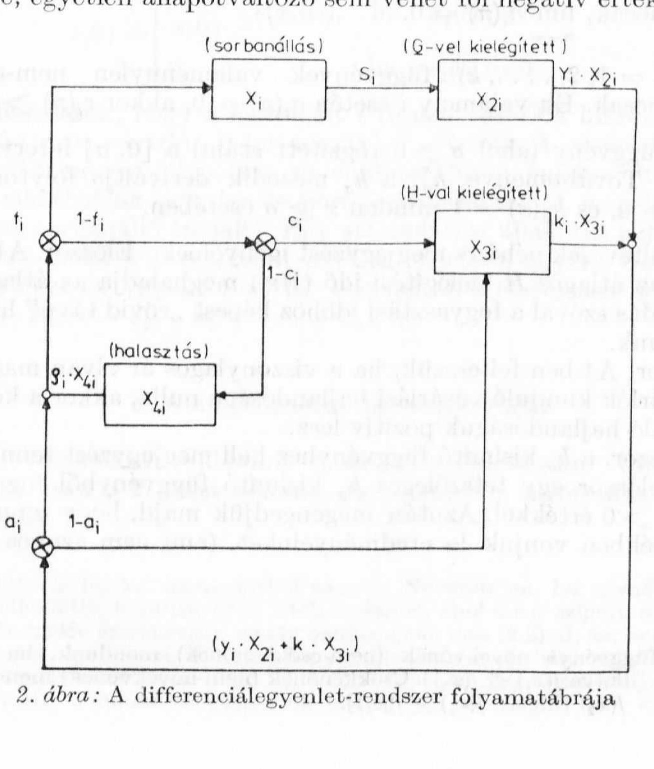
$$\dot{x}_{4i} = a_i \cdot (1 - c_i) \cdot (1 - f_i(w)) \cdot (\gamma_i \cdot x_{2i} + \varkappa_i \cdot x_{3i}) + + (1 - c_i) \cdot (1 - f_i(w)) \cdot \varrho_i \cdot x_{4i} - \varrho_i \cdot x_{4i}. \tag{3.4}$$

Ebben a rendszerben valamennyi állapotváltozó, kiszolgálási sebesség és sorbanállási idő az idő függvénye, $x_{1i} = x_{1i}(t)$ stb. Az s_i kiszolgálási sebességet a (2.1) és (2.3) egyenletek adják meg, a w sorbanállási időt a (2.2) egyenlet. Az „a_i" és „c_i" kifejezések az „$a_i(\pi)$" és „$c_i(\pi)$" rövidítései, mivel a π viszonylagos ár állandó. A felső pontok idő szerinti deriváltakat jelölnek, $\dot{x} = \dot{x}(t) = \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$.

Megjegyezzük, hogy az idő szerinti deriváltak összege nulla,

$$\dot{x}_{1i} + \dot{x}_{2i} + \dot{x}_{3i} + \dot{x}_{4i} = 0,$$

mivel a vásárlók száma az egyes csoportokban feltevésünk szerint állandó. Továbbmenve, egyetlen állapotváltozó sem vehet föl negatív értéket: bármely



2. ábra: A differenciálegyenlet-rendszer folyamatábrája

(x_{ji}) teljesíthető állapotra, amelyben $x_{ji}=0$ valamely j és i mellett, a (3.1) és (3.4) egyenletekből $\dot{x}_{ji}\geq 0$ adódik. Ily módon a differenciálegyenlet-rendszer megoldása korlátos valamennyi $t\geq 0$ idő mellett. Az f_i' és h' első deriváltak folytonossága miatt, ez biztosítja a megoldás létezését és egyértelműségét valamennyi $t\geq 0$ mellett (lásd a 3.1 tételt Hale (1969) I. fejezetében).

A (3.1)—(3.4) differenciálegyenlet-rendszer a 2.2 pontban leírt egyéni vásárlói viselkedés összesített formája. A megfelelést a differenciálegyenlet-rendszer működését szemléltető 2. ábra és a vásárlási algoritmust bemutató 1. ábra összehasonlításával tanulmányozhatjuk.

4. A rendszer normál állapota

Az x_{1i}, x_{2i} x_{3i}, x_{4i} $(i=1, 2, \ldots, k)$ állapotváltozókkal leírt vásárlói rendszerről akkor mondhatjuk, hogy *stacionárius állapotban* van, ha az időben nem változik, azaz ha valamennyi idő szerinti derivált nulla: $\dot{x}_{1i}=\dot{x}_{2i}=\dot{x}_{3i}=\dot{x}_{4i}=0$ minden i esetén. Ebben a részben először mutatjuk meg, hogy rendszerünknek mindig van egyértelmű stacionárius állapota. Ezután bebizonyítjuk, hogy az egy vásárlói csoport speciális esetében, a sorbanállási hajlandóság függvényre tett elég enyhe feltételek mellett, ez a stacionárius állapot stabil.

4.1. A megoldás létezése és egyértelműsége

A kiszolgálási sebesség eredetileg szakadásos „átkapcsolási szabályának" megközelítéséhez a modell tulajdonságai elsősorban a kisimító együttható nagyon kicsiny értékeinél érdekelnek minket. A tárgyalás itt egy olyan állítással kezdjük, amely tetszőleges nagyságú kisimító együttható mellett áll (vö. a 2.5 ponttal).

1. Állítás: Az A1—A5 feltevéseket kielégítő bármely paraméter és függvény-együttes mellett létezik egyértelmű stacionárius állapot.

(Az összes bizonyítást a cikk végén, a függelékben adjuk meg.) A következőkben kicsit részletesebben tanulmányozzuk, mi történik a stacionárius állapottal, ha a kisimító együttható nullához tart. Az 1. állítás alábbi két következménye kimondja, hogy, a paraméterek és a függvények adott együttesétől függően, ilyenkor a sor egy pozitív értékhez vagy nullához tart. Legyen

$$\varphi=\sum_{i=1}^{k}\frac{\gamma_i\cdot\varkappa_i\cdot a_i(\pi)\cdot n_i}{\varkappa_i\cdot a_i(\pi)+\gamma_i\cdot\left(1-a_i(\pi)\right)} \tag{4.1}$$

és

$$A_i(w)=\frac{1}{\varkappa_i}\cdot\left(1-a_i(\pi)\right)+\frac{1}{\gamma_i}\cdot a_i(\pi)+ \\ +\left[\frac{c_i(\pi)}{\varkappa_i}+\frac{a_i(\pi)}{\varrho_i}\cdot\left(1-c_i(\pi)\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{f_i(w)}-1\right)\quad (i=1, 2, \ldots, k) \tag{4.2}$$

$(0<A_i(w)\leq+\infty)$. Továbbmenve, jelölje $x_{1i}^*(\sigma)$, $x_{2i}^*(\sigma)$, $x_{3i}^*(\sigma)$ és $x_{4i}^*(\sigma)$, $i=1, 2, \ldots, k$, azon stacionárius állapot értékeit, amely egy tetszőleges, rögzített $\sigma>0$ kisimító együtthatónak felel meg.

1.1. *Következmény:* Ha $\lambda < \varphi$, akkor $\lim\limits_{\sigma \downarrow 0} x_1^*(\sigma) = x_1^*$, ahol $x_1^* > 0$.

Továbbá a

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i(\pi) \cdot n_i}{\lambda \cdot A_i(x_1/\lambda) + a_i(\pi) \cdot x_1} = 1 \tag{4.3}$$

egyenletnek x_1^* egyértelmű megoldása.

Legyen $f_i^* = f_i(x_1^*/\lambda)$. Az i vásárlói csoportnál, amelyre $a_i(\pi) > 0$ és $f_i^* > 0$:

$$x_{1i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{1i}^*(\sigma) = \frac{a_i(\pi) \cdot x_1^* \cdot n_i}{\lambda \cdot A_i(x_1^*/\lambda) + a_i(\pi) \cdot x_1^*}; \tag{4.4}$$

$$x_{2i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{2i}^*(\sigma) = \frac{\lambda}{\gamma_i} \cdot x_{1i}^*/x_1^*; \tag{4.5}$$

$$x_{3i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{3i}^*(\sigma) = \tag{4.6}$$

$$= \left[c_i(\pi) \cdot \left(\frac{1}{f_1^*} - 1\right) + 1 - a_i(\pi)\right] \cdot \frac{\lambda}{a_i(\pi)\,\varkappa_i} \cdot x_{1i}^*/x_1^*;$$

$$x_{4i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{4i}^*(\sigma) = \big(1 - c_i(\pi)\big) \cdot \left(\frac{1}{f_i^*} - 1\right) \cdot \frac{\lambda}{\varrho_i} \cdot x_{1i}^*/x_1^*. \tag{4.7}$$

A j vásárlói csoportnál, amelyre $a_j(\pi) = 0$ és/vagy $f_j^* = 0$ azt kapjuk, hogy $x_{1j}^* = x_{2j}^* = 0$, és x_{3j}^*, x_{4j}^* közvetlen módon kiszámolható a stacioneritás feltételeiből.

1.2. *Következmény:* Ha $\lambda \geq \varphi$, akkor $\lim\limits_{\sigma \downarrow 0} x_1^*(\sigma) = 0$ és $i = 1, \ldots, k$ mellett

$$x_{1i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{1i}^*(\sigma) = 0; \tag{4.8}$$

$$x_{2i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{2i}^*(\sigma) = \frac{\varkappa_i \cdot a_i(\pi) \cdot n_i}{\varkappa_i \cdot a_i(\pi) + \gamma_i \cdot \big(1 - a_i(\pi)\big)}; \tag{4.9}$$

$$x_{3i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{3i}^*(\sigma) = \frac{\gamma_i \cdot \big(1 - a_i(\pi)\big) \cdot n_i}{\varkappa_i \cdot a_i(\pi) + \gamma_i \cdot \big(1 - a_i(\pi)\big)}; \tag{4.10}$$

$$x_{4i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{4i}^*(\sigma) = 0. \tag{4.11}$$

Ily módon, amint a kisimító koefficiens nullához tart, határértékben két különböző típusú stacionárius állapotot különböztethetünk meg. Azokra a paraméter és függvényegyüttesekre, amelyek kielégítik a $\lambda < \varphi$ egyenlőtlenséget, a megfelelő stacionárius állapot egy hiánnyal jellemezhető állapothoz ($x_1^* > 0$) tart, míg azon paraméter és függvényegyütteseknél, amelyek az ellenkező irányú, a $\lambda \geq \varphi$ egyenlőtlenséget elégítik ki, a megfelelő stacionárius állapot határértéke nem tartalmaz hiányt. A határ-állapotoknak ezt a két típusát az 5. részben tárgyaljuk majd részletesebben. Ehhez azonban először igazolni kell a stacionárius állapot stabilitását a kisimító koefficiens kis pozitív értékeire.

