Simonovits András

A decentralizált szabályozás maximális konvergenciasebessége

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban a következő kérdéssel foglalkozom: Elemi decentralizált szabályozásnál *milyen gyorsan* tart a dinamikus rendszer a normatív pályájához? Feltételezem, hogy az olvasó ismeri *Kornai–Simonovits* (1977) (röviden KS-1) és *Kornai–Simonovits* (1975) (röviden KS-2) dolgozatokat, legalábbis a 6. és a 7. fejezetét.

A közgazdasági szabályozási modellek többsége *folytonos* idővel dolgozik, eltekintve attól, hogy nagyon sok gazdasági tevékenység csak *szakaszosan* végezhető el. Ezekben a modellekben vizsgálatunk kérdése egyáltalán nem tehető fel, mert a *reakciósebességek* megfelelő növelésével a *konvergenciasebesség* tetszőleges naggyá tehető. Szorítkozzunk tehát a *diszkrét* idővel dolgozó modellekre (pl. *McFadden* (1969)). Általában ezekben a modellekben sem vizsgálják a konvergenciasebesség függését a reakciósebességektől. Például *McFadden* (1969) modellje csak olyan reakciósebesség-vektor létezését mutatja ki, amely csiga lassúsággal közelíti a rendszert a normatív pályájához. (Félreértést elkerülendő megjegyezzük, hogy általános modellben ennél több nem is mondható.)

Természetesen vannak kivételek: például *Th. Marschak* (1972), *Simonovits* (1976) és KS-1, hogy csak e dolgozatban szereplő tanulmányokra utaljak.

Ebben a dolgozatban a KS-1-ben *Kornai Jánossal* együtt megkezdett vizsgálatot folytatom. Mint ott, most is az *aszimptotikus konvergenciasebességgel* mérjük a stabilizálás gyorsaságát. Ez a mennyiség azt mutatja, hogy *hosszútávon* az *eltérés* időszakról időszakra hányad részére zsugorodik. Például, ha a konvergenciasebesség 2, akkor hosszútávon az eltérés időszakról időszakra a felére csökken. Megjegyezzük, hogy az (aszimptotikus) *stabilitás* épp azt jelenti, hogy a konvergenciasebesség nagyobb mint 1.

Mérőszámunkat a numerikus analízisből kölcsönöztük, ahol nagy sikerrel használják különböző eljárások gyorsaságának mérésére és összehasonlítására. Például lineáris egyenletrendszerek iterációs megoldásánál a Gauss-Siedel-módszert nagyobb konvergenciasebessége miatt részesítik előnyben a Jacobi-módszerrel szemben. (*Varga* (1962) Theorem 3.3; Corollary.)

Természetesen ez a mérőszám csak *hosszútávú* szabályozás esetén megbízható, pontosabban: ha a szabályozásra elég sokszor sor kerül egymás utáni időszakokban. Míg a numerikus analízis esetében ez a feltétel gyakran teljesül, a közgazdasági alkalmazásnál korántsem ez a helyzet. Gondoljunk csak arra, hogy az előbbinél több tizedesjegyű %-os pontosságra törekszenek, a közgazdaságtanban pedig legfeljebb 0,1%-os pontosságra.

Miért nem dolgozunk akkor olyan mutatóval, amely azt méri, hogy mennyi időszakra van szükség ahhoz, hogy a rendszert relatív eltérése mondjuk 0,1 %

alá süllyedjen? Válaszunk egyszerű, bár nem kielégítő: A most említett mutató függ a rendszer kezdőállapotától és a kíván pontosságtól (esetünkben 0,1%) — ellentétben a konvergenciasebességgel.

Mindenesetre alapmodellünk felvázolása (2. fejezet) után külön vizsgálatok egy mutatót, amely a rövidebb távú elemzésekben hasznosabb lehet mint a konvergenciasebesség (3. fejezet).

A szabályozás símaságával kapcsolatban vezette be *Bródy* (1973) a *jól orientáló szabályozás* fogalmát, amely azt követeli meg a rendszertől, hogy minden skalár változója minden időszakban *előjelváltás nélkül közeledjék* a normatív értékéhez. Bár Bródy követelményét jogosnak tartom, igazolom, hogy túl szigorú: ekvivalens ugyanis a rendszer *elemi szabályozhatóság*ával, ami azt jelenti, hogy a rendszer *egy* időszak alatt a normatív pályára állítható. Ez utóbbi követelmény elemi decentralizált rendszerekre csak a triviális és érdektelen „független alrendszerek"-nél teljesül.

Ennyi figyelmeztetés után rátérek a konvergenciasebesség alkalmazására. Az 5. fejezetben bebizonyítom, hogy *produktív* Metzler-gazdaságban csillapított reakciósebességek esetén az azonosan egységnyi reakciósebesség-vektor adja a maximális konvergenciasebességet, röviden: az optimumot. Ez a reakció optimális a független alrendszereknél is, amikor is elemi szabályozhatóságot is nyújt. Nem igaz viszont, hogy feltétel nélküli optimum volna általában.

Ezért érdekes, hogy a KS-1 speciális esetében ez az utóbbi állítás is igaz. Mellesleg a KS-1 4. Tételében a KS-1 gazdaságról állapítottuk meg azt, amit most az általánosabb produktív Metzler-gazdaságról.

A 7. fejezetben igazolom, hogy a KS-2 rendelésjelzéses gazdaság maximális konvergenciasebessége (majdnem) mindig nagyobb (kivételesen egyenlő) mint a KS-1 készletjelzéses gazdaságé.

Köszönetnyilvánítás. Dolgozatom szorosan kapcsolódik *Kornai János*sal közösen írt (1975a,) (1975b) és (1977) dolgozatainkhoz. Itt köszönöm meg Kornai Jánosnak a kutatás során nyújtott segítségét.

A dolgozat korábbi változatát többen elolvasták. Hasznos észrevételeikért köszönet illeti *Bródy Andrást*, *Kapitány Zsuzsát* és *Tarján Tamást*. Külön megköszönöm *Martos Béla* alapos bírálatát.

2. Elemi decentralizált szabályozás és konvergenciasebesség

Ebben a fejezetben egészen röviden megismételjük *Simonovits* (1978a) dolgozatban bevezetett elemi decentralizált szabályozás alapfogalmait.

$\hat{x}$ N-dimenziós állapoteltérés vektor; $\hat{x} = (\hat{x}_\nu)_{\nu=1}^N$,
$\hat{u}$ N-dimenziós szabályozás eltérési vektor; $\hat{u} = (\hat{u}_\nu)_{\nu=1}^N$,
R $N \times N$ dimenziós reálstruktúra matrix; $R = (r_{\varkappa\nu})_{\varkappa=1}^N{}_{\nu=1}^N$,
t diszkrét idő,
$(\hat{x}_\nu, \hat{u}_\nu)$ a ν-edik döntéshozó állapot, ill. szabályozási eltérés változója.

A rendszer *mozgásegyenlete*

$$\hat{x}(t+1) = \hat{x}(t) + R\hat{u}(t), \quad \hat{x}(0) \text{ adott.} \tag{2.1}$$

Az elemi decentralizált szabályozás N-dimenziós *reakciósebesség-vektora*: $f = [f_\nu]_{\nu=1}^N$. *A szabályozás egyenlete:*

$$\hat{u}(t) = -\langle f \rangle \hat{x}(t). \tag{2.2}$$

(2.1)–(2.2) összevetéséből adódik az *állapot-átmenet egyenlet*:

(2.3) $$\hat{x}(t+1) = [I - R\langle f\rangle]\,\hat{x}(t), \quad \hat{x}(0) \text{ adott},$$

ahol I az N-dimenziós egységmátrix.

