

SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági
Szakosztályának lapja

Szerkeszti:

MARTOS BÉLA

Társszerkesztők:

ANDORKA RUDOLF, BOD PÉTER, IFJ. KREKÓ BÉLA, PONGRÁCZ TIBOR

Szerkesztő bizottság:

AUGUSTINOVICS MÁRIA, BÉKÉSI GÁBOR, BOD PÉTER, CSEPINSZKY ANDOR, ÉLTETŐ ÖDÖN,
FORGÓ FERENC, HALABUK LÁSZLÓ, HOSSZÚ MIKLÓS, KELE PÉTER, KORNAI JÁNOS, KREKÓ
BÉLA, LIGETI ISTVÁN, MESZÉNA GYÖRGY, MORVA TAMÁS, ORMÓS ZSOLT, SIMON NÓRA, SIMONO-
VITS ANDRÁS, SÓLYOM CSABA, STÁHL JÁNOS, SZAKOLCZAI GYÖRGY, SZÉP JENŐ (elnök), TARDOS
MÁRTON, TÓTH JÓZSEF, ZIERMANN MARGIT

*

E szám szerzői:

BOD PÉTER, a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Matematikai Kutató Intézete
tudományos tanácsadója, HULYÁK KATALIN, a Központi Statisztikai Hivatal Ökonomet-
riai Laboratóriumának főelőadója, HUNYADI LÁSZLÓ, a SZÁMKI osztályvezetője, LOSON-
CZY ISTVÁNNÉ, a SZÁMKI tudományos munkatársa, MIHÁLYFFY LÁSZLÓ, a SZÁMKI
önálló csoportvezetője, MUSZÉLY GYÖRGY, a SZÁMKI tudományos munkatársa, NEMÉ-
NYI JUDIT, a SZÁMKI tudományos segédmunkatársa, PÖLÖSKEI PÁL, a SZÁMKI osztály-
vezetője, RÉTI JÁNOS, az Országos Tervhivatal főelőadója, RIECKE WERNER, a SZÁMKI
tudományos segédmunkatársa, SUBICZ PÉTER, a SZÁMKI tudományos munkatársa,
UJVÁRI JÓZSEF, a Központi Statisztikai Hivatal előadója, ZSELLÉR GYULA, a SZÁMKI
tudományos munkatársa.

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1361 Budapest, Pf. 11.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta
hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (PKHI 1900 Budapest V., József
nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKH 215–96 162
pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V., Bajcsy-
Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363
Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111–010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488,
és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon:
185–612. Előfizetési díj egy évre: 120,—Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149

A Szigma e számának cikkei a Számítógéppalkalmazási Kutatóintézet Ökonometriai Főosztályán végzett kutatások egy részéről számolnak be. Hunyadi László, ill. Neményi Judit és Hunyadi László, valamint Subicz Péter cikke az elkészült éves és negyedéves ökonometriai modell egyes módszertani kérdéseit tárgyalja, Hulyák Katalin és Losonczy Istvánné, illetve Muszély György cikke pedig a fogyasztás-elemzés egyes kérdéseit. Ezekkel a szorosan vett ökonometriai munkákkal szemben Mihályffy László, Pölöskei Pál és Réti János cikke olyan elméleti kérdést tárgyal, amely az ÁKM-bázisú modellek alkalmazásakor merült fel. Bod Péter hozzászólása erre a problémára javasol egy egyszerűbb megoldást.

A szám összeállításához nyújtott segítségért a szerkesztőség köszönetet mond Dr. Szokolczay Györgynek és Zsellér Gyulának.

Ökonometriai modell megoldása matematikai programozással

Bevezetés

Ismeretes, hogy a szocialista gazdaság irányítását, szabályozását elsősorban különböző időszakokat átölelő népgazdasági tervekkel végzik. Ebből is következik, hogy a népgazdasági szintű gazdasági számítások között a tervezés területén terjedtek el leginkább a korszerű módszerek, melyek a gazdaságmatematika legújabb eredményeit és a modern számítógépek nyújtotta számítástechnikai lehetőségeket egyaránt felhasználják. E korszerű módszerek elsősorban a távlati tervezésben és az ötéves tervezésben terjedtek el, és különösen az távlati tervezésről mondható el, hogy azok a tervezés rendszerébe beépültek, annak szerves részét képezik.

A modern módszerek alkalmazása az éves (rövidtávú) tervezésben azonban messze elmaradt a távlati és középtávú alkalmazásokhoz képest, amit csak részben indokolhat az a tény, hogy e tervek részletezettségükénél és „operativitásuknál” fogva nehezebben modellezhetők, illetve e modellek nehezebben kezelhetők. Ami az alkalmazott módszereket illeti, a tervezés területén a legnagyobb hagyományai az ágazati kapcsolatok elemzésének, a különböző népgazdasági mérlegek elemzésének és a különböző matematikai programozáson alapuló tervezési modelleknek voltak. Ez elsősorban abból következett, hogy e módszerek voltak leginkább alkalmasak arra, hogy a tervezés koordináló és erőforrás allokáló funkcióját elősegítsék.

Ezen a területen 1968 után érezhető változások következtek be. Amellett, hogy a népgazdasági tervezés e két funkciója továbbra is elsőrendű fontosságú maradt, a gazdaságirányítási rendszer megváltoztatása nagymértékben megnövelte a determinisztikus modelleken kívül a sztochasztikus és így az ökonometriai modellek szerepét is a tervezés területén, hiszen e modellek különösen alkalmasak a döntően sztochasztikus elemeket tartalmazó gazdasági folyamatok modellezésére.

A következőkben ismertetendő modell elsősorban azzal a céllal készült, hogy a rövidtávú és a középtávú tervek közötti összhang megteremtése mellett választ adjon az éves tervezés során felvetendő néhány fontos kérdésre. Azok a problémák, amelyeket a cikk megvizsgál bizonyos szempontból optimalizációs problémák. Megválaszolásukra az ökonometriai modellnek egy matematikai programozási eljárás alapján alapuló megoldási lehetőségét mutatja be.

Itt szeretném megjegyezni, hogy ökonometriai modellek optimalizálása az utóbbi időben egyre inkább előtérbe kerül. Ezzel kapcsolatban hivatkoznék pl. [1]-, [2]-, [4]-re.

A cikk második részében az ismertetett módszernek egy konkrét alkalmazását mutatjuk be a népgazdaság egy kisméretű ökonometriai modelljére.

1. A programozási modell származtatása ökonometria modellből

Induljunk ki egy lineáris, dinamikus (késleltetett változókat is tartalmazó) szimultán egyenletekből álló ökonometria modell strukturális alakjából:

$$Bx + \Gamma y = u, \quad (1)$$

ahol x az endogén változók, y a predeterminált változók vektora. B és Γ az endogén, illetve predeterminált változók paramétereiből alkotott mátrixok; u a reziduumok vektora.

Helyettesítsük $u = 0$ -t, vagyis a reziduumok várható értékét (1)-be, így meghatározhatjuk a modell redukált formáját:

$$x = -B^{-1}\Gamma y, \quad (2)$$

Vizsgáljuk meg most kissé részletesebben a modell késleltetett időbeli kapcsolatait, dinamikus sajátosságait. Ennek érdekében célszerű lesz a hagyományos (1) és (2) jelölésrendszert az alábbiak szerint módosítani:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3)$$

és

$$S = [B; \Gamma]. \quad (4)$$

Ezeknek megfelelően az (1) alatti összefüggés új alakja:

$$Sz = 0. \quad (5)$$

Az S paramétermátrix és a z vektor a modell dinamikus sajátosságait, késleltetett kapcsolatait figyelembe véve az alábbi módon bontható fel:

$$\begin{aligned} Sz &= S_0 z_0 + S_{-1} z_{-1} + \dots + S_{-n} z_{-n} + S_e z_e = \\ &= [S_0; S_{-1}; \dots S_{-n}; S_e] \begin{bmatrix} z_0 \\ z_{-1} \\ \vdots \\ z_{-n} \\ z_e \end{bmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

ahol z_0 a folyó endogén változók vektora, S_0 e változók paramétermátrixa, $z_{-1} \dots z_{-n}$ a késleltetett endogén változók vektora, $S_{-1} \dots S_{-n}$ az e változókhoz tartozó paramétermátrixok, z_e a folyó és késleltetett exogén változók vektora, míg S_e a hozzájuk tartozó megfelelő méretű paramétermátrix, n pedig a figyelembe vett maximális késleltetés.

Amennyiben S_0 nem szinguláris, a jelölésrendszerünknek megfelelően részletezett redukált forma az alábbiak szerint alakul:

$$z_0 = -S_0^{-1} [S_{-1}; \dots S_{-n}; S_e] \begin{bmatrix} z_0 \\ z_{-1} \\ \vdots \\ z_{-n} \\ z_e \end{bmatrix}. \quad (7)$$

A (7) alatti redukált forma segítségével ezután lépésenként végezhető el szokásos módon az időszakonkénti előrejelzés, illetve határozhatók meg a modell endogén változóinak előrebecsült értékei az alábbiak szerint:

$$z_1 = -S_0^{-1}[S_{-1}; S_{-2}; \dots S_{-n}; S_e] \begin{bmatrix} z_0 \\ z_{-1} \\ \vdots \\ z_{-n+1} \\ z_e \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$z_n = -S_0^{-1}[S_{-1}; S_{-2}; \dots S_{-n}; S_e] \begin{bmatrix} z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \vdots \\ z_0 \\ z_e \end{bmatrix}. \quad (9)$$

A (8) és (9) összefüggésekből látható, hogy a redukált forma mátrixa az előrejelzés során változatlan marad. (Ez a megállapítás természetesen a 0-ik időpontban végzett n számú előrejelzésre érvényes. Az ökonometriai gyakorlatban a strukturális forma paramétermátrixát időről időre újra szokás becsléni és az előrejelzéseket az új paramétermátrixnak megfelelő redukált forma segítségével elvégezni).

A $z_0, \dots, z_n$ endogén változók meghatározása ilyen módon azonban csak akkor lehetséges, ha az S_0 mátrix invertálható, aminek viszont szükséges feltétele az, hogy a modell folyó endogén változóinak száma megegyezzek a modell egyenleteinek számával.

A következőkben nem tételezzük fel az endogén változók számának és a modellegyenletek számának egyezését és így S inverzének létezését sem. Vizsgáljuk meg, hogyan alakul a fenti összefüggérendszer ebben az esetben:

$$\begin{aligned} S_0 z_0 &= -S_{-1} z_{-1} - S_{-2} z_{-2} - \dots - S_{-n} z_{-n} - S_e z_e \\ S_0 z_1 &= -S_{-1} z_0 - S_{-2} z_{-1} - \dots - S_{-n} z_{-n+1} - S_e z_e \\ &\vdots \\ S_0 z_n &= -S_{-1} z_{n-1} - S_{-2} z_{n-2} - \dots - S_{-n} z_0 - S_e z_e, \end{aligned} \quad (10)$$

vagy számunkra célszerűbb felírással:

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_{-1}; S_0 \\ S_{-2}; S_{-1}; S_0 \\ \vdots \\ S_{-n}; \dots S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{-1}; S_{-2}; \dots S_n; S_e \\ S_{-2}; S_{-3}; \dots O; S_e \\ S_{-3}; S_{-4}; \dots O; S_e \\ \vdots \\ O; O; \dots O; S_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{-1} \\ z_{-2} \\ z_{-3} \\ \vdots \\ z_{-n} \\ z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (11)$$

A (11) alatti összefüggésrendszer felfogható egy olyan programozási feladat feltételrendszereként, ahol a feladat változói az ökonometria modell folyó és előrejelzett endogén változói, a koefficiensok mátrixa a strukturális modell mátrixából származtatott mátrix; korlátvektora pedig az ökonometria modell predeterminált változóinak értékeiből meghatározható vektor.

A (11) és a (8)–(9) összefüggésrendszerek összevetésével belátható, hogy S_0 inverzének létezése esetén a (11) alatti programozási feladathoz bármilyen célfüggvényt is rendelünk, e feladat megoldása a redukált forma segítségével meghatározott előrejelzésekkel azonos, mivel rögzített predeterminált változók mellett (11)-nek egyetlen lehetséges megoldása van.

Vizsgáljuk meg ezután, hogy milyen körülmények indokolhatják azt, hogy egy ökonometria modellnek a hagyományos redukált formán alapuló megoldása helyett a matematikai programozáson alapuló megoldását válasszuk. Ezt alapvetően két körülmény indokolhatja:

- a) valamelyik változót, vagy változócsoporthoz egy előre meghatározott értékhez kívánunk *szabályozni*;
- b) valamelyik endogén változóra vagy előrebecsült értékeire *külső információ* áll rendelkezésünkre.

Vizsgáljuk meg először az a) esetet kissé részletesebben. Anélkül, hogy a kérdés közgazdasági részleteibe mennénk, megjegyezzük, hogy a népgazdasági tervnek és a gazdasági szabályozásnak az összhangját a tervezés során biztosítani kell. Ez a tervezésnek egyik igen fontos feladata. A modellezés szempontjából azt a feladatot jelenti, hogy szabályozó rendszernek a gazdasági folyamatokra gyakorolt hatását figyelembe kell venni.

E ponton kell megemlítenünk a népgazdasági tervek különböző lejáratait is. A modell az éves tervezés megalapozására szolgál, és bizonyos szempontból a középtávú tervezés és éves tervezés között kíván kapcsolatot teremteni. A modell kidolgozása során az egyik legfontosabb kérdésnek azt tekintettük, hogy a középtávú és rövidtávú tervezés közötti kapcsolatot megteremtjük, pontosabban annak modellezési lehetőségét vizsgáljuk, hogy egy elfogadott középtávú népgazdasági terv az éves terveken keresztül hogyan valósítható meg, figyelemmel arra, hogy a konkrét szabályozási rendszert, vagy annak legalábbis mennyiségi ismérveit a középtávú terv időszakaiban módunkban áll meghatározni.

Az éves, rövidtávú tervezés fontos feladata a népgazdaság egyensúlyi helyzetének lehetőség szerinti biztosítása. A továbbiakban ez alatt azt értjük, hogy elfogadjuk a középtávú tervet a maga kevéssé részletezett formájában, azonban a legfontosabb népgazdasági folyamatokat meghatározó tervszámokkal. Ezután e tervszámokból kiindulva kíséreljük meg az éves tervek olyan meghatározását, amely a népgazdaság bizonyos értelemben vett egyensúlyi helyzetét biztosítja, illetve a gazdasági folyamatokat megfelelően szabályozva a középtávú tervből levezethető egyensúlyi helyzethez közelíti. Ahhoz, hogy ezt megtegyük, rendelkezésünkre állnak az ún. szabályozó típusú változók, amelyeknek az egész rendszerre gyakorolt hatását az ökonometria modell megfelelő viselkedési egyenleteiből ismerjük, és amelyek konkrét nagyságának meghatározásától és érvényesíttetésétől azt várjuk, hogy a modell endogén változói az előre kitűzött értékekhez a lehető legközelebb essenek. Vagyis a szabályozó típusú változóknak egy olyan optimális struktúráját keressük, amelyek biztosítják a modell egyéb változóinak előre rögzített célértékeihez (a középtávú terv évekre lebontott tervszámaihoz) való legjobb közelítését.

E problémáknak megfelelő programozási modell megfogalmazása érdekében a (11) alatti összefüggésből induljunk ki. A jobb áttekinthetőség kedvéért vonjuk össze a késleltetett endogén változókat és jelöljük z_{-t} -vel, hozzá tartozó megfelelő méretű paramétermátrixot S_{-t} -vel, a folyó és előrejelzett endogén változók vektorát z -vel, és a paramétereiket tartalmazó mátrixot S -vel. Így a (11) alatti összefüggésrendszer az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$S z = -S_{-t} z_{-t} - S_e z_e = b. \quad (12)$$

Bontsuk fel az exogén változók vektorát és a hozzájuk tartozó paramétermátrixokat két részre, valódi exogén változókra z_{ve} és szabályozó típusú gazdaságpolitikai változókra z_c , valamint az S_e mátrixot az ezeknek megfelelő S_{ve} és S_c mátrixokra. Ezeknek megfelelően (12) új alakja:

$$S z = -S_{-t} z_{-t} - S_{ve} z_{ve} - S_c z_c, \quad (13)$$

illetve

$$S z + S_c z_c = -S_{-t} z_{-t} - S_{ve} z_{ve}. \quad (14)$$

A szabályozó típusú változókra mozgási intervallumot engedünk meg, vagyis:

$$k_1 \leq z_c \leq k_2. \quad (15)$$

A modell endogén változóinak „elvárt” értékeit jelöljük $\hat{z}$ -vel, melyet a szabályozó változók alkalmas megválasztásával kívánunk közelíteni.

Definiáljunk a kitűzött cél és a hozzá tartozó célváltozó közötti különbségként egy új változót:

$$w_i = \hat{z}_i - z_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

ahol n azoknak az endogén változóknak a száma, melyeket célértékekhez kívánunk közelíteni.

A (14)–(16) feltételek teljesülése mellett a feladatnak olyan megoldását keressük, amely valamilyen értelemben minimálja az eltéréseket. Kézenfekvőnek kínálkozik az alábbi célfüggvény:

$$\sum_{i=1}^n (w_i)^2 \rightarrow \min! \quad (17)$$

Így a (14)–(16) feltételek és a (17) célfüggvény egy kvadratikus programozási feladathoz vezet, melynek feltételei rendszere lineáris.

Bár a lineáris feltételei rendszerű kvadratikus programozási feladatok — bizonyos méretkorlátok mellett — ma már számítástechnikailag is megoldhatók, azonban éppen e feladatok várható méretei miatt célszerű megfogalmazni egy hasonló, azonban lineáris programozással megoldható feladatot is. Bontsuk fel ennek érdekében a w_i eltéréseket két részre: w_i^1 -gyel jelöljük az endogén változóknak a kitűzött céltól való „negatív” irányú eltéréseit, vagyis amelyek azt mutatják, hogy a kérdéses változók mennyivel kisebbek, mint a változókra előírt célértékek. Hasonlóan w_i^2 -vel jelöljük e változók „pozitív” irányú eltéréseit, amelyek azt mutatják, hogy a célértékeknél mennyivel nagyobbak e változók aktuális értékei.

Ezeknek megfelelően a modell (16) alatti egyenleteit az alábbiakra cseréljük:

$$\hat{z}_i + w_i^1 - w_i^2 = z_i. \quad (18)$$

Előírjuk továbbá a változókra a nem-negativitási feltételeket is:

$$\begin{aligned} w_i^1 &\geq 0, \\ w_i^2 &\geq 0, \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n. \quad (19)$$

A fentiek alapján a modell célfüggvényét az alábbiak szerint fogalmazhatjuk meg:

$$\sum_{i=1}^n w_i^1 + \sum_{i=1}^n w_i^2 \rightarrow \min! \quad (20)$$

A (18) alatti feltételekből látható, hogy a w_i^1 és a w_i^2 -hez tartozó vektorok lineárisan függő vektorok (egymásnak —1-szeresei), így a feladat bázismegoldásaiba — és így az optimális megoldásba is — közülük csak az egyik kerülhet be. Vagyis automatikusan biztosított, hogy a feladat megoldásában a hozzájuk tartozó endogén változóknak egyidejűleg ne legyenek pozitív és negatív irányú eltéréseik.

Az így megfogalmazott lineáris programozási feladat technikailag könnyen megoldható még igen nagy méretek esetén is, vagyis a megoldás lehetősége nem korlátozza részletes, több időszakot egyidejűleg átfogó modellek megalkotását.

Vizsgáljuk meg ezután a b) alatti esetet, vagyis azt, amikor az utólagos információknak a modellre gyakorolt hatását kívánjuk meghatározni. Mielőtt e problémakör formális elemzésébe kezdenénk, néhány szóban szeretnénk összefoglalni azt, amit mi utólagos, külső információ alatt értünk. Annak érdekében, hogy ezt megtegyük és megértését megkönnyítsük az alábbi példát szeretnénk felhozni. Tételezzük fel, hogy sikerült jól specifikálnunk az energiaimport egyenletét egy ökonometria modellben. Ez az egyenlet valószínűleg egy keresleti típusú egyenlet lesz, kifejezve azt, hogy a népgazdaság energiaigényének egy részét importból kell fedezni. Az energiaimport tényleges lehetőségei azonban nem mindig olyanok, mint azt az energiaimport egyenlet mutatja, vagy más szóval, ahogyan annak várható alakulását az ökonometria modell magyarázza. Sok esetben előre tudjuk, hogy bizonyos mennyiségen felül nem tudjuk, vagy csak nagyon kedvezőtlen körülmények között tudnánk energiát importálni. Információnk van tehát arra, hogy mekkora az energiaimport nagysága, és ennek az információnak utólag jutottunk a birtokába (pl. azáltal, hogy szerződő feleink közölték döntésüket). Ezt az információt utólagos külső információnak tekintjük. Természetesen utólagos külső információ alatt nemcsak az elmondottakat értjük, — ez csupán szemléletesen érzékelteti annak lényegét, — hanem a modellben szereplő bármely változónak várható konkrét értékét, amelyet a modellben figyelembe kívánunk venni. Ezek az utólagos információk akkor okoznak problémát, ha a modell folyó endogén változóira vonatkoznak. Vizsgálatainknál most is célzerűbb a modell (12) alatti összevontabb formájából kiindulni.