4.2. Stabilitás

Ebben a pontban az egy vásárlói csoport speciális esetével foglalkozunk, ezért $k = 1$ és így az i sorszámot elhagyjuk. Ezenkívül, amikor stabilitásról beszélünk, ezen *aszimptotikus stabilitást* értünk. Intuitív módon kifejezve: egy stacionárius állapotot aszimptotikusan stabilnak mondunk, ha az állapotok terében attól egy kicsit eltérve a rendszer (az időben) aszimptotikus módon visszatér a stacionárius állapothoz. Az aszimptotikus stabilitás tehát lokális tulajdonság, mivel csak azt mondja meg, hogyan viselkedik a rendszer a stacionárius állapot kis környezetében. Pontosabban szólva, az aszimptotikus stabilitás standard definícióját alkalmazzuk, ahogy azt például *Hale* (1969) megadta.

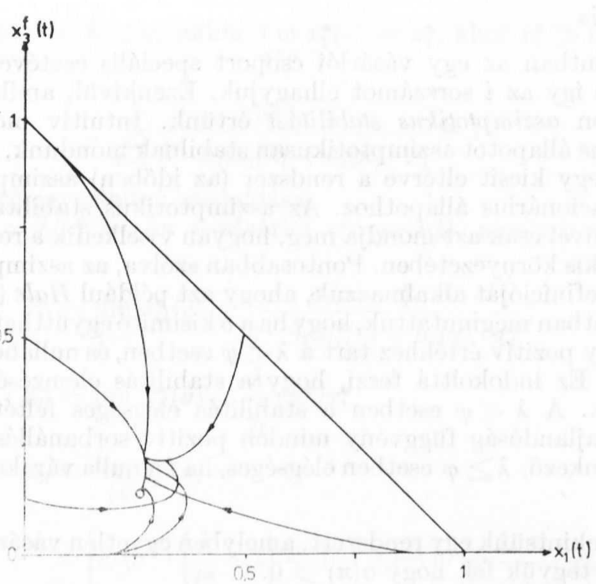
Az előző pontban megmutattuk, hogy ha a σ kisimító együttható nullához tart, akkor $x_1^*(\sigma)$ egy pozitív értékhez tart a $\lambda < \varphi$ esetben, és nullához tart a $\lambda \geq \varphi$ fennállásakor. Ez indokolttá teszi, hogy a stabilitás elemzését is erre a két esetre bontsuk. A $\lambda < \varphi$ esetben a stabilitás elégséges feltétele, hogy az f sorbanállási hajlandóság függvény minden pozitív sorbanállási időre „sima" legyen. Az ellenkező, $\lambda \geq \varphi$ esetben elégséges, ha f a nulla várakozási idő mellett „lapos".

2. *Állítás:* Tekintsünk egy rendszert, amelyben egyetlen vásárlói csoport van, $k = 1$, és tegyük fel, hogy $a(\pi) > 0$.
(a) A $\lambda > \varphi$ esetet véve tegyük fel, hogy az A1—A5 feltevések fennállnak és az f sorbanállási hajlandóság függvény f'' második deriváltja valamenynyi $w > 0$ érték mellett folytonos. Ekkor létezik egy olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármely $\sigma \in (0, \varepsilon)$ kisimító együtthatót véve a stacionárius állapot aszimptotikusan stabil.
(b) A $\lambda \geq \varphi$ esetre tegyük fel, hogy az A1—A5 feltevések igazak, és f sorbanállási hajlandóság függvény azonosan eggyel egyenlő valamely $(0, \delta)$ intervallumon. Ekkor a stacionárius állapot valamennyi $\sigma \in (0, \lambda \cdot \delta)$ kisimító együttható mellett aszimptotikusan stabil.

Már említettük, hogy a fenti állítás nem mondja meg, hogyan viselkedik a rendszer, ha nagyon eltérítik stacionárius állapotától. A rendszer globális viselkedéséről eddig nincsenek általános eredményeink. Arra a speciális esetre azonban, amelyben a halasztás lehetősége kizárt, bebizonyítható, hogy a stacionárius állapot globálisan is stabil, azaz a rendszer tetszőlegesen nagy megzavarása után is visszatér stacionárius állapotához.

3. *Állítás:* Tekintsünk egy rendszert, amelyben egyetlen vásárlói csoport van, és a halasztás nem lehetséges. Ily módon $k = 1$, $a(\pi) > 0$, $c(\pi) = 1$ és $x_4(0) = 0$. Tegyük fel, hogy $\lambda < \varphi$. Ha az A1—A5 feltevések teljesülnek, akkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $\sigma \in (0, \varepsilon)$ kisimító koefficiens esetén a rendszer bármely kiinduló állapotból aszimptotikusan konvergál stacionárius állapota felé.

A fenti analitikus stabilitásvizsgálatok az egy vásárlói csoport speciális esetére vonatkoznak ($k = 1$). Kiegészítésképp végeztünk néhány numerikus számítógépi szimulációt két vásárlói csoport esetére ($k = 2$). Ezek eddig a rendszer globális stabilitását támasztják alá, de meg kell jegyezni, hogy nem bocsátkozunk kiterjedt szimulációs vizsgálatokba. A szemléltetés kedvéért bemutatunk egy ábrát a szimulációkról. Szimulációink alapján az alábbi sejtés tehető.



3. ábra: Tipikus pályák az (x_1, x_3^f) hipersíkra vetítve. x_1 itt a sorbanálló vásárlók összlétszáma, x_3^f pedig a kényszerhelyettesítők összlétszáma. A kis kör jelöli a stacionárius állapotot, valamennyi pálya ehhez tart. A modell számszerű specifikációja a cikk végén, a 2. függelékben található meg.

Sejtés: Legalábbis a két vásárlói csoport esetére az A1 – A5 feltevéseket kielégítő exogén paramétereknek és függvényeknek létezik egy eléggé széles osztálya, amelyhez globálisan stabil stacionárius állapotok tartoznak.

4.3. Hosszútávú egyensúly walrasi és nem-walrasi értelemben

Amikor $x_{1i} = x_{1i}^*, \ldots, x_{4i} = x_{4i}^*$, $i = 1, \ldots, k$, a rendszer *normál állapotában* van. A „normál" jelzőhöz némi magyarázatot és értelmezést fűzünk.

A modell empirikus-leíró értelmezése a következőt mondja: egy állapotváltozó normál értéke e változó *időbeli átlaga*. Következésképp modellünk csak egy stagnáló piac leírására alkalmas. Úgy sejtjük azonban, hogy az eredmények olyan rendszerekre is általánosíthatók, ahol a kínálat, a forgalom és a fogyasztás időben változó (pl. növekvő). (Vizsgálhatjuk például új potenciális vásárlók „beáramlását" a *G* áru piacára.) Ebben az esetben a normál állapot viszonylagos fogalommá válik, így azt újra definiálni kell $(x_{ji}(t)/n_i(t) = c$ minden t és i, j esetén). A következő megjegyzéseknél a „normál állapot" fogalmának általánosított értelmezésére gondolunk, amelyhez képest modellünk stacionárius állapota csak egy speciális eset.

Az egzisztencia és a stabilitás formálisan különböző kérdése az értelmezéskor szorosan összefonódik. Tautológikus átkeresztelés lenne mindenfajta időbeli átlagot „normál értéknek" nevezni. Valójában egy olyan *visszacsatolási mechanizmus* működése teszi az időbeli átlagot „normál értékké", amely „visszaviszi" a normál állapotba az attól eltérő rendszert. A mi egyszerű modellünkben a sorbanállási idő, *w* a visszacsatolási mechanizmust vezérlő jelzés. Ha a sorbanállás túl sok időt vesz igénybe, a vásárlók nem csatlakoznak a sorhoz. Ellenkező esetben, ha a sorbanállási idő kisebb a normál értéknél, több ember fog beállni a sorba.

Létezésén és a stabilitásán kívül a stacionárius állapot egyértelműségéről is van tételünk. Ez a normál állapot fogalmából nem feltétlenül következik. Az egyértelműségről szóló állításunk — több más feltevés mellett — modellünk determinisztikus szerkezetéből adódik. Sztochasztikus leírásnál a jelenlegi determinisztikus modell (egyértelmű) stacionárius állapota helyébe a rendszer állapotának egy (egyértelmű) stacionárius valószínűségeloszlása kell, hogy kerüljön.

A normál állapotot a rendszer *hosszútávú egyensúlyának* is nevezhetjük.[8] A közgazdasági irodalomban némi terminológiai zavar és homályosság van, mert az „egyensúly" fogalmához tradicionális jelentések fonódnak. Sok közgazdász hajlamos arra, hogy ezt az elnevezést kizárólag a *walrasi* értelemben egyensúlyban levő rendszer megjelölésére használja. Megpróbáljuk az itt kifejtett modellel szemléltetni a problémát. A piac egyfajta hosszútávú walrasi egyensúlyban van, ha $x_1 = 0$ és $\dot{x}_1 = 0$ valamennyi időpontra. Bizonyos, a későbbiekben tárgyalásokra kerülő, feltételek mellett fennállhat ez az eset. Ugyanakkor léteznek más, nem-walrasi egyensúlyok is. Ezekhez tartoznak a pozitív hosszúságú sorok melletti normál állapotok is. *A walrasi egyensúlyok halmaza itt csak egy részét alkotja a normál állapotok halmazának.*

Az ilyen állandósult állapotokat sok közgazdász *nem-egyensúlyinak* (disequilibriumban levőnek) mondaná. A kutatásoknak a bevezetésben említett új irányzatát rendszerint „disequilibrium elméletnek"[9] nevezik. Nem pusztán szemantikai kérdésről van szó; gondolatainkban (vagy ezek mögött) a legtöbbször értékítéleteket kapcsolunk az elnevezésekhez. Leegyszerűsítve a dolgot: 100 közgazdász közül 90 valami „jónak" tekinti az egyensúlyt, olyannak, amit jó fenntartani, és ha felborul, helyre kell állítani. Így aztán a „*nem-egyensúlyi*" állapot valami „rossz", amit ezért el kell kerülni. Ha a „nem-egyensúlyi" állapot hosszantartó és krónikus, az a degeneráció jele, a rendszer egy nem normális állapotát jelenti; valami perverz, abnormális dolog.

Mi jobbnak látjuk „normál értékről" beszélni szinonimaként a „hosszútávú egyensúly" vagy az „állandósult érték" helyett, mert ez leíró, értékítéletmentes kijelentések felé mutat. Egy normál állapot *jellemzői rendszerspecifikusak.*

Amikor azt mondjuk, vannak rendszerek, amelyek normál állapota sorbanállással jár, ez azt jelenti: nincsenek a rendszerben visszacsatolási mechanizmusok, nincsenek társadalmi erők, amelyek a rendszert a walrasi állapotba visszavinnék. Ellenkezőleg, egy ilyen gazdaságnak van néhány, mélyen a rendszer természetében gyökerező alaptulajdonsága, amelyek például a sorok normál hosszát folytonosan helyreállítják.