Ismert, hogy (2.3) megoldása N db *alapmegoldás* egyértelmű lineáris kombinációja, ahol az alapmegoldások

(2.4) $$x[\nu, t] = \lambda^t[\nu]\,x[\nu] \qquad \nu = 1, \ldots, N$$

alakúak, tehát $\{x[\nu], \lambda[\nu]\}$ a következő *sajátvektor-sajátérték* feladat megoldása:

(2.5) $$\lambda[\nu]\,x[\nu] = [I - R\langle f\rangle]\,x[\nu].$$

Legyen $\hat{\lambda}$ a(z egyik) maximális abszolútértékű sajátérték:

(2.6) $$|\hat{\lambda}| = \max\{|\lambda[\nu]|;\ 1 \leq \nu \leq N\}.$$

Most már definiálhatjuk az (R, f) rendszer (aszimptotikus) *konvergenciasebességét*:

(2.7) $$1/|\hat{\lambda}|.$$

Ugyanis az alapmegoldások lineáris kombinációja *aszimptotikusan* úgy viselkedik, mint a maximális abszolútértékű sajátérték(ek)hez tartozó tag(ok). A szemléletes jelentés egyetlen ilyentag esetében nyilvánvaló: ekkor az aszimptotikus kifejezés $\hat{c}\hat{\lambda}^t\hat{x}$, amelynek minden eleme tényleg $1/|\hat{\lambda}|$ részére zsugorodik minden lépésben.

A továbbiakban a 7. fejezet kivételével mindig föltesszük, hogy a saját hatás nem nulla: $r_{\gamma\nu} \neq 0$. Ekkor alkalmas mértékegységek bevezetésével föltehető, hogy

(2.8) $$r_{\nu\gamma} = 1 \qquad 1 \leq \gamma \leq N.$$

Érdekes megvizsgálni, hogy mi történik, ha a ν-edik egység figyelmen kívül hagyja a többi egység létezését. Ekkor a ν-edik alrendszer egyenlete a ν-edik döntéshozó fejében

(2.9) $$\hat{x}_\nu(t+1) = (1 - f_\nu)\hat{x}_\nu(t) \qquad \hat{x}_\nu(0) \text{ adott}.$$

Ekkor a *naiv* optimális reakciósebesség.

(2.10) $$f_\nu = 1,$$

amely az 1. időszaktól kezdve a normatív pályán tartaná a ν-edik alrendszert, ha az tényleg független volna.

Mivel a ν-edik döntéshozó állapota általában függ a többi döntéshozó állapotától, (2.10) általában nem optimális. Ezért érdekes a Bevezetésben említett eredménypár (2.10) optimalitásáról. Erre azonban csak az 5. és 6. fejezetben térünk vissza.

3. Az optimális reakciósebesség és a szabályozási időszak hossza

A bevezetésben már említettük, hogy a konvergenciasebesség csak hosszútávon mér megbízhatóan. A közgazdaságban pedig nagyon gyakran rövidtávra kell szabályozni. Hasznosnak tűnik egy olyan modell bemutatása, amely tükrözi az optimális reakciósebesség és a szabályozási időszak hosszának kapcsolatát. Ez a példa *Simonovits* (1976) dolgozataiból származik, amelyben *T. Marschak* (1972) tévedését javítottam ki. Ellentétben a KS-1 és KS-2 dolgozattal, a fenti két dolgozat ismeretét egyáltalán nem tételezem föl.

Mi az optimalizálandó célfüggvény? A Bevezetéssel összhangban arra törekszünk, hogy az optimális reakciósebesség független legyen a kezdeti állapoteltéréstől. Célszerűnek látszik tehát a kezdeti állapoteltérést *valószínűségi változónak* tekinti. Egyszerűség kedvéért elemeit nulla várható értékű, egységnyi szórású és páronként korrelálatlan valószínűségi változókkal írjuk le. Képletben:

$$\varepsilon\hat{x}(o) = 0 \quad \text{és} \quad \varepsilon\hat{x}(o)\,\hat{x}(o)' = I. \tag{3.1}$$

Legyen a vizsgált időszak hossza $T+1$, ekkor az $\hat{x}(T)$ végállapoteltérés-vektor várható hosszúságát (pontosabban négyzetét)

$$\vartheta(f, T) = \varepsilon\hat{x}(T)'\,\hat{x}(T) \tag{3.2}$$

adja. Természetesnek tűnik ezt a mennyiséget venni *veszteségfüggvénynek*, amelyet az optimális reakciósebesség-vektor minimalizál.

Szükségünk lesz még a következő matematikai egyszerűsítésekre: az R mátrix *szimmetrikus* és *pozitív definit*:[1]

$$R' = R \quad \text{és} \quad v'Rv > 0 \quad (v \neq 0) \tag{3.3}$$

valamint az f reakciósebesség vektor elemei *egyöntetűek*:

$$f = \varphi 1. \tag{3.4}$$

Szükségünk lesz az R mátrix sajátértékeire is:

$$s_\nu > 0 \qquad 1 \leq v \leq N. \tag{3.5}$$

Ekkor (2.3) és (3.1—5), R és $\langle s\rangle$ hasonlóságából $\sum\limits_\nu (1 - r_\nu\varphi)^{2T} = \sum\limits_\nu (1 - s_\nu\varphi)^{2T}$ felhasználásával a

$$\vartheta(\varphi, T) = \textstyle\sum_{\nu=1}^N (1 - s_\nu\varphi)^{2T} \tag{3.6}$$

összefüggéshez jutunk, amelyből közvetlenül vizsgálhatjuk a veszteséget φ reakciósebesség és T időszakhossz függvényében.

(3.6) differenciálásával a φ^T *optimális reakciósebességre* (konvex függvényről lévén szó) a következő szükséges és elégséges feltételt kapjuk:

$$\textstyle\sum_{\nu=1}^N (1 - s_\nu\varphi_T)^{2T-1} s_\nu = 0\,. \tag{3.7}$$

(3.7) egyenletből általában nem lehet kifejezni φ_T-t. Szorítkozzunk tehát olyan R mátrixokra, amelyeknek két különböző sajátértékük van, $s^{(m)}$ és $s^{(M)}$, $k^{(m)}$, ill. $k^{(M)}$ multiplicitással:

$$s^{(m)} < s^{(M)} \quad \text{és} \quad k^{(m)} + k^{(M)} = N. \tag{3.8}$$

[1] Figyelmeztetjük az Olvasót, hogy itt nincs terünk a (3.3) feltevés közgazdasági értelmezésére, lásd *T. Marschak* (1972). Számunkra a feltevés csak a számolás megkönnyítésére szolgál.

Ekkor (3.7) szerint

$$\varphi_T = \frac{\sqrt[2T-1]{k^{(m)}s^{(m)}} + \sqrt[2T-1]{k^{(M)}s^{(M)}}}{s^{(m)}\sqrt[2T-1]{k^{(m)}s^{(m)}} + s^{(M)}\sqrt[2T-1]{k^{(M)}s^{(M)}}}. \tag{3.9}$$

(3.9)-ből könnyű belátni, hogy

$$\varphi_T \uparrow \varphi_\infty, \quad \text{ha} \quad k^{(m)}s^{(m)} < k^{(M)}s^{(M)}, \tag{3.10}$$

$$\varphi_T \downarrow \varphi_\infty, \quad \text{ha} \quad k^{(m)}s^{(m)} > k^{(M)}s^{(M)}, \tag{3.11}$$

$$\varphi_T = \varphi_\infty, \quad \text{ha} \quad k^{(m)}s^{(m)} = k^{(M)}s^{(M)}, \tag{3.12}$$

ahol

$$\varphi_\infty = \frac{2}{s^{(m)} + s^{(M)}} \tag{3.13}$$

és $\varphi_T \uparrow \varphi_\infty$ azt jelöli, hogy $\{\varphi_T\}$ sorozat nő és határértéke φ_∞.

Mivel

$$|\hat{\lambda}| = \max\left(|1 - s^{(m)}\varphi|, |1 - s^{(M)}\varphi|\right) \tag{3.14}$$

a rendszer konvergenciasebessége, a (3.13)-ban bevezetett φ_∞ a maximális konvergenciasebességet megvalósító aszimptotikusan optimális reakciósebesség és

$$\varphi^{(M)} = \frac{2}{s^{(M)}} \tag{3.15}$$

a stabilitást biztosító reakciósebességek felső határa.