Tételezzük fel, hogy a z vektorral reprezentált m számú endogén változóból k számúra külső információ áll rendelkezésünkre. Ennek megfelelően a z vektor két részre bontható fel: egy $(m-k)$ elemű z_1 és egy k elemű z_2 vektorra. Ekkor a (12) alatti összefüggést így írhatjuk át:

$$\begin{aligned} S_1 z_1 &+ S_2 z_2 = b, \\ m \times (m-k); (m-k) \times 1 & \quad m \times k; k \times 1 \quad m \times 1 \end{aligned} \quad (21)$$

ahol az S_1 és S_2 az z_1 illetve z_2 vektorokhoz tartozó paramétermátrixok. Az összefüggésben feltüntettük a vektorok és mátrixok méreteit is.

A külső információk a modellt illetően azt jelentik, hogy a nekik megfelelő z_2 változók predetermináltakká váltak, vagyis modellbeli értékükkel a b vektort módosítják:

$$\begin{array}{ccccccc} S_1 z_1 & = & b & - & S_2 z_2 & = & \bar{b} \\ m \times (m-k); (m-k) \times 1 & & m \times 1 & & m \times k; k \times 1 & & m \times 1 \end{array} \quad (22)$$

Látható, hogy (22) egy túlhatározott egyenletrendszer, amely m egyenletből és $(m-k)$ változóból áll, és így z_1 -re egyértelműen nem oldható meg.

Ilyen helyzetben az a gyakorlat, hogy a modellből elhagyják azokat az egyenleteket, amelyek azokat a változókat „magyarázzák”, melyekre külső információ áll rendelkezésre. Ez a megoldás azonban bizonyos esetekben kifogásolható, hiszen szimultán rendszerről lévén szó, olyan összefüggést is elhagyhatunk, amely nemcsak a kérdéses változó magyarázatát adja, hanem ezen túlmenően kapcsolatot teremt a modell többi összefüggései között is.

Világosabb lesz talán a dolog, ha abból indulunk ki, hogy a modell strukturális alakja azokkal a változókkal — mint *endogén* változókkal — alkot egy teljes rendszert, melyekre utólagos, külső információkat kaptunk. E modell strukturális alakja abban az esetben, ha a kérdéses változókat, mint predeterminált változókat kezeltük volna, (miután az utólagos információk alapján azok valóban predetermináltak), valószínűleg teljesen más alakot öltött volna, hiszen a strukturális forma paramétermátrixának kétfokozatú, legkisebb négyzetek módszerével végzett becslése során (szimultán rendszerről lévén szó) az endogén és exogén változóknak egy másik rendszeréből kellett volna kiindulnunk. Ebből következik, hogy akkor járnánk el helyesen, ha az utólagos információkat predetermináltakként kezelve a struktúrát ilyen esetekben mindig újra becsülnénk. Ezek az információk azonban *ad hoc* jellegűek, a változóknak igen nagy körét érinthetik, és gyakran jelentkezhetnek. Nagyobb méretű modellt feltételezve, elképzelhetetlen annak állandó újra-becslése.

A probléma megoldásának másik lehetséges módja a (22) alatti rendszer közelítő megoldásának keresése. Ebben az esetben nem szükséges a kérdéses egyenletek elhagyása, ugyanakkor az utólagos információknak a modellre gyakorolt — valószínűleg javító — hatása is végig követhető. Ezt az alábbi módon tudjuk végrehajtani. Defináljuk a v_i változót úgy, hogy aktuális értéke azt mutassa, hogy mennyivel kell módosítani a b_i értéket ahhoz, hogy az egyenletrendszer megoldható legyen. Ennek megfelelően a (22) helyett az alábbi rendszerhez jutunk:

$$S_1 z_1 + v_i = b. \quad (23)$$

Tekintsük ezt az egyenletrendszert egy programozási feladat feltételrendszereként és definiáljuk hozzá olyan célfüggvényt, amely minimálja az eltéréseket.

Egy ilyen lehetséges célfüggvény a

$$\sum_i (v_i)^2 \rightarrow \min! \quad (24)$$

A (23) és (24) alatt definiált feladat egy kvadratikus programozási feladat lineáris feltételek mellett, amely explicité is megoldható és a megoldása:

$$S_1^+ b, \quad (25)$$

ahol

$$S_1^+ = [S_1^T S_1]^{-1} S_1^T, \quad (26)$$

és amely nem más, mint az S_1 mátrix Moore-Penrose-féle általánosított inverze. (Ez az eljárás az ökonometria modelleknek csak arra a körére alkalmazható, amelyek nem tartalmaznak azonosságokat, ill. definíciós egyenleteket.)

Az előzőekhez hasonlóan a (23)–(24) alatt definiált feladat helyett itt is megfogalmazhatunk egy hozzá hasonló lineáris programozási feladatot az alábbiak szerint.

Legyen

$$v_i = v_i^1 - v_i^2 \quad (27)$$

és

$$v_i^1; v_i^2 \geq 0, \quad (28)$$

és a minimálandó célfüggvény ismét:

$$\sum_i v_i^1 + \sum_i v_i^2 \rightarrow \min! \quad (29)$$

2. A népgazdaság egy ökonometria modellje és megoldása a lineáris programozás módszerével

Az alábbi ökonometria modellel elsősorban az a célunk, hogy rajta bemutassuk a már ismertetett elvek szerinti megoldását lineáris programozással.

Az ismertetett megoldások közül is csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor szabályozó típusú változók segítségével kívánjuk a modell néhány változóját előre rögzített célértékekhez közelíteni. Nem célunk e helyen a modell részletes elemzése, eredményeinek értékelése. Ezt csak annyira tesszük meg, amennyire a modell újszerű megoldása megkívánja.

A tulajdonképpeni ökonometria modell 22 egyenletből áll, melyből 12 egyenletet sztochasztikus viselkedési egyenlet, 3 technikai egyenlet és 7 definíciós azonosság.

A modell változói az alábbiak:

FL	—	lakossági fogyasztás (endogén)
$\overline{\text{FL}}$	—	definíció szerinti lakossági fogyasztás (endogén)
JL	—	lakossági jövedelmek (endogén)
PF	—	fogyasztói árindex (exogén)
BF	—	bruttó felhalmozás (endogén)
$\overline{\text{BF}}$	—	definíció szerinti bruttó felhalmozás (endogén)
GDP	—	hozzáadott érték (endogén)
IMR	—	rubel viszonylatú import (endogén)
IMS	—	dollár viszonylatú import (endogén)
B	—	beruházás (endogén)

ER	—	rubel viszonylatú egyenleg (endogén)
AE	—	bruttó állóeszköz-állomány (endogén)
AE(−1)−		bruttó állóeszköz-állomány egy időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
AM	—	amortizáció (endogén)
BNT	—	bruttó nemzeti termelés (endogén)
TF	—	termelő felhasználás (endogén)
L	—	létszám (exogén)
J	—	bérek és egyéni jövedelmek (endogén)
EXR	—	rubel viszonylatú export (endogén)
KFR	—	rubel viszonylatú forgalom indexe (exogén)
TJ	—	tisztajövedelem (endogén)
EXS	—	dollár viszonylatú export (endogén)
PES	—	dollár viszonylatú kiviteli árindex (exogén)
KFS	—	dollár viszonylatú forgalom indexe (exogén)
FK	—	közösségi fogyasztás (endogén, szabályozó)
PIS	—	dollár viszonylatú behozatali árindex (exogén)
EGS	—	definíció szerinti kummulált egyenleg (endogén)
FL(−1)−		lakossági fogyasztás egy időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
FL(−2)−		lakossági fogyasztás két időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
BF(−1)−		bruttó felhalmozás egy időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
BF(−2)−		bruttó felhalmozás két időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
K	—	készletfelhalmozás (endogén)
JA	—	eszköz- és bérjárulékok (exogén, szabályozó)
ADO	—	adók (exogén, szabályozó)
TS	—	dollár viszonylatú exporttámogatás (exogén, szabályozó)
TR	—	rubel viszonylatú exporttámogatás (exogén, szabályozó)
T	—	egyéb támogatások (exogén, szabályozó)
N	—	nép gazdaságban képződött nyereség (endogén)
ES(−1)−		dollár viszonylatú egyenleg egy időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
ES(−2)−		dollár viszonylatú egyenleg két időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
ES(−3)−		dollár viszonylatú egyenleg három időszakkal késleltetett értéke (predeterminált).

Tekintsük át ezután a modell egyenleteit, melyeket a felsorolt változók 1960–1975 közötti adataiból a kétfokozatú legkisebb négyzetek módszerével határoztunk meg. Az egyenletek paraméterei alatt feltüntetett érték a paraméterek hibája, az egyenletek alatti statisztikai mutatók jelentése pedig:

SH = standard hiba; R^2 = többszörös korrelációs együttható
 RH = relatív hiba; DW = Durbin-Watson teszt mutatója

$$(1) \quad \text{Fl} = -0,0801 + 0,2419\overline{\text{FL}} + 0,7122\overline{\text{JL}} + 4,5276\overline{\text{PF}}$$

(0,2434) (0,3370) (0,298)

$$\text{SH} = 5,45, \text{RH} = 4,0\%, R^2 = 0,9986, \text{DW} = 0,1952$$

- (2) $BF = -20,7403 - 0,5843\overline{BF} + 0,4393GDP + 0,5394IMR + 0,0918IMS$
 $(0,3637) \quad (0,1329) \quad (0,2719) \quad (0,1742)$
 $SH = 6,5401, RH = 7,0\%, R^2 = 0,9910, DW = 1,8159$
- (3) $B = -26,975 + 0,3694GDP + 0,309ER(-2) + 0,6295ES(-2)$
 $(0,1191) \quad (0,2651) \quad (0,3642)$
 $SH 3,65, RH = 3,22\%, R^2 = 0,9971, DW = 1,2990$
- (4) $AE = 18,03 + 0,7571B + 0,9777AE(-1)$
 $(0,3401) \quad (0,0551)$
 $SH = 7,89, RH = 0,7\%, R^2 = 0,9996, DW = 1,8895,$
- (5) $AM = -22,8137 + 0,0468AE$
 $(0,0014)$
 $SH = 1,4173, RH = 4,7\%, R^2 = 0,9938, DW = 0,9595$
- (6) $BNT = -410,7005 + 1,1895TF + 0,2336AE + 0,0776L$
 $(0,159) \quad (0,0884) \quad (0,0276)$
 $SH = 7,9772, RH = 1,2\%, R^2 = 0,9996, DW = 1,3320$
- (7) $JL = 13,5896 + 0,5932GDP$
 $(0,0321)$
 $SH = 3,64, RH = 1,9\%, R^2 = 0,9985, DW = 2,1263.$
- (8) $J = 4,0471 + 0,702JL$
 $(0,0413)$
 $SH = 3,98, RH = 3,02\%, R^2 = 0,9977, DW = 1,2636$
- (9) $EXR = -7,9718 + 0,0474BNT + 5,8948KFR + 0,1025TJ$
 $(0,0253) \quad (1,6151) \quad (0,112)$
 $SH = 2,4611, RH = 4,9\%, R^2 = 0,9999, DW = 1,4021$
- (10) $EXS = 65,6472 + 0,048BNT + 57,4862PES + 2,275KFS + 0,0518TJ$
 $(0,0325) \quad (2,1605) \quad (1,0165) \quad (0,0879)$
 $SH = 2,5664, RH = 2,78\%, R^2 = 0,9964, DW = 2,0301$
- (11) $IMR = -16,9622 + 0,2372BF + 0,2145(FL + FK)$
 $(0,0593) \quad (0,1152)$
 $SH = 2,6556, RH = 6,26\%, R^2 = 0,9716, DW = 1,5706$
- (12) $IMS = -79,6465 + 0,2823BF + 0,1724FL + 69,5044PIS + 0,0733EGS$
 $(0,1534) \quad (0,1221) \quad (0,6181) \quad (0,2463)$
 $SH = 2,4574, RH = 8,7\%, R^2 = 0,9871, DW = 1,1877$
- (13) $\overline{FL} = 0,5FL(-1) + 0,5FL(-2)$
- (14) $\overline{BF} = 0,5BF(-1) + 0,5BF(-2)$
- (15) $TF = BNT - GDP$
- (16) $GDP = FL + FK + BF + ER + ES$
- (17) $BF = B + K$
- (18) $GDP = J + TJ + AM$
- (19) $TJ = JA + ADO - T - TS - TR + N$
- (20) $ES = EXS - IMS$
- (21) $ER = EXR - IMR$
- (22) $EGS = ES(-1) + ES(-2) + ES(-3).$

Mint látható, a modell lineáris dinamikus modell, hiszen késleltetett változókat is tartalmaz.

Ezek a késleltetett változók hivatottak arra, hogy a különböző időszakok közötti kapcsolatokat megteremtsék. Ezen a ponton még egy fontos összehasonlítást kell tennünk az ökonometriai modellnek redukált formán vagy matematikai programozási eljáráson alapuló megoldásai között. Egy ökonometriai modell redukált formán alapuló megoldása végül is azt fejezi ki, hogy a modell folyó endogén változói hogyan függenek a modell késleltetett, valamint exogén változóitól, mint a modell végső meghatározóitól.

Ez azt jelenti, hogy a predeterminált változók egy meghatározott rendszeréhez egy általa egyértelműen meghatározott endogén változórendszer tartozik. Amikor tehát a modell segítségével előrejelzést készítünk a t -edik időszakra, akkor ez az előrejelzés a t -edik időszakra vonatkozó predeterminált változók struktúrájától függ; a t_1 időszakra vonatkozó előrejelzés a t_1 időszakhoz tartozó predeterminált változók struktúrájától; stb. Ebből következik, hogy nincs módunk arra, hogy — a rendelkezésünkre álló lehetőségeken belül — a t_0 -dik időszakban bizonyos exogén tényezőket úgy válasszunk meg, hogy azok a t_n -edik időszakra vonatkozóan az endogén változóknak valamilyen szempontból optimális struktúráját határozzák meg. Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk, ezzel kapcsolatban néhány megjegyzést szeretnénk tenni. A hagyományos ökonometriai gyakorlat a modellek változóit két élesen elkülönített részre, endogén és predeterminált változókra bontja, és ez utóbbiakat a modell számára olyan külső adottságként kezeli, melyek értékének kialakítása általunk nem befolyásolható.

Az általunk vizsgált problémakört illetően ez a felfogás két okból is meglehetősen merev. Egyrészt a predeterminált változók közé tartozó késleltetett endogén változók — ha a modellt mint dinamikus modell tekintjük — néhány időszakkal előbb (késleltetésük nagyságának megfelelően) maguk is a modell endogén változói és mint ilyenek már nem adottságok a modell számára. Másrészt, nem vitatva azt, hogy a modellek exogén változói közül jónéhány valóban olyan külső adottság, amely általunk nem befolyásolható, néhány azonban lehet olyan, amelynek konkrét értéke a döntéshozótól függ, bizonyos határok között. Itt csak példaként említem meg az ökonometriai tankönyvekből is jól ismert elemi Keynes-féle modellt, ahol az állami kiadások, mint exogén változó szerepel, holott konkrét nagyságának meghatározása döntés kérdése.

Ezen túlmenően azonban számos igen híres — a gyakorlatban is használt — ökonometriai modellt lehetne még felhozni példaként, ahol különösen a fiskális szférába tartozó változók nagy része mint exogén változó szerepel. Ez teljesen összhangban van azzal, hogy habár az ökonometriai modellek általában elsősorban előrejelzési céllal készülnek, az előrejelzések egyáltalán nem öncélúak. Nem csupán arra kíváncsiak, hogy a gazdaság külső adottságai, mint predeterminált változók, hogyan határozzák meg a gazdaság egészét reprezentáló egyéb változókat. Ezeknek a modell-számításoknak a célja rendszerint lényegesen több, mint egyszerű előrejelzések készítése, minthogy e modellekkel éppen a gazdasági folyamatok spontaneitását kívánják megszüntetni. Így van ez a tőkés gazdaságokban is, de különösen igaz a tervgazdálkodást folytató országokban, ahol e modellek a népgazdasági tervezés fontos segéd-eszközei.

Az optimalás kérdésében az ökonometriai modell hagyományos megoldása esetén próbálkozásokra vagyunk utalva. Ez abból áll, hogy különböző prede-

terminált változó — struktúrákból kiindulva figyeljük a teljes rendszer viselkedését a választott optimalitási kritériumnak megfelelően, majd ezek alapján választjuk a számunkra kedvezőbbet. Könnyen belátható, hogy ez az eljárás rendkívül körülményes és semmi biztosítékunk sincs arra, hogy így a modell optimális megoldásához jussunk.

Más a helyzet, ha a modellt programozási eljárással oldjuk meg. Ebben az esetben a modell időbeli kapcsolatainak szimultán figyelembevételére van lehetőségünk. Ez azt jelenti, hogy — a modell feltételei rendszerétől, a definiált célfüggvénytől függően — a modellel átfogott időszakot egyidejűleg tudjuk kezelni. Azt, hogy a modell mekkora időszakot ölel át, a modell késleltetett változóinak struktúrája határozza meg. A programozási módszerrel történő megoldás esetén a modellel átfogott teljes időszakot tekintve — a számítás időpontjában — t_0 -ik időszakra vonatkozó késleltetett változók mind predetermináltak. A t_1 -edik időszakot tekintve azonban már nem ez a helyzet, hiszen a t_1 -edik időszakra vonatkoztatott, és egy időszakkal késleltetett változók a t_0 -dik időszak folyó endogén változói, és így a teljes modellt tekintve nem predetermináltak. Hasonlóan a t_2 -dik időszakot nézve, és egész modellt tekintve csak a három időszakkal késleltetett változók a predetermináltak. Az elmondottakból következik, hogy a redukált formán alapuló megoldástól eltérően itt a t_0 időszakot követő periódusokra vonatkozó predeterminált változó értékek meghatározása már nem lehet tetszőleges, konkrét értékük alakulása a teljes modell összefüggésrendszerétől függ. Ilyen módon a modell valóban dinamikus és megoldása a modellezett teljes időszakra vonatkozóan lesz valamilyen értelemben (a célfüggvénynek megfelelően) optimális. Az elmondottakat jól szemlélteti az alábbi séma:

Az ökonometriai modell endogén és szabályozó változói			Segédváltozók	Korlátok
t_0 időszakban	t_1 időszakban	t_n időszakban		
t_0 időszak struktúrája				
t_1 időszak struktúrája				
t_n időszak struktúrája				
Segédfeltételek				
			Célfüggvény	

Térjünk most vissza számszerűsített modellünk vizsgálatára.

A modell 22 endogén és hat szabályozó típusú programozott változót tartalmaz egy időszakra. A feladatban 5 fontos endogén változóra (BNT, GDP,

FL, ER és ES) írtuk elő, hogy azok modellbeli értékei közelítsenek minél jobban a kívülről előírt értékekhez. (Ezek az értékek — *ex post* előrejelzésekről lévén szó — az 1969–1975 közötti időszakra e változók ténylegesen felvett értékei voltak, míg 1976-ra tényleges előrejelzést végeztünk a modellel úgy, hogy a BNT, GDP, FL „ideálisnak” vett értékei az 1975-ös értékek 1,06-szorosa. Mindkét viszonylatban a külkereskedelmi egyenlegre 0 értéket írtunk elő.

A modell ilyen felírása e feltételek mellett arra a kérdésre ad választ, hogy a modell szabályozó változóit (az eszköz- és bérjárulékok, dollár viszonylatú exporttámogatás, rubel viszonylatú exporttámogatás, egyéb támogatások és közösségi fogyasztás) — bizonyos intervallumon belül — hogyan válasszuk meg annak érdekében, hogy az öt kérdéses változó a népgazdasági célnak tekintett célértékeihez minél közelebb kerüljön, továbbá hogy e célt milyen módon lehet teljesíteni, vagyis hogy a modell többi változója milyen értékeket vesz fel.