Bármely normál állapot, beleértve a nem-walrasi értelmű egyensúlyokat, csak azért tudja állandóan helyreállítani, fenntartani magát, mert a rendszer résztvevői elismerik normál állapotnak. A sorbanállás, várakozás, a vásárlás pénzügyi lehetőségeinknek ellentmondó elhalasztása, a kényszerhelyettesítés — ezek mind a vásárlóra háruló társadalmi költségek, a szokásos, pénzben fizetett áron felül. A sorbanállási hajlandóság, a kényszerhelyettesítés alkalmazása, a vásárlás elhalasztása, vagyis az f_i, c_i; illetve $(1 - c_i)$ függvényeink,

[8] *Malinvaud* az egyensúly fogalomnak ugyanezt a megközelítését javasolja 1977-es cikkében.

[9] Lásd: *Barro—Grossman* (1971), *Benassy* 1974, 1975), és mások.

azt fejezik ki, milyen mértékben hajlandók a vásárlók megfizetni ezeket a nempénzbeli társadalmi költségeket az áruért. Ezek jelzik a piac fennálló állapotának társadalmilag intézményesített elfogadását.

5. A függvények és paraméterek változtatása

5.1. Bevezető megjegyzések

A normál állapotot most határértékben, $\sigma \downarrow 0$ mellett tanulmányozzuk, így az állapotváltozók az 1.1 és 1.2 következmény szerint alakulnak. A következőkben összehasonlítjuk egymással a normál állapot mutatóit, állomány (stock) és áramlás (flow) jellegűeket, különböző paraméterérték és függvényegyüttesek mellett. Bár egy dinamikus modellel dolgozunk, a rendszer különböző normál állapotainak összehasonlítása a szokásos *komparatív statikai* elemzésekhez hasonló eredményekhez vezet.

Legelőször is a (4.1) egyenletben definiált, kulcsfontosságú φ parametrikus mennyiséget kell közelebbről megvizsgálnunk. Az 1.1 és 1.2 következmények szerint ez az érték a *minimális sor-megszüntető kiszolgálási kapacitás*, azaz, ha a λ kiszolgálási kapacitás kisebb ennél a számnál, akkor lesz sor a normál állapotban, míg nincs sor a normál állapotban, ha λ nagyobb vagy egyenlő φ-vel. Vegyük észre, hogy φ csak a π viszonylagos ártól, a kiinduló a_i vásárlási hajlandóság függvényektől, a γ_i és $\varkappa_i$ szükséglet újratermelődési sebességektől és a vásárlói csoportok n_i nagyságától függ, míg független az f_i sorbanállási hajlandóságoktól, a c_i kényszerhelyettesítési hajlandóságoktól, a ϱ_i mérlegelési sebességektől és persze a λ kiszolgálási kapacitástól. A φ érték ily módon a vásárlóknak az árhoz, valamint fogyasztási sebességeikhez való viszonyát fejezik ki. E szerepe miatt természetes, hogy megpróbáljuk φ-t a kereslet fogalmához hasonlítani, és valóban φ értelmezhető a hosszútávú, potenciális kereslet kategóriájával. Ugyanis bármely sorbanállás nélküli normál állapotban a vásárlók (időegységenkénti) beáramlása az üzletbe, vagy más kiszolgálási helyre pontosan φ ütemű, mint ezt a 2. ábra és az 1.2 következmény segítségével beláthatjuk. Így a vásárlók attitűdjét és viselkedését leíró bármely adott paraméter és függvényegyüttes esetén a φ érték mutatja azt az időegység alatti G iránti keresletet, amelyet ezek a vásárlók a rendszer sorbanállás nélküli normál állapotában támasztanának. (A φ érték általában különbözik a sorbanállás melletti normál állapotokban fellépő potenciális igényektől. Ez utóbbi áramlás az 1.1 következmény egyenleteiből számolható ki, és azokat a vásárlókat foglalja magába, akik igényelnének G-t, ha nem kellene sorbanállni érte.)

Miután a φ mennyiség jelentését áttekintettük, visszatérünk annak tanulmányozásához, hogyan függ a normál állapot a kiszolgálási kapacitástól, a viszonylagos ártól és a vásárlói attitűd néhány elemétől. Ehhez a normál állapotot sokféle szempontból kell megvizsgálni. A normál állapot egy kézenfekvő leírása egyszerűen a vásárlók megoszlása a négy lehetséges állapotban, — „sorbanálló", „G-vel kielégített", „H-val kielégített" és „halasztó" —, ahogy azt maguknak az állapotváltozóknak a normál értéke meghatározza. Ezen mennyiségek kiegészítéseként megnézhetjük még a potenciális fogyasztók áramát, azaz azokat a vásárlókat, akik megvennék G-t, ha az sorbanállás nélkül kapható lenne (a sor előtti utolsó döntési ponthoz áramlásra gondolunk itt, lásd az 1. és 2. ábrát). Ez az áram általában három részre oszlik: a sorbanállók, a kényszerhelyettesítők, valamint a halasztók részáramlására.

Egy normál állapotban ezeket az i típusú potenciális fogyasztók következő részarányai képviselik. $i = 1, \ldots, k$:

(5.1) $(fq)_i^* = f_i(w^*)$ (a sorbanállás felé áramlók),

(5.2) $(fs)_i^* = \big(1 - f_i(w^*)\big) \cdot c_i(\pi)$ (a kényszerhelyettesítés felé áramlók),

(5.3) $(fp)_i^* = \big(1 - f_i(w^*)\big) \cdot \big(1 - c_i(\pi)\big)$ (a halasztás felé áramlók).

E felosztást úgy lehet tekinteni, mint a vásárlók választását, milyen társadalmi költségekkel küzdenek meg a hiánnyal: időt fordítanak a sorbanállásra, vásárolnak egy kedvezőtlenebb terméket vagy nem vásárolnak. A $\lambda \geq \varphi$ „hiánymentes'' esetben $w^* = 0$ és így $(fq)_i^* = 1$, $(fs)_i^* = (fp)_i^* = 0$ valamennyi i mellett. A $\lambda < \varphi$ esetben hiány van, $w^* > 0$ és valamennyi részarány pozitív lehet. A kényszerhelyettesítést tekintve nemcsak az $(fs)_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ részáramlások tarthatnak érdeklődésre számot, hanem az állomány részarányok is, vagyis a kényszerhelyettesítőknek az összes helyettesítőkhöz viszonyított száma. Tetszőleges normálállapotot nézve, az i vásárlási csoportban jelöljük ezt a részarányt r_i^*-gal $(i = 1, \ldots, k)$. Az 1.1 és 1.2 következmények egyenleteiből a következő kifejezést kapjuk:

$$r_i^* = \frac{a_i(\pi) \cdot c_i(\pi) \cdot \big(1 - f_i(w^*)\big)}{c_i(\pi) \cdot \big(1 - f_i(w^*)\big) + \big(1 - a_i(\pi)\big) \cdot f_i(w^*)} \qquad (i=1, 2, \ldots, k), \tag{5.4}$$

ahol r_i^* nulla lesz, ha a számláló nulla. Például a $\lambda \geq \varphi$ „hiánymentes'' esetben $w^* = 0$ és így $r_i^* = 0$ valamennyi i-re.

A normál állapotot az összes megemlített szempontból elemezni nagyon hosszas lenne, hogy csak a legkisebbet mondjuk a nehézségek közül. Mégis, mivel az állapotváltozók és mutatók normál értékei többé-kevésbé közvetlenül kapcsolódnak a w^* normál sorbanállási időhöz, ezért a teljesség túlzott megsértése nélkül megtehetjük, hogy következő elemzésben erre az alapvető jellemzőre összpontosítunk.

A w^* normál sorbanállási időt az 1.1 és 1.2 következmény a $w^* = x_i^*/\lambda$ azonosságon keresztül meghatározza. Az egyszerűség kedvéért eredményünket itt újra megfogalmazzuk. Legyen a $G : R_+ \to R_+$ függvény definíciója a következő:

$$G(w) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i(\pi) \cdot n_i}{A_i(w) + a_i(\pi) \cdot w}. \tag{5.5}$$

1.3. *Következmény*

a) Ha $\lambda < \varphi$, akkor $w^* > 0$. Ezenkívül w^* a $G(w) = \lambda$ egyenlet egyértelmű megoldása.

b) Ha $\lambda \geq \varphi$, akkor $w^* = 0$

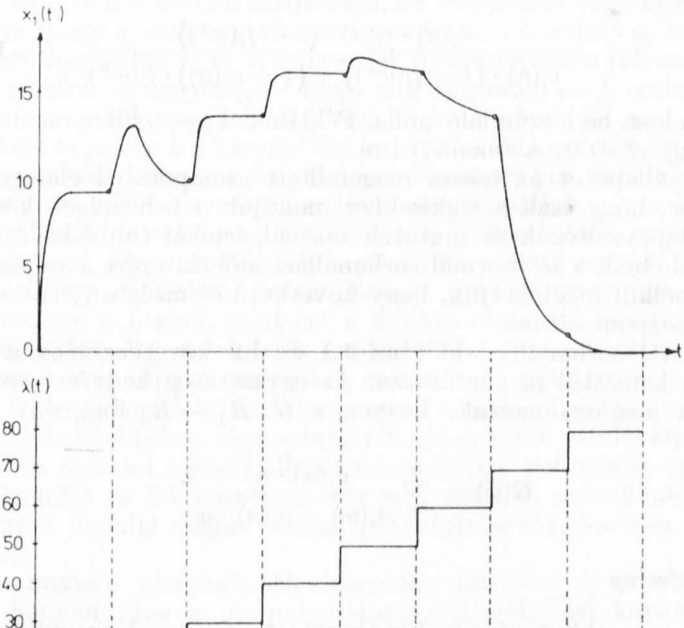
5.2. *Függés a kiszolgálási kapacitástól*

Azt fogjuk most tanulmányozni, hogyan függ a w^* normál sorbaállási idő a λ kiszolgálási kapacitástól, ha az összes többi paraméter és függvény (így a φ is) állandó. Hasonlítsuk össze a normál sorbanállási időt egy alacsonyabb és egy magasabb kiszolgálási kapacitás esetén!

Intuitív meggondolással azt várjuk, hogy a nagyobb kiszolgálási kapacitásnál a sorbanállási idő kisebb lesz. A G függvény monotonitásából közvetlenül következik is, hogy valóban ez a helyzet:

1. Észrevétel: A w^* normál sorbanállási idő a λ kiszolgálási kapacitás folytonos függvénye. $\lambda \in (0, \varphi)$ esetén e függvény pozitív és csökkenő, míg $\lambda \geq \varphi$ esetén azonosan nulla.

Egy megjegyzést kell itt tenni a sor x_1^* normál hosszáról. Elsőre azt gondolnánk, hogy a fenti eredmény a normál sorhosszra is fennáll, azaz a nagyobb kiszolgálási kapacitás rövidebb sorral jár együtt. Ebben a modellben azonban azt feltételeztük, hogy a sorbanállási idő és nem a sorbanálló személyek száma az, ami befolyásolja a potenciális fogyasztó sorbanállási hajlandóságát. Ezért a sorbanállási hajlandóság függvények tulajdonságaira vonatkozó józan feltevések mellett is lehetséges, hogy a normál sorhossz nem-monoton módon kapcsolódik a kiszolgálási kapacitáshoz. Ez a helyzet például, ha az elfogadható sorbanállási időnek véges felső korlátja van, vagy pontosabban, ha létezik egy olyan véges w_0, hogy $f_i(w_0) = 0$ $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén.