Világosabb képet kapunk, ha az alábbi speciális R mátrixra szorítkozunk: (χ paraméter)

$$r_{\varkappa\nu} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \varkappa = \nu \\ \chi, & \phantom{\text{ha}} \quad \varkappa \neq \nu \end{cases}. \tag{3.16}$$

Könnyen belátható, hogy e mátrixnak két sajátértéke van:

$$s^{(m)} = 1 + (N-1)\chi, \ (k^{(m)} = 1) \text{ és } s^{(M)} = 1 - \chi, \ (k^{(M)} = N-1), \text{ ha } \chi < 0 \tag{3.17}$$

és

$$s^{(m)} = 1 - \varkappa, \ (k^{(m)} = N-1) \text{ és } s^{(M)} = 1 + (N-1)\varkappa, \ (k^{(M)} = 1), \text{ ha } \chi > 0. \tag{3.18}$$

Nyilvánvaló, hogy az R mátrix akkor és csak akkor pozitív definit (vagy ami ezzel ekvivalens, minden sajátértéke pozitív), ha

$$-\frac{1}{N-1} < \chi < 1. \tag{3.19}$$

A (3.16) speciális mátrix esetén (3.10—12)-ben az esetek szétválasztása áttekinthetővé válik. Rendre

$$\chi < \chi_N, \ \chi > \chi_N \text{ és } \chi = \chi_N, \text{ ahol } \chi_N = \frac{N-2}{2(N-1)}. \tag{3.20}$$

Végül (3.12) feltétele teljesül még, ha $\chi = 0$. Vagyis az N-től függő $\chi = \chi_N$ mellett csak a triviális $\chi = 0$ esetben, azaz N független alrendszer esetén, azonos az adott időszakra vett optimális reakciósebesség a „hosszútávú" optimummal. Külön kiemelném, hogy $\chi > \chi_N$ esetén kis T-re előfordulhat, hogy $\varphi_T > \varphi^{(M)}$, vagyis a rövidtávú optimum nem biztosít hosszútávon stabilitást.

Összegezve a fentieket:

1. Tétel: (3.1–4) *feltevés mellett a rövidtávú optimális reakciósebesség lehet kisebb mint a hosszútávú optimum (stabil) és lehet nagyobb is (instabil). A két mennyiség csak a triviális széteső rendszernél azonos.* ($\chi = \chi_N$-től eltekintve!)

Megjegyzés: Érdemes kiszámolni a hosszútávú optimális reakciósebességet speciális mátrixunkra. Helyettesítsük be (3.17)-et, ill. (3.18)-at (3.13)-ba — az eredmény mindkét esetben

$$\varphi_\infty(\chi) = \frac{2}{2 + (N-2)\chi}, \tag{3.20}$$

ami $N > 2$ és $\chi \neq 0$ esetén kisebb, ill. nagyobb 1-nél, aszerint hogy $\chi > 0$, ill. $\chi < 0$. Ezzel igazoltuk, hogy a (2.10)-beli naiv optimum általában nem optimális.

Röviden utalnék *Varga* (1962) alternatív megközelítésére (3.2 pont): Legyen $\|\hat{x}\|$ az $\hat{x}$ vektor valamilyen „normája", hosszúsága. Ekkor t időszak alatt a szabályozás gyorsaságát $\|\hat{x}(t)\|/\|\hat{x}(0)\|$ hányados maximális értékével jellemezhetjük, ill. e maximum t-edik gyökével.

$$\sqrt[t]{\max_{\hat{x}(0)\neq 0} \frac{\|\hat{x}(t)\|}{\|\hat{x}(0)\|}} = \hat{\lambda}_t. \tag{3.12}$$

Belátható (Varga, Theorem 3.2 és Corollary), hogy

$$\hat{\lambda}_t > \hat{\lambda} \quad \text{és} \quad \lim_{t\to\infty} \hat{\lambda}_t = \hat{\lambda}, \tag{3.22}$$

vagyis a véges távú konvergenciasebesség kisebb (esetleg egyenlő) mint a hosszútávú, amely az előbbinek a határértéke.

4. A szabályozás simasága és centralizáltsága

Az előző fejezetben példát hoztunk az elemi decentralizált szabályozás rövid- és hosszútávú minősítésének eltérésére. A két szemlélet különbségét *Bródy* (1973) dolgozatában nagyon szemléletesen tárgyalta és a kiutat a szabályozás simaságában, vagy ahogy ő nevezte, jól orientálóságában látta. Mivel a jól orientáló szabályozás ismérvét már a Bevezetésben ismertettük, most képletbe öntjük e tulajdonságot:

$$\operatorname{sgn} \hat{x}_\nu(t+1) = \operatorname{sgn} \hat{x}_\nu(t) \quad \text{és} \quad |\hat{x}_\nu(t+1)| \leq |\hat{x}_\nu(t)|, \tag{4.1}$$

ahol egyenlőség csak $\hat{x}_\nu(t) = 0$ esetén áll, $1 \leq \nu \leq N$. (Itt sgn a az a valós szám előjelét jelöli!)

Megjegyezzük, hogy Bródy nem korlátozta vizsgálatait elemi decentralizált szabályozásokra. Anélkül, hogy teljes mértékben követnénk Bródy feltevéseit, közelebb kerülünk hozzájuk, ha általánosítjuk a döntéshozók információi függvényét. Céljainkra elegendő, ha a ν-edik döntéshozó információja a rendszer állapotának időben állandó lineáris skalárértékű függvénye. Képletben:

$$\check{y}_\nu(t) = c'_\nu \hat{x}(t) \qquad 1 \leq \nu \leq N$$

azaz a rendszer információ függvénye

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \tag{4.2}$$

Nyilvánvaló, hogy elemi dencentralizált szabályozás esetén $C = I$, amikor a döntéshozók saját állapotukat ismerik és mást nem ismernek. Általában azonban a C mátrix főátlóján kívül is vannak nullától különböző elemek, amelyek az információ rendszer bizonyosfokú centralizáltságával kapcsolatosak. Mindenesetre föltesszük, hogy az információk együtteséből az állapot egyértelműen meghatározható (amely azonban teljes centralizációt is megenged.) Matematikailag ez a C mátrix regularitását jelenti, szabályozáselméleti kifejezéssel élve: a rendszer *megfigyelhető*. A döntési rendszer teljes decentralizáltságát továbbra is föltételezzük: a ν-edik egység döntése kizárólag saját információjától függ: (vö. (2.2)-vel)

$$u(t) = \langle f \rangle x(t). \tag{4.3}$$

A továbbiakban azt bizonyítom be, hogy a fenti (R, C) rendszer jól orientálhatósága szoros kapcsolatban van az információrendszer centralizáltságával. Mindenekelőtt feltesszük, hogy *irreducibilis* reálstruktúrájú rendszerekre szorítkozunk, hiszen a szabályozás szempontjából bármely reducibilis rendszer irreducibilis alrendszereire vezethető vissza.

Bevezetjük az (R, C) rendszer *elemi szabályozhatóságának* fogalmát is: az (R, C) rendszer *elemien szabályozható*, ha van olyan f reakciósebesség-vektor, amelyre a rendszer bármilyen $x(0)$ indulóállapotból az első időszakra a normatív pályára irányítható: $x(1) = x^*(1)$.(Ha a rendszer valamelyik időszakban a normatív pályára kerül, akkor ott is marad))

Nyilvánvaló, hogy egy *elemien* szabályozható rendszer jól orientálható de megfordítva nem. Sőt, a jól orientáló szabályozások egy része semmilyen véges időszak alatt nem vezeti a rendszert normatív pályára, csak annak tetszőleges közelébe. Ezért érdekes a következő tétel.

2. Tétel. Az (R, C) rendszer akkor és csak akkor jól orientálható, ha *elemien* szabályozható, azaz ha az

(4.4) RC mátrix reguláris és diagonális.

Mielőtt bizonyítanánk a 2. tételt, külön kimondjuk e tétel speciális esetét az elemi decentralizált szabályozás esetére.

3. Tétel. Az elemi decentralizált szabályozás akkor és csak akkor jól orientáló, ha a rendszer reálstruktúrája N db független egységből áll, ami irreducibilis esetben $N = 1$-gyel ekvivalens.

Megjegyzések. A 2. tétel sokban hasonlít *Martos* (1976) bizonyos segédtételeihez.