Tekintsük ezután a modell segédfeltételeit, illetve változóit. Ezek a következők:

$$\begin{aligned} \text{BNT}_t + \text{BNTL}_t - \text{BNTU}_t &= \widehat{\text{BNT}}_t, \\ \text{GDP}_t + \text{GDPL}_t - \text{GDPU}_t &= \widehat{\text{GDP}}_t, \\ \text{FL}_t + \text{FLL}_t - \text{FLU}_t &= \widehat{\text{FL}}_t, & t = 1, \dots, 8 \\ \text{ER}_t + \text{ERL}_t - \text{ERU}_t &= \widehat{\text{ER}}_t, \\ \text{ES}_t + \text{ESL}_t - \text{ESU}_t &= \widehat{\text{ES}}_t, \end{aligned}$$

ahol az L-lel jelölt segédváltozók a kérdéses változók célértéktől „lefelé” való eltérését, míg az U-val jelölt segédváltozók a „felfelé” való eltéréseit jelölik. A $\wedge$ -val megjelölt értékek az elérendő célokat jelölik. (Ezek egyébként a programozási modell korlátvektorának egyik részét képezik, míg a vektor többi részének komponensei az ökonometriai modell konstansaiából és az exogén változók megfelelő helyettesítési értékeiből adódnak össze.) A feladat a kiemelt változókra a célértékeiktől való eltérések összegét minimálja, vagyis a célfüggvény:

$$\Sigma_t (\text{BNTL}_t + \text{BNTU}_t + \text{GDPL}_t + \text{GDPU}_t + \text{FLL}_t + \text{FLU}_t + \text{ERL}_t + \text{ERU}_t + \text{ESL}_t + \text{ESU}_t) \rightarrow \min.$$

Mint látható, a célfüggvényben szereplő valamennyi változó paramétere egységnyi. Ez azt jelenti, hogy valamennyi változó eltérését egységnyi (azonos) súllyal „büntetjük”, vagyis ez a súlyozás független a tevékenység mértékétől.¹

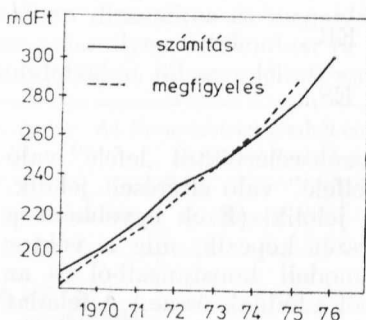
¹ Itt jegyezzük meg, hogy az ökonometriai modellnek programozási módszerrel történő megoldása esetén éppen a célfüggvény súlyrendszerének különböző definiálása mellett nyílik lehetőség nagyszámú variáns képzésére. Pl. egy beruházáscentrikus variáns készítése esetén a beruházásnak a célértéktől való eltérését lényegesen nagyobb súllyal „büntetjük”, mint a többi változót. Anélkül, hogy e helyen a kérdés részleteit megvizsgálánk, megemlítjük, hogy a feladat gazdasági interpretációja is rendkívül érdekes és hasznos a modell eredményeinek utólagos elemzése során.

A számítások során első variánsként ezt a célfüggvényt használtuk, majd az 1973–1976-ra készítettünk olyan számításokat is, ahol a célfüggvényben szereplő súlyok a hozzájuk tartozó célértékek nagyságával fordított arányban álltak, vagyis az alkalmazott célfüggvény az alábbi volt:

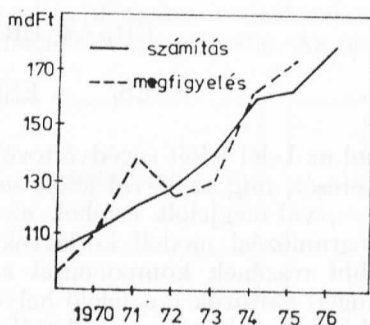
$$\sum_t \frac{1}{\widehat{BNT}_t} (BNTL_t + BNTU_t) + \frac{1}{\widehat{GDP}_t} (GDPL_t + GDU_t) + \\ + \frac{1}{\widehat{FL}_t} (FLL_t + FLU_t) + \frac{1}{\widehat{ER}_t} (ERL_t + ERU_t) + \\ + \frac{1}{\widehat{ES}_t} (ESL_t + ESU_t) \rightarrow \min.$$

Végül a modellszámítások eredményeiről szeretnénk néhány szót szólni.

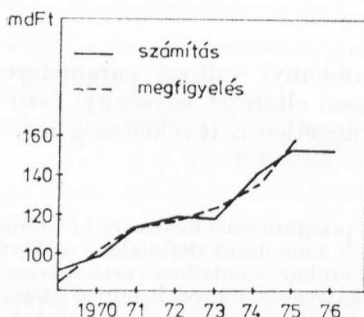
A modell néhány fontos változójára készített előrejelzéseket szemléltetik az 1–16. ábrák. Azokból is jól látható, hogy a számítások eredményei jól közelítik e változók tényértékeit. Az előrejelzések relatív hibája általában 1–2% között van. Előfordult ezeknél lényegesen nagyobb relatív hiba is,



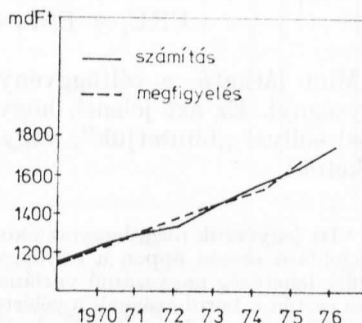
1. ábra
Lakossági fogyasztás



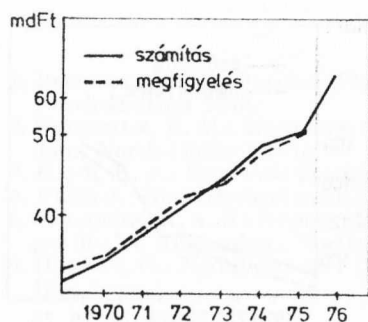
2. ábra
Bruttó felhalmozás



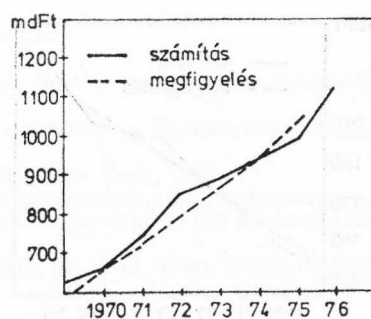
3. ábra
Beruházások



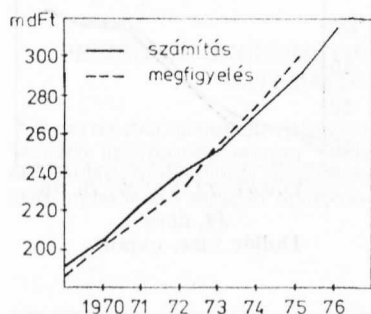
4. ábra
Bruttó állóeszközállomány



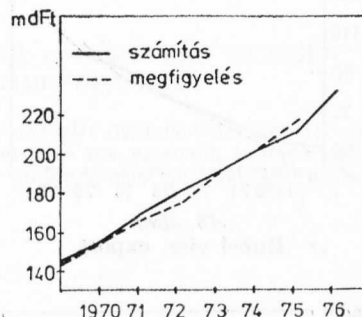
5. ábra
Amortizáció



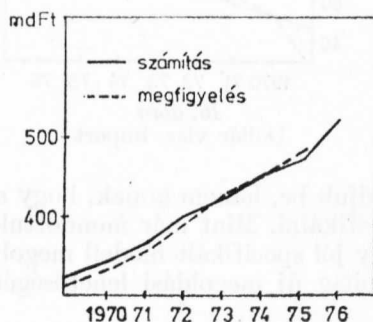
6. ábra
Bruttó nemzeti termelés



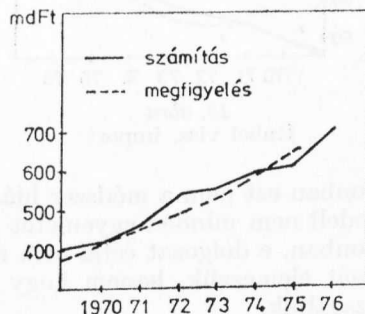
7. ábra
Lakossági jövedelem



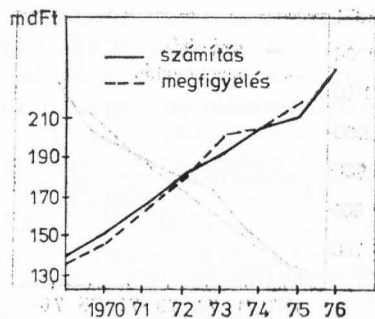
8. ábra
Bérek és egyéni jövedelmek



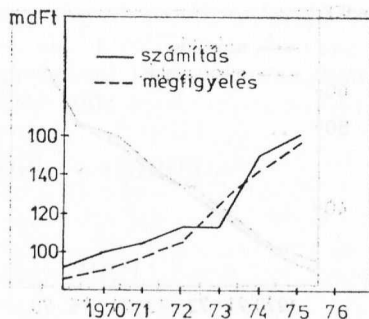
9. ábra
Hozzáadott érték



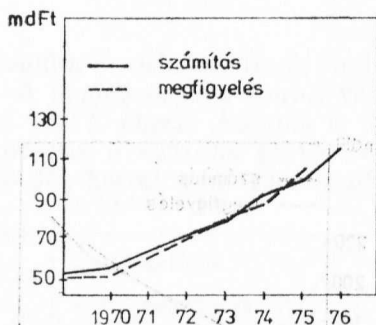
10. ábra
Termelő felhasználás



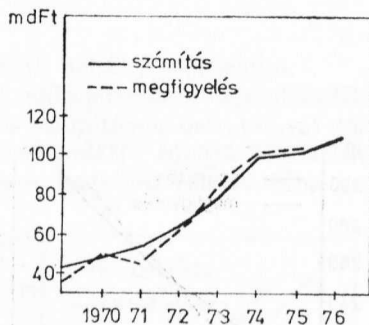
11. ábra
Tiszta jövedelem



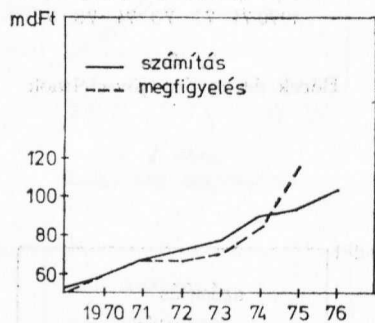
12. ábra
Nyereség



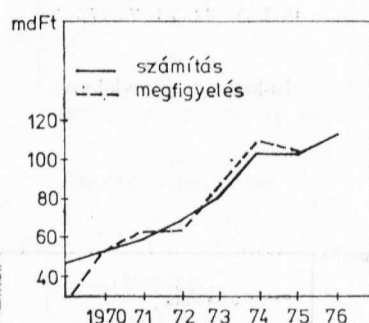
13. ábra
Rubel visz. export



14. ábra
Dollár visz. export



15. ábra
Rubel visz. import



16. ábra
Dollár visz. import

azonban ezt nem a módszer hiányosságának tudjuk be, hanem annak, hogy a modell nem minden egyenletét sikerült jól specifikálni. Mint már mondtuk azonban, e dolgozat célja nem az volt, hogy egy jól specifikált modell megoldását elemezzük, hanem hogy egy módszertanilag új megoldási lehetőségét vizsgáljuk.

(Beérkezett: 1977. november 30-án.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. PINDYCK, R. S.: Optimal Planning for Economic Stabilization Policy. Amsterdam North-Holland 1973.
2. FRIEDMAN, B. M.: Economic Stabilization Policy: Methods in Optimization. Amsterdam, North-Holland 1975.
3. KANE, E. J.: Economic Statistics and Econometrics, New York, 1969.
4. PAJZS J.: Ökonometriai modellek és gazdaságpolitikai döntések, sokszorosítvány.
5. GOLDBERGER, A. S.: Impact Multipliers and Dynamic Properties of the Klein-Goldberger Model. Amsterdam, North-Holland 1970.
6. HADLEY, G.: Non-linear and Dynamic Programming. Reading, Mass. Addison-Wesley 1964.

SOLUTION OF AN ECONOMETRIC MODEL BY MATHEMATICAL PROGRAMMING

It is examined whether econometric models can be solved by mathematical programming procedure. Those circumstances are analyzed in detail which might justify the application of programming methods, and some programming models suitable for these problems are presented.

РЕШЕНИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В статье анализируется решение эконометрических моделей с помощью метода математического программирования. Более подробно дается анализ тех условий, которые могут обосновать применение методов программирования, а также приводятся соответствующие этим проблемам модели программирования.

Éves és negyedéves ökonometriai modellek összekapcsolásának egy módszere¹

Bevezetés

Bár a népgazdaság rövidtávú tervezése és irányítása nálunk is, mint más szocialista országokban éves keretekben történik, az utóbbi években egyre inkább felmerült az *éven belüli népgazdasági folyamatok* megismerésének szükségessége. Mindenekelőtt a felgyorsult külgazdasági mozgások, továbbá a belső folyamatok olykor egészségtelen szezonális ingadozásai vetik fel sürgetően a jelenleginél operatívabb és hatékonyabb szabályozás kérdését, amelynek alapja a rövidtávú — a pénzügyi és statisztikai adatszolgáltatási rendszer sajátosságaihoz igazodó — negyedéves előrejelzés lehet. Ez indokolja a rövidtávú ökonometriai prognózismodellek kidolgozását, amelyeket célszerű *éves modellel megalapozni*, ugyanakkor a fentiek értelmében törekedni kell olyan irányú kibővítésükre, amely lehetőséget ad az éven belüli (negyedéves) folyamatok részletes elemzésére és előrejelzésére.

Hazánkban eddig negyedéves népgazdasági prognózismodell nem készült, ugyanakkor — főként módszertani kérdésekben — nagymértékben támaszkodhatunk más országok gazdag modellezési tapasztalataira. A tőkés országokban már az 1960-as évek eleje óta készítenek negyedéves ökonometriai modelleket (pl. [1] [5] [11]), melyek elsősorban a monopolkapitalista állam gazdasági beavatkozásának eszközeként funkcionálnak. A szocialista országokban eddig készült modellek [7], [10] elsősorban a népgazdasági terv végrehajtása folyamatos ellenőrzésének és korrekciójának eszközei.

Az említett modellek közös sajátossága az, hogy *hiányos információkra* épülnek. Ismeretes, hogy a statisztikai rendszer mindenütt éves bázisra épül, így a negyedéves információk köre szűkebb az évesekénél. Ez a modellezés szempontjából legalábbis két kérdést vet fel:

- létezik-e a megfelelő modellspecifikáció minden változójára negyedéves adat, s ha nem, akkor ez a probléma hogy hidalható át; továbbá
- léteznek-e megfelelő hosszúságú negyedéves idősorok, illetve a teljesebb és hosszabb éves idősorok alapján lehet-e javítani a negyedéves modellt.

Cikkünk — mely tehát a negyedéves modellezés egy speciális módszertani problémáját tárgyalja — erre a kérdésre keresi a választ.

Magáa a probléma nem tekinthető újnak; már az említett modellek is valamilyen formában érintik ezt a kérdést. Átfogó tárgyalását *Gelauff* adta meg [2], aki a különböző eljárások összehasonlítását végezte el Monte Carlo-módszerrel. Az általunk javasolt eljárás annyiban különbözik a korábbiaktól, hogy

¹ A cikk egyes gondolatait, a részletek mellőzésével, a VII. Magyar Operációkutatási Konferencián elhangzott előadásunk [4] ismertette.

nem kívánunk előzetesen, modellen kívül, nem létező adatokat becsülni, hanem a modell becslési eljárását úgy alakítjuk ki, hogy az alkalmas legyen hiányos információk kezelésére. Az eljárás kidolgozásánál a jelenlegi tényleges helyzetből indultunk ki, amely röviden úgy jellemezhető, hogy éves adatok — elsősorban a népgazdasági mérlegekből — 1960-tól, negyedéves adatok pedig 1968-tól állnak rendelkezésünkre. A cikkben csak a legegyszerűbb, egy egyenletből álló, illetve egyszerű rendszerrel foglalkozunk; a bonyolultabb modellek kérdéseit csak utalásszerűen, az összefoglaló részben említjük. Ugyancsak nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy a modell specifikációs hibái (multikollinearitás, heteroszkedaszticitás, autokorreláció stb.) hogyan befolyásolják a kapott formulákat és eredményeket, hiszen az erre vonatkozó kutatások korántsem tekinthetők lezártnak.

A cikk bevezető részét követően a probléma pontos megfogalmazását, a megoldás alapötletét, az éves és negyedéves modell kapcsolatát mutatjuk be. A második részben vázoljuk az időbeli dezaggregáció egy egyszerű esetét és felírjuk a dezaggregált modell fontosabb statisztikai jellemzőit. A harmadik rész a javasolt — a korlátozott legkisebb négyzetek módszerén alapuló — eljárás statisztikai jellemzőit ismerteti, és összehasonlítja azokat a rövidebb idősorokon alapuló, klasszikusnak tekinthető eljárás megfelelő mutatóival, majd egy alternatív — az általánosított legkisebb négyzetek módszerét felhasználó — becslést mutat be. A negyedik részben — az elmondottak illusztrálásul szolgáló — számszerű példát mutatunk be. Végül a cikket rövid összefoglalás és az irodalomjegyzék zárja.

1. A negyedéves ökonometriai modellek kidolgozásának egy lehetséges módja

Mint azt már a bevezetőben is említettük, a negyedéves ökonometriai modellek kidolgozására általunk javasolt eljárás azon az elgondoláson alapul, hogy a rövidtávú (negyedéves) folyamatok modellezésénél célszerűnek látszik a gazdasági folyamatok alakulását — a viszonylag megbízhatóbb és teljes körű adatrendszer miatt — reálisabban tükröző *éves bázisú ökonometriai modellből kiindulni*.

Az éves modellel az endogén változókra készített *ex post* és *ex ante* becsléseket „*alaptendenciáknak*” tekintjük, amikor felírjuk a „negyedéves eltérések modelljét”. A negyedéves eltérések modelljének felírásához felhasználjuk az ún. „fiktív negyedéves” modellt, amely az éves modellből, később bemutatandó módon, mechanikusan származtatható. A negyedéves eltérések modelljének felírásához felhasznált segédváltozók ugyanis a tényleges negyedéves megfigyelésekkel rendelkező változók és a fiktív modellből kapott átlagos értékek különbségeként jönnek létre.

A tényleges negyedéves modellt a fiktív modell és a negyedéves eltérések modelljének összegeként írjuk fel. Belátható, hogy a negyedéves modellt egy évre aggregálva visszakapjuk az éves modellt, ugyanakkor egy az előrejelzés szempontjából igaz az, hogy az éves és negyedéves modellből kapott becslések különbözhetnek egymástól is esetben, ha a negyedéves modellbe specifikusan negyedéves változókat is beépítünk. A két becslés különbsége ekkor a specifikusan negyedéves változó által nyert többletinformációnak az előrejelzést javító hatását tükrözi.

A fentiekben vázolt eljárás egy egyenletből álló modell esetén feltételezi, hogy az *endogén változóra* *léteznek tényleges negyedéves megfigyelések*. Szimultán rendszer esetén, azoknak az éves egyenleteknek helyébe, ahol az endogén változóra nem létezik negyedéves adatsor, vagy maga az egyenletben megfogalmazott összefüggés nem értelmezhető negyedéves szinten, a fiktív negyedéves egyenleteket építjük be a negyedéves modell teljessé tétele érdekében.

Tekintsük most az előzőekben ismertetett eljárás formális leírását. Itt, mint már említettük, csak az *egy egyenletből* álló, egyszerű rendszerrel foglalkozunk.

Az éves lineáris ökonometriai modellből indulunk ki, amely a következőképpen írható fel.

$$y = X\beta + u, \quad (1)$$

ahol y az endogén változó megfigyeléseinek $(T \times 1)$ -es vektora,

X a predeterminált változók megfigyeléseinek $(T \times K)$ -es mátrixa,

β a predeterminált változókhoz tartozó $(K \times 1)$ méretű paramétervektor,

u a véletlen eltérések $(T \times 1)$ -es vektora.

Az éves modell paraméterbecslése elvégezhető pl. OLS (egyszerű legkisebb négyzetek) módszerrel.

A becsült paraméterek $(\hat{\beta})$ felhasználásával *ex post* és *ex ante* előrejelzéseket készítünk az endogén változókra:

$$\hat{y} = X\hat{\beta}.$$

A következő lépés a „fiktív negyedéves” modell felírása. Ehhez szükséges az időbeli dezaggregáció részletesebb vizsgálata, melyre a következő részben kerítünk sort. Legyen a fiktív negyedéves modell a következő:

$$\tilde{y} = \tilde{X}\tilde{\beta} + \tilde{u}, \quad \tilde{X} = AX, \quad \tilde{y} = Ay,$$

ahol $\tilde{y}$ az endogén változókra a később definiálandó A dezaggregáló mátrix segítségével felírt fiktív értékek.

A fiktív modell $\tilde{\beta}$ paramétereinek és az éves modellből kapott $\hat{\beta}$ paraméterbecslések kapcsolatát szintén a következő részben tárgyaljuk. A tényleges negyedéves modell felírásához szükség van még a negyedéves eltérések modelljére, amely a következőképpen állítható elő:

$$\Delta y = y^{(Q)} - \hat{y}^{\wedge},$$

ahol $y^{(Q)}$ az endogén változók tényleges negyedéves megfigyelései,

$\hat{y}^{\wedge}$ az endogén változókra kapott fiktív becslés,

Δy pedig a negyedéves eltérések vektora.

Ezekután két eset lehetséges:

a) Amennyiben a magyarázó változók között nincs negyedéves megfigye-

léssel rendelkező, akkor a negyedéves ingadozásokat ún. szezonális vakváltozók bevezetésével írjuk fel:

$$\Delta y = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4 + \Delta u,$$

ahol

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad r_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Hasonló eljárást láthatunk *Klein* korai modelljében [5].

Ekkor a tényleges negyedéves modell

$$y^{(Q)} = \tilde{y}^{\wedge} + \Delta y = \tilde{X} \tilde{\beta}^{\wedge} + R\alpha + u^{(Q)}$$

alakú lesz, ahol

$$R = [r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4].$$

b) Amennyiben a magyarázó változók közül legalább egyre létezik negyedéves megfigyelés, akkor az X mátrixból kiválasztjuk az X_1 almátrixot, amely a negyedéves megfigyeléssel rendelkező magyarázó változók éves idősorait tartalmazza, és erre végezzük el az $\tilde{X}_1 = AX_1$ dezaggregálást. Ezután képezzük a $\Delta X_1 = X_1^{(Q)} - \tilde{X}_1$ különbségváltozókat.