4. ábra: A sor hosszának $(x_1(t))$ tipikus alakulása a kiszolgálási kapacitás $(\lambda(t))$ lépcsőzetes növekedése esetén. t az időt jelöli, a kis körök az egymást követő normál sorhosszakat. A modell számszerű specifikációját a 2. függelékben adjuk meg.

2. *Észrevétel:* Az x_*^1 normál sorhossz a λ kiszolgálási kapacitás folytonos függvénye, ami $\lambda \in (0, \varphi)$ esetén pozitív és $\lambda \geq \varphi$ esetén azonosan nulla. Ha az elfogadható sorbanállási időnek véges felső korlátja van, akkor $\lim_{\lambda \downarrow 0} x_1^* = 0$.

Tehát mivel x_1^* a λ-nak pozitív értékű és folytonos függvénye a $\lambda \in (0, \varphi)$ esetén, nem lehet monoton csökkenő az egész $(0, \varphi)$ intervallumban. A 4. ábra szemlélteti a sor hosszának függését a kiszolgálási kapacitástól egy tipikus esetben.

Összefoglalva: Magasabb kiszolgálási kapacitás rövidebb sorbanállási időt jelent, de maga a sor nem lesz feltétlenül rövidebb.

5.3. *Függés az ártól*

Tanulmányozzuk, hogyan függ a normál állapot a π viszonylagos ártól, ha az összes paraméter és függvény (köztük λ is) állandó. Mielőtt a normál állapotváltozókat tanulmányoznánk, néhány észrevételt kell tennünk a φ „hosszútávú potenciális keresletről". A (4.1) definícióból könnyen igazolható, hogy $\pi > 0$ esetén φ a π-nek folytonos és nem-növekvő függvénye. Továbbá $\varphi \to 0$, ha $\pi \to +\infty$. Ily módon, ha $\varphi(\pi = 0) > \lambda$, akkor $\varphi(\pi) = \lambda$ lesz valamely véges, pozitív π értékre. Jelölje π_0 a minimális árat, azok közül, melyek kielégítik ezt az egyenlőséget (e minimális ár létezését φ folytonossága biztosítja). Az 1.1 és 1.2 következmények folytán ez a következő eredményhez vezet arról, hogy van-e sor, vagy nincs a normál állapotban:

3. *Észrevétel:* A kiszolgálási kapacitás és a vásárlók attitűdjét jellemző paraméter és függvény-együttes bármely rögzített értékéhez létezik *minimális sor-megszüntető ár*, vagyis létezik egy véges π_0 viszonylagos ár, amely kielégíti a következőket:

$$\pi < \pi_0 \Rightarrow x_1^* > 0,$$
$$\pi \geq \pi_0 \Rightarrow x_1^* = 0.$$

Másképpen mondva: mindig van olyan viszonylagos ár, amely elég magas ahhoz, hogy megszüntesse a hozzátartozó normál állapotban a sorbanállást. Bármilyen vonzónak tűnik is egy ilyen normál állapot, vegyük észre, hogy bár a π_0 feletti áraknál nincs sorbanállás, a kiszolgált személyek számát nézve a helyzet nem javul. Az 1.1 és 1.2 következményből ugyanis könnyen igazolható, hogy az s^* normál kiszolgálási sebesség kielégíti az $s^* = \min(\lambda, \varphi)$ egyenletet. Így, mint a π viszonylagos ár függvénye, a normál kiszolgálási sebesség a (O, π_0) árintervallumban azonosan egyenlő λ-val, míg a $(\pi_0, +\infty)$ árintervallumban φ-vel együtt csökken.

Mivel a π_0 minimális sor-megszüntető ár a hosszútávú potenciális keresletet egyenlővé teszi a λ kiszolgálási kapacitással, azért a *walrasi piac-megtisztító árnak* tekinthető. Ez az ár a kifejtett determinisztikus modellben egyértelmű. Ezen ár alatt — ceteris paribus — mindig van sor, felette pedig soha nincs sor.

Nézzük meg most, mi történik a normál sorbanállási idővel, ha egy alacsony viszonylagos árat megemelünk. Intuitív alapon azt várjuk, hogy a magasabb árhoz tartozó normál sorbanállási idő ne legyen hosszabb, mint az alacsonyabb árhoz tartozó normál sorbanállási idő. Ez az összefüggés valóban fennáll modellünkben.

4. *Észrevétel:* A w^* normál sorbanállási idő a π viszonylagos ár folytonos függvénye. A $(0, \pi_0)$ intervallum áraira ez a függvény pozitív értékű és nem-növekvő, míg a $\pi \geq \pi_0$ árakra azonosan nulla.

Összefoglalva: Mindig van olyan viszonylagos ár, amely elég magas ahhoz, hogy megszüntesse a hozzátartozó normál állapotban a sorbanállást. E minimális sor-megszüntető ár alatti árakra a normál sorbanállási idő az ár növekedésével nem-növekvő.

5.4. *Függés a sorbanállási és a kényszerhelyettesítési hajlandóságtól*

Az előző két pontban tanulmányoztuk, hogyan függ a normál állapot az olyan „piaci szabályozó változóktól”, mint a viszonylagos ár és a kiszolgálási kapacitás. Most azt fogjuk megnézni, hogyan függ a normál állapot a vásárlói attitűd egyes elemeitől.

Tekintsük először a normál sorbanállási idő függését a vásárlók sorbanállási hajlandóságaitól, minden más paramétert és függvényt változatlanul hagyva. Legyen $f_1, f_2, \ldots, f_k$ és $g_1, g_2, \ldots, g_k$ a sorbanállási hajlandóság függvények két alternatív együttese. Ha minden i esetén $f_i(w) \geq g_i(w)$ minden $w > 0$-ra, és valamelyik i esetén $f_i(w) > g_i(w)$ minden $w > 0$-ra, akkor azt mondjuk, hogy az $[f_i]$ függvényegyüttes *dominálja* a $[g_i]$ függvényegyüttest.

5. *Észrevétel:* Tegyük fel, hogy $\lambda < \varphi$ és, hogy a sorbanállási hajlandóság függvények egy $[f_i]$ együttese dominálja a sorbanállási hajlandóság függvények egy másik, $[g_i]$ együttesét. Ekkor az első együtteshez tartozó normál sorbanállási idő meghaladja a másodikhoz tartozó normál sorbanállási időt.

Más szóval: magasabb sorbanállási hajlandóságok mellett hosszabb lesz a sorbanállási idő a normál állapotban.[10]

A következőkben nézzük a normál sorbanállási idő függését a vásárlók kényszerhelyettesítési hajlandóságától, minden más paramétert és függvényt (köztük a viszonylagos árat is) változatlanul hagyva. Legyen $[c_i]$ és $[d_i]$ a kényszerhelyettesítési hajlandóság függvények két alternatív együttese, és tegyük fel, hogy $[c_i]$ dominálja $[d_i]$-t, azaz minden i-re $c_i(\pi) \geq d_i(\pi)$ valamennyi $\pi \geq 0$ esetén, és valamelyik i-re $c_i(\pi) > d_i(\pi)$ valamennyi $\pi \geq 0$ esetén.

6. *Észrevétel:* Tegyük fel, hogy a kényszerhelyettesítési függvények egy $[c_i]$ együttese dominálja egy másik $[d_i]$ együttesüket. Bármely rögzített viszonylagos ár mellett a $[c_i]$-hez tartozó normál sorbanállási idő kisebb vagy egyenlő a $[d_i]$-hez tartozó normál sorbanállási időnél.

[10] Ez talán magától értetődőnek tűnik. Szeretnénk azonban felhívni az olvasó figyelmét az okozati összefüggés irányára. A sorbanállási hajlandóság lehet a fogyasztó egy döntési változója, de a sorbanállási idő az egyéni döntések együttes következménye lesz, és mint ilyen, az egyes egyén számára adott. A tényleges hiányhelyzet függ a vásárlók tűrésétől.

Más szóval: a magasabb kényszerhelyettesítési hajlandóságok sohasem vezetnek hosszabb normál sorbanállási időhöz.

Az 5. és 6. észrevétel megerősíti a 4.3 pont végén tett megjegyzésünket. Az állapotváltozók alakulása függ a különböző vásárlói csoportok attitűdjétől. Az is igaz, hogy *fennáll bizonyos „átváltási lehetőség" (trade-off) a hiány különféle nem-pénzbeli társadalmi költségei között.* A 6. észrevétel egy ilyen átváltási lehetőséget szemléltet. A vásárlók elérhetnek rövidebb sorbanállási időt, ha nagyobb mértékű kényszerhelyettesítés vállalására hajlandók. Egy ilyen költség csökkentése a többi növelése nélkül, általában csak azon tényezők megváltoztatásával biztosítható, amelyek itt a végső meghatározók: a fogyasztás és az önkéntes helyettesítés módjai az egyik oldalon és/vagy a kiszolgálási kapacitás és az ár a másik oldalon.

Végül megjegyezzük, hogy a λ és π „piaci szabályozó változók" megváltozásai — ugyanúgy, mint a vásárlói attitűd megváltozásai, általában elosztási hatásokkal járnak a vásárlói csoportokra nézve. Például a relatív ár növekedése helyettesítésre bírhatja az árérzékeny vásárlói csoportokat, mialatt a kevésbé árérzékeny csoportok változatlan fogyasztási mód mellett juthatnak rövidebb sorbanállási időhöz. Ugyanígy az egyik csoport magasabb kényszerhelyettesítési hajlandóságából — a rövidebb sorbanállási idő által — más csoportok húznak hasznot.

Tehát a pénzzel való jövedelemelosztás kérdéséhez, amit az irodalom kimerítően tárgyal, egy új, fontos szempont járul: a fogyasztás nem-pénzbeli társadalmi költségeinek eloszlása a népesség különböző csoportjai között.

6. A kiterjesztés irányai

Ez a cikkünk csak első lépés a problémák egy széles körében. Az elemzés nagyon szűk határok között mozog, drasztikus leegyszerűsítéseket alkalmazunk, bevezető célokra. Szükség van a téma kiterjesztésére és változatainak feltárására. Az alábbiakban felsorolunk néhányat a kutatás lehetséges irányai közül:

— A piac időben növekvő forgalom mellett;
— A kínálat, ezen belül a raktárkészletek endogén meghatározása;
— A résztvevők sztochasztikus egymásrahatása;
— A piac tagoltabb szervezete, pl. sok eladó egy helyett;
— Alternatív tevékenységek beépítése, például a vevők különböző eladási helyeken vagy különböző időpontokban keresik az árut;
— A vásárlók ismerete a kínálatról és az eladók ismerete a keresletről vagy exogén módon adott, vagy endogén módon határozódik meg;
— Prioritások a sorban az egyes vásárlói csoportok között;
— A megvásárolt mennyiség függ az ártól és/vagy a sorbanállási vagy a keresési időtől;

A következő cikkünk a keresés esetét fogja tárgyalni, részben felölelve a felsorolt kiterjesztések némelyikét.