A 3. tételből világos, hogy az elemi decentralizált szabályozás nem jól orientál, tehát indokolt a konvergenciasebesség durvább, de átfogóbb módszerének alkalmazása.

A jól orientálhatóság és az elemi szabályozhatóság ekvivalenciája arra utal, hogy Bródy ismerve meglehetősen szigorú, a valóságos rendszerekre aligha alkalmazható. Ugyanakkor előfordulhat, hogy egy elemien szabályozható rendszert több időszak alatt kell a normatív pályára vezetni, mert az egy időszak alatti célba juttatás megsérti a működőképességi feltételeket (amelyeket egyébként az egész dolgozatban figyelmen kívül hagyunk.)

Itt utalunk arra, hogy a 7. fejezetben szereplő egy-szektoros (két döntéshozóból álló) rendelésjelzéses gazdaság két időszak alatt a normatív pályára vezethető, de egy időszak alatt nem. Azaz a rendszer *szabályozható*, de *elemien nem szabályozható.*

Bizonyítás:

(i) Először a *(4.4) feltétel* és a jól orientálhatóság ekvivalenciáját igazoljuk: Helyettesítsük be (4.2) és (4.3) összefüggéseket (2.1)-be; az így kapott $\hat{x}(t+1) = (I - RC\langle f\rangle)\,\hat{x}(t)$ összefüggést a

$$K = I - RC\langle f\rangle \tag{4.5}$$

jelölés segítségével tömörebben fölírhatjuk:

$$\hat{x}(t+1) = K\hat{x}(t). \tag{4.6}$$

Belátjuk, a jól orientálás szükséges és elégséges feltétele az, hogy *K diagonális* mátrix és a diagonális elemek 0 és 1 között vannak:

$$K = \langle k_{\nu\nu}\rangle_{\nu=1}^{N}, \qquad 0 < k_{\nu\nu} < 1. \tag{4.7}$$

Rögzítsünk egy tetszőleges ν indexet és legyen $\hat{x}_\nu(0) \neq 0$ és $\hat{x}_\varkappa(0) = 0$ minden $\varkappa \neq \nu$-re. Ekkor (4.6)-ból

$$\hat{x}_\nu(1) = k_{\nu\nu}\hat{x}_\nu(0) \quad \text{és} \quad \hat{x}_\varkappa(1) = k_{\varkappa\nu}\hat{x}_\nu(0) \quad \text{minden} \quad \varkappa \neq \nu\text{-re}. \tag{4.8}$$

Mivel feltevésünk szerint $\hat{x}_\varkappa(0) = 0$, $(\varkappa \neq \nu)$, (4.1) és (4.8) szerint $k_{\varkappa\nu} = 0$ $(\varkappa \neq \nu)$. Továbbá $\hat{x}_\nu(0) \neq 0$, tehát ismét (4.1) és (4.8) szerint $0 < k_{\varkappa\nu} < 1$.

Mivel ν tetszőleges, (4.7) *szükségességét* bizonyítottuk.

(4.7) *elégségessége* viszont triviális.

Mivel minden reakciósebesség nullától különböző, (4.5)-ből RC kifejezhető:

$$RC = (I - K)\,\langle f\rangle^{-1}. \tag{4.9}$$

A jól orientáló szabályozás (4.7) feltétele szerint $0 < I - K \leq I$, tehát RC tényleg reguláris és diagonális.

(ii) Rátérünk a szabályozhatóság és (4.4) ekvivalenciájának bizonyítására. (4.6) szerint a szabályozhatóság $K = 0$-val ekvivalens, amit (4.9)-be behelyettesítve (4.4)-höz jutunk. Megfordítva: (4.4) esetén $\langle f\rangle = (RC)^{-1}$ diagonális és (4.5) szerint $K = 0$-hoz vezet.

5. A konvergenciasebesség és a reakciósebességek kapcsolata produktív gazdaságban, negatív idegen hatásoknál

Ebben a fejezetben rátérünk vizsgálatunk fő kérdésére. Hogyan függ a konvergenciasebesség a reakciósebesség vektortól? Először viszonylag általános feltevésekkel élünk a reálstruktúráról.

Föltesszük, hogy a pozitív saját hatásokkal (vö. (2.8)) ellentétes, *negatív előjelűek az idegen hatások:* [*Metzler* (1945)].

(5.1) $$M = I - R \geq 0$$

és

(5.2) $$m_{\nu\nu} = 0, \qquad 1 \leq \nu \leq N.$$

A *Simonovits* (1978a) dolgozatban alkalmazott *uralkodó saját hatás* ($1'M \leq 1'$) feltevést most átfogalmazzuk.

A gazdaságot *produktív*nak nevezzük, ha minden állapotnövekedés megengedett (pozitív) döntéssel megvalósítható. Ismert összefüggés szerint ez a követelmény akkor és csak akkor valósul meg negatív idegen hatások esetén, ha az idegen hatások együttható mátrixának spektrálsugara kisebb mint 1. Képletben:

(5.3) $$\varrho(M) < 1.$$

Megemlítjük, hogy a KS-1 készletszabályozásos modellben az idegen hatások negatívak és a gazdaság produktív. Viszont a KS-2 rendelés-szabályozásos modellben egyes saját hatások nullák és egyes idegen hatások pozitívak. *McFadden* (1969) számpéldájában szereplő gazdaság viszont megint eleget tesz (5.1—3) feltevéseknek.

(5.1) normáló feltevés mellett célszerű bevezetni a *csillapított* reakciósebesség vektor fogalmát:

(5.4) $$0 < f_\nu \leq 1, \qquad (1 \leq \nu \leq N).$$

Emlékeztetjük még az olvasót az irreducibilis ciklikus nem-negatív mátrix definíciójára: (*Varga* (1962) (2.33) képlet).

Az M $N \times N$-es nem-negatív irreducibilis mátrix *ciklikus* (q indexszel), ha sorai és oszlopai együttes átindexelésével a következő alakra hozható:

(5.5) $$M = \begin{bmatrix} 0 & M_1 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & M_{q-1} \\ M_q & 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

ahol az M_p oszlopszáma az M_{p+1} sorszámával azonos, $p = 1, \dots, q$, ($M_{q+1} = M_1$). (5.5) szemléletes jelentése nyilvánvaló: q db osztályra bontva a döntéshozókat a $p+1$-edik osztály döntései csak a p-edik osztály állapotváltozásaira hatnak. (5.5) feltétellel ekvivalens meg a következő alak:

(5.6) $$M^q = \langle M(p) \rangle_{p=1}^q,$$

ahol $M(p)$ kvadratikus mátrix, amelynek dimenziója: M_p sorainak száma.

Most már kimondhatjuk:

4. Tétel Produktív gazdaságban, negatív idegen hatások esetén

(i) bármely csillapított reakciósebesség-vektor növelése növeli a konvergenciasebességet,

(ii) bármely csillapítatlan egyöntetű reakciósebesség növelése akkor és csak akkor csökkenti a konvergenciasebességet, ha az M mátrix *ciklikus*.

(iii) Mind (i), mind (ii) esetén (az utóbbinál föltéve, hogy M ciklikus) az optimális reakciósebesség vektor minden eleme 1 (akár a naiv optimumnál) és a maximális konvergenciasebesség

$$1/|\hat{\lambda}_{\max}| = 1/\varrho(M). \tag{5.7}$$

Megjegyzések:

A 4. Tétel KS-1 4. Tételének általánosítása, hiszen KS-1-nél az outputkészlet változására (saját termelésén kívül) csak a vételek hatnak, az inputkészlet változásra (saját vételén kívül) csak a termelés hat: tehát M ciklikus. (5.1—3) feltevések nyilvánvalóan teljesülnek. Az állítások azonosságát is könnyű ellenőrizni.

Valószínű, hogy (5.1—3; 5) feltevések általában nem biztosítják, hogy tetszőleges reakciósebesség vektorok között is az egyöntetű egységnyi az optimális.

Érdekes hasonlóság mutatkozik tételünk és a lineáris egyenletek iteratív megoldásánál fellépő *túl-relaxálási* elv között [Varga (1962) pl. Theorem 3.16.]