Ha vannak olyan $Z^{(Q)}$ változók, amelyek specifikusan negyedéves szinten jellemzők, és ezek aggregált értéke $Z^{(A)}$, az ezekhez tartozó eltérésváltozókat $\Delta Z = Z^{(Q)} - \tilde{Z}$ alakban nyerjük (ahol $\tilde{Z} = AZ^{(A)}$).

Ekkor a negyedéves ingadozások modellje

$$\Delta y = \Delta X_1 \gamma_1 + \Delta Z \delta + \Delta u$$

formában írható fel, s a negyedéves modell

$$y^{(Q)} = \tilde{y}^{\wedge} + \Delta y = \tilde{X} \tilde{\beta}^{\wedge} + \Delta X_1 \gamma_1 + \Delta Z \delta + u^{(Q)} \quad (2)$$

alakú lesz.

Természetesen a gyakorlati alkalmazások során adódhat olyan eset is, amikor az a) és b) eset *keverten* szerepel, azaz valódi negyedéves magyarázó változók mellett mesterséges változók alkalmazása is szükséges lehet. Ez az eset azonban elvben nem különbözik a tárgyaltaktól.

2. A „fiktív” negyedéves modell

Mint az előzőekben láthattuk, módszerünkben kulcsszerephez jut az ún. fiktív negyedéves modell, amely átmenetet teremt az éves és a tényleges negyedéves modell között. Segítségével az ökonometriai modell keretein belül válik lehetségessé a hiányos negyedéves adatbázis okozta nehézségek áthidalása.

A fiktív negyedéves modellel kapcsolatban két problémakört kell okvetlenül áttekinteni: az időbeli aggregáció és dezaggregáció kérdését, valamint magának a modellnek a statisztikai jellemzőit. Ez utóbbi a fiktív és az éves modell kapcsolatának tisztázásához is elengedhetetlen.

2.1. Az időbeli aggregálás és dezaggregálás

Az aggregálás elmélete — melynek kiterjedt irodalma van, s amely iránt a modellek fejlődésének természetes következményeként nálunk is egyre nő az érdeklődés (pl. [6]) — általában a különböző szintű (pl. ágazati — népgazdasági) folyamatok és modellek összehasonlításával és összekapcsolásával foglalkozik. A következő rész az aggregációnak egy más aspektusát mutatja be. Az időbeli aggregáció kérdését — hasonló probléma kapcsán — mások is felvették [2], mi itt ennek egy meglehetősen egyszerű módszerét mutatjuk be olyan részletességgel, ami a további tárgyalás megértése érdekében szükséges.

Az időbeli aggregálás és dezaggregálás szempontjából az ökonometriai modell változóit két csoportra oszthatjuk:

— „folyam” típusú változókra, melyek idődimenzióval rendelkeznek, azaz értékeik meghatározott *időszakra* vonatkoznak. Ezek éves értékei a negyedéves értékek *összegeként* állnak elő (pl. termelés); valamint

— „állomány” típusú változókra, melyek nem rendelkeznek idődimenzióval, azaz értékeik meghatározott *időpontra* vonatkoznak. Ezek éves értékei a negyedéves értékek *átlagaként* határozhatók meg (pl. állóeszköz-állomány).

Jelölje $z^{(A)} = [z_1^{(A)} z_2^{(A)} \dots z_T^{(A)}]$ az éves ökonometriai modell tetszőleges változójának idősorát, melynek jelölése folyam típusú változó esetén legyen $z_F^{(A)}$, állomány típusú változó esetén pedig $z_S^{(A)}$.

Definiáljuk az A_S , ill. A_F dezaggregáló mátrixokat az alábbi módon:

$$A_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad A_F = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

$(4T \times T)$
 $(4T \times T)$

Könnyen belátható, hogy ezek legfontosabb tulajdonságai az alábbiak:

$$a) \quad A_F = \frac{1}{4} A_S \quad \text{és} \quad A_S = 4A_F,$$

$$b) \quad A'_S A_S = 4I \quad \text{és} \quad A'_F A_F = \frac{1}{4} I,$$

$$A_S A'_S = J \quad \text{és} \quad A_F A'_F = \frac{1}{16} J = J^+,$$

ahol I az egységmatrixot, ' pedig a transzponálás műveletét jelenti, továbbá

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & \\ 0 & 0 & \\ & & \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) A_S és A_F bal oldali általánosított inverzei a következők:

$$A_S^+ = \frac{1}{4} A'_S = A'_F, \quad \text{illetve} \quad A_F^+ = 4A'_F = A'_S.$$

Ekkor

$$A_S^+ A_S = A'_F A_F = A_F^+ A_F = I$$

és

$$A_S A_S^+ = A_S A'_F = A_F A'_S = A_F A_F^+ = \frac{1}{4} J.$$

(Meggjegyezzük, hogy az A^+ mátrixok negyedéveket egész évre *aggregáló mátrix*oknak tekinthetők).

$$d) \quad A_S A_S^+ = A_F A_F^+ = \frac{1}{4} J \text{ idempotens mátrix, hiszen } (A_S A_S^+) (A_S A_S^+) = A_S (A_S^+ A_S) A_S^+ = A_S I A_S^+ = A_S A_S^+.$$

Az így definiált A mátrixok segítségével most már meghatározható egy tetszőleges z éves változóhoz tartozó dezaggregált, vagy fiktív negyedéves vektor:

$$\tilde{z}_S = A_S \tilde{z}_S^{(A)}, \quad \text{illetve} \quad \tilde{z}_F = A_F \tilde{z}_F^{(A)},$$

valamint a negyedéves ingadozások vektora

$$\Delta z = z^{(Q)} - \tilde{z},$$

ahol a z vektorok lehetnek akár S - akár F -típusú változók.

Érdemes megemlíteni, hogy ez a dezaggregációs módszer voltaképpen igen egyszerű és szemléletes, hiszen például folyam típusú változók esetén annyit

jelent, hogy az éves értéket a négy negyedévre *egyenlően* szétosztjuk, míg a negyedéves ingadozások vektora az ezektől való tényleges eltérést, azaz az éven belüli *szezonális hatást* reprezentálja.

Az aggregáció kérdését áttekintő rész befejezésekképpen bebizonyítunk egy egyszerű tételt, melynek a továbbiak során fontos szerepe lesz.

1. *Tétel:* A fiktív negyedéves változók vektora (z) és a negyedéves ingadozások vektora (Δz) (ahol z lehet S - és F -típusú egyaránt) egymásra ortogonálisak.

Bizonyítás:

$$z^{(A)} = A^+ z^{(Q)},$$

$$\tilde{z} = Az^{(A)} = AA^+ z^{(Q)},$$

$$\Delta z = z^{(Q)} - \tilde{z} = z^{(Q)} - AA^+ z^{(Q)}$$

és

$$\tilde{z}' \Delta z = (AA^+ z^{(Q)})' (z^{(Q)} - AA^+ z^{(Q)}) = z^{(Q)'} (A^{+'} A') z^{(Q)} - z^{(Q)'} (A^{+'} A') (AA^+) z^{(Q)} = 0$$

mivel $A^{+'} A' = (AA^+)' = AA^+$, hiszen J szimmetrikus.

Megjegyezzük, hogy ez az eljárás az AA^+ mátrix idempotenciáját használja ki, az pedig független a változó típusától.

2.2. A fiktív modell statisztikai jellemzői

Minthogy vizsgálatainkat az egy egyenletes modellre végezzük, induljunk ki a (1)-ben már felírt éves modellből és tekintsük annak statisztikai jellemzőit.

$$y = X\beta + u, \quad (3)$$

$$E(u) = 0; \quad E(uu') = \sigma^2 I.$$

A maradékváltozót tehát 0 várható érték és nem szinguláris skalár kovarianciamátrix jellemzi.

Az OLS módszerrel kapott paraméterbecslés a következő:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y,$$

és ennek kovarianciamátrixa:

$$V = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = \sigma_A^2 (X'X)^{-1}$$

σ_A^2 -ra pedig a $\hat{\sigma}_A^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T-K}$ ad torzítatlan becslést.

A változók 2.1.-ben említett két alaptípusa szerint az éves modell két általános esete írható fel:

a) S -típusú endogén változó esetén

$$y_S = X_S \beta_S + X_F \beta_F + u_S;$$

b) F -típusú endogén változó esetén

$$y_F = X_S \beta_S + X_F \beta_F + u_F.$$

Megjegyezzük, hogy a maradékváltozó (u) típusa értelemszerűen mindig megegyezik az endogén változó típusával.

A továbbiakban az a) esetet vizsgáljuk, a fejezetvégi összefoglalóban azonban megadjuk a b) esetre vonatkozó jellemzőket is, amelyek levezetése az a)-hoz teljesen hasonlóan elvégezhető.

Írjuk fel az a) esetnek megfelelő fiktív negyedéves modellt!

$$\tilde{y}_S = X_S \tilde{\beta}_S + X_F \tilde{\beta}_F + u_S,$$

azaz

$$A_S y_S = A_S \tilde{X}_S \tilde{\beta}_S + A_F \tilde{X}_F \tilde{\beta}_F + A_S u_S.$$

A maradékváltozó várható értéke:

$$E(\tilde{u}_S) = E(A_S u_S) = A_S E(u_S) = 0,$$

kovariancia-mátrixa pedig

$$E(\tilde{u}_S \tilde{u}_S') = E(A_S u_S u_S' A_S') = A_S E(u_S u_S') A_S' = \sigma_S^2 (A_S A_S') = \sigma_S^2 J$$

és mivel J ($4T \times 4T$ méretű) *szinguláris* mátrix, ezért sem az OLS, sem a GLS (általánosított legkisebb négyzetek) módszere nem alkalmas BLU (legjobb lineáris, torzítatlan) tulajdonságú becslésre. Ekkor az *általánosított Aitken-tétel* alapján (lásd [9]) juthatunk torzítatlan és minimális szórású becsléshez. Eszerint tekintsük a J ($4T \times 4T$) méretű kovariancia-mátrixot, melynek rangja T , ezért a nulla $3T$ -szeres sajátértéke, és a további T számú sajátértéke pozitív. Legyenek ez utóbbiak $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_T^2$.

Igaz továbbá, hogy $JF = FA^2$ és $JG = 0$,

ahol F ($4T \times T$) méretű mátrix, a pozitív sajátértékhez tartozó sajátvektorok oszlopaiból áll;

A^2 ($T \times T$) méretű diagonális mátrix, melynek diagonálelemei a pozitív sajátértékek,

G pedig ($4T \times 3T$) méretű mátrix, amely a 0 sajátértékekhez tartozó sajátvektorokból áll.

Fennállnak az alábbi összefüggések:

$$F'F = I, \quad G'G = I, \quad F'G = 0, \quad FF' + GG' = I.$$

Belátható továbbá, hogy J mátrix nullától különböző sajátértékei mind 4-gyel egyenlők, F pedig az alábbi:

$$F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \frac{1}{2} A_S.$$

Ekkor J felírható FA^2F' alakban és $J^+ = FA^{-2}F'$.

Bizonyítható (lásd [9]), hogy a változók $A^{-1}F' = \frac{1}{4}A_S' = A_S^+$ mátrixszal való transzformációja után kapott új változókra már az OLS módszer alkalmazható, hiszen

$$A^{-1}F' \tilde{y}_S = A^{-1}F' \tilde{X}_S \tilde{\beta}_S + A^{-1}F' \tilde{X}_F \tilde{\beta}_F + A^{-1}F' \tilde{u},$$

$$\text{azaz} \quad A_S^+ \tilde{y}_S = A_S^+ \tilde{X}_S \tilde{\beta}_S + A_S^+ \tilde{X}_F \tilde{\beta}_F + A_S^+ \tilde{u}_S. \quad (4)$$

A (4)-ben felírt transzformált modellre már az

$$E(A_S^+ \tilde{u} \tilde{u}' A^{+'}) = E(A_S^+ A_S u u' A_S' A_S') = \sigma_S^2 I$$

kovariancia-mátrix jellemző, és az OLS módszer alkalmazása ekkor már torzítatlan és minimális szórású becsléshez vezet.

Mivel $A_S^+ A_S = I$ és $A_S^+ A_F = A_F A_F = \frac{1}{4} I$, a (4) egyenlet az alábbi formában is felírható:

$$y_S = X_S \tilde{\beta}_S + \frac{1}{4} X_F \tilde{\beta}_F + u_S.$$

Figyelembe véve, hogy a változók S - és F -típus szerinti csoportosítása esetén

$$(X' X) = \begin{bmatrix} X_S' X_S & X_S' X_F \\ X_F' X_S & X_F' X_F \end{bmatrix},$$

az éves modell (3) paraméterbecslése OLS módszerrel a következő:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_S \\ \hat{\beta}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_S' X_S & X_S' X_F \\ X_F' X_S & X_F' X_F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X_S' \\ X_F' \end{bmatrix} y_S.$$

A fiktív negyedéves modell paraméterei pedig (ugyancsak OLS becsléssel)

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_S^* \\ \hat{\beta}_F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_S' X_S & \frac{1}{4} X_S' X_F \\ \frac{1}{4} X_F' X_S & \frac{1}{16} X_F' X_F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X_S' \\ X_F' \end{bmatrix} y_S$$

formában kaphatók.

A fenti paraméterbecslési formulákat a particionált inverz segítségével részletesen felírva végeredményként azt kapjuk, hogy

$$\hat{\beta}_S = \tilde{\beta}_S^* \quad \text{és} \quad \hat{\beta}_F = \frac{1}{4} \tilde{\beta}_F^*.$$

Hasonlóan látható be, hogy F -típusú endogén változó esetén

$$\hat{\beta}_S = 4 \tilde{\beta}_S^* \quad \text{és} \quad \hat{\beta}_F = \tilde{\beta}_F^*.$$

A paraméterek kovariancia-mátrixa az éves modell esetén:

$$V_S = \sigma_S^2 \begin{bmatrix} X_S' X_S & X_S' X_F \\ X_F' X_S & X_F' X_F \end{bmatrix}^{-1} = \tilde{\sigma}_S^2 \begin{bmatrix} V_{SS} & V_{SF} \\ V_{FS} & V_{FF} \end{bmatrix},$$

a fiktív negyedéves modellre pedig:

$$\tilde{V}_S = \sigma_S^2 \begin{bmatrix} \tilde{X}'_S \tilde{X}_S & \tilde{X}'_S \tilde{X}_F \\ \tilde{X}'_F \tilde{X}_S & \tilde{X}'_F \tilde{X}_F \end{bmatrix}^{-1} = \tilde{\sigma}_S^2 \begin{bmatrix} \tilde{V}_{SS} & \tilde{V}_{SF} \\ \tilde{V}_{FS} & \tilde{V}_{FF} \end{bmatrix}.$$

Ismét alkalmazva az A_S^+ -el végzett transzformációt, az

$$A_S^+ \tilde{X}_S = A_S^+ A_S X_S = X_S,$$

$$A_S^+ \tilde{X}_F = A_S^+ A_F X_F = \frac{1}{4} X_F$$

egyenlőségeket, valamint a particionált inverzet felhasználva, a következő összefüggésekhez jutunk:

$$\tilde{V}_{SS} = V_{SS},$$

$$\tilde{V}_{SF} = 4V_{SF},$$

$$\tilde{V}_{FS} = 4V_{FS},$$

$$\tilde{V}_{FF} = 16V_{FF}.$$

Hasonlóan belátható F-típusú endogén változó esetére, hogy

$$\tilde{V}_{SS} = \frac{1}{16} V_{SS},$$

$$\tilde{V}_{SF} = \frac{1}{4} V_{SF},$$

$$\tilde{V}_{FS} = \frac{1}{4} V_{FS},$$

$$\tilde{V}_{FF} = V_{FF}.$$

Meghatározandó még σ_S^2 becslése, melyet a következő összefüggések alapján adhatunk meg:

$$E(\tilde{u}_S' J^+ \tilde{u}_S) = E(\tilde{u}_S' A_S^{+'} A_S^+ \tilde{u}_S) = E(\hat{u}_S' \hat{u}_S) = \sigma_S^2 (T - K),$$

így

$$\tilde{\sigma}_S^2 = \frac{\tilde{u}_S' J^+ \tilde{u}_S}{T - K} = \frac{\hat{u}_S' \hat{u}_S}{T - K} = \hat{\sigma}_S^2,$$

és hasonlóan

$$E(\tilde{u}_F' J \tilde{u}_F) = E(\tilde{u}_F' A_F^{+'} A_F^+ \tilde{u}_F) = E(\hat{u}_F' \hat{u}_F) = \sigma_F^2 (T - K),$$

ezért

$$\tilde{\sigma}_F^2 = \frac{\tilde{u}_F' J \tilde{u}_F}{T - K} = \frac{\hat{u}_F' \hat{u}_F}{T - K} = \hat{\sigma}_F^2.$$

Végezetül *összefoglaljuk* a fiktív negyedéves modellre kapott jellemzőket:

a) A becsült paraméterek mátrixában összefoglaltuk, hogy a fiktív modell paraméterei hogyan származtathatók az éves becslésekből.

	X_S	X_F
y_S	$\hat{\beta}_S^* = \hat{\beta}_S$	$\hat{\beta}_F^* = 4\hat{\beta}_F$
y_F	$\hat{\beta}_S^* = \frac{1}{4}\hat{\beta}_S$	$\hat{\beta}_F^* = \hat{\beta}_F$

b) A reziduumok szórásnégyzetének becslései:

$$\hat{\sigma}_S^{*2} = \hat{\sigma}_S^2 \text{ és } \hat{\sigma}_F^{*2} = \hat{\sigma}_F^2.$$

c) A paraméterek kovariancia-mátrixának becslése, ha y S -típusú;

$$\hat{V}^* = \left[\begin{array}{c|c} \hat{V}_{SS} & 4\hat{V}_{SF} \\ \hline 4\hat{V}_{FS} & 16\hat{V}_{FF} \end{array} \right], \quad (5)$$

ha pedig y F -típusú:

$$\hat{V}^* = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{16}\hat{V}_{SS} & \frac{1}{4}\hat{V}_{SF} \\ \hline \frac{1}{4}\hat{V}_{FS} & \hat{V}_{FF} \end{array} \right]. \quad (6)$$

A fenti eredmények tehát azt mutatják, hogy a fiktív negyedéves modell jellemzői igen egyszerűen, *mechanikusan származtathatók az éves modell megfelelő jellemzőiből*. Érdeemes felhívni a figyelmet arra, hogy a paraméterek relatív szórása a fiktív negyedéves modellben nem változik, az egyenlet relatív hibája viszont megnövekedhet, ami teljes mértékben érthető. Ugyanakkor utalunk rá, hogy a véletlen változó szórásnégyzetének becslésekor a klasszikus képlet (amelynek alkalmazása esetén az egyenlet relatív hibája maradna változatlan) már egyszerű GLS esetén is a szórás torzított becsléséhez vezet (vö. [3]).

3. A tényleges negyedéves modell becslése

A tényleges negyedéves modell, mint már megmutattuk, a fiktív negyedéves modell és a negyedéves eltérések modelljének összegeként állítható elő.

A továbbiakban eltekintünk a változóknak a 2. részben alkalmazott S és F -típus szerinti felosztásától, hiszen ennek a megkülönböztetésnek csupán a fiktív modell szempontjából volt jelentősége.

A jelölések egyszerűsítése végett a (2) formában felírt tényleges negyedéves modell változóira és paramétereire új jelöléseket vezetünk be.

Legyen: $y^{(Q)} = y$, $\tilde{X} = X_1$, $[\Delta X_1 \Delta Z R] = X_2$, $\tilde{\beta} = \beta_1$,

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \\ \alpha \end{bmatrix} = \beta_2 \text{ és } u^{(Q)} = v.$$

Ekkor a tényleges negyedéves modell az alábbi lesz:

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + v. \quad (7)$$

Ennél a felírásnál tehát X_1 a magyarázó változók fiktív negyedéves értékeit, X_2 pedig azok negyedéves ingadozásait, illetve a specifikus negyedéves változókat jelöli. Fontosnak tartjuk felhívni a figyelmet arra, hogy mivel tényleges negyedéves adatok csak rövid idősorokba állnak rendelkezésünkre, ez esetben a fiktív negyedéves adatok is csak rövid megfigyelési időszakokra vonatkoznak. A javasolt eljárás lényege éppen abban áll, hogy felhasználva a hosszabb idősorok által nyújtott többletinformációt a β_1 paraméterekre torzítatlan becslések származtathatók az éves modellből. Ezekről tudjuk, hogy

$$\beta_1 - \hat{\beta}_1 = w_1, \quad E(w_1) = 0 \quad \text{és} \quad E(w_1 w_1') = \tilde{V}_1,$$

ahol $\tilde{V}_1$ az (5), ill. (6) alatt megadott kovariancia-mátrixok közül az endogén változó típusának megfelelő.