I. FÜGGELÉK: A MATEMATIKAI ÁLLÍTÁSOK BIZONYÍTÁSA

1. Állítás:

Az alábbiakban sorraveszünk néhány speciális esetet.

I.: $a_i(\pi) = 0$ *valamennyi i-re.* Az $\dot{x}_{4i} = 0$ stacioneritási feltétel maga után vonja, hogy $x_{4i} = 0$ (A4-ből $c_i > 0$). $\dot{x}_{1i} = 0$-ból azt kapjuk, hogy $x_{1i} = 0$, lásd a (2.3) egyenletet. Továbbmenve, $\dot{x}_{2i} = 0$ magában foglalja, hogy $x_{2i} = 0$, és ily módon a teljesíthetőségből $x_{3i} = n_i$ következik. Összefoglalva: ebben az esetben pontosan egy teljesíthető stacionárius állapot van, nevezetesen az $x_{1i} = x_{2i} = x_{4i} = 0$ és $x_{3i} = n_i$ valamennyi i esetén.

II. $a_i(\pi) > 0$ *valamely i-re.* Tegyük fel, hogy $x_1 = 0$. Ekkor A2 szerint $f_i(w) = f_i(x_1/\lambda) = f_i(0) = 1$ minden i-re, és (2.3) szerint $s_i = 0$ minden i-re. Egy olyan i csoportot tekintve, amelyre $a_i(\pi) > 0$, azt kapjuk, hogy $\dot{x}_{1i} > 0$, ami kizárja a stacioneritást. Ezért ebben az esetben $x_1 > 0$ a stacioneritás egy szükséges feltétele.

II.A: Tekintsük először a stacioneritási feltételeket egy olyan i csoportra, ahol $a_i > 0$ és $f_i(w) > 0$.

$$\dot{x}_{1i} = \dot{x}_{4i} = 0 \Rightarrow \varrho_i f_i \cdot x_{4i} = (1 - c_i) \cdot (1 - f_i) \cdot s_i,$$
$$\dot{x}_{2i} = 0 \Rightarrow \gamma_i \cdot x_{2i} = s_i$$

Az $\dot{x}_{1i} = 0$ egyenletbe $x_{3i} = n_i - x_{1i} - x_{2i} - x_{4i}$-t helyettesítve a következőt kapjuk:

$$\left[(1 - a_i) \cdot f_i + \frac{\varkappa_i}{\gamma_i} \cdot a_i f_i + c_i(1 - f_i) + \frac{\varkappa_i}{\varrho_i} \cdot a_i \cdot (1 - c_i) \cdot (1 - f_i)\right] \cdot s_i = = a_i \varkappa_i \cdot f_i \cdot (n_i - x_{1i}),$$

$\varkappa_i$-vel és $f_i > 0$-val való osztás után

$$A_i(w) \cdot s_i = a_i \cdot (n_i - x_{1i}),$$

$A_i(w)$-t a (4.2) egyenlőséggel definiáltuk. A (2.1) és a (2.3) ($x_1 > 0$) egyenlőségek szerint $s_i = \lambda \cdot h_\sigma(x_1) \cdot x_{1i}/x_1$. A fenti egyenlőséget átrendezve azt kapjuk, hogy

$$x_{1i} = \frac{a_i \cdot n_i \cdot x_1}{A_i(w) \cdot \lambda \cdot h_\sigma(x_1) + a_i \cdot x_1} > 0. \qquad (*)$$

II.B: Másodszor tekintsük a stacioneritási feltételeket egy olyan i csoportra, ahol $a_i = 0$. Az I-ben már kifejtett indoklással $x_{1i} = 0$-hoz jutunk. Nézzük meg (*)-ot ismét. Ha ebben $a_i = 0$, akkor az egyenlőség $x_{1i} = 0$-át ad ($x_1 > 0$). Így (*) az $a_i = 0$ mellett is érvényes az i csoportra.

II.C: Harmadszor nézzük meg a stacioneritási feltételeket egy olyan i csoportra, amelyre $a_i > 0$ és $f_i(w) = 0$. Az $\dot{x}_{1i} = 0$ egyenletből azonnal adódik $x_{1i} = 0$. Tekintsük (*)-ot. Ha $f_i(w) = 0$, akkor $A_i(w) = +\infty$ és így a (*) egyenlőség $x_{1i} = 0$ ($x_1 > 0$)-ra redukálódik.

Összegezve: a (*) egyenlőség minden i-re érvényes, tekintet nélkül arra, hogy a_i és f_i pozitívak vagy nem, és ezért (*)-ot összegezhetjük i szerint. A (2.2) felhasználásával az $F_\sigma(x_1) = 1$ egyenlőséghez jutunk, ahol az F_σ: $(0, n] \to R_+$ függvény definíciója:

$$F_\sigma(x_1) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i \cdot n_i}{A_i\left(\frac{x_1}{\lambda}\right) \cdot \lambda \cdot h_\sigma(x_1) + a_i \cdot x_1}.$$

Az A1—A4 feltevésekből világos, hogy $A_i(x_1/\lambda) > 0$ és $\frac{\partial}{\partial x_1} A_1(x_1/\lambda) \geqq 0$ minden $x_1 > 0$ esetén. A5-öt hozzávéve ez maga után vonja, hogy F_σ folytonos és csökkenő,[11] valamint, hogy $\lim_{x_1 \downarrow 0} F_\sigma(x_1) = +\infty$ és $F_\sigma(n) < \sum_i n_i/n = 1$. Következésképp az $F_\sigma(x_1) = 1$ egyenletnek a $(0, n)$ intervallumban egy és csak egy gyöke van. Mivel ez az egyenlet a stacioneritás szükséges feltétele, már csak azt kell igazolni, hogy a gyök valóban a rendszer egy egyértelmű teljesíthető állapotát határozza meg.

Tekintsünk először egy i csoportot, amely a II. A speciális esetben van. A fenti egyenletek egyértelmű, nem-negatív értékeket adnak x_{1i}, x_{2i} és x_{4i}-nek. Az $x_{3i} = n_i - x_{1i} - x_{2i} - x_{4i}$ egyenlőség egyértelmű értéket ad x_{3i}-nek, amely (*) érvényessége miatt nem-negatív:

$$x_{3i} = n_i - \left[1 + \left(\frac{a_i}{\gamma_i} + \frac{a_i}{\varrho_i} \cdot (1 - c_i) \cdot \left(\frac{1}{f_i} - 1\right)\right) \cdot \frac{\lambda}{a_i \cdot x_1} \cdot h_\sigma(x_1)\right] \cdot x_{1i} \geq$$

$$\geq n_i - \left[1 + A_i(w) \cdot \frac{\lambda}{a_i \cdot x_1} \cdot h_\sigma(x_1)\right] \cdot x_{1i} =$$

$$= n_i - \frac{a_i \cdot x_1 + A_i(w) \cdot \lambda \cdot h_\sigma(x_1)}{a_i \cdot x_1} \cdot x_{1i} = n_i - \frac{n_i}{x_{1i}} \cdot x_{1i} = 0.$$

Mivel az x_{3i} szerkesztése miatt $x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} + x_{4i} = n_i$, kimondhatjuk, hogy a fenti x_1 gyök egy ilyen i csoport számára egyértelműen meghatározza az állapotváltozók egy teljesíthető stacionárius értékét.

Tekintsünk másodszor egy II.B speciális helyzetben levő i csoportot. Itt $x_{1i} = x_{2i} = 0$. Mivel $a_i = 0$, azért $c_i > 0$ A4 szerint. Az $\dot{x}_{3i} = \dot{x}_{4i} = 0$ egyenletek miatt $x_{4i} = 0$, és így $x_{1i} = x_{2i} = x_{4i} = 0$, $x_{3i} = n_i$ lesznek az egyértelmű teljesíthető stacionárius állapotváltozó értékek egy ilyen csoportra.

Harmadszor, a II.C speciális eset azonnal $x_{1i} = x_{2i} = 0$ értékeket ad, és az $\dot{x}_{3i} = \dot{x}_{4i} = 0$ egyenletek egyértelműen meghatározzák az x_{3i} és x_{4i} teljesíthető értékeit.

Összegezve: az $F_\sigma(x_1) = 1$ egyetlen gyöke egyértelműen meghatároz egy teljesíthető stacionárius állapotot.

1.1. Következmény:

Az $a_1(\pi) = \ldots = a_k(\pi) = 0$ triviális esetet a $0 < \lambda < \varphi$ hipotézis miatt egyből kizárhatjuk. Legyen most bármely rögzített $\sigma > 0$ esetén az F_σ függvény olyan, mint az 1. állítás bizonyításában. Ott megmutattuk, hogy $x_1^*(\sigma)$

[11] Emlékeztetünk rá, hogy a „csökkenő" és „növekvő" fogalmakat szigorú értelmükben használjuk, lásd erről a lábjegyzetet a 3.2 pontban.

az $F_\sigma(x) = 1$ egyenlet egyértelmű megoldása. Definiálja az F: $[0, n] \to R_+$ függvényt a következő kifejezés:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i \cdot n_i}{\lambda \cdot A_i\left(\frac{x}{\lambda}\right) + a_i x}.$$

A h_σ kisimító függvény definíciója szerint $x \geq \sigma$ esetén F egybeesik F_σ-val, $x < \sigma$ esetén pedig F_σ majorizálja F-et. Tekintsük most az $F(x) = 1$ egyenletet. A2 következtében $F(0) = \varphi/\lambda$. Továbbmenve, $\varphi/\lambda > 1$ feltevés szerint, és $F(n) = \sum_i n_i/n = 1$. Mivel F folytonos és csökkenő függvény, azért az $F(x) = 1$ egyenletnek létezik egy egyértelmű $x_0 \in (0, n)$ megoldása. Tehát valamennyi $\sigma < x_0$ esetén fenn kell, hogy álljon $x_1^*(\sigma) = x_0$.

Legyen most $\{h_{\sigma_m}\}_{m=1}^{\infty}$ a kisimító függvények tetszőleges olyan sorozata, hogy $\sigma_m \downarrow 0$. Ekkor létezik egy N véges egész szám, olyan, hogy $x_1^*(\sigma_m) = x_0$ minden $m > N$ esetén. Ily módon, ha $\sigma \downarrow 0$, akkor $x_1^*(\sigma) \to x_0$, a választott sorozattól függetlenül. Ezzel bebizonyosodott, hogy $x_1^* = x_0 > 0$, x_1^* tehát a (4.3) egyenlet egyértelmű megoldása. Az 1. állítás bizonyításából következik, hogy $x_{1i}^*(\sigma)$ határértéke az, ami a (4.4) egyenlőségben. (4.5) és (4.7) is közvetlenül következik ebből a bizonyításból. $x_{3i}^*(\sigma)$ analitikus kifejezése az $x_{3i}^*(\sigma) = n_i - x_{1i}^*(\sigma) - x_{2i}^*(\sigma) - x_{4i}^*(\sigma)$ összefüggésből következik, és ez megadja (4.6)-ot.