Bizonyítás:

(i) Hagyjuk el (2.5)-ből a ν indexet és helyettesítsük be az egyszerűsített kifejezésben az (5.1—2) párost:

$$\hat{\lambda}\hat{x} = [I - \langle f\rangle + M\langle f\rangle]\,\hat{x} \tag{5.8}$$

$0 < f \leq 1$ esetén (5.8) jobb oldalán álló mátrix nemnegatív, tehát Frobenius—Perron tétele szerint az (egyik) domináns gyök pozitív, jelöljük ezt $(\hat{x}, \hat{\lambda})$-val.

(5.8)-ban visszahelyettesítve (5.2)-t, némi átrendezés után

$$R\langle f\rangle\,\hat{x} = (1 - \hat{\lambda})\,\hat{x}, \qquad \hat{x} > 0 \quad \text{és} \quad \hat{\lambda} > 0 \tag{5.9}$$

összefüggést nyerjük. Jól ismert, hogy (5.1—3) értelmében létezik R inverze, melynek minden eleme pozitív: $R^{-1} > 0$.

Szorozzuk meg (5.9) mindkét oldalát $\langle f\rangle^{-1}R^{-1}(1 - \hat{\lambda})^{-1}$-gyel:

$$(1 - \hat{\lambda})^{-1}\,\hat{x} = \langle f\rangle^{-1}R^{-1}\,\hat{x}\,. \tag{5.10}$$

Ismét Frobenius—Perron tétele alapján $(1 - \hat{\lambda})^{-1} > 0$ az $\langle f\rangle^{-1}R^{-1}$ pozitív mátrix spektrálsugara, tehát növekvő függvénye $\langle f\rangle^{-1}$-nek. Vagyis $1/\hat{\lambda}$ növekvő függvénye f-nek.

(ii) Az egyöntetü reakciósebesség-vektort (3.4) definiálja. Ezt behelyettesítve (5.8)-ba, rendezéssel

$$(\lambda - 1 + \varphi)\, x = \varphi M x, \tag{5.11}$$

sajátvektor-sajátérték feladathoz jutunk. Most nem tudjuk, hogy $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ milyen előjelű, viszont $(\lambda - 1 + \varphi)/\varphi$ valamilyen sajátértéke M-nek, pl, egyenlő μ-vel:

$$Mx = \mu x \tag{5.12}$$

és

(5.13) $$\lambda(\mu) = 1 - \varphi + \mu\varphi.$$

$\varphi = 1$ esetén $\lambda(\mu) = \mu$. Mivel $M \geq 0$, föltehető, hogy $\hat{\lambda} = \varrho(M)$. Ha az M mátrix ciklikus, akkor (5.6) szerint (vö. Varga (1962) Def. 2.2) még $k-1$ komplex (ezenbelül páros k-nál 1 negatív, páratlan k-nál O negatív) sajátérték domináns. Ekkor φ növelésével a $\varrho(M)$-hez tartozó pozitív sajátérték csökken, a többi abszolút értéke nő, tehát $1/|\hat{\lambda}|$ csökken.

Ha az M mátrix nem ciklikus, akkor M nemnegativitása és irreducibilitása folytán M többi sajátértéke kisebb abszolútértékű mint $\varrho(M)$, tehát φ megfelelően kicsiny növelése esetén a $\varrho(M)$-hez tartozó sajátérték dominanciája megmarad.

(iii) Triviálisan következik (i)-ből és (ii)-ből.

Megjegyzés: A mátrixelméleti irodalom (pl. *Varga* (1962)) az M mátrix ciklikusságát azzal definiálja, hogy több mint egy domináns sajátértéke létezik, és ebből vezeti le (5.5) alakot. Mi szándékosan fordított sorrendet választottunk, mivel közgazdaságilag (5.5) szemléletesebbnek tűnt, mint a szokásos definíció.

6. Maximális konvergenciasebesség a készletjelzéses gazdaságban

Az előző fejezet feltevései mellett jelenleg nem ismert a feltétel nélküli optimális reakciósebesség-vektora, ezért szorítkoztunk a *csillapított*, ill. *egyöntetű* reakció-sebességekre. Most speciálisabb R reálstruktúrákra szorítkozunk, a *készletjelzéses* gazdaságéra. Így képesek leszünk meghatározni a feltétel nélküli optimális reakciósebesség-vektort, amelyről kiderül, hogy megegyezik a 2. fejezet naiv optimumával, akárcsak az 5. fejezet feltételes optimumai.

5. Tétel A KS-1 készletjelzéses gazdaságban

(i) egyöntetű termelési- és egyöntetű vételi reakciósebességek esetén, vagyis ha

(6.1) $$d_j = \delta, \quad (1 \leq j \leq n) \quad \text{és} \quad e_{ij} = \varepsilon \quad ((i, j) \in \bar{J}),$$

a konvergenciasebesség δ és ε reakciósebesség növelésekor nő, ha

(6.2) $$\delta + \varepsilon < 2$$

és csökken, ha

(6.3) $$\delta + \varepsilon > 2.$$

A

(6.4) $$\delta + \varepsilon = 2$$

határesetben nő, ha $|\delta - \varepsilon|$ csökken.

(ii) Tetszőleges reakciósebesség vektor esetén az egyöntetű egységnyi az optimális, amikor is a maximális konvergenciasebesség

(6.5) $$|1/\hat{\lambda}_{\text{opt}}| = 1/\sqrt{\varrho(A)},$$

ahol $\varrho(A)$ az A mátrix spektrálsugara.

Bizonyítás:

A bizonyítás nehézségét az okozza, hogy a reakciósebességekre tett feltevések nélkül nehéz meghatározni a domináns sajátértéket és annak függését a reakciósebesség-vektortól.

Eleve még azt sem tudjuk, hogy negatív reakciósebesség-elemek nem segítenek-e a stabilizálásban. *Enthoven—Arrow* (1956) tétele uralkodó saját hatás és ellentétes idegen hatás esetére kimondja a negatív elemet tartalmazó reakciósebesség-vektorok *instabilitását*, tehát esetünkben föltehetjük, hogy a reakciósebesség-vektor pozitív.

Kiindulásul KS-1 (6.6) egyenlete szolgál, amelyet most a

$$\psi_{jk}(\lambda) = \frac{d_j e_{jk}}{(\lambda - 1 + d_j)(\lambda - 1 + e_{jk})} \tag{6.6}$$

jelölés segítségével tömörebben írunk föl:

$$w_j = \sum_{k=1}^{n} \psi_{jk}(\lambda)\, a_{jk} w_k \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{6.7}$$

(A kalap elhagyásával ismét arra utaltunk, hogy nem csak a domináns gyököt tekintjük, bár csak az érdekes igazából.)

(i) ,,Félig-egyöntetű'' reakciósebesség vektor esetén még követhetjük az előző fejezet, ill. KS-1 gondolatmenetét. (6.7) átrendezésével $\psi(\lambda)^{-1}w = Aw$ nem-lineáris sajátérték-sajátvektor feladathoz jutunk. Legyen az A mátrix tetszőleges sajátértéke α,

$$Aw = \alpha w \tag{6.8}$$

akkor előző egyenletünk szerint

$$\psi(\lambda) = 1/\alpha. \qquad (\alpha \neq 0) \tag{6.9}$$

(Itt és az (i) pontban a továbbiakban ψ indexezése feleslegessé válik (6.1) folytán!)

(6.6)-ot behelyettesítve (6.9)-be másodfokú egyenletet kapunk λ-ra, amelyet megoldva

$$\lambda(\alpha) = \frac{2 - \delta - \varepsilon \mp \sqrt{(\delta - \varepsilon)^2 + 4\alpha\delta\varepsilon}}{2}.$$

Frobenius—Perron tétele szerint $|\alpha| \leq \varrho$, tehát $\lambda(\alpha)$ akkor és csak akkor maximális abszolút értékben, ha $\alpha = \varrho$. Pontosabban:

$$\hat{\lambda} = \frac{2 - \delta - \varepsilon + \sqrt{(\delta - \varepsilon)^2 + 4\varrho\delta\varepsilon}}{2} > 0, \text{ ha (6.2) áll} \tag{6.10}$$

és

$$\hat{\lambda} = \frac{2 - \delta - \varepsilon - \sqrt{(\delta - \varepsilon)^2 + 4\varrho\delta\varepsilon}}{2} < 0, \text{ ha (6.3) áll.} \tag{6.11}$$

(6.10—11) δ és ε szerinti parciális differenciálásával (i) könnyen belátható. (6.4) esetén a következő kifejezést kell vizsgálni.

$$\hat{\lambda} = \sqrt{(1 - \delta)^2 + \varrho\delta(2 - \delta)}. \tag{6.12}$$

(ii) Az (i) speciális esetet részben szemléletessége és részben további alkalmazhatósága folytán mondtuk ki külön. Bár általános reakciósebességvektornál nincs explicit képletünk a maximális konvergenciasebességre, sőt, még a konvergenciát biztosító reakciósebesség-vektorok tartományát sem ismerjük, az (i) pontban nyert ismereteink jól hasznosíthatók az általános esetben is.