Igaz továbbá az is, hogy $E(v) = 0$, $E(v v') = \sigma^2 I$ és $E(v w_1) = 0$.

3.1. A negyedéves modell becslése RLS (korlátozott legkisebb négyzetek) módszerével

Figyelembe véve, hogy a $\hat{\beta}_1$ fiktív negyedéves paraméterbecslések mintegy külső adottságként rendelkezésünkre állnak, a (7) alatt megadott modell átírható a következő formára:

$$y - X_1 \hat{\beta}_1 = X_2 \beta_2 + (v - X_1 w_1). \quad (8)$$

A (8)-as módosított feladat $\hat{\beta}_2$ paraméterbecslései előállíthatók OLS módszerrel.

$$\hat{\beta}_2 = (X_2' X_2)^{-1} X_2' (y - X_1 \hat{\beta}_1). \quad (9)$$

Az így kapott becslés torzítatlan, ugyanis

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 &= (X_2' X_2)^{-1} X_2' (X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 + v - X_1 \hat{\beta}_1) = \\ &= \beta_2 + (X_2' X_2)^{-1} X_2' v - (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1 w_1, \end{aligned}$$

és mivel $E(v) = 0$ és $E(w_1) = 0$, azt kapjuk, hogy $E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$.

A korlátozott becslés paramétereinek kovariancia-mátrixa a következő:

$$V_R = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{V}_1 & V_{12R} \\ \hline V_{21R} & V_{2R} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{V}_1 & -\tilde{V}_1 P' \\ \hline -P \tilde{V}_1 & \sigma^2 (X_2' X_2)^{-1} + P \tilde{V}_1 P' \end{array} \right], \quad (10)$$

$$\text{mivel } V_{2R} = E[(\hat{\beta}_2 - \beta_2)(\hat{\beta}_2 - \beta_2)'] = (X_2'X_2)^{-1}X_2'[E(vv' + X_1w_1w'X_1' - \\ - X_1w_1v' - v w_1'X_1)X_2(X_2'X_2)^{-1}] = \sigma^2(X_2'X_2)^{-1} + P\tilde{V}_1P',$$

$$\text{továbbá } V_{12R} = V_{21R} = E[(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_2 - \beta_2)'] = E[(\hat{\beta}_2 - \beta_2)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)'] = \\ = E[w_1(v - X_1w_1)'X_2(X_2'X_2)^{-1}] = -\tilde{V}_1X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1} = -\tilde{V}_1P',$$

$$\text{ahol } P = (X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1,$$

Látható, hogy amennyiben X_2 csak az X_1 -hez tartozó negyedéves ingadozások vektorait tartalmazza, az 1. tétel értelmében P 0-mátrix lesz, és ez lényegesen leegyszerűsíti a további tárgyalást. Mivel a gyakorlatban ez csak ritkán fordul elő, speciális esetként kezeljük és részletesen nem foglalkozunk vele. Annyi azonban előre is megállapítható, hogy ekkor a különféle becslési módszerek — legalábbis a negyedéves paraméterek hibáját tekintve — egyenértékűek lesznek.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a (9) korlátozott eljárás, melynél $\hat{\beta}_1$ -t külső adottságként kezeltük, mikor ad hatásosabb becslést a (7) feladat, rövid idősorokon alapuló, OLS módszerrel történő megoldásánál. Ezért felírjuk az OLS módszerrel kapott becslések kovariancia-mátrixát.

$$V = \left[\begin{array}{c|c} V_{1OLS} & V_{12OLS} \\ \hline V_{21OLS} & V_{2OLS} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} V_{1OLS} & -V_{1OLS}P' \\ \hline -PV_{1OLS} & \sigma^2(X_2'X_2)^{-1} + PV_{1OLS}P' \end{array} \right], \quad (11)$$

$$\text{ahol } V_{1OLS} = \sigma^2(X_1'MX_1)^{-1}$$

$$M = I - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2',$$

$$P = (X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1.$$

Megjegyezzük, hogy V_{OLS} felírásánál felhasználtuk a particionált inverz meghatározásának összefüggéseit az

$$(X'X) = \left[\begin{array}{cc} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{array} \right]. \quad \text{mátrixra.}$$

A két becslés hatásosságának összehasonlítására képezzük a (10) és (11) kovariancia-mátrixok $\hat{\beta}_1$ és $\hat{\beta}_2$ együttthatókhoz tartozó blokkjainak különbségét.

$$\hat{\beta}_1\text{-hez ez a különbség } \tilde{V}_1 - V_{1OLS},$$

$$\hat{\beta}_2\text{-höz pedig } P(\tilde{V}_1 - V_{1OLS})P' \text{ lesz.}$$

Mivel belátható, hogy a P és P' mátrixszal balról vagy jobbról történő szorzás a különbségmátrix pozitív, illetve negatív definitésén nem változtat, az RLS módszerrel kapott becslés akkor tekinthető jobbnak az OLS becslésnél, ha $\Delta V = \tilde{V}_1 - V_{1OLS}$ legalább negatív szemidefinit. A $\tilde{V}_1 - V_{1OLS}$ különbségről valójában semmi bizonyos nem tudunk állítani, mert ezek a mátrixok a viszonylag részletes elemzés ellenére sem összehasonlíthatók. Annyit mondhatunk, hogy a korlátozott módszert akkor látszik célszerűnek alkal-

mazni, ha a fiktív negyedéves paraméterbecslések szórása relative kicsi, azaz a külsőként tekintett többletinformáció a fiktív negyedéves paraméterek szórását számottevően csökkenti.

A paraméterek kovariancia-mátrixának ismeretében meghatározhatjuk az előrejelzés kovariancia-mátrixát (és így természetesen hibáját is). Ezt annál is inkább meg kell tenni, mivel modellünk elsődleges célja előrejelzések készítése, így az előrebecslés megbízhatósága a modell „jóságának” egyik fő kritériuma. Ez a kovariancia-mátrix az alábbi módon írható fel:

$$\begin{aligned} & E\{[X_{2*}\hat{\beta}_2 - (y_* - X_{1*}\hat{\beta}_1)][X_{2*}\hat{\beta}_2 - (y_* - X_{1*}\hat{\beta}_1)]'\} = \\ & = E\{[X_{2*}(\hat{\beta}_2 - \beta_2) + X_{1*}(\hat{\beta}_1 - \beta_1) - v_*][X_{2*}(\hat{\beta}_2 - \beta_2) + X_{1*}(\hat{\beta}_1 - \beta_1) - v_*]'\} = \\ & = X_{2*}[\sigma^2(X_2'X_2)^{-1} + P\tilde{V}_1P']X_{2*}' - X_{1*}\tilde{V}_1P'X_{2*}' - X_{2*}P\tilde{V}_1X_{1*}' + \\ & \quad + X_{1*}\tilde{V}_1X_{1*}' + \sigma^2I, \end{aligned} \quad (12)$$

ahol X_{1*} és X_{2*} -gal a magyarázó változóknak az előrejelzési időszakokra vonatkozó értékeit jelöltük és felhasználtuk az előrejelzés véletlen hibáira vonatkozó szokásos feltételezéseket (v.ö.: [9], 123. oldal).

A (12) formulával kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy amennyiben a P mátrix 0 mátrix (azaz X_1 és X_2 ortogonálisak), akkor a jobb oldal $\sigma^2X_{2*}(X_2'X_2)^{-1}X_{2*}' + X_{1*}\tilde{V}_1X_{1*}' + \sigma^2I$ alakra egyszerűsödik, amelynek értelmezése nyilvánvaló: az előrejelzés hibája a fiktív negyedéves modell és a negyedéves eltérések modellje paraméterhibáinak, valamint reziduum hibájának összegeként állt elő. A (12) formula ettől három tagban tér el:

- az $X_{2*}P\tilde{V}_1P'X_{2*}'$ a becslés korlátozottságából adódó additív hibatagnak,
- az $X_{1*}\tilde{V}_1P'X_{2*}'$ és az $X_{2*}P\tilde{V}_1X_{1*}'$ az X_1 és X_2 változók egymásra hatásából adódó additív hibatagnak tekinthető.

3.2. A tényleges negyedéves modell becslése GLS (általánosított legkisebb négyzetek) módszerrel

A (7)-ben felírt típusú modellek becslésére Durbin (lásd [9]) javasolt a 4.1-ben bemutatott RLS módszertől eltérő és némiképp bonyolultabb eljárást.

Megtartva a 4. fejezetben bevezetett jelöléseket, a feladatot kissé megváltoztatva írjuk fel és a $\hat{\beta}_1$ fiktív negyedéves paramétereket mint a β_1 paraméter megfigyeléseit vesszük figyelembe:

$$\begin{bmatrix} y \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ w_1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

A véletlen változóra feltételezzük, hogy

$$E(vv') = \sigma^2I, \quad E(w_1w_1') = \tilde{V}_1 \quad \text{és} \quad E(vw_1') = 0.$$

A (13)-ban felírt modell reziduumainak kovariancia-mátrixa tehát

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 I & 0 \\ 0 & \tilde{V}_1 \end{bmatrix}$$

alakban adható meg. Ekkor a β_1 , β_2 paraméterek BLU (legjobb, lineáris, torzítatlan) tulajdonságú becslése az Aitken tétel szerint (vö. [9]) GLS módszerrel határozható meg.

Az így kapott becslés:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{\text{GLS}} &= \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{1\text{GLS}} \\ \hat{\beta}_{2\text{GLS}} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} I & 0 \\ 0 & \tilde{V}_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} I & 0 \\ 0 & \tilde{V}_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} X_1' X_1 + \tilde{V}_1^{-1} & \frac{1}{\sigma^2} X_1' X_2 \\ \frac{1}{\sigma^2} X_2' X_1 & \frac{1}{\sigma^2} X_2' X_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} X_1' y + \tilde{V}_1^{-1} \hat{\beta}_1 \\ \frac{1}{\sigma^2} X_2' y \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Belátható, hogy ez a becslés torzítatlan, és a paraméterek kovariancia-mátrixa a következő:

$$\begin{aligned} V_{\text{GLS}} &= \begin{bmatrix} V_{1\text{GLS}} & V_{12\text{GLS}} \\ V_{21\text{GLS}} & V_{2\text{GLS}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} X_1' X_1 + \tilde{V}_1^{-1} & \frac{1}{\sigma^2} X_1' X_2 \\ \frac{1}{\sigma^2} X_2' X_1 & \frac{1}{\sigma^2} X_2' X_2 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} (\tilde{V}_1^{-1} + V_{1\text{OLS}}^{-1})^{-1} & -[P(\tilde{V}_2^{-1} + V_{1\text{OLS}}^{-1})^{-1}]' \\ -P(\tilde{V}_1^{-1} + V_{1\text{OLS}}^{-1})^{-1} & \sigma^2(X_2' X_2)^{-1} + P(\tilde{V}_1^{-1} + V_{1\text{OLS}}^{-1})P' \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ahol az egyes hipermátrixokat a particionált inverz felhasználásával nyertük.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a GLS módszerrel kapott becslés a paraméterek kisebb hibájához vezet, mint az előző részben bemutatott RLS eljárás, azaz ilyen értelemben hatásosabb annál. Képezzük az RLS módszerrel kapott becsléshez tartozó kovariancia-mátrix és a GLS becslés kovariancia-mátrixának β_1 és β_2 paraméterekhez tartozó hipermátrixainak különbségét!

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 - V_{1\text{GLS}} &= \tilde{V}_1 - (\tilde{V}_1^{-1} + V_{1\text{OLS}}^{-1})^{-1}, \\ V_{2R} - V_{2\text{GLS}} &= P[\tilde{V}_1 - (\tilde{V}_1^{-1} + V_{1\text{OLS}}^{-1})^{-1}]P'. \end{aligned}$$

Ebből látható, hogy a GLS módszer akkor ad ilyen értelemben hatásosabb becslést, ha a $[\tilde{V}_1 - (\tilde{V}_1^{-1} + V_{10LS}^{-1})^{-1}]$ különbségmátrix pozitív definit.

Ennek bizonyításához egy lemmára van szükségünk.

1. *Lemma*.² Ha A , B és $(A-B)$ szimmetrikus, pozitív definit mátrixok, akkor $x'A^{-1}x < x'B^{-1}x$ a tér bármely 0-tól különböző x vektorára.

Bizonyítás: $(A-B)$ pozitív definitése miatt $x'Ax > x'Bx$ áll fenn minden 0-tól különböző x -re. Írjuk fel az A mátrixot $A^{1/2} \cdot A^{1/2}$ alakban! Ismeretes, egy szimmetrikus, pozitív definit A mátrixhoz van olyan, ugyancsak pozitív definit, szimmetrikus C mátrix, amelyre $C^2 = A$; ezt a C mátrixot A pozitív négyzetgyökének nevezzük, és $A^{1/2}$ -del jelöljük [8].

Ekkor $x'Ax = x'A^{1/2}A^{1/2}x = y'y$ írható és a kiinduló feltétel értelmében

$$y'y = y'Iy > x'A^{1/2}A^{-1/2}BA^{-1/2}A^{1/2}x = y'A^{-1/2}BA^{-1/2}y;$$

itt y a tér tetszőleges vektora lehet, ugyanis $A^{1/2}$ regularitása miatt a tér bármely vektora előállítható $A^{1/2}x$ alakban.

Az egyenlőtlenségből következik, hogy a jobb oldalon álló kifejezés mátrixának minden sajátértéke 1-nél kisebb, így a megfelelő $A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ inverzmátrix minden sajátértéke 1-nél nagyobb, azaz bármely z -re:

$$z'A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}z > z'Iz = z'z = z'A^{1/2}A^{-1}A^{1/2}z.$$

Bevezetve az $u = A^{1/2}z$ jelölést $u'B^{-1}u > u'A^{-1}u$. Hasonlóan az előző esethez itt is belátható, hogy u a tér tetszőleges vektora lehet, így a lemma bizonyítása teljes.

Ennek felhasználásával már egyszerűen bizonyítható az alábbi fontos tétel:

2. *Tétel:* A GLS módszerrel a (13) feladat paramétereire adott becslés mindig hatásosabb, mint a (8) feladat paramétereinek RLS becslése, ugyanis a $\tilde{V}_1 - (\tilde{V}_1^{-1} + V_{10LS}^{-1})^{-1}$ különbségmátrix pozitív definit.

Bizonyítás: Mivel $\tilde{V}_1$ és $(\tilde{V}_1^{-1} + V_{10LS}^{-1})^{-1}$ nem szinguláris kovariancia-mátrixok, tehát pozitív definiték, azaz

$$x'\tilde{V}_1x > 0 \text{ és } x'(\tilde{V}_1^{-1} + V_{10LS}^{-1})^{-1}x > 0.$$

Kiinduló feltételünk az volt, hogy

$$x'[\tilde{V}_1 - (\tilde{V}_1^{-1} + V_{10LS}^{-1})^{-1}]x > 0 \text{ bármely } x \neq 0\text{-ra.}$$

Ebből $x'\tilde{V}_1x > x'(\tilde{V}_1^{-1} + V_{10LS}^{-1})^{-1}x$ adódik, és a lemma értelmében $x'\tilde{V}_1^{-1}x < x'\tilde{V}_1^{-1}x + x'V_{10LS}^{-1}x$, azaz $x'V_{10LS}^{-1}x > 0$ kapható.

Mivel V_{10LS} pozitív definitmátrix, inverze is az, így a bizonyítás teljes.

A paraméterek kovariancia-matrixa segítségével felírható az előrejelzés hibája ennél a becslésnél is; ez formailag nagyon hasonló (12)-höz, így ismételt felírása feleslegesnek tűnik. A két forma egymástól csak a már megismert kovariancia-mátrixokban tér el.

²A lemma és annak bizonyítása Mihályffy Lászlótól származik, akinek ezért, valamint a cikk egyéb részénél nyújtott értékes tanácsaiért köszönetet mondunk.

4. Egy illusztratív példa

Befejezésül megkíséreljük egy számpéldán keresztül szemléletesebbé tenni az olvasó számára az előzőekben ismertetett eljárások lényegét.

Számításainkat a rubelrelációs importforgalomra (IMR) felírt egyenletre végeztük. Magyarázó változóknak a bruttó felhalmozást (BF), a lakossági fogyasztást (FL) és a rubelrelációs exportforgalmat (EXR) választottuk.

Első lépésben 1960–75-ig terjedő idősorok³ alapján elkészítettük az éves egyenlet becslését OLS módszerrel.

$$\text{IMR} = 0,5037 \text{ BF} - 0,4870 \text{ FL} + 1,2530 \text{ EXR} + 27,658$$

$$(0,2027) \quad (0,2957) \quad (0,4486)$$

$$R^2 = 0,96712; \text{DW} = 1,7171; \varrho = 0,1415.$$

A paraméterek kovariancia-mátrixa a következő:

$$V = 25,06 \begin{bmatrix} 0,001640 & -0,001917 & 0,001598 & 0,110515 \\ -0,001917 & 0,003488 & -0,004686 & -0,212280 \\ 0,001598 & -0,004686 & 0,008032 & 0,289719 \\ 0,110515 & -0,212280 & 0,28719 & 13,325484 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Meg kell jegyeznünk, hogy közgazdasági szempontból a becsült paraméterek nem tekinthetők minden vonatkozásban kifogástalannak, továbbá figyelembe véve a becslés statisztikai mutatóit, az illeszkedés javítása érdekében esetleg más változatok kipróbálása is indokolt lett volna. Ezekről a problémáktól eltekintettünk, mivel elsődleges célunk az általunk ismertetett eljárások illusztrálása, nem pedig közgazdasági következtetések levonása volt.

Az éves egyenletre kapott becslések alapján elkészíthető az ún. *fiktív modell*. A fiktív modell paramétereinek felírásánál megvizsgáltuk az egyenlet endogén változójának és a magyarázó változóknak a típusát. Esetünkben mind az endogén, mind pedig a magyarázó változók — a konstans tag kivételével — folyam típusúak voltak, ezért a fiktív modell (a 2.2 rész összefoglalójának a) pontja alapján) a következő:

$$\widetilde{\text{IMR}} = 0,5037 \widetilde{\text{BF}} - 0,4870 \widetilde{\text{FL}} + 1,2530 \widetilde{\text{EXR}} + 6,9115.$$

AZ $\widetilde{\text{IMR}}$, $\widetilde{\text{BF}}$, $\widetilde{\text{FL}}$, $\widetilde{\text{EXR}}$ szimbólumokkal értelemszerűen a megfelelő éves változók átlagos negyedéves értékeit jelöltük. A paraméterek kovariancia-mátrixa [(6) alapján] a következőképpen származtatható a (15) alatt közölt éves kovariancia-mátrixból:

$$\widetilde{V}_1 = \begin{bmatrix} 0,04109 & -0,04804 & 0,04005 & 0,69238 \\ -0,04804 & 0,08741 & -0,11743 & -1,32993 \\ 0,04005 & -0,11743 & 0,20128 & 1,81510 \\ 0,69238 & -1,32993 & 1,81510 & 20,87104 \end{bmatrix}.$$

³A felhasznált adatok megtalálhatók a KSH különböző évekre vonatkozó — népgazdasági mérlegeket tartalmazó — kiadványaiban.

A tényleges negyedéves egyenlet felírásakor feltételeztük, hogy a rubelrelációs importforgalomra és a rubelrelációs exportforgalomra vannak tényleges negyedéves megfigyelések.⁴ Hangsúlyozzuk, hogy míg az éves adatok az 1960—75-ös időszakra álltak rendelkezésre, a tényleges negyedéves adatok 1968—75-ös időszakra vonatkoznak, s mivel a negyedéves egyenlet becslésénél az éves egyenletből indulunk ki, az előzőekben említett többletinformáció ily módon érvényesül a tényleges negyedéves egyenlet becslésénél. Így a tényleges negyedéves modell a következőképpen alakult:

$$\text{IMR}^{(Q)} = \beta_{11} \widetilde{\text{BF}} + \beta_{12} \widetilde{\text{FL}} + \beta_{13} \widetilde{\text{EXR}} + \beta_{21} \Delta \text{EXR} + \beta_{22} \text{DU} + v,$$

ahol $\text{IMR}^{(Q)}$ és $\text{EXR}^{(Q)}$ a rubelrelációs importforgalom és a rubelrelációs exportforgalom tényleges negyedéves megfigyeléseit jelöli, valamint $\Delta \text{EXR} = \text{EXR}^{(Q)} - \widetilde{\text{EXR}}$.

Bevezettünk továbbá egy gazdaságpolitikai változót (DU) is, amely a rubelrelációs külkereskedelmi forgalomban érvényesülő (az alapvetően bilaterális elszámolási rendszerből fakadó) „egyensúlyi” állapotra való törekvést hivatott érzékeltetni.

A tényleges negyedéves egyenlet becslését először *RLS módszerrel* végeztük el. Emlékeztetőül: az RLS módszer a fiktív egyenlet évesből származtatott paramétereit „megtartja.” Ezek vektoralakban a következők:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_{1\text{RLS}} = \begin{bmatrix} 0,5037 \\ -0,4870 \\ 1,2530 \\ 6,9115 \end{bmatrix}.$$

A negyedéves ingadozásokat kifejező EXR és DU változók paraméterbecslése pedig a következő formula alapján állítható elő:

$$\beta_{2\text{RLS}} = (X_2' X_2)^{-1} X_2' (y - X_1 \hat{\beta}_1),$$

ami számpéldánkban az alábbi becslést adja

$$\beta_{2\text{RLS}} = \begin{bmatrix} 0,8021 \\ -3,4016 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (0,11597) \\ (1,3198) \end{matrix}.$$

(A becsült paraméterek mellett zárójelben feltüntettük a paraméterek hibáját.)