1.2. Következmény:

Az $a_1(\pi) = \ldots = a_k(\pi) = 0$ triviális esetben az 1. állítás bizonyításából azt kapjuk, hogy $x_{1i}^*(\sigma) = x_{2i}^*(\sigma) = x_{4i}^*(\sigma) = 0$ és $x_{3i}^*(\sigma) = n_i$. Ez az eredmény megfelel a következmény kijelentéseinek. Ezután, feltételezve, hogy valamely i-re $a_i(\pi) > 0$ és F_σ-t olyannak választva, mint az 1.1 következmény bizonyításában, megvizsgáljuk az $F_\sigma(x) = 1$ egyenletet, amelynek megoldása $x = x_1^*(\sigma)$. Legyen F olyan alakú, mint az 1.1 következmény bizonyításában. Tudjuk, hogy $F(0) = \varphi/\lambda \leq 1$ feltevés szerint. Mivel F csökkenő függvény, $F(\sigma) < 1$. Továbbmenve, $F_\sigma(\sigma) = F(\sigma)$ és így $F_\sigma(\sigma) < 1$. Ezért $x_1^*(\sigma) < \sigma$, az F_σ monotonitása folytán. Mivel ez utóbbi egyenlőtlenség bármely $\sigma > 0$ esetén fennáll, kimondhatjuk, hogy a kisimító függvények bármely $\{h_{\sigma_m}\}_{m=1}^{\infty}$ $\sigma_m \downarrow 0$ sorozatára $x_1^*(\sigma_m) \to 0$. Eszerint $\lim\limits_{\sigma \downarrow 0} x_1^*(\sigma) = 0$.

Ami az állapotváltozók határértékét illeti, a (4.8) egyenlőségből azonnal következik, hogy $0 \leq x_{1i}^*(\sigma) \leq x_1^*(\sigma) \to 0$. Továbbmenve, f_i folytonossága miatt $w^*(\sigma) \to 0$ maga után vonja, hogy $f_i(w^*(\sigma)) \to f_i(0) = 1$. Tehát, az 1. állítás bizonyítását megnézve, $x_{4i}^*(\sigma) \to 0$. Tetszőleges $\sigma > 0$ esetén fennáll, hogy

$$x_{2i}^*(\sigma) = \frac{1}{\gamma_i} \cdot \left(\lambda \cdot h_\sigma(x_1^*(\sigma)) \cdot x_{1i}^*(\sigma)/x_1^*(\sigma)\right) = \frac{a_i}{\gamma_i} \cdot \frac{n_i - x_{1i}^*(\sigma)}{A_i(w^*)}.$$

Így $\sigma \downarrow 0$ esetén $x_{2i}^*(\sigma) \to \frac{a_i}{\gamma_i} \cdot \frac{n_i}{A_i(0)}$, ami a (4.9) egyenlőséget adja. Végül $x_{3i}^*(\sigma) = n_i - x_{1i}^*(\sigma) - x_{2i}^*(\sigma) - x_{4i}^*(\sigma)$, ami a (4.10) egyenlőséghez vezet.

2. Állítás:

A differenciálegyenlet-rendszerek linearizálásának szokásos módszerét alkalmazzuk a stacionárius állapotban [vö. Hale (1969)-ben a III. fejezet 6.1 következményével].

(a) $\lambda < \varphi$:

Legyen $\varepsilon = x_0$, ahol x_0 az $F(x) = 1$ egyenlet egyértelmű megoldása az 1.1 következmény bizonyításában. Ekkor bármely $\sigma \in (0, \varepsilon)$ esetén $x_1^* = x_0 > 0$, lásd az 1.1 következmény bizonyítását. Az x_1^*, x_2^*, x_3^* és x_4^* értékek az 1.1 következmény egyenletei által adottak. Tudjuk azt is, hogy $h_\sigma(x_1) = 1$ valamennyi $\sigma \in (0, \varepsilon)$ esetén.

Az alábbi elemzésben feltesszük, hogy $\sigma < \varepsilon$ és u_i bevezetésével x_i-t a következőképpen helyettesítjük (x_i^* $x_i^*(\sigma)$-t jelent):

$$\begin{cases} x_1 = x_1^* + u_1 \\ x_2 = x_2^* + u_2 \\ x_3 = x_3^* + u_3 \\ x_4 = x_4^* + u_4, \end{cases}$$

ahol $u_4 = -u_1 - u_2 - u_3$ a teljesíthetőség végett. Továbbmenve, $w = x_1/\lambda = w^* + u_1/\lambda$ és $f(w) = f(w^*) + f'(w^*) \cdot u_1/\lambda + o(u_1)$ Taylor tétele szerint. (f'' folytonossága teszi a Taylor-kifejtés maradéktagját folytonossá, ami a stabilitási tétel fennállásának egy elégséges feltétele.) Azt is tudjuk, hogy $h_\sigma(x_1) = 1$, mert $|u_1| < \varepsilon - \sigma$. Az eredeti differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a \cdot f(w) \cdot \gamma \cdot x_2 + a \cdot f(w) \cdot \varkappa \cdot x_3 + f(w) \cdot \varrho \cdot x_4 - \lambda \cdot h_\sigma(x_1) \\ \dot{x}_2 = \lambda \cdot h_\sigma(x_1) - \gamma \cdot x_2 \\ \dot{x}_3 = \big(1 - a \cdot (1-c)\big) \cdot \gamma \cdot x_2 - a \cdot c \cdot f(w) \cdot \gamma \cdot x_2 - a \cdot (1-c) \cdot \varkappa \cdot x_3 - \\ \qquad - a \cdot c \cdot f(w) \cdot \varkappa \cdot x_3 + c \cdot \varrho \cdot x_4 - c \cdot f(w) \cdot \sigma \cdot x_4 \\ x_4 = n - x_1 - x_2 - x_3 . \end{cases}$$

Jelölje f^* $f(w^*)$-ot és $f^{*\prime}$ a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} f(w)|_{w=w^*}$ deriváltat, és tegyük fel, hogy $|u_1| < \varepsilon - \sigma$. A behelyettesítés után:

$$\dot{u}_1 = a \cdot \left(f^* + \frac{u_1}{\lambda} \cdot f^{*\prime}\right) \cdot \gamma \cdot (x_2^* + u_2) + a \cdot \left(f^* + \frac{u_1}{\lambda} \cdot f^{*\prime}\right) \cdot \varkappa \cdot (x_3^* + u_3) +$$

$$+ \left(f^* + \frac{u_1}{\lambda} \cdot f^{*\prime}\right) \cdot \varrho \cdot (x_4^* + u_4) - \lambda + o(u_1),$$

$$\dot{u}_2 = \lambda - \gamma \cdot (x_2^* + u_2),$$

$$\dot{u}_3 = \big(1 - a(1-c)\big) \cdot \gamma \cdot (x_2^* + u_2) - a \cdot c \cdot \left(f^* + \frac{u_1}{\lambda} \cdot f^{*\prime}\right) \cdot \gamma \cdot (x_2^* + u_2) -$$

$$- a \cdot (1-c) \cdot \varkappa \cdot (x_3^* + u_3) - a \cdot c \cdot \left(f^* + \frac{u_1}{\lambda} f^{*\prime}\right) \cdot \varkappa \cdot (x_3^* + u_3) +$$

$$+ c \cdot \varrho \cdot (x_4^* + u_4) - c \cdot \left(f^* + \frac{u_1}{\lambda} \cdot f^{*\prime}\right) \cdot \varrho \cdot (x_4^* + u_4),$$

$$u_4 = -u_1 - u_2 - u_3.$$

A tagok átrendezése és az x_1^*, x_2^*, x_3^* és x_4^*-re definíció szerint teljesülő $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{x}_4 = 0$ stacioneritási egyenletek érvényesítése után a következőt kapjuk:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \left(a \cdot \frac{\gamma}{\lambda} \cdot x_2^* + a \cdot \frac{\varkappa}{\lambda} \cdot x_3^* + \frac{\varrho}{\lambda} \cdot x_4^*\right) \cdot f^{*\prime} \cdot u_1 - \varrho \cdot f^* \cdot u_1 + \\ \quad + (a \cdot \gamma - \varrho) \cdot f^* \cdot u_2 + (a \cdot \varkappa - \varrho) \cdot f^* \cdot u_3 + o(|u|) \\ \dot{u}_2 = -\gamma \cdot u_2 \\ \dot{u}_3 = -c \cdot \left(a \cdot \frac{\gamma}{\lambda} \cdot x_2^* + a \cdot \frac{\varkappa}{\lambda} \cdot x_3^* + \frac{\varrho}{\lambda} \cdot x_4^*\right) \cdot f^{*\prime} \cdot u_1 - c \cdot (1 - f^*) \cdot \varrho \cdot u_1 + \\ \quad + [(1 - a(1 - c)) \cdot \gamma - a \cdot c \cdot \gamma \cdot f^* - c \cdot \varrho \cdot (1 - f^*)] \cdot u_2 - \\ \quad - [a \cdot (1 - c) \cdot \varkappa + a \cdot c \cdot f^* \cdot \varkappa + c \cdot \varrho \cdot (1 - f^*)] \cdot u_3 + o(|u|). \end{cases}$$

Az 1.1 következmény szerint:

$$a \cdot \frac{\gamma}{\lambda} \cdot x_2^* + a \cdot \frac{\varkappa}{\lambda} \cdot x_3^* + \frac{\varrho}{\lambda} \cdot x_4^* = 1/f^*.$$

Ily módon:

$$\dot{u}_1 = (f^{*\prime}/f^* - \varrho \cdot f^*) \cdot u_1 + (a \cdot \gamma - \varrho) \cdot f^* \cdot u_2 + (a \cdot \varkappa - \varrho) \cdot f^* \cdot u_3 + o(|u|)$$

$$\dot{u}_2 = -\gamma \cdot u_2$$

$$\dot{u}_3 = -c \cdot (f^{*\prime}/f^* + \varrho \cdot (1 - f^*)) \cdot u_1 + [(1 - a \cdot (1 - c)) \cdot \gamma - a \cdot c \cdot \gamma \cdot f^* - c \cdot \varrho \cdot (1 - f^*)] \cdot$$
$$\cdot u_2 - [a \cdot (1 - c) \cdot \varkappa + a \cdot c \cdot \varkappa \cdot f^* + c \cdot \varrho \cdot (1 - f^*)] \cdot u_3 + o(|u|).$$

Mátrix-megjelölésekkel: $\dot{u} = A \cdot u + o(|u|)$.