Először belátjuk, hogy (6.7)-nek van *valós* megoldása, amelyet hullámmal jelölünk: $(\tilde{\lambda}, \tilde{w})$.

(6.7) helyett a némileg általánosabb

$$\varkappa_\lambda w_j = \sum_{k=1}^{n} \psi_{jk}(\lambda)\, a_{jk} w_k \qquad 1 \leq j \leq n, \qquad \lambda \text{ valós}$$

paraméteres lineáris sajátérték-sajátvektor feladatot vizsgáljuk. Nyilvánvaló, hogy ez $\varkappa_\lambda = 1$ esetén azonos (6.7)-tel és megfordítva, csak $\varkappa_\lambda = 1$ esetén azonos (6.7)-tel.

Legyen $\mu^+ = \max\{1 - d_j,\ 1 - e_{jk} \mid 1 \leq j \leq n,\ (j, k) \in \bar{J}\}$. $(d, E) \overset{(\bar{J})}{>} 0$, miatt $\mu^+ < 1$. A KS-1 cikk érvelését megismételve $\varkappa_{\mu^+} = \infty$, $\varkappa_1 = \varrho < 1$, tehát van olyan λ^* szám, amelyre

$$\varkappa_{\lambda^*} = 1 \qquad (\mu^+ < \lambda^* < 1). \tag{6.13}$$

Legyen λ^+ a legnagyobb ilyen tulajdonságú szám. Ekkor belátjuk, hogy λ^+ *domináns sajátérték.*

Ellenkező esetben ugyanis Frobenius–Perron tétele szerint $\varrho[\psi_{jk}(\lambda^+) a_{jk}]_{j,k=1}^n >$ > 1, tehát az előző gondolatmenetben μ^+ helyett λ^+-t írva azt kapjuk, hogy a (6.13)-beli λ^* számok egyike nagyobb λ^+-nál. De λ^+ éppen e számok maximuma volt, tehát ellentmondáshoz jutottunk. λ^+ tényleg domináns, tehát ismét Frobenius–Perron tétele szerint

$$w_j^+ = \sum_{k=1}^{n} \psi_{jk}(\lambda^+)\, a_{jk} w_k^+ \qquad w_j^+ > 0, \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{6.14}$$

Mivel az optimális megoldás stabil, $|\hat{\lambda}| < 1$, tehát az $[1, \infty]$ intervallumban nincs sajátérték.

Hasonló gondolatmenettel és $\mu^- = \min\{1 - d_j,\ 1 - e_{jk} \mid 1 \leq j \leq n,$ $(j, k) \in \bar{J}\}$ jelöléssel van a $(-1, \mu^-)$ intervallumban legalább egy valós megoldása (6.7)-nek és a legkisebb sajátértéket jelöljük λ^--szal.

Mivel $\mu^- \leq \mu^+$ [és egyenlőség csak $d_j = e_{jk} = 1$ $(1 \leq j \leq n,\ (j, k) \in \bar{J})$ esetén áll], $\lambda^- < \lambda^+$. Ha a reakciósebesség-vektor csillapított, akkor az előző fejezet értelmében a domináns sajátérték pozitív, tehát λ^+. Ha a reakciósebesség-vektor *nem* csillapított, azaz legalább egyik eleme nagyobb, mint 1, akkor $\mu^- < 0$, tehát van negatív sajátérték is, $\lambda^- < 0$.

Mivel a 4. Tételhez képest az 5. Tétel semmi újat nem tartalmaz csillapított reakciósebesség-vektor esetén, a továbbiakban kizárjuk ezt az esetet.

A vizsgálatot megnehezíti, hogy nem tudjuk, hogy lehet-e a domináns sajátérték komplex. Azt sejtjük, hogy nem, de ezt nem tudjuk bizonyítani. Végül is elegendő lesz λ^+ és λ^- „domináns-jelölteket" tanulmányozni a reakciósebesség-vektor függvényében. Belátjuk, hogy *λ^+ és λ^- egyaránt csökken a reakciósebesség-vektor növelésénél.*

Legyen ugyanis $0 < (d^{(1)}, E^{(1)}) \leq (d^{(2)}, E^{(2)})$. Könnyen belátható, hogy $\psi_{jk}(\lambda)$ csökkenő függvénye d_j-nek, ill. e_{jk}-nak, amennyiben $\mu^+ < \lambda < 1$. Ugyanis $\psi_{jk}(\lambda)$ mindkét tényezője pozitív és csökkenő függvénye d_j-nek, ill. e_{jk}-nak. Alkalmas jelöléssel

$$\psi_{jk}^{(1)}(\lambda) \leq \psi_{jk}^{(2)}(\lambda), \quad \text{ha} \quad u_1^+ < \lambda < 1 \qquad (j, k) \in \bar{J} \tag{6.15}$$

és legalább egy (j, k)-ra határozott egyenlőtlenség áll.

KS-1 I. Segédtétele és (6.14—15) szerint

$$\varrho[\psi_{jk}^{(1)}(\lambda_1^+)\, a_{jk}] > \varrho\, [\psi_{jk}^{(2)}(\lambda_1^+)\, a_{jk}] \tag{6.16}$$

(figyelembe véve, hogy az A mátrix irreducibilis).

Definíció szerint (6.16) bal oldalán álló kifejezés 1, ahonnét a fenti gondolatmenet újabb alkalmazásával adódik, hogy $\lambda_1^+ > \lambda_2^+$.

Nem-csillapított reakciósebesség-vektor esetén λ^--nál ugyanez a helyzet. Mivel $|\hat{\lambda}| \geq \max\,(|\lambda^+|, |\lambda^-|)$, az egyöntetű egységnyi reakciósebesség-vektor optimalitásához elegendő

$$\max\,(|\lambda^+|, |\lambda^-|) > |\hat{\lambda}^{(1)}| \quad \text{ha} \quad (d, E) \neq \mathbf{1} \tag{6.17}$$

összefüggés belátása, ahol az $\mathbf{1}$ az egyöntetű egységnyi reakciósebesség-vektora, amelyre

$$\hat{\lambda}^{(1)} = \sqrt{\varrho}\,. \tag{6.18}$$

Először belátjuk, hogy *van* olyan $(j, \mathrm{k}) \in \bar{J}$, amelyre

$$\psi_{jk}(\lambda^+) \leq \frac{1}{\varrho}. \tag{6.19}$$

Ellenkező esetben ugyanis $\psi_{jk}(\lambda^+) > 1$ *minden* $(j, k) \in \bar{J}$-re. (6.14)-re alkalmazva KS-1 I. Segédtételét ellentmondáshoz jutunk: $\varrho(A) > \varrho$.