A negyedéves ingadozásokat és azok becsült értékeit az 1. ábra szemlélteti.

A fentiek szerint tehát a tényleges negyedéves modell RLS módszerrel történő becslése a következő:

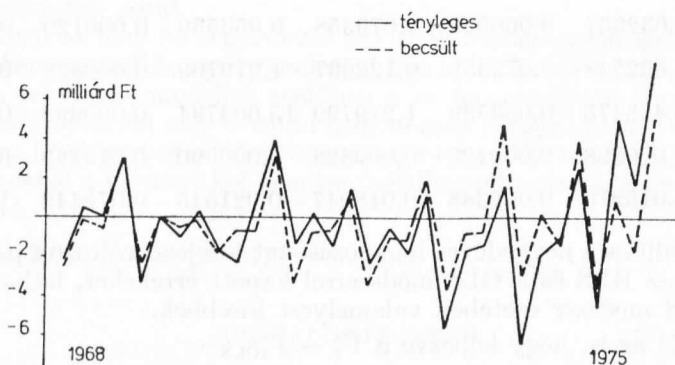
$$\begin{aligned} \text{IMR}^{(Q)} = & 0,5037 \widetilde{\text{BF}} - 0,487 \widetilde{\text{FL}} + 1,2530 \widetilde{\text{EXR}} + 0,8021 \Delta \text{EXR} - \\ & - 3,4016 \text{DU} + 6,9115. \end{aligned}$$

⁴A tényleges negyedéves adatokat a Statisztikai Havi Közlemények című KSH kiadványsorozat alapján állítottuk össze.

A reziduumok szórásnégyzete és a paraméterek kovariancia-mátrixa [(10) alapján] az alábbi:

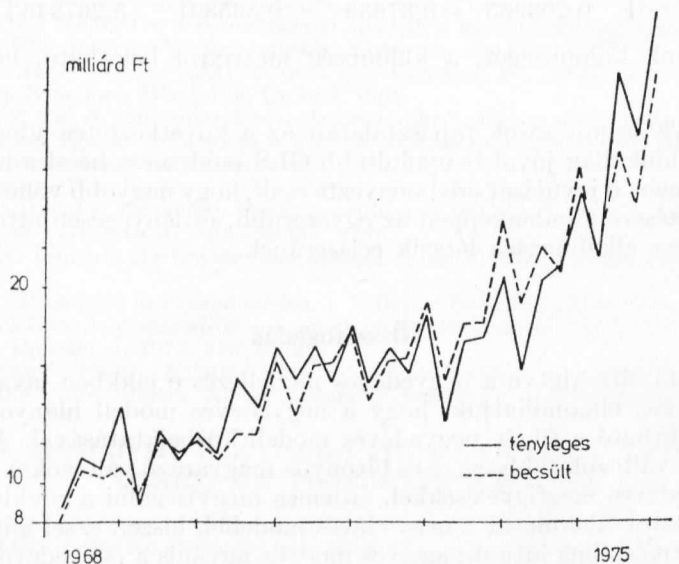
$$\tilde{V}_{\text{RLS}} = \begin{bmatrix} 0,04109 & -0,04804 & 0,04005 & 0,69238 & -0,00154 & 0,03351 \\ -0,04804 & 0,08741 & -0,11743 & -1,32993 & -0,00008 & 0,00189 \\ 0,04005 & -0,11743 & 0,20128 & 1,81510 & 0,00246 & -0,05379 \\ 0,69238 & -1,32993 & 1,81510 & 20,87104 & 0,00586 & -0,12735 \\ -0,00154 & -0,00008 & 0,00246 & 0,00576 & 0,01349 & -0,07988 \\ 0,03351 & 0,00198 & -0,05379 & -0,12735 & -0,07988 & 1,74209 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_{\text{RLS}}^2 = 3,4773.$$



1. ábra

A teljes negyedéves modell tényleges és közelítő értékeit a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Végül elkészítettük a tényleges negyedéves modell becslését *GLS-módszerrel* is. Ez a módszer külső adottságként figyelembe veszi a fiktív modell becsült paramétereit, de (14) alapján ezekre is új becslést készít. Számpéldánkban a GLS módszerrel a tényleges negyedéves egyenlet becslése a következő:

$$\begin{aligned} \text{IMR}^{(Q)} = & 0,5451 \widetilde{\text{BF}} - 0,8031 \widetilde{\text{FL}} + 1,8697 \text{EXR} + 0,8155 \Delta \text{EXR} - \\ & (0,1545) \quad (0,2450) \quad (0,3503) \quad (0,1150) \\ & - 3,6738 \text{DU} + 12,0225. \\ & (1,2824) \end{aligned}$$

A paraméterek kovariancia-mátrixa pedig az alábbi

$$\hat{V}_{\text{GLS}} = \begin{bmatrix} 0,023883 & -0,032367 & 0,032548 & 0,488475 & 0,000698 & -0,015210 \\ -0,032367 & 0,060029 & -0,079358 & 0,953539 & -0,000120 & 0,002388 \\ 0,032548 & -0,079358 & 0,122697 & 1,279799 & -0,000828 & 0,018047 \\ 0,488475 & -0,953539 & 1,279799 & 15,603794 & 0,000990 & -0,021575 \\ 0,000698 & -0,000120 & -0,000828 & 0,000990 & 0,013243 & -0,075442 \\ -0,015210 & 0,002388 & 0,018047 & -0,021545 & -0,075442 & 1,64444 \end{bmatrix}.$$

Összehasonlítva a negyedéves ingadozásokat kifejező változók paramétereinek hibáját az RLS és a GLS módszerrel kapott értékeket, látható, hogy a hibák a GLS módszer esetében valamelyest kisebbek.

Ezt tükrözi az is, hogy képezve a $\hat{V}_1 - \hat{V}_{\text{GLS}}$

$$= \begin{bmatrix} 0,017207 & -0,015673 & 0,007502 & 0,203905 \\ -0,015673 & 0,027381 & -0,038072 & -0,37639 \\ 0,007502 & -0,038072 & 0,078583 & 0,535301 \\ 0,203905 & -0,37639 & 0,535301 & 5,267246 \end{bmatrix}$$

hipermátrixok különbségét, a különbség mátrixról belátható, hogy pozitív definit.

Összegezve számításaink tapasztalatait az a következtetés adódik, hogy a számítástechnikailag jóval bonyolultabb GLS módszer a becslés hatásosságának oly kis mérvű javulását eredményezte csak, hogy nagyobb volumenű számítások elvégzésére mindenképpen az egyszerűbb, és lényegesen áttekinthetőbb RLS módszer alkalmazása látszik célszerűnek.

Összefoglalás

Befejezésül, áttekintve a negyedéves modellezés e cikkben javasolt egy lehetséges útját, elmondhatjuk, hogy a negyedéves modell hiányos adatbázis esetén is felírható a fiktív negyedéves modell közbeiktatásával. Amennyiben az endogén változók többségére és bizonyos magyarázó változókra is rendelkezünk negyedéves megfigyelésekkel, érdemes megvizsgálni a rövidtávú gazdasági folyamatok alakulását a negyedéves modellel, hiszen ezzel mindenképpen többletinformációhoz jutunk; az éves modellt ugyanis a negyedéves modellhez is elő kell állítani.

A paraméterek becslésére több lehetőség is kínálkozik. Meg kell jegyeznünk azonban, hogy a fiktív negyedéves és a különbség változó ortogonalitása miatt a különböző becslések hatásossága csak akkor tér el egymástól, ha a modellben speciális negyedéves változók vagy gazdaságpolitikai változók is szerepelnek. Megemlítendő, hogy az ilyen változók szerepeltetése a rövidtávú modellekben szinte elkerülhetetlennek tűnik.

A negyedéves modell becslésére javasolt módszerek közül az RLS módszer alkalmazása technikailag egyszerűbb és maga az eljárás is kézenfekvőbb, ugyanakkor a kapott becslés torzítatlan. A GLS módszerrel kapott becslések hatásosság szempontjából jobbak, de viszonylagos bonyolultságuk miatt kétséges, hogy számításaink során ezeket fogjuk-e alkalmazni, hiszen az eddigi, RLS módszerrel végzett becslések a gyakorlat számára teljes mértékben kielégítő eredményeket adtak.

Cikkünkben az éves és negyedéves modellek összekapcsolásának problémáját csak a legegyszerűbb, egy egyenletről álló modell esetére vizsgáltuk. Többegyenletes, szimultán modellek esetében a — természetesen bonyolultabb — becslési eljárásokon kívül még további megoldandó kérdés az, hogy miként lehet a nem teljes körű negyedéves egyenleteket a teljes körű éves modellel összeépíteni. Ezekkel a kérdésekkel jelenleg foglalkozunk, megoldásuk a közeljövőben várható.

(Beérkezett: 1978. február 3-án.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. EVANS, M. K.—KLEIN, L. R.: The Wharton Econometric Forecasting Model. University of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1967.
2. GELAUFF, G. M.—HARKEMA, R.: Estimating Quarterly Models with Partly Missing Quarterly Observations. Paper Presented at the European Meeting of the Econometric Society, Vienna 1977.
3. GOLDBERGER, A. S.: Econometric Theory. J. Wiley et Sons Inc., New York, 1966. 388 p.
4. HUNYADI L.: Negyedéves ökonometria modellek kidolgozásának egyes problémái. Előadás a VII. Magyar Operációkutatási Konferencián, Pécs, 1977.
5. KLEIN, R. L.—BALL, J.—HAZLEWOOD, A.—VENDON, P.: An Econometric Model of the United Kingdom, Blackwell, Oxford, 1961.
6. KOTÁSZ GY.-NÉ: A makroökonómiai elemzés mikro-, illetve makroszintről való közéletése (Az aggregáció problémája a lineáris regressziós modelleknél). Előadás a VII. Magyar Operációkutatási Konferencián, Pécs, 1977.
7. MACIEJEWSKI, W.—KALININ, D.—ZAJCHOWSKI, J.: The Plan in an Econometric Model of a Socialist Economy. Paper presented at the III. International Symposium „Models and Forecasts 76”. Jachranka, 1976.
8. RÓZSA PÁL: Lineáris algebra és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976. 685 o.
9. THEIL, H.: Principles of Econometrics. J. Wiley et Sons Inc., New York. 1971. 736 p.
10. Prognostické modely národného hospodárstva—krátkodobé. Vyskumné Vypoctovy Stredisko, Bratislava, 1973. 269 + 73 p.
11. DUESENBERY—FROM—KLEIN—KUH, eds.: The Brookings Quarterly Econometric Model of the United States. North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1965. 776 p.

A METHOD OF THE COMBINATION OF YEARLY AND QUARTERLY ECONOMETRIC MODELS

Accelerating processes going on in external conditions of the national economy as well as the increase of the operative character and efficiency of economic regulation require the analysis and forecast of processes within one year. Therefore, the elaboration of quarterly econometric models is justified. However, since the sphere of quarterly data is much nar-

rower than that of the yearly ones — following from the basically yearly system of statistics — it is necessary to utilize also yearly data and models based on them, respectively, when elaborating quarterly models.

In this paper a method is presented how quarterly models can be constructed starting from yearly models and making use of their additional information. A simple case of disaggregation in time is reviewed, then a so called fictive quarterly model, derived mechanically from the yearly one, and its statistical characteristics are established. For the estimation of the actual quarterly model two procedures are presented: the simpler and more transparent one is based on restricted least squares, while the more complicated but also more efficient one on generalized least squares. Since both methods — as it is verified also by the numerical example presented — give similar results, the application of the procedure based on restricted least squares can be proposed for making practical computation.

МЕТОД СОЕДИНЕНИЯ ГОДОВЫХ И КВАРТАЛЬНЫХ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Ускоряющиеся процессы, происходящие во внешних условиях народного хозяйства, а также усиление оперативности и эффективности экономического регулирования все больше требуют анализа и прогнозирования процессов, происходящих в течение одного года. Поэтому разработка квартальных экономических моделей является обоснованной. Однако поскольку круг квартальных данных — вследствие, как правило, годовой системы статистики — является гораздо более узким, чем годовых, для разработки квартальных моделей возникает необходимость в использовании годовых данных, а также моделей, основанных на них.

В статье излагается метод составления квартальных моделей на основе годовых моделей и с использованием содержащейся в них дополнительной информации. Рассматривается простой случай временного расчленения, а затем описывается механически выводимая из годовой модели т. н. фиктивная квартальная модель и ее статистические особенности. Для оценки фактической квартальной модели дается два метода: более простая и более обозримая модель основана на методе ограниченных наименьших квадратов, а более сложная, но в то же время и более эффективная — на методе обобщенных наименьших квадратов. Поскольку эти два метода, как это подтверждает и приведенный числовой пример, дают сходные результаты, для проведения практических расчетов может быть рекомендован метод, основанный на ограниченных наименьших квадратах.

Keresleti modellek számszerűsítése idősoros adatok alapján

1. Bevezetés

A fogyasztói árpolitika megalapozására irányuló különböző számítások [1], [2] keretében kísérletet folytattunk kétféle olyan keresleti modellel, amelyeket az 1960-tól 1974-ig terjedő idősorok adatai alapján számszerűsítettünk. Ez a két modell az ún. konstans elaszticitású modell, amelyet ebben a formában *Houthakker* [3] használt, és a lakosság kiadásainak *Stone*-féle lineáris modellje [4], [5]. Mindkét modellel a lakosság fogyasztásának erősen aggregált vizsgálatát végeztük összehasonlítható adatbázis alapján, ökonometriai módszerekkel.

A keresleti modellek általában a fogyasztási kiadások összetételét elemzik. Ezekkel a modellekkel meghatározott fogyasztási szinten (szinteken) azt vizsgáljuk, hogy a lakosság milyen kiadási tételekre fordítja jövedelmét. Ezért e modellek egyenletei mindig bizonyos „strukturális” rendszert alkotnak, amelyeknek változóit a fogyasztási struktúra összefüggő tételei alkotják. Ezek a modellek tipikusan jövedelem- és árelaszticitást meghatározó függvények, hiszen segítségükkel azt vizsgáljuk, hogy a fogyasztó hogyan osztja meg jövedelmét a „piacon” meghatározott árral rendelkező áruk (termékek és szolgáltatások) között.

A keresleti függvények ökonometriai, matematikai megfogalmazásában elég nagy a változatosság. A legegyszerűbb formák minden *a priori* információ nélkül, a valamely cikk iránt megnyilvánuló keresletet a jövedelem és az illető cikk árának loglineáris függvényeként írják fel. Az ily módon becsült függvények egymástól függetlenek, konstans jövedelem-, ill. saját árelaszticitás becslésére alkalmasak. Ahhoz, hogy kereszt-árelaszticitások is becsülhetők legyenek, a modellek olyan specifikációjára van szükség, amelyekben felhasználják a közgazdasági elmélet *a priori* információit. Feltételezik, hogy a fogyasztó azt a vásárlási struktúrát választja, amely maximálisan megfelel számára, ezért hasznossági függvény maximalizálásából vezetik le a keresleti modelleket. E két véglet között még sokféle — az elmélet követelményeinek is részben, s az egyszerűségnek is részben eleget tevő — keresleti függvény ismeretes. A keresleti függvényekkel foglalkozók közül *Houthakker*, *Taylor*, *Stone*, *Deaton*, *Barten*, *Theil* és *Phlips* nevét emeljük ki ([3]—[5], [7]—[10]).

Az általunk kiválasztott két modell a keresleti modellek két különböző, de jellemző típusát képviseli. Míg a konstans elaszticitású modell különleges elméleti háttér nélküli, különálló egyenleteket tartalmazó, egyszerű loglineáris modell, a kiadások *Stone*-féle modellje hasznossági függvény maximalizálásán alapuló, összefüggő keresleti egyenletekből álló modell, amely változóiban lineáris, de paraméterei vonatkozásában nem lineáris.

A cikkben a két modell elméleti tulajdonságait és alkalmazásukat ismertetjük. Eredményeinket a különböző módszerekkel számított elaszticitások össze-

hasonlításával értékeljük, viszonylag rövidebben tárgyalva a belőlük levonható közgazdasági következtetéseket, amelyekkel részletesen a [2] sz. forrás foglalkozik. A következő 2. pontban bemutatjuk a kétféle modellt, s ismertetjük főbb tulajdonságait. A 3. részben a felhasznált adatbázist ismertetjük, majd a 4. rész a becslési módszerekkel foglalkozik. A modellek becslési eredményeit az 5. pont, a becslült jövedelem-, és árugalmasságokat pedig a 6., illetve a 7. pont tartalmazza.

2. A felhasznált modellek

2.1. *A konstans elasticitású modell*

A konstans elasticitású modellben az i -edik cikkesoportból fogyasztott mennyiséget az összkiadásra fordított jövedelem és az i -edik cikkesoport árának függvényeként fejezzük ki:

$$\log q_i = \alpha_i + \eta_i \log (y/p) + \delta_i \log (p_i/p) + u_i,$$

ahol:

q_i — az i -edik cikkesoportból fogyasztott mennyiség (itt: változatlan áras fogyasztás),

p_i — az i -edik cikkesoport fogyasztói ára (itt: az i -edik cikkesoport fogyasztói árindexe),

$y = \sum_i p_i q_i$, az összkiadásra fordított jövedelem,

p — az általános fogyasztói árindex,

u_i — a függvény véletlen tényezője,

α_i , η_i , és δ_i paraméterek.

A teljes modell a vizsgált fogyasztási cikkek, ill. cikkesoportok számának megfelelően ($i = 1, 2, \dots, n$.) n db ilyen egyenletet tartalmaz, amelyek között semmiféle kapcsolatnak nem kell lennie. Esetünkben csak annyi kapcsolat volt az egyenletek között, amennyit a felhasznált adatok tartalmaztak, az $y = \sum q_i p_i$ összefüggés révén. (Mivel egy teljes keresleti struktúrát vizsgálunk mindkét modellünkkel.)

A modell η_i paraméterei az i -edik cikk(csoport) jövedelemelaszticitásai, mivel egyszázalékos jövedelemváltozás y -ban, konstans árak mellett, a p_i/p változót nem érintve, éppen egyszázalékos változást okoz y/p változóban.

Nem ez a helyzet az árelaszticitásnál. A p_i ár egységnyi logaritmikus változása ugyanis megváltoztatja a függvény mindkét változóját: y/p -t a p változó révén, p_i/p -t pedig mind p_i , mind p révén. Ezért az árelaszticitás számításánál a következőképpen járunk el. Ha $w_i = p_i q_i / y$ -nal jelöljük az i -edik cikk(csoport) arányát az összkiadásban, és feltételezzük, hogy p -t a p_j értékekből a w_j súlyok felhasználásával nyerjük, akkor feltételezhetjük, hogy p_i egységnyi logaritmikus változása ($-w_i$)-nyi logaritmikus változást okoz y/p -ben, és $(1 - w_i)$ -nyit p_i/p -ben. Ezért az e_{ii} saját árelaszticitást a következőképpen írhatjuk:

$$e_{ii} = -w_i \eta_i + (1 - w_i) \delta_i = \delta_i - (\eta_i + \delta_i) w_i.$$

Az e_{ii} árelaszticitás mellett kiszámíthatjuk az e_{ii}^* kompenzált árelaszticitást is, amikor p_i változása mellett a jövedelem is megváltozik olyan irányban és úgy, hogy ellensúlyozza az árváltozást. Belátható, hogy ilyenkor a $(-w_i \eta_i)$ tag nullává válik, ezért:

$$e_{ii}^* = (1 - w_i) \delta_i.$$

Összefoglalva a konstans elaszticitású modell tulajdonságait elmondhatjuk, hogy az hasznosságelméleti háttér nélküli, különálló egyenleteket tartalmazó modell, amely a jövedelem- és a saját árelaszticitások számszerűsítésére alkalmas. A klasszikus keresletelmélet általános kikötései (lásd a 2.2. pontban) közül elméletileg egyik sem teljesül a konstans elaszticitású modellre, legfeljebb a gyakorlatban approximativusan. Ez pl. azt jelenti, hogy a rugalmasságok előjelére nézve a modell nem tartalmaz eleve kikötéseket, de a gyakorlatban a becsült mutatószámok túlnyomó részére teljesülnek az elméletileg elvárt helyes előjelek.

Így a modell *előnyei* között egyszerűsége mellett azt a tulajdonságát is említhetjük, hogy nem tartalmaz elméletileg eleve eldöntött premisszákat, de alkalmazása révén alátámasztja vagy éppen kérdésessé teszi azokat. (Ezért is alkalmaztuk a Stone-modell mellett párhuzamosan.) *Hátrányai* között említjük, hogy semmit sem mond a keresztáthatásokról, és nem képez olyan komplett rendszert, amilyenre bizonyos alkalmazásokkor (pl. egy népgazdasági modell keretében, vagy előrejelzés céljára) szükség lehet.