Hátra van még, hogy meghatározzuk A sajátértékeinek előjelét. Az általános sajátértéket z-vel jelölve, és kifejtve a $\det(A - z \cdot I) = 0$ karakterisztikus egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$(z + \gamma) \cdot [z^2 + (\varrho \cdot f^* - f^{*\prime}/f^* + e) \cdot z + (\varrho \cdot f^* - f^{*\prime}/f^*) \cdot e +$$
$$+ (a \cdot \varkappa - \varrho) \cdot c \cdot (f^{*\prime}/f^* + \varrho \cdot (1 - f^*)) f^*] = 0,$$

ahol

$$e = a \cdot (1 - c) \cdot \varkappa + c \cdot \varrho + c \cdot (a \cdot \varkappa - \varrho) \cdot f^*.$$

Mivel $\gamma > 0$, nyilvánvalóan lesz egy sajátérték, amelynek negatív a valós része. A két másik sajátérték a $z^2 + \alpha \cdot z + \beta = 0$ másodfokú egyenlet gyöke, amely egyenletben

$$\alpha = \varrho \cdot f^* - f^{*\prime}/f^* + e > 0,$$

$$\beta = (\varrho \cdot f^* - f^{*\prime}/f^*) \cdot e + (a \cdot \varkappa - \varrho) \cdot c \cdot (f^{*\prime}/f^* + \varrho(1 - f^*)) \cdot f^* =$$
$$= a \cdot \varkappa \cdot \varrho \cdot f^* - f^{*\prime}/f^* \cdot (a \cdot (1 - c) \cdot \varkappa + c \cdot \varrho) > 0$$

($a > 0$, $f^* > 0$, $f^{*\prime} \leq 0$). A valós és képzetes részek megállapítása azt mutatja, hogy mindkét gyöknek negatív a valós része.

Összegezve: mindhárom sajátértéknek negatív a valós része, és így a stacionárius állapot aszimptotikusan stabil.

(*b*) $\lambda \geq \varphi$:

Itt ugyanazon eljárást alkalmazzuk, mint a fenti (*a*) esetben. Először is megjegyezhető, hogy tetszőleges $\sigma > 0$ esetén $x_1^*(\sigma) < \sigma$, lásd az 1.2 következmény bizonyítását. Azzal a behelyettesítéssel, amit az (*a*)-nál is alkalmaztunk, feltesszük most, hogy $\sigma < \lambda \cdot \delta$ és $|u_1| < \sigma - x_1^*(\sigma)$, és így

$$w = x_1/\lambda = (x_1^* + u_1)/\lambda < \sigma/\lambda < \delta \Rightarrow f(w) = 1,$$
$$h_\sigma(x_1) = h_\sigma(x_1^*) + u_1 \cdot h'_\sigma(x_1^*) + o(u_1)$$

lesz, ahol a maradéktag h''_σ folytonossága következtében folytonos. A differenciálegyenlet-rendszer ekkor:

$$\begin{cases} \dot u_1 = a \cdot \gamma \cdot (x_2^* + u_2) + a \cdot \varkappa \cdot (x_3^* + u_3) + \varrho \cdot (x_4^* + u_4) - \lambda \cdot h_\sigma^* - \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime} \cdot u_1 + o(|u|) \\ \dot u_2 = \lambda \cdot h_\sigma^* + \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime} \cdot u_1 - \gamma \cdot (x_2^* + u_2) - o(|u|) \\ \dot u_3 = (1-a) \cdot \gamma \cdot (x_2^* + u_2) - a \cdot \varkappa \cdot (x_3^* + u_3) \\ u_4 = -u_1 - u_2 - u_3. \end{cases}$$

Végül a stacioneritási egyenletek érvényesítése az x_1^*, x_2^*, x_3^* és x_4^*-re a következőt adja:

$$\begin{cases} \dot u_1 = -(\varrho + \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime}) \cdot u_1 - (\varrho - a \cdot \gamma) \cdot u_2 - (\varrho - a \cdot \varkappa) u_3 + o(|u|) \\ \dot u_2 = \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime} \cdot u_1 - \gamma \cdot u_2 + c(|u|) \\ \dot u_3 = (1-a) \cdot \gamma \cdot u_2 - a \cdot \varkappa \cdot u_3 . \end{cases}$$

Mátrix-jelölésekkel: $\dot u = B \cdot u + o(|u|)$. A $\det(A - z \cdot I) = 0$ karakterisztikus egyenlet:

$$(z + a \cdot \varkappa) \cdot [z^2 + (\gamma + \varrho + \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime}) \cdot z + \varrho \cdot (\gamma + \lambda \cdot h_\sigma^*) + \gamma \cdot (1-a) \cdot \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime}] +$$
$$+ (\varrho - a \cdot \varkappa) \cdot \gamma \cdot (1-a) \cdot \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime} = 0.$$

Az A1 feltevés következtében $\varrho > \varkappa$ és így az utolsó tag nem-negatív. A z^3 kifejezés együtthatója is pozitív. Tegyük fel, hogy $\mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_2) \leq \mathrm{Re}(z_3)$. Ekkor $\mathrm{Re}(z_3)$ nem haladja meg a

$$(z + a \cdot \varkappa) \cdot [z^2 + (\gamma + \varrho + \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime}) \cdot z + \varrho \cdot (\gamma + \lambda \cdot h_\sigma^*) + \gamma \cdot (1-a) \cdot \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime}] = 0$$

egyenlet gyökei valós részének maximumát. Mivel $0 < a \leq 1$ és $h_\sigma^{*\prime} \geq 0$, valamennyi sajátérték valós része negatív (a valós és a képzetes részeket oly módon azonosítva, mint az (*a*) bizonyításban). Így a stacionárius állapot aszimptotikusan stabil.

3. Állítás:

Mivel $x_4(0) = 0$ és $c = 1$, azért $x_4(t) = 0$ minden $t \geq 0$ esetén. A differenciálegyenlet-rendszer ekkor:

$$\dot{x}_1 = a \cdot f(w) \cdot \gamma \cdot x_2 + a \cdot f(w) \cdot \varkappa \cdot x_3 - \lambda \cdot h_\sigma(x_1),$$
$$\dot{x}_2 = \lambda \cdot h_\sigma(x_1) - \gamma \cdot x_2,$$
$$x_3 = n - x_1 - x_2.$$

A rendszer globális viselkedését fogjuk tanulmányozni az (x_1, x_2) hipersíkon:

$$\dot{x}_1 = a \cdot f(w) \cdot \varkappa \cdot (n - x_1) - a \cdot f(w) \cdot (\varkappa - \gamma) \cdot x_2 - \lambda \cdot h_\sigma(x_1),$$
$$\dot{x}_2 = \lambda \cdot h_\sigma(x_1) - \gamma \cdot x_2 .$$

Az 1.1 következmény bizonyításából tudjuk, hogy $x_1(\sigma) = x_0$ minden $\sigma \in (0, x_0)$ esetén, ahol x_0 az $F(x) = 1$ egyenlet egyértelmű megoldása. Az ilyen σ értékekre $h_\sigma(x_1^*(\sigma)) = 1$. Az 1. állítás magában foglalja, hogy az $\dot{x}_1 = \Delta$ és $\dot{x}_2 = 0$ szintvonalak a teljesíthető $\{(x_1, x_2);\, x_1 + x_2 \leq n,\, x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0\}$ halmaz egy pontjában metszik egymást.

Az $\dot{x}_1 = 0$ szintvonalat az

$$a \cdot f(w) \cdot (\varkappa - \gamma) \cdot x_2 = a \cdot f(w) \cdot \varkappa \cdot (n - x_1) - \lambda \cdot h_\sigma(x_1)$$

egyenlet határozza meg. (Vegyük észre, hogy $f(w) > 0$ rajta van ezen a szintvonalon, mivel $f(w) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow f(w) = f(x_1/\lambda) = f(0) = 1$ ellentmond A2-nek.)

Az $\dot{x}_1 = 0$ szintvonal három lehetséges alakját különböztetjük meg:

$$\underline{\gamma < \varkappa}\colon\ x_2 = G_1(x_1) = \frac{\varkappa}{\varkappa - \gamma} \cdot (n - x_1) - \frac{\lambda}{a \cdot (\varkappa - \gamma)} \cdot \frac{h_\sigma(x_1)}{f(x_1/\lambda)},$$
$$G_1(0) > 0,\quad G_1'(x_1) < 0,\quad G_1(n) < 0.$$

$$\underline{\gamma = \varkappa}\colon\ n - x_1 = \frac{\lambda}{a\varkappa} \cdot \frac{h_\sigma(x_1)}{f(x_1/\lambda)} \Rightarrow x_1 = x_1^*(\sigma),$$

$$\underline{\gamma > \varkappa}\colon\quad x_2 = G_1(x_1),\quad G_1(0) < 0,\quad G_1'(x_1) > 0,\quad G_1(n) > 0.$$

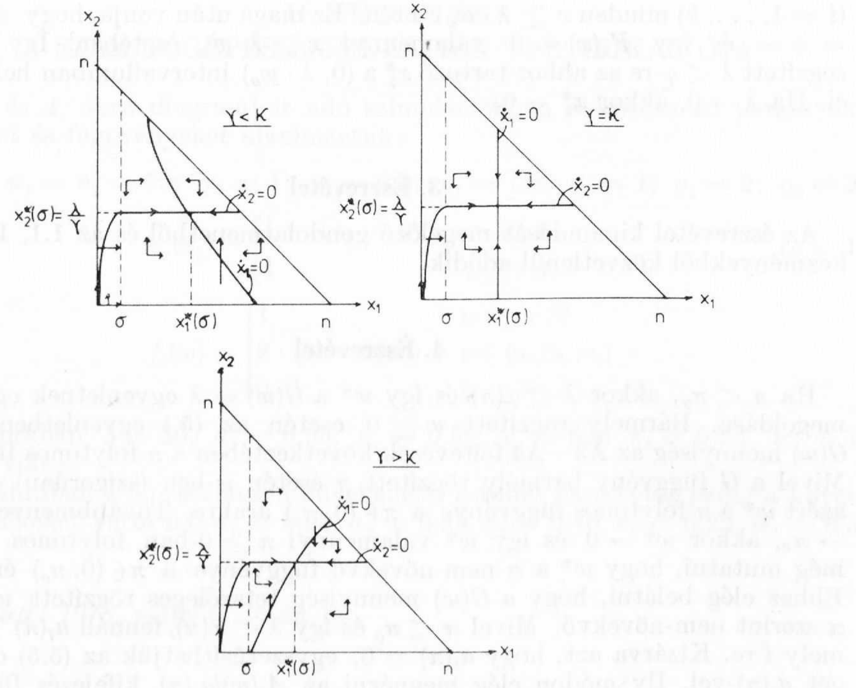
Ami az $\dot{x}_2 = 0$ szintvonalat illeti, egy analitikus alakja kielégíti:

$$x_2 = G_2(x_1) = \frac{\lambda}{\gamma} \cdot h_\sigma(x_1),$$

$$G_2(0) = 0,\quad G_2'(x_1) > 0,\quad x_1 \in [0, \sigma),\quad G_2(x_1) = \frac{\lambda}{\gamma},\quad x_1 \geq \sigma.$$

Felhasználva ezen analitikus eredményeket a következő hipersík diagramokat rajzolhatjuk fel a három, $\gamma < \varkappa$, $\gamma = \varkappa$ és $\gamma > \varkappa$ esetre:

A nyilak a deriváltak előjelét mutatják. (A nyilak irányát a differenciálegyenletekben szereplő előjelekből állapítottuk meg.) Elemezzük a hipersíkdiagramot a $\gamma < \varkappa$ esetben. A szintvonalak a hipersíkot négy részre osztják, legyenek ezek: ÉK, ÉNy, DNy és DK. Ha a rendszer az ÉK-i részben indul, akkor vagy belép ÉNy-ba, vagy a stacionárius állapothoz konvergál. Ha az ÉNy-i részben indul, vagy belép DNy-ba; vagy a stacionárius állapothoz konvergál. Ha a rendszer DNy-ban van, vagy DK-be lép, vagy a stacionárius



5. ábra

állapothoz konvergál. Végül, ha a rendszer a DK-i részben indul, akkor nem léphet be egy másik részbe sem és a stacionárius állapothoz konvergál.