Hasonlóan igazolható, hogy csillapítatlan reakciósebesség-vektor esetén *van* olyan $(j, k) \in \bar{J}$, amelyre

$$\psi_{jk}(\lambda^-) \leq \frac{1}{\varrho}\,. \tag{6.20}$$

Legyen $\alpha = 1/\psi_{jk}(\lambda^+)$, $\delta = d_j$ és $\varepsilon = e_{jk}$ a (6.19)-ben szereplő j-re és k-ra. Ekkor az (i) pont szerint [(6.10)]

$$\lambda^+ = \frac{2 - \delta - \varepsilon + \sqrt{(\delta - \varepsilon)^2 + 4\alpha\delta\varepsilon}}{2}$$

(Mivel $\lambda^+ > \mu^+ \geq (2 - \delta - \varepsilon)/2$, λ^+ a $+$ jelhöz tartozik!) Hasonlóan [(6.11)] $\alpha = 1/\psi_{jk}(\lambda^-)$ stb. esetén

$$\lambda^- = \frac{2 - \delta - \varepsilon - \sqrt{(\delta - \varepsilon)^2 + 4\alpha\delta\varepsilon}}{2}\,.$$

Az (i) pontban beláttuk, hogy mind $|\lambda^+|$ mind $|\lambda^-|$ nő α-val, tehát (6.19), ill. (6.20) szerint $\lambda^+ > \hat{\lambda} > 0$, ill. $\lambda^- < \hat{\lambda} < 0$ teljesül, kivéve ha (6.19)-ben, ill. (6.20)-ban minden (j, k)-ra egyenlőség áll a $<$ helyett. De ekkor $>$ helyett is egyenlőség kell hogy álljon, ami csak az (i) pontban tárgyalt esetben áll. Mivel $|\hat{\lambda}| > \hat{\lambda}^{(1)}$ az (i) feltétel mellett, (6.17)-et igazoltuk.

7. A rendelésjelzéses gazdaság esete

A készletjelzéses gazdasággal ellentétben, a maximális konvergenciasebességet nem tudjuk meghatározni a rendelésjelzéses gazdaságban, KS-2-ben. Mivel a rendelésjelzéses gazdaságban az input-készlet változása független saját szabályozási változójától, a rendeléstől, *uralkodó sajáthatás* helyett *nulla sajáthatás* esetével állunk szembe. Az is belátható, hogy az *idegen hatások* között vannak pozitívak is és negatívak is. Vagyis az 5. fejezet eredményei nem alkalmazhatók.

Mégis kimondhatunk olyan tételt, amelyből arra következtethetünk, hogy a KS-2 szabályozás gyorsabb mint a KS-1.

6. Tétel A rendelésjelzéses gazdaságban

(i) egyöntetű szállítási- és egyöntetű rendelési reakciósebességek esetén, azaz ha

$$p_{ij} = \pi \quad \text{és} \quad q_{ij} = \varkappa \quad \text{minden } (i, j) \in \bar{J}\text{-re}, \tag{7.1}$$

a készletjelzéses gazdaság maximális konvergenciasebessége

$$\pi = 2 \quad \text{és} \quad \varkappa = \frac{1}{2} \tag{7.2}$$

esetén megvalósul. Egyébként a (7.2) sebességpár a (7.1) feltételnél optimális, ha az A mátrix páros-ciklikus; nem optimális, ha az A aciklikus.

(ii) a feltétel nélküli maximális konvergenciasebesség általában nagyobb, (de legfeljebb egyenlő) mint a készletjelzéses gazdaságé.

Megjegyzések:

Az 5. fejezetben, amikor azt vizsgáltuk, hogy az egyöntetű reakciósebességek közül az egységnyi mikor optimális, az M mátrix *ciklikussága* fontos speciális eset volt, hiszen magába foglalta a készletjelzéses gazdaságot. Ezzel ellentétben, most az A mátrix ciklikussága kivételes eset, bár *Morishima* (1961) óta külön bíbelődnek vele az ágazati kapcsolatok elméletében.

Míg a készletjelzéses gazdaságban a maximális konvergenciasebességet az 5. Tételben általánosan megadtuk, a rendelésjelzéses gazdaságban ez nem sikerült. Ennek részben az az oka, hogy a készletjelzéses maximum csak $\varrho(A)$-tól függ, a rendelésjelzéses maximum pedig az A mátrix többi sajátértékétől is függ, mindenekelőtt a legkisebb negatív sajátértéktől. Szélsőséges esetben, amikor a gazdaság *egyetlen egy szektorból* áll, akkor az optimális reakciósebesség-pár

$$\varphi_{11} = 2 \quad \text{és} \quad q_{11} = \frac{1}{2(1-\varrho)} \tag{7.3}$$

és a konvergenciasebesség *végtelen*. Ugyanis a rendszer a második időszakban a normatív pályára kerül.

E fejezet fő érdekességét abban látom, hogy sikerült két *minőségileg* különböző szabályozási rendszer konvergenciasebességét összehasonlítani. (*Mennyiségileg* különböző rendszerek már KS-1-ben, ill. e dolgozat előző fejezeteiben is szerepeltek, amikor csak a reakciósebességeket változtattuk!) Ismét aláhúznám, hogy ez az összehasonlítás csak hosszútávú szabályozás esetén megbízható. További megszorítás, hogy optimális reakciósebességeket feltételezünk, holott ezek csak a készletjelzéses gazdaságra ismertek. Természetesen szükség volt valamilyen közös ismérve a két gazdaság összehasonlításánál, és erre csak az optimum kínálkozott. (T. Marschak 3. fejezetben idézett dolgozatának fő hibája éppen abban rejlett, hogy (3.9) optimális reakciósebesség helyett (3.15) maximális reakciósebességgel számolt elemzéseiben. Vö. *Simonovits* (1976).)

A. 6. tétel bizonyítása

A bizonyítás kezdete hasonlít az 5. Tételéhez. Most KS-2 (4.3) összefüggést írjuk föl röviden a

$$\psi(\lambda) = \frac{\pi\varkappa}{\lambda^2 - (2-\pi)\lambda + 1 - \pi(1-\varkappa)} \tag{7.4}$$

jelöléssel:

$$\psi(\lambda)^{-1} k = Ak. \tag{7.5}$$

Látjuk, hogy $\psi(\lambda)^{-1}$ az A mátrix sajátértéke, mondjuk α:

$$\psi(\lambda)^{-1} = \alpha. \tag{7.6}$$

Egyszerű számolással adódik

$$\lambda_{1,2}^{(\pi,\varkappa)}(\alpha) = \frac{2-\pi+\sqrt{\pi^2-4(1-\alpha)\pi\varkappa}}{2}. \tag{7.7}$$

Vizsgáljuk meg először $\lambda_{1,2}^{(\pi,\varkappa)}(\varrho)$-t. Könnyen belátható, hogy (7.3) esetén $\lambda_{1,2}^{(\pi,\varkappa)}(\varrho) = 0$. Vagyis egy-szektoros gazdaság esetén (amikor más sajátértéke nincs A-nak) a konvergenciasebesség végtelen, azaz 2 lépésen belül a rendszer a normális pályára kerül. (Ha egy $N \times N$-es mátrix összes sajátértéke nulla, akkor az N-edik hatványa nulla!) *Véges* idejű konvergencia (szabályozhatóság) általában nem remélhető!

Ellentétben a készletjelzéses gazdasággal, a rendelésjelzéses gazdaságban az A mátrix többi sajátértéke is szerepet kap. Belátjuk, hogy (7.2) esetén a készletjelzéses maximum valósul meg:

$$\hat{\lambda}^{(2,\frac{1}{2})} = \sqrt{\varrho}. \tag{7.8}$$

Ugyancsak (7.7)-be behelyettesítve (7.2)-t $\lambda_{1,2}^{(2,\frac{1}{2})}(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ összefüggést kapjuk, amelyből — $|\alpha| \leq \varrho$ figyelembevételével — adódik (7.8).

Ha belátjuk, hogy

$$\max\{|\lambda_{1,2}^{(\pi,\varkappa)}(\varrho)|, |\lambda_{1,2}^{(\pi,\varkappa)}(-\varrho)|\} > \sqrt{\varrho}, \quad \text{ha} \quad (\pi, \varkappa) \neq \left(2, \frac{1}{2}\right), \tag{7.9}$$

akkor (7.8) értelmében

$$|\hat{\lambda}^{(\pi,\varkappa)}| > \sqrt{\varrho}, \quad \text{ha} \quad (\pi, \varkappa) \neq \left(2, \frac{1}{2}\right) \tag{7.10}$$

is bizonyított, amely nem más, mint (7.2) optimalitása párosan ciklikus A mátrix esetén.