2.2. A Stone-modell. A lakosság kiadásainak lineáris modellje

Az összefüggő egyenleteket tartalmazó keresleti modellek jellemző, s igen gyakran alkalmazott fajtája a lakosság kiadásainak lineáris rendszere. Ezt a modellt *Stone*-modellnek is nevezik, mivel R. *Stone* alkalmazta először az Egyesült Királyság fogyasztói kiadásainak vizsgálatára [4]. Azóta számos országban alkalmazták, sőt számításainkat megelőzve, vagy azzal egyidőben *Éltető Ödön* [12], *Enyedi József* [13] és *Simon András* [14] hazai adatokkal is végzett számításokat a *Stone*-modellel.

A modell elméleti hátterét az ún. *Stone–Geary*-féle hasznossági függvény képezi. E függvény maximalizálása lényegében és a fogyasztó viselkedésére vonatkoztatva azt fejezi ki, hogy a fogyasztó a legszükségesebb javak megvásárlása után fennmaradó többletjövedelmét olyan árucikkekre fordítja, amelyek maximálisan hasznosak számára. A hasznossági függvény maximalizálását két feltétel mellett végezzük. Az egyik az ún. kiadási korlát: $y = \sum_i p_i q_i$;

a másik pedig az a feltételezés, hogy a jövedelem a „szükséges” vagy „alap”-jövedelem felett van, vagyis hogy létezik az ún. többletjövedelem:

$$y > \sum_i p_i \gamma_i.$$

Ha e feltételek mellett végezzük a hasznossági függvény maximalizálását, olyan keresleti függvényeket nyerünk, amelyekre teljesülnek a keresletelméletnek azok az alapvető és általános feltételei, amelyek a fogyasztó (átlagfogyasztó) ésszerű magatartását kívánják jellemezni. Röviden] vázoljuk e feltételek (tulajdonságok) lényegét:

1. Additivitás vagy aggregáció:

A különböző kiadási csoportok összege megegyezik az összkiadással. Ezt a feltételt általában az adatok konstrukciójával biztosítjuk. Így a modell jövedelemváltozója igazából nem jövedelem, hanem csak az elköltött jövedelem. A modell feladata ennek az elköltött jövedelemnek a különböző irányok szerinti szétoztása, elemzése, s ennek érdekében eltekint a megtakarítások vizsgálatától.

2. Homogenitás:

Ez a tulajdonság lényegében azt jelenti, hogy a jövedelemben és az összes árban bekövetkező arányos változás nem okoz semmilyen változást a fogyasztás szerkezetében.

3. Szimmetria:

A helyettesítési mátrixnak szimmetrikusnak kell lennie. A kompenzált kereszt-árhatásoknak meg kell egyezniük, függetlenül attól, hogy a kompenzáció az i -edik vagy a j -edik cikkesoport arányos árváltozását hivatott kiegyenlíteni. Ezt a feltételt szokás a fogyasztó választási konzisztenciájának is nevezni.

4. Negativitás:

A helyettesítési mátrix negatív szemidefinit. Ez a feltétel a hasznossági függvény maximalizálásából következik és lényegében azt jelenti, hogy azoknak az árucikkeknek a fogyasztása csökken, amelyeknek az ára nő.

E négy tulajdonság képezi a modell elméleti hátterét. Bár ezek elsősorban azt a célt szolgálják, hogy a fogyasztó (azaz a vizsgált átlagfogyasztó) viselkedésének leírását ésszerű keretek közé szorítsák, mint a későbbiek során látni fogjuk, a modell fogyatékoságai is éppen e feltételek viszonylagos szigorúságából valamint a modell linearitásából fakadnak.

A hasznossági függvény maximalizálása a következő n db keresleti függvényből álló rendszerhez vezet:

$$v_i = p_i \gamma_i + \beta_i (y - \sum_j p_j \gamma_j) \quad (i = 1, \dots, n),$$

ahol:

v_i — az i -edik cikkesoportha fordított kiadásokat,

p_i — az i -edik cikkesoport árát,

y — pedig, az összkiadásra fordított jövedelmet jelenti.

A β_i és γ_i paraméterek értelmezésére vizsgáljuk meg közelebbről a függvényt. Adott y jövedelem mellett a fogyasztó először a minimálisan szükséges mennyiségeket, γ_j -ket vásárolja meg, ami összesen $\sum_j p_j \gamma_j$ -t köt le a jövedelméből.

A $\sum_j p_j \gamma_j$ -t ezért „szükséges vagy alapjövedelemnek” nevezzük. A fennmaradó jövedelem a többletjövedelem, amelyet a fogyasztó β_i arányok szerint fordít a különböző fogyasztási javakra. A β_i arányokat marginális kiadási arányoknak szokás nevezni. A modellben a β_i -k 0 és 1 közé esnek és összegük 1.

Újabb jelöléseket bevezetve a modell a következő egyszerű formára hozható:

$$w_i = (1 - |\varphi|)w_i^* + |\varphi|\beta_i \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ahol:

$$w_i = v_i/y \text{ kiadási arány;}$$

$$w_i^* = p_i \gamma_i / \sum_j p_j \gamma_j \text{ kiadási arány az alapjövedelmen belül;}$$

$$\varphi = (y - \sum_j p_j \gamma_j)/y \text{ a többletjövedelem aránya az összjövedelmen belül.}$$

A w_i kiadási arány tehát súlyozott átlaga az alapjövedelmen belüli kiadási arányoknak (a w_i^* -knek) és a β_i marginális kiadási arányoknak. Súlyként az alap- és többletjövedelem megoszlási súlyai szerepelnek.

Itt jegyezzük meg, hogy a φ -mutató, a többletjövedelem aránya bizonyos jóléti mutatóként, a realjövedelem mérőszámaként is felfogható. E mutató negatív reciprok értéke éppen egyenlő a pénz flexibilitásának *Theil*-nél [10], ill. *Frischné* [11] is szereplő mutatójával.

A *Stone*-modellből származtatott jövedelem- és ár rugalmasságok a következők:

$$\text{jövedelemrugalmasság} \quad e_i = \beta_i/w_i,$$

$$\text{nem kompenzált} \quad e_{ii} = -1 + (1 - \beta_i) \gamma_i/q_i,$$

$$\text{nem kompenzált} \quad e_{ij} = -\beta_i p_j \gamma_j / p_i q_i \quad j \neq i,$$

$$\text{kompenzált} \quad e_i^* = -e_i(1 - \beta_i)\varphi,$$

$$\text{kompenzált} \quad e_{ij}^* = e_i \beta_j \varphi, \quad j \neq i.$$

Összefoglalva a *Stone*-modell tulajdonságait, *előnyös tulajdonságként* a modell jellegét, a kereszt-árhatások számszerűsítésének lehetőségét és az elméleti alátámasztást említjük. A komplett rendszer előnye teljesen kézenfekvő, hiszen a fogyasztási struktúra egyes tételei is összefüggő rendszert alkotnak, az egyes cikkek (vagy cikkesoportok) fogyasztására nemcsak az illető cikkek, hanem a többi cikkeknek (vagy cikkesoportoknak) az ára is hat. Ezért az összefüggő egyenleteket tartalmazó komplett rendszer reálisabban tükrözi a valóságot, s így előrejelzésre is alkalmasabb, mint az egyes cikkek (cikkesoportok) fogyasztását elszigetelten vizsgáló függvények. Ennek a tulajdonságnak következménye az is, hogy a modell képes (ha korlátozott mértékben is) a kereszt-árhatások számszerűsítésére. A modell elméleti alátámasztásának megítélésénél nehezebb a helyzetünk. A hasznossági függvények elmélete mellett és ellen több szempont hozható fel. Amennyiben elfogadjuk azt, hogy a fogyasztó magatartását „ésszerű” keretek közé szorító elvek a hazai fogyasztás vizsgálatánál is felhasználhatók, akkor a *Stone*-modell elméleti alátámasztása is előnyös. Kiindulásként mi elfogadtuk ezt az álláspontot, ezért alkalmaztuk a *Stone*-modellt. Úgy gondoljuk, hogy a fogyasztás elemzésében eredményes lehet, ha

minél többféle módszert, és a módszerek mögött meghúzódó elméletet ki próbálunk.

A modell *hátrányos tulajdonságai* közül a leglényegesebbeket emeljük ki, amelyek a modell szigorú feltételeiből erednek. Az egyik a modell linearitása, pontosabban a lineáris Engel-görbe feltételezése. Ennek eredményeként a modellből származó rugalmasságok az idő és a jövedelem függvényében eltorzulnak. Ezért a Stone-modell alkalmazása viszonylag nagy jövedelemváltozások és hosszabb időtáv mellett kérdésessé válik. Ezért ebben a formájában a modellt előrejelzésre sem célszerű alkalmazni.

A modell a fogyasztási cikkek direkt additív hasznosságát tételezi fel. Ebből következően nem veszi figyelembe a negatív jövedelemelaszticitású ún. alsóbbrendű javakat valamint a pozitív árrugalmasságú (*Giffen*-féle) javakat.

A *Stone*-modell felépítésénél fogva erős összefüggést tételez fel a jövedelem- és árhatások között. E tulajdonság annyiban mindenképpen hátrányos, hogy a jövedelemrugalmasságok becslésénél elkövetett hibák halmozottan jelentkeznek az ár-, és méginkább a kereszt-árrugalmasságok számszerűsítésében.

Végül megemlítjük, hogy a *Stone*-modell hátrányos tulajdonságainak leküzdésére, ill. enyhítésére a modell újabb és újabb változatait dolgozták és dolgozzák ki. Az első módosított változat magának *Stone*-nak a nevéhez fűződik, aki a modell dinamikus változataként trendtényezőt építve a paraméterekbe, azokat az időtől függővé tette [6]. Ugyancsak hasonló céllal, de más eszközöket is felhasználva dolgozta ki a modell különböző variánsait *Deaton* [7] és *Phlips* [8] is.

3. A felhasznált adatbázis

Idősoros adatokon alapuló modelljeinket, a konstans elaszticitású modellt és a *Stone*-modellt azonos adatbázison számszerűsítettük. A kiinduló adatokat és az adatokkal kapcsolatos problémákat részletesen tárgyalja az [1] sz. forrás. Itt csak az adatbázis fő jellemzőit ismertetjük.

Mindkét modellt az *1960-tól 1974-ig terjedő tizenöt éves időszak* alapján a teljes népességre és négy társadalmi rétegre számszerűsítettük. Ezek az idősorok a teljes körű fogyasztási statisztikán [15], valamint a háztartás-statisztikai felméréseknek a Statisztikai Évkönyvekben [16] közölt összefoglaló adatain alapulnak.

A fogyasztás *cikkcsoportos* bontása is azonos a két modellnél. Hét cikkcsoportos bontást alkalmaztunk. Ezek: az élelmiszerek, az élvezeti cikkek, a ruházati cikkek, a fűtés és háztartási energia, a tartós fogyasztási cikkek, az egyéb iparcikkek és a szolgáltatások. A modellekkel a személyes rendelkezésű jövedelemből származó fogyasztást: a vásárolt és saját termelésű fogyasztást együtt vizsgáltuk.

A *jövedelmet* az összefogyasztással mértük. Erre a *Stone*-modell egyik feltétele miatt volt szükség. (Lásd a 2.2. pontban az $y = \sum_j q_j p_j$ feltételt.)

A számításoknál használt *áridexeket* szintén az idézett KSH kiadványokból vettük. Ezek a kiadványok közlik az összlakosság és a négy társadalmi réteg áridexeit a vizsgált hét fogyasztási cikkcsoport bontásában. (Részen ezért is választottuk ezt a cikkcsoportos bontást, szemben a rendeltetés szerinti kategóriákkal.)

Megemlítünk néhány problémát az adatokkal kapcsolatban. Az egyik probléma a saját termelést is magában foglaló fogyasztás vizsgálata szemben a vásá-

rolt fogyasztással. Az illesztett modelleket, különösen a *Stone*-féle modellt, eredetileg a lakosság kiadásaira vonatkoztatták. A modell egyes paraméterei, pl. az alapfogyasztások mennyisége viszont nehezen értelmezhető a saját termelésű fogyasztás nélkül. Hiszen így pl. az a helyzet állana elő, hogy a parasztság alapfogyasztása élelmiszerből lényegesen alacsonyabb lenne, mint pl. a munkásoké. Ugyanakkor kérdéses, hogy a saját termelésű fogyasztás mennyire függ a jövedelem-, és árviszonyoktól. Nyilván nem független azoktól, de a hatások másmilyenek, mint a vásárolt fogyasztás esetében. Mindenesetre érvek szólnak a vásárolt fogyasztási adatokra külön illesztett modellek vizsgálata mellett.

Problémát jelenthet a jövedelem = összkiadás feltételezés is. Hasznosnak tartjuk azokat az új modellezési kísérleteket [20], amelyek tényleges, sőt dinamikus jövedelemváltozókat alkalmaznak a *Stone*-modellben.

A fogyasztási cikkszoportok homogenitásának szempontját figyelembe véve, célszerűnek látszik más fogyasztási cikkszoportos bontás, pontosabban a rendeltetés szerinti javak vizsgálata is.

Végül említjük a legfontosabb problémát, azt, hogy a vizsgált háztartás-statisztikai minta nem kellően reprezentatív. Ezért az összlakosság fogyasztása nem tekinthető úgy, mint a rétegek fogyasztásának az átlaga, mivel a megfigyelt mintában nincsen (és teljesen nem is lehet) képviselve minden jövedelem-kategória. A számítási kísérlet időpontjában azonban ez volt az egyetlen lehetőségünk a társadalmi rétegek szerinti vizsgálatra. Szükséges lesz a számítások megismétlése az új és jobb háztartás-statisztikai adatfelvétel eredményeit felhasználva.

4. A modellek becslése

Mivel a konstans elaszticitású modell egymástól független loglineáris egyenletekből álló modell, a *Stone*-modell viszont bonyolultabb, paramétereiben nem lineáris és összefüggő regressziós egyenleteket tartalmazó modell, csak az utóbbi becslés igényel bővebb tárgyalást. A konstans elaszticitású modell paramétereit a klasszikus legkisebb négyzetek módszerével becsültük. A *Stone*-modell paramétereit is a legkisebb négyzetek elve alapján becsültük egy olyan iterációs eljárással, amelyet *Stone* javasolt a modell kidolgozásakor [5]. Bár ez a becslési eljárás az azóta kidolgozott módszerekhez képest egyszerűnek tekinthető, nem annyira közismert, hogy tárgyalásától eltekinthetnénk.

Az n egyenletből álló rendszerünk tehát a következő:

$$v_i(t) = p_i(t) \gamma_i + [y(t) - \sum_j p_j(t) \gamma_j] \beta_i + u_i(t).$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad t = 1, 2, \dots, T)$$

Az egyenletek számszerűsítése szempontjából lényeges az $u_i(t)$ sztochasztikus tag specifikálása, eloszlási tulajdonságainak előírása.

Stone eredeti javaslata szerint feltételezzük, hogy az $u_i(t)$ változó várható értéke nulla és varianciája konstans. Majd úgy járunk el, hogy a sztochasztikus eltéréseket a legkisebb négyzetek elvének alapján az összes egyenletre és az összes megfigyelésre nézve minimalizáljuk. Így γ_i és β_i becsléseként azokat az értékeket fogadjuk el, amelyekre nézve

$$\sum_i \sum_t [u_i(t)]^2$$

minimális értéket vesz fel. A módszer kihasználja azt a tulajdonságot, hogy a modell adott β_i paraméterek mellett a γ_i paraméterekre, illetve adott γ_i -k mellett a β_i -kre nézve lineáris.

Írjuk fel a modellt a következő formában:

$$\hat{p}q = \beta y + Bp,$$

ahol

$$B = (E - \beta_{i'}) \hat{\gamma}$$

$\hat{p}$ és $\hat{\gamma}$ olyan diagonális mátrixokat jelöl, amelyeknek diagonális elemeit a p_i , ill. γ_i elemek alkotják;

E megfelelő méretű egységmátrixot,

i' pedig összegező sorvektort jelöl.

Miután induló értékeket vettünk fel a β_i paraméterekre (esetünkben $\beta_i^{(0)} = \bar{w}_i$), a modellt olyan formában írjuk fel, hogy abban csak a γ_i paraméterek legyenek ismeretlenek:

$$m_t = X_t \gamma + u_t^*,$$

$$\text{ahol } m_t = \hat{p}_t q_t - \beta^{(0)} y_t,$$

$$X_t = (E - \beta^{(0)} i') \hat{p}_t.$$

Majd képezzük az m vektort és az X mátrixot:

$$m = \{m_1, \dots, m_n\}',$$

$$X = \{X_1, \dots, X_n\}.$$

Ezekután a γ paramétervektor becslése:

$$\gamma^{(0)} = (X'X)^{-1}X'm.$$

Az első lépésben becsült $\gamma^{(0)}$ paramétereket felhasználva a modellt olyan formában írhatjuk fel, ahol csak a β_i paraméterek az ismeretlenek:

$$h_t = Z_t \beta + u_t^{**},$$

$$\text{ahol } h_t = \hat{p}_t(q_t - \gamma^{(0)}),$$

$$Z_t = (y_t - \gamma^{(0)'p_t}) E.$$

Majd képezzük a h vektort és a Z mátrixot:

$$h = \{h_1, \dots, h_n\},$$

$$Z = \{Z_1, \dots, Z_n\}.$$

A β paraméter újabb becslése:

$$\beta^{(1)} = (Z'Z)^{-1}Z'h.$$

A $\beta^{(1)}$ újabb becslést felhasználva, változtatva ismételjük az eljárást addig, amíg a paraméterértékek a kívánt pontosságot el nem érik. Számításaink során maximum 70 iterációs lépéssel sikerült a paramétereket 1%-os pontossággal megközelítenünk. Az utolsó két iterációs lépés alapján becsültük a paraméterek standard hibáját és kiszámítottuk az illeszkedés jószágáról tájékoztató R^2 determinációs együtthatót is.

A Stone-modell széles körű alkalmazása ösztönzőleg hatott újabb és hatékonyabb becslési módszerek kialakítására. Ezek az újabb módszerek főként a modell sztochasztikus tagjaira tett feltételezésekben különböznek. Míg ugyanis az általunk is alkalmazott módszer feltételezi, hogy a sztochasztikus tag várható értéke nulla és konstans varianciájú, könnyen belátható, hogy az összefüggő egyenletrendszer reziduumaikra nem teljesülnek ezek a feltételek. Sem a függetlenség (autokorreláció mentesség), sem a homoszkedaszticitás nem áll fenn a Stone-modellnél. Ez a körülmény a módszerrel származtatott paraméterek becslésének hatékonyságát rontja, ezért az újabb módszereknél más-képpen specifikálták a sztochasztikus tag tulajdonságait. A reziduumok kovariancia-mátrixáról nem feltételezik azt, hogy az az időtől független diagonális mátrix, hanem csak azt kötik ki, hogy nem negatív definit legyen. E feltétel mellett a paraméterek meghatározására különböző eljárások ismeretesek, amelyek közül a Zellner [18] által általánosított módszert használják a leggyakrabban. Parks [17] kidolgozta a modell paramétereinek a maximális esélyesség elvén alapuló becslését. Megemlítjük még Pollak és Wales [19] nevét, akik egy speciális becslési módszert dolgoztak ki a kiadások lineáris modelljére.

5. A modellek becslési eredményei

5.1. A konstans elaszticitású modell becslési eredményei

Minden rétegre és minden árucsoportra kiszámítottuk az illeszkedés szorosságát kifejező determinációs együtthatót. Az egyes keresleti egyenletekhez tartozó determinációs együtthatók négyzetgyökeit — a többszörös korrelációs együtthatókat — az 1. táblázatban közöljük.

1. táblázat

A konstans elaszticitású modell többszörös korrelációs együtthatói

	Élelmi- szerek	Élvezeti cikkek	Ruházati cikkek	Fűtés, bázt. energ.	Tartós fogy. cikkek	Egyéb ipar- cikkek	Szolgál- tatások
Össztlakosság	0,998	0,997	0,989	0,990	0,997	0,993	0,993
Munkások	0,997	0,996	0,996	0,996	0,982	0,828	0,970
Szellemiek	0,919	0,913	0,933	0,938	0,936	0,782	0,932
Parasztság	0,994	0,986	0,998	0,996	0,994	0,984	0,985
Kettős jövedelműek	0,996	0,986	0,996	0,995	0,989	0,992	0,982

A számok arról tanúskodnak, hogy a modell egyenletei minden esetben jól, sőt az esetek többségében *nagyjából jól közelítik* a fogyasztási adatokat. Az össztlakosságra vonatkozó értékek gyakorlatilag minden esetben eléri vagy meghaladják a 0,99-et. A társadalmi rétegekre vonatkozó számok is általában 0,98 felett vannak, tehát szoros illeszkedést mutatnak. A szellemiek esetében viszont szisztematikusan alacsonyabb, 0,91–0,93 körüli értékeket kaptunk. E réteg egyéb iparcikkvásárlása esetén pedig a determinációs együttható négyzetgyökének értéke már 0,8 alá eszik. Ugyanakkor a munkások egyéb ipar-

cikk vásárlásához tartozó determinációs együttható értéke is viszonylag alacsony, alig magasabb 0,8-nál. Összességében azonban azt mondhatjuk, hogy a konstans elaszticitású modellel a fogyasztás jó közelítését kaptuk.