Hasonló meggondolásokat téve az $\gamma = \varkappa$ és $\gamma > \varkappa$ estekre bebizonyosodik, hogy a rendszer mindhárom esetben a stacionárius állapothoz konvergál.

1.3. Következmény:

A (4.3) egyenlőségbe helyettesítsük be $w = x_1/\lambda$-át.

1. Észrevétel

Ha $\lambda < \varphi$, akkor w^* a $G(w) = \lambda$ egyértelmű megoldása. Mivel G szigorúan monoton csökkenő függvény, w^* folytonos és csökkenő függvénye λ-nak $\lambda \in (0, \varphi)$ esetén. Ha $\lambda \to \varphi$, $w^* \to 0$ és így w^* λ-nak folytonos függvénye minden $\lambda > 0$ esetén.

2. Észrevétel

w^* folytonossága miatt x_1^* folytonos függvénye λ-nak. Továbbá, a $\lambda < \varphi$ esetben $x_1^* > 0$ egyértelmű megoldása a (4.3) egyenletnek. Jelöljük abban a bal oldalt $F_\lambda(x_1)$-gyel, ekkor az egyenlet az $F_\lambda(x) = 1$ alakban írható fel, ahol $F_\lambda(0) > 1$ $\lambda < \varphi$ esetén, és F_λ az x csökkenő függvénye minden rögzített $\lambda < \varphi$-re. A véges felső korlát hipotéziséből következik, hogy $f_i\big(x(\lambda)\big) = 0$

$(i = 1, \ldots, k)$ minden $x \geq \lambda \cdot w_o$ esetén. Ez maga után vonja, hogy $A_i(x(\lambda)) = +\infty$ és így $F_\lambda(x) = 0$ valamennyi $x \geq \lambda \cdot w_o$ esetében. Így bármely rögzített $\lambda < \varphi$-re az ahhoz tartozó x_1^* a $(0, \lambda \cdot w_o)$ intervallumban helyezkedik el. Ha $\lambda \to 0$, akkor $x_1^* \to 0$.

3. Észrevétel

Az észrevétel kimondását megelőző gondolatmenetből és az 1.1, 1.2 következményekből közvetlenül adódik.

4. Észrevétel

Ha $\pi < \pi_o$, akkor $\lambda < \varphi(\pi)$ és így w^* a $G(w) = \lambda$ egyenletnek egyértelmű megoldása. Bármely rögzített $w \geq 0$ esetén az (5.) egyenletben szereplő $G(w)$ mennyiség az A3–A4 feltevések következtében a π folytonos függvénye. Mivel a G függvény bármely rögzített π esetén w-ben (szigorúan) csökkenő, azért w^* a π folytonos függvénye a $\pi \in (0, \pi_o)$ árakra. Továbbmenve, ha $\pi \to \pi_0$, akkor $w^* \to 0$ és így w^* valamennyi $\pi \geq 0$-ban folytonos. Meg kell még mutatni, hogy w^* a π nem-növekvő függvénye a $\pi \in (0, \pi_o)$ értékeknél. Ehhez elég belátni, hogy a $G(w)$ mennyiség tetszőleges rögzített $w > 0$-ban π szerint nem-növekvő. Mivel $\pi < \pi_o$ és így $\lambda < \varphi(\pi)$, fennáll $a_i(\pi) > 0$ valamely i-re. Kizárva azt, hogy $a_i(\pi) = 0$, egyszerűsíthetjük az (5.5) egyenlőséget $a_i(\pi)$-vel. Ily módon elég megnézni az $A_i(w)/a_i(\pi)$ kifejezés függését az ártól, rögzített w mellett. Tudjuk, hogy

$$A_i(w)/a_i(\pi) = \frac{1}{\varkappa_i} \cdot \left(\frac{1}{a_i(\pi)} - 1\right) + \frac{1}{\gamma_i} + \left[\frac{1}{\varkappa_i} \cdot \frac{c_i(\pi)}{a_i(\pi)} + \frac{1}{\varrho_i} \cdot (1 - c(\pi))\right] \cdot \left(\frac{1}{f_i(w)} - 1\right).$$

A3 szerint a_i nem-növekvő és így a fenti első tag nem-csökkenő lesz. A4 szerint c_i nem-csökkenő, és A1 következtében $1/\varkappa_i > 1/\varrho_i$. Így a második tag is nem-csökkenő függvénye π-nek. Összegezve, $A_i(w)/a_i(\pi)$ nem-csökkenő, amiből következik, hogy $G(w)$, rögzített w mellett, a π-ben nem-növekvő. Tehát w^* nem-növekvő π-ben.

5. Észrevétel

Mivel $\lambda < \varphi$, w^* a $G(w) = x$ egyenlet egyértelmű megoldása. Legyen G_1 az $[f_i]$ együtteshez tartozó függvény, és G_1 a $[g_i]$ együtteshez tartozó. Mivel $[f_i]$ dominálja a $[g_i]$-t, rögtön következik, hogy $G_1(w) > G_2(w)$ valamennyi $w > 0$ esetén, és így $w_1^* > w_2^*$ G monotonitása folytán.

6. Észrevétel

Ha $\lambda < \varphi$, akkor w^* a $G(w) = \lambda$ egyenlet egyértelmű megoldása. Legyen G_1 a $[c_i]$ együtteshez tartozó függvény, és G_2 a $[d_i]$ együtteshez tartozó. Mivel $1/\varkappa_i > 1/\varrho_i$ minden i-re, $[c_i]$ $[d_i]$ feletti dominanciájából következik, hogy $A_i^{(1)}(w) \geq A_i^{(2)}(w)$ minden $w \geq 0$-ra, természetes jelöléssel. Így $G_1(w) \leq G_2(w)$ minden $w \geq 0$-ra, és ezért $w_1^* \leq w_2^*$ G monotonitásából.

Ha $\lambda \geq \varphi$, akkor mindkét esetben $w^* = 0$.

II. FÜGGELÉK: A SZÁMÍTÓGÉPES SZIMULÁCIÓK SPECIFIKÁCIÓJA

A 3. és 4. ábra diagramjait adó szimulációkban a következő paraméterértékeket és függvényeket alkalmaztuk:

$k = 2$; $n_1 = n_2 = 50$; $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 0{,}5$; $\varkappa_1 = 1{,}5$; $\varkappa_2 = 1$; $\varrho_1 = 2$; $\varrho_2 = 3$.

$$h_\sigma(x_1) = \begin{cases} 1 - (x_1 - \sigma)^2 & x_1 < \sigma \\ 1 & x_1 \geq \sigma, \end{cases} \qquad (\sigma = 1)$$

$$f_i(w) = \begin{cases} 1 & w < w_i/2 \\ 2 \cdot (1 - w/w_i) & w \in (w_i/2, w_i) \\ 0 & w \geq w_i\,. \end{cases}$$

A 3. ábrában $\lambda = 30$, $a_1 = 0{,}95$, $a_2 = 0{,}90$, $c_1 = 0{,}5$, $c_2 = 0{,}25$, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ volt.

A 4. ábrában λ lépcsőzetesen növekedett, a többi paraméter pedig a következő értékeket vette fel: $a_1 = 0{,}95$, $a_2 = 0{,}82$, $c_1 = 0{,}40$, $c_2 = 0{,}22$, $w_1 = 0{,}5$, $w_2 = 1$.

(Beérkezett: 1978. március 16-án.)

IRODALOM

1. Barro, R. J. and H. I. Grossman (1971), "A General Disequilibrium Model of Income and Employment", *American Economic Review*, 61. évf., 82–93.
2. Barro, R. J. and H. I. Grossman (1974), "Supressed Inflation and the Supply Multiplier", *Review of Economic Studies*, 41. évf., 87–104.
3. Benassy, J. P. (1974), "Disequilibrium-elmélet", *Szigma*, 7. évf. 135–163, 241–270.
4. Benassy, J. P. (1975), "Neo-Keynesian Disequilibrium Theory in a Monetary Economy", *Review of Economic Studies*, 42. évf., 503–523.
5. Clower, R. W. (1965), "The Keynesian Counter-revolution: a Theoretical Appraisal", a következő kötetben, *The Theory of Interest Rates*, Szerkesztette F. H. Hahn és F. P. R. Brechling, Proceedings of an IEA Conference, Macmillan, London.
6. Hale, J. (1969), *Ordinary Differential Equations*, Wiley.
7. Kleinrock, L., (1976), *Queuing Systems*, II. kötet, John Wiley & Sons.
8. Kornai, J. (1971), *Anti-Equilibrium*, Közgazdasági és Jogi Kk. Budapest.
9. Kornai, J. (1974), *Az adaptáció csikorgó gépezete* Deák A., Farkas K., Lackó M. és Simonovits A. közreműködésével, sokszorosítva, MTA Közgazdaságtudományi Intézet.
10. Kornai, J. (1975), „A hiány méréséről", *Statisztikai Szemle*, 53. évf. 1208–1229.
11. Malinvaud, E. (1977), *The Theory of Unemployment Reconsidered*, Basil Blackwell, Oxford.

THE NORMAL STATE OF THE MARKET IN A SHORTAGE ECONOMY: A MODEL OF QUEUING

The subject of this study is an economy characterized by chronic shortage and queuing. The paper elaborates a very simple model for a single good, primarily intended as an illustration of an analytic framework for studies of shortage phenomena. Our main concern is to describe a market, which is away from Walrasian equilibrium, and nevertheless is in a stationary state, permanently restoring its basic properties. Central concepts in our analysis are such social costs of shortage as queuing time, postponement of purchase and forced substitution.

НОРМАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ РЫНКА В ДЕФИЦИТНОМ ХОЗЯЙСТВЕ – МОДЕЛЬ ОЧЕРЕДЕЙ

Предметом нашего исследования является такая экономика, для которой характерны хронический дефицит и очереди. В статье предлагается весьма простая модель для одного товара, с помощью которой мы в пердую очередь хотели бы представить способ анализа, пригодный для изучения явлений дефицита. Наша основная цель состоит в описании такого рынка, который не находится в состоянии Вальрасова равновесия и тем не менее находится в стационарном состоянии и постоянно восстановливает свои основные характеристики. Как центральные понятия в нашем анализе выступают такие общественные затраты дефицита, как время, затрачиваемое на стояние в очередях, отказ от покупки и вынужденная замена.