Rátérünk (7.9) bizonyítására. Vegyük észre, hogy (7.7) diszkriminánsa $\alpha = \varrho$, ill. $(-\varrho)$ esetben egyaránt csökkenő függvénye $\varkappa$-nak. Ezért adott π mellett, ha mindkét diszkrimináns pozitív, akkor $\varkappa$-növelésével mindkét diszkrimináns, azaz minkét gyök abszolút értéke csökkenthető. Ha mindkét diszkrimináns negatív, akkor $\varkappa$ csökkentésével mindkét diszkrimináns *abszolút* értéke, azaz mindkét gyök abszolút értéke csökkenthető. Tehát minimumkeresésnél föltehetjük, hogy az egyik diszkrimináns pozitív, a másik pedig negatív. Természetesen esetünkben

$$\pi^2 - 4\pi\varkappa(1+\varrho) < 0 < \pi^2 - 4\pi\varkappa(1-\varrho). \tag{7.11}$$

Ekkor (7.7) szerint (némi átrendezés után)

$$|\lambda^{(\pi,\varkappa)}(-\varrho)| = \sqrt{|1-\pi[1-\varkappa(1+\varrho)]|} \tag{7.12}$$

és

$$|\hat{\lambda}^{(\pi,\varkappa)}(\varrho)| = \begin{cases} 1-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\sqrt{1-\dfrac{4\varkappa(1-\varrho)}{\pi}}, & \text{ha} \quad \pi \leq 2 \\ -1+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\sqrt{1-\dfrac{4\varkappa(1-\varrho)}{\pi}}, & \text{ha} \quad \pi > 2, \end{cases} \tag{7.13}$$

ahol $|\hat{\lambda}(\alpha)| = \max\{|\lambda_1(\alpha)|, |\lambda_2(\alpha)|\}$.

Mivel stabil rendszerekre szorítkozhatunk, (7.12)-ben 1-nél kisebb szám áll, vagyis $1-\varkappa(1+\varrho) > 0$, tehát $|\hat{\lambda}(-\varrho)|$ csökkenő függvénye π-nek.

(7.13) szerint $|\hat{\lambda}(\varrho)|$ csökkenő függvénye π-nek, ha $\pi \leq 2$; és növekvő függvénye π-nek, ha $\pi > 2$.

Vagyis

$$|\hat{\lambda}^{(\pi,\varkappa)}(-\varrho)| \geq \sqrt{2\varkappa(1+\varrho)-1}, \quad \text{ha} \quad \pi \leq 2 \tag{7.14}$$

és

$$|\hat{\lambda}^{(\pi,\varkappa)}(\varrho)| \geq \sqrt{1-2\varkappa(1-\varrho)} \tag{7.15}$$

tetszőleges megengedett π-re. (7.14) és (7.15) összevetéséből következik, hogy

$$\max\{|\hat{\lambda}^{(\pi,\varkappa)}(-\varrho)|, |\hat{\lambda}^{(\pi,\varkappa)}(\varrho)|\} \geq \max\{\sqrt{2\varkappa(1+\varrho)-1}, \sqrt{1-2\varkappa(1-\varrho)}\}. \tag{7.16}$$

(7.16) jobb oldalán egy növekvő és egy csökkenő függvény áll, melyek $\varkappa = 1/2$-ben metszik egymást: ez tehát a minimumhely, a minimum értéke pedig $\sqrt{\varrho}$. Következésképpen (7.16) bal oldala nagyobb-egyenlő mint $\sqrt{\varrho}$, ami nem más mint (7.9).

Ezzel (i) bizonyítását befejeztük, ha az A mátrix páros-ciklikus.

Ha az A mátrix nem ciklikus, akkor az (i) pont állítása érvényét veszti. Mindenesetre ekkor (7.9) *nem* igaz: $\pi = 2$ mellett $\varkappa$-t némileg 1/2 fölé emelve $\hat{\lambda}(\varrho)$ $\sqrt{\varrho}$-alá csökken, másrészt $\alpha \neq \varrho$-nál $|\lambda_{1,2}^{(2,\frac{1}{2})}| = |\sqrt{\alpha}| < \sqrt{\varrho}$, tehát $\hat{\lambda}(\varrho)$ domináns marad:

$$|\hat{\lambda}^{(2,\varkappa)}| < \sqrt{\varrho}, \quad \text{ha} \quad \varkappa \gtrsim 1/2. \tag{7.17}$$

(ii) triviális.

(Beérkezett: 1978. április 17-én.)

IRODALOM

1. BRÓDY, A. (1973) ,,Szabályozási modellekről", *Szigma 6* 93–103.
2. ENTHOVEN, A. C.–ARROW, K. J. (1956) "A theorem on expectations and the stability of equilibrium", *Econometrica 24* 288–293.
3. KORNAI, J.–SIMONOVITS, A. (1975a) ,,Neumann-gazdaságok szabályozási problémái", *Szigma 8* 81–99.
4. KORNAI, J.–SIMONOVITS, A. (1975b) ,,Rendelésjelzésen alapuló szabályozás egy Neumann-gazdaságban" *Szigma 8* 282–289.
5. KORNAI, J.–SIMONOVITS, A. (1977) "Decentralized Control Problems in Neumann-economies", *Journal of Economic Theory 14* 44–67.
6. METZLER, L. A. (1945) "Stability of multiple markets: the Hicks conditions", *Econometrica 13* 277–292.
7. MCFADDEN, D. (1969) "On the controllability of decentralized macroeconomic systems: the assignment problem", a *Mathematical Systems Theory and Economics* I. c. kötetben (szerk: H. W. Kuhn és G. Szegő) 221–234 Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.
8. MARSCHAK, TH. (1972) "Computation in organizations; comparison of price mechanisms and other adjustment processes", a *Decision and Organization* c. kötetben (szerk: C. B. McGuire és R. Radner) XII. fejezete, North Holland P. C., Amsterdam.
9. SIMONOVITS, A. (1976) "Some properties of a decentralized adjustment process", *Management Science, 22* 883–891.
10. SIMONOVITS, A. (1978a) *Decentralizált rendszerek destabilizálása* (kézirat, Budapest, KTI).
11. SIMONOVITS, A. (1978b) *Normák, várakozások és a stabilitás egy lineáris gazdaságban* (kézirat, KTI).
12. VARGA, R. S. (1962) *Matrix Iterative Analysis* Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

MAXIMUM CONVERGENCE SPEED OF DECENTRALIZED CONTROL

In this paper I deal with the question how rapidly elementary decentralized control may lead a dynamic system towards its normative path. *Convergence speed* is measured by the reciprocal of the absolute value of the value included in the dominant solution of the deviation system. (Problems of this measurement are dealt with in Chapters 3 and 4).

Major results of the paper are the following:

— If any decision-maker disregards external effects, then in case of unit self-effect the optimum rate of reaction will be one (naive optimum !).

— In case of *productive economy and opposite external effect* convergence speed will increase if the vector of *damped* reaction speeds increases and the maximum convergence speed is the naive optimum.

— In a stock-signal economy the *unconditional* optimum will be also the naive optimum.

— In an order-signal economy in case of uniform delivery rate (2) and uniform order rate (1/2) of reaction vectors convergence speed is equal to the stock-signal maximum, although uniform vectors are not optimal in general.

МАКСИМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В данной работе рассматривается такой вопрос, что с какой скоростью ведет в сторону нормативного пути динамичную систему элементарное децентрализованное регулирование. Скорость измеряется посредством обратной величины абсолютного значения собственного значения доминантного решения системы отклонений. (Эта величина рассматривается в главах 3 и 4.)

Основными результатами данной работы являются следующие:

— Если кто-либо из принимающих решение не учитывает внешние влияния, то в случае наличия одной единицы собственного воздействия оптимальная скорость реакции также составляет одну единицу. (Наивный оптимум!)

— В случае продуктивного экономического и противоречивого внешнего воздействия скорость сходимости увеличивается если возрастает вектор скорости успокоенной реакции и наивный оптимум будет максимумом скорости сходимости.

— В экономике, сигнализирующей о наличии запасов, безусловный также является наивным оптимумом.

— В экономике, сигнализирующей о наличии заказов если векторные скорости однородных поставок (2) и однородных заказов (1/2), то скорость сходимости аналогична максимуму сигнала о запасах, хотя однородные векторы чаще всего не оптимальные.