Áttérve a *paraméterekre*, illetve a paraméterek *szignifikancia-vizsgálatára*, mindenekelőtt emlékeztetünk arra, hogy az η_i jövedelemparaméterek számított értékei azonosak a később tárgyalandó jövedelemrugalmasságokkal. Nem foglalkozunk itt a δ_i árparaméterek számított értékeivel sem, bár azokat az árugalmasságok meghatározása érdekében még transzformálni kell. Az α_i konstans paraméterek az elaszticitásokat nem befolyásolják, ezért számított értékeiket nem is közöljük. A *jövedelem- és árparamétereket a 2. táblázatban* foglaltuk össze. A számított paraméterértékek alatt zárójelben feltüntetjük a hozzájuk tartozó *t* arányokat.

2. táblázat

A konstans elaszticitású modell számított paraméterei a hozzájuk tartozó *t* arányokkal

	Élelmi- szerek	Élvezeti cikkek	Ruházati cikkek	Fűtés, házt. energia	Tartós fogy. cikkek	Egyéb ipar- cikkek	Szolgálta- tások
	μ_i jövedelemparaméterek						
Összlakosság	0,57 (44,95)	1,34 (27,53)	0,86 (17,13)	1,25 (16,51)	1,87 (7,69)	1,66 (14,39)	1,12 (13,32)
Munkások	0,55 (38,97)	1,77 (27,69)	1,08 (24,57)	1,15 (24,74)	1,09 (2,78)	1,21 (2,97)	1,44 (7,45)
Szellemiek	0,36 (7,07)	1,12 (5,85)	0,68 (5,45)	0,72 (4,86)	0,50 (1,61)	0,87 (2,62)	0,59 (3,52)
Paraszság	0,69 (31,32)	1,12 (11,73)	0,91 (59,05)	1,01 (35,30)	2,35 (10,34)	1,44 (15,44)	1,60 (7,92)
Kettős jöv.	0,71 (38,02)	1,15 (11,98)	0,96 (38,56)	0,96 (28,73)	1,88 (7,47)	1,21 (19,56)	1,44 (7,67)
	δ_i árparaméterek						
Összlakosság	-0,21 (1,67)	-0,64 (2,82)	-0,13 (0,44)	-0,46 (1,94)	-1,75 (1,18)	-0,04 (0,05)	-0,76 (1,76)
Munkások	-0,19 (1,44)	-1,11 (4,06)	-0,51 (2,64)	-0,64 (5,12)	-3,33 (1,90)	1,06 (0,57)	-0,70 (0,65)
Szellemiek	0,46 (0,82)	-0,86 (0,80)	-1,15 (1,91)	-1,16 (2,61)	-4,46 (2,59)	-0,12 (0,07)	2,17 (2,37)
Paraszság	0,12 (0,45)	-0,93 (2,22)	0,60 (3,24)	-0,43 (3,99)	0,31 (0,14)	-0,20 (0,12)	-0,72 (0,78)
Kettős jöv.	-0,09 (0,41)	-0,78 (1,90)	0,20 (0,72)	-0,69 (5,93)	-0,85 (0,33)	-0,51 (0,59)	-0,98 (1,01)

A paraméterek becslési eredményei közül a *jövedelemparaméterek* becslései kifejezetten jók. E paraméterek előjele minden esetben pozitív, a *t*-arányok értékei magasak, azaz a becslések standard hibái kicsik. A *t*-próba értékek egyetlen eset — a szellemiek tartós cikk fogyasztása — kivételével nagyobbak a 90 %-os valószínűségi szinthez tartozó 1,78-as értéknél, ami azt jelenti, hogy már 90 %-os valószínűségi szinten állíthatjuk azt, hogy a jövedelemegyütthatók valóságos értékei különböznek zérustól.

Az *árparaméterek* becslési eredményei már kevésbé jók. A táblázatból látható, hogy bár az áregyütthatók nagy többsége az árváltozás természetes hatását tükrözve negatívnak adódott, találhatunk közöttük néhány pozitív értéket is. Eredményeink ebből a szempontból az összlakosság vonatkozásában a legjobbak, aholis minden egyes cikkcsoport keresleti egyenletének árparamétere negatív előjelű. A táblázatból az is kitűnik, hogy a számított *t*-próba értékek nagyságrendnyivel alacsonyabbak a jövedelemparaméterek esetében kapott számoknál. Nagy részük azonban megfelel az ilyen számításokban megszokott szintnek: a *t*-próba értékek többsége egynél nagyobb szám, ami azt jelenti, hogy a paraméterekre kapott becslések szórása kisebb, mint a becsült paraméterérték. Egyedül az egyéb iparcikkek árparaméterét nem sikerült megfelelően becsülnünk egyik mintán sem, amin nem is kell csodálkoznunk, figyelembe véve ennek az árucsoportnak a nagyfokú heterogenitását.

Bár magukkal a számított paraméterértékekkel itt nem foglalkozunk, meg kell említenünk a jövedelemparaméterek és az árparaméterek összefüggéseinek problémáját, amelyet talán a tartós fogyasztási cikkeknel figyelhetünk meg a leghatározottabb formában. Itt a munkások és a szellemiek esetében a jövedelemparaméterekre kaptunk viszonylag alacsony, és az árparaméterekre viszonylag magas értéket, míg ennek a fordítottja mutatkozik meg — még határozottabban — a parasztság és a kettős jövedelműek esetében. Ezt nyilván a tartós fogyasztási cikk vásárlások rétegsajátosságai magyarázzák. Ugyanakkor fel kell hívnunk a figyelmet a multikollinearitás jelenségére is, aminek szerepe feltehetően szintén nem elhanyagolható, bár erre nem végeztünk statisztikai próbákat.

Összegezve a konstans elaszticitású modell becslési eredményeit, megállapíthatjuk, hogy a keresleti egyenletek a *lakosság* fogyasztásának alakulását viszonylag *pontosan* írják le a jövedelem és az árak függvényében. A *rétegekre* számított eredmények pontossága *is kielégítő*, az előjel vagy a megbízhatóság tekintetében problematikus esetek azonban további módszertani és közgazdasági kontroll szükségességére hívják fel a figyelmet.

5.2. A Stone-modell becslési eredményei

A *Stone*-modellre is kiszámítottuk az illeszkedés és a megbízhatóság statisztikai mutatószámait. Ezek közül a többszörös korrelációs együttható értékeit a 3. táblázat tartalmazza.

A számokból jól látható, hogy a *Stone*-modell *szorosan illeszkedik* az adatokhoz: az együtthatók nagy, még a konstans elaszticitású modell értékeinél is

3. táblázat

A *Stone*-modell többszörös korrelációs együtthatói

	Élelmi- szerek	Élvezeti cikkek	Ruházati cikkek	Fűtés, hőzt. energ.	Tartós fogy. cikkek	Egyéb ipar- cikkek	Szolgálta- tások
Össz lakosság	0,997	0,996	0,987	0,984	0,992	0,974	0,998
Munkások	0,997	0,993	0,992	0,992	0,970	0,890	0,981
Szellemiek	0,995	0,959	0,983	0,992	0,968	0,924	0,986
Parasztság	0,984	0,985	0,992	0,992	0,990	0,975	0,985
Kettős jövedel- műek	0,987	0,994	0,993	0,970	0,970	0,985	0,996

nagyobb számok. Az összlakossághoz tartozó mutatószámok 0,97—0,99 feletiek és a rétegekre számított értékek is a fogyasztás jó közelítését mutatják. Viszonylag alacsonyabb számok csak a szellemiek esetében, illetve a tartós fogyasztási és egyéb iparcikkek árucsoportjainál fordulnak elő — itt is inkább a munkásoknál és a szellemieknél —, de a legalacsonyabb érték is eléri a 0,89-et. A Stone-modell tehát statisztikai értelemben jól írja le a fogyasztás alakulását.

A modell *paramétereinek* — az alapfogyasztás γ_i értékeinek és a β_i marginális kiadási arányoknak — számított értékeit a 4. táblázatban foglaltuk össze. A paraméterértékek alatt zárójelben itt is feltüntettük a megfelelő *t*-arányokat. Ez utóbbiak igen nagy számok, még a legkisebb *t*-próba érték is nagyobb 3-nál, de az ennél nagyobb értékek a jellemzőek. Ez azt jelenti, hogy a modell paramétereit statisztikai értelemben pontosak, zérustól szignifikánsan különböznek.

Az *alapfogyasztás* γ_i paramétereivel kapcsolatban emlékeztetünk arra, hogy ezek a $\Sigma p_i \gamma_i$ alapjövedelem, illetve az ebből számítható φ paraméter, azaz a többletjövedelem arányának képzésében játszanak szerepet. Ily módon ezeket az értékeket — mint ahogy az az elaszticitási képletekből kitűnik — végső soron az ár rugalmasságok számításához kell felhasználnunk. A γ_i számított értékeivel itt csak azért foglalkozunk, mert a keresleti függvényeket csak az alapjövedelemnél nagyobb értékekre értelmeztük.

4. táblázat

A Stone-modell számított paramétereit a hozzájuk tartozó *t* arányokkal

	Élelmi- szerek	Élvezeti cikkek	Ruházati cikkek	Fűtés, házt. energia	Tartós fogy. cikkek	Egyéb ipar- cikkek	Szolgálta- tások
Alapfogyasztás értékei, Ft/fő (γ_i paraméterek)							
Összlakosság	4670 (25,68)	1323 (8,98)	1486 (15,38)	363 (9,78)	493 (4,10)	875 (5,95)	1288 (12,29)
Munkások	4132 (16,03)	454 (3,72)	1326 (6,27)	406 (5,03)	630 (3,11)	1051 (6,23)	984 (4,87)
Szellemiek	5314 (19,43)	876 (6,05)	2252 (10,92)	696 (5,90)	1420 (4,60)	1902 (6,08)	2447 (6,86)
Paraszság	6746 (13,31)	1143 (10,68)	1954 (20,28)	913 (8,95)	1402 (5,50)	2008 (7,44)	1304 (7,86)
Kettős jöve- delműek	5485 (11,67)	1025 (8,61)	2100 (8,64)	657 (7,64)	1369 (4,63)	1749 (6,86)	1209 (7,07)
A marginális kiadási arányok (β_i paraméterek)							
Összlakosság	0,22 (75,86)	0,20 (68,97)	0,11 (37,93)	0,04 (13,79)	0,14 (48,28)	0,17 (58,62)	0,13 (44,83)
Munkások	0,22 (59,46)	0,11 (29,73)	0,16 (43,24)	0,06 (16,22)	0,14 (37,84)	0,13 (35,14)	0,18 (48,65)
Szellemiek	0,17 (19,57)	0,08 (9,78)	0,16 (11,96)	0,06 (6,52)	0,16 (17,39)	0,17 (18,48)	0,21 (23,91)
Paraszság	0,31 (75,61)	0,08 (19,51)	0,12 (29,27)	0,06 (14,63)	0,15 (36,59)	0,17 (41,46)	0,11 (26,83)
Kettős jöve- delműek	0,27 (49,09)	0,10 (18,18)	0,14 (25,45)	0,04 (7,27)	0,15 (27,27)	0,15 (27,27)	0,13 (23,64)

Összehasonlítva az alapfogyasztás számított értékeit adatainkkal, azt tapasztaltuk, hogy az összlakosság a különböző árucsoportok vonatkozásában 1960 és 1963 között érte el a becsült alapfogyasztást. A munkások fogyasztása már 1960-ban minden cikkcsoportnál meghaladta a rétegre kapott alapfogyasztási értékeket; a szellemieknél ez csak 1964 és 1966 között következett be. Alapvetően más eredményeket kaptunk a parasztságnál és a kettős jövedelműeknél: a parasztság tényleges fogyasztása csak 1972-ben, a kettős jövedelműeké pedig 1969–1970-ben jutott el a modell által számított alapfogyasztás szintjére. Az összlakosságra valamint a munkás és szellemi rétegekre vonatkozóan tehát a modell a vizsgált intervallum legnagyobb részében racionálisan írja le a fogyasztást és várhatóan reális árugalmassági értékeket ad. Ugyanakkor a parasztságnál és a kettős jövedelműeknél csak az utolsó évek esnek az értelmezési tartományba, ezért e két rétegnél a Stone-modell alapján számított árugalmasságok nem tekinthetők igazán reálisaknak.

A parasztságra és a kettős jövedelműekre kapott nagy alapfogyasztási értékek miatt a többletfogyasztás aránya — a φ értéke — ezeknél a rétegeknél nagyon alacsony. A modell szerint 1974-ben a többletjövedelem a parasztság esetében az összes jövedelemnek mindössze 7%-a és a kettős jövedelműeknél is csak 24%-a. Ugyanakkor az összlakosságnál a többletjövedelem 43%, a munkásoknál 48%, a szellemieknél pedig 34%. Ezek az eltérések az árugalmasságok rétegenkénti nagyságrendjét is meghatározzák: összességükben a munkásokra vonatkozó árugalmasságok lesznek a legmagasabbak és a parasztság árugalmasságai a legalacsonyabbak.

Az ugyancsak a 4. sz. táblázatban található β_i paraméterekre, azaz a marginális kiadási arányokra — a nagy t -próba értékek tanúsága szerint — szintén pontos becsléseket kaptunk. A legkisebb t -arány is 6,52, de a t -próba értékei túlnyomó többségükben tízes nagyságrendű számok.

A marginális kiadási arányok — amelyek alapvetően meghatározzák a jövedelemrugalmasságok értékeit és az árugalmasságokat is befolyásolják — a lakosságnak, illetve az egyes társadalmi rétegeknek a vizsgált időszakban megfigyelhető vásárlási preferenciáit közelítik. Eredményeink szerint a fogyasztók többletjövedelmüket — a tényleges kiadási arányoknak megfelelően — elsősorban élelmiszerekre költik, a legkisebb összeget pedig fűtésre és a háztartási energia vásárlására fordítják. Ettől eltérően viselkedik a modell szerint a szellemiek rétege, akik többletjövedelmük legnagyobb részéből (21%-ából) szolgáltatásokat vesznek igénybe. „Preferencia-rendszerükben” csak ez után következnek az élelmiszerek, melyek részesedése 17%.

Összefoglalva: a Stone-modell eredményeiből az alábbi következtetéseket kell levonnunk. Az összlakosságra, a munkásokra és a szellemiekre számított eredményeink jók, a paraméterek alapján számítható jövedelemrugalmasságokat és árugalmasságokat elfogadhatjuk, statisztikailag megbízhatóknak tekinthetjük. Ugyanakkor a parasztság és a kettős jövedelműek esetében a számított árugalmasságokat már *fenntartással kell kezelnünk*.

6. A modellek alapján számított jövedelemrugalmasságok

A számítási eredmények fontos ellenőrzési lehetősége az, ha egybevetjük a különböző módon számított rugalmassági értékeket, hiszen tulajdonképpen ebből a célból végeztük el számításainkat különböző módszerekkel. Ebben a pontban először megvizsgáljuk a konstans elaszticitású modell alapján számí-

tott jövedelemrugalmasságokat. Ez után sorra vesszük a Stone-moddell alkalmazásával nyert jövedelemrugalmassági értékeket és összevetjük azokat a konstans elaszticitású modell jövedelemelaszticitásaival. — Végül röviden áttekintjük néhány kapitalista országra ugyanezen modellek alapján számított jövedelemrugalmasságokat, összehasonlítva azokat a mi eredményeinkkel.

A konstans elaszticitású modell jövedelemrugalmasságait a Stone-moddell jövedelemrugalmasságaival együtt — az 5. táblázat tartalmazza. Ezek az elasztici-

5. táblázat

A konstans elaszticitású modell és a Stone-moddell alapján számított jövedelemrugalmasságok

	Élelmi- szerek	Élvezeti cikkek	Ruházati cikkek	Fűtés, házt. energ.	Tartós fogy. cikkek	Egyéb ipar- cikkek	Szolgál- tatások
	Összlakosság						
Konstans elaszticitású modell (1960—1974)	0,57	1,34	0,86	1,25	1,87	1,66	1,12
Stone-moddell (1967)	0,55	1,32	0,91	1,17	2,16	1,75	1,07
Stone-moddell (1974)	0,64	1,17	0,91	1,22	1,65	1,46	1,01
	Munkások						
Konstans elaszticitású modell (1960—1974)	0,55	1,77	1,08	1,15	1,09	1,21	1,44
Stone-moddell (1967)	0,54	1,63	1,18	1,19	1,70	1,14	1,39
Stone-moddell (1974)	0,60	1,34	1,10	1,23	1,44	1,11	1,22
	Szellemiek						
Konstans elaszticitású modell (1960—1974)	0,36	1,12	0,68	0,72	0,50	0,87	0,59
Stone-moddell (1967)	0,47	1,26	1,14	1,19	1,71	1,37	1,23
Stone-moddell (1974)	0,48	1,13	1,08	1,28	1,48	1,28	1,10
	Paraszság						
Konstans elaszticitású modell (1960—1974)	0,69	1,12	0,91	1,01	2,35	1,44	1,60
Stone-moddell (1967)	0,66	1,17	0,99	1,00	2,29	1,47	1,41
Stone-moddell (1974)	0,77	0,81	0,93	1,17	1,73	1,28	1,11
	Kettős jövedelműek						
Konstans elaszticitású modell (1960—1974)	0,71	1,15	0,96	0,96	1,88	1,21	1,44
Stone-moddell (1967)	0,64	1,15	0,98	0,86	1,88	1,23	1,50
Stone-moddell (1974)	0,76	1,09	0,94	0,98	1,42	1,14	1,26

tások — különösen az összlakosság esetében — alapján véve megfelelnek az elméleti megfontolások alapján várható értékeknek.

Az élelmiszerek jövedelemrugalmasságai 0,5 körüli értékek; a szellemieké a legalacsonyabb, a munkásoké ennél lényegesen magasabb, a parasztoké és a kettős jövedelműeké pedig még magasabb.

Az élvezeti cikkekre kapott számok 1-nél nagyobbak, amint azt várni lehetett.

Figyelemre méltó a munkások kiugróan magas, továbbá a paraszság és a kettős jövedelműek ennél alacsonyabb értéke. Ez azt mutatja, hogy az élvezeti cikk fogyasztás a paraszti és a kettős foglalkozású népesség körében sokkal nagyobb mértékben a társadalmi csoporthoz tartozás, mint a jövedelmi szín-

vonala által meghatározott, habár természetesen a jövedelmi színvonalnak is nagy a hatása, hiszen a jövedelemrugalmasság 1-nél nagyobb.

A *ruházati cikkek* esetében a munkásság jövedelemrugalmassága 1-nél magasabb, a szellemieké 1-nél lényegesen, a parasztsagé és a kettősjövedelműeké pedig 1-nél valamivel alacsonyabb. Eszerint a rétegek közül elsősorban a munkások töreksenek ruházatkodási színvonaluk javítására, a szellemiek pedig — és ez aligha hihető — legkevésbé. Ugyanez a helyzet a *fűtés és háztartási energia* felhasználása esetében is, ahol a ruházati cikkek jövedelemrugalmasságaival lényegében véve megegyező arányok tapasztalhatók. Ugyanakkor viszont az itt kapott számok meglepően nagyok. Ez nyilván összefügg a lakáshelyzet és lakásfelszereltség — háztartási gépekkel való ellátottság — javulásával. A fűtésre és háztartási energiára kapott jövedelemrugalmasságokat érdemes összevetnünk a *tartós fogyasztási cikkek* elaszticitásaival. A számokból megfigyelhetjük, hogy a főleg falvakban lakó paraszti és kettős jövedelmű réteg fűtés és háztartási energia fogyasztásának viszonylag alacsony jövedelemrugalmassága mellett tartós fogyasztási cikk vásárlásuk elaszticitása magas. Ugyanakkor az inkább városokban lakó munkások magasabb fűtés és háztartási energia rugalmasságához kisebb tartós fogyasztási cikk elaszticitás tartozik. Ez arra utal, hogy a parasztság és a kettős jövedelműek tartós fogyasztási cikk vásárlásaiban nem az energiát fogyasztó háztartási gépek és készülékek, hanem a bútort- és személygépkocsi vásárlás szerepelhetett nagyobb súllyal. A szellemiek eredményeinek ebből a szempontból nyilván a munkásokéhoz kellene közelebb állniuk, ehelyett azonban a tartós fogyasztási cikkekre még a fűtés és háztartási energia számainál is kisebb, irreálisan alacsony jövedelemrugalmasságot kaptunk.

Az *egyéb iparcikkek*nél és a *szolgáltatások*nál a többi cikkesoporthoz hasonlóan a szellemiek rugalmasságai kiugróan alacsonyak. Ezek a differenciák itt sem látszanak reálisnak, különösen az e rétegekre számított értékeknek a többi réteg számaitól való eltéréseinek mértékét tekintve.

Nézzük meg most a *Stone-modell* alapján számított jövedelemrugalmasságokat, melyek — ellentétben a konstans elaszticitású modell jövedelemrugalmasságaival — időben változó értékek. Az 5. táblázatban az 1967-re és az 1974-re, azaz a vizsgált időszak középső és utolsó évére számított elaszticitásokat tüntettük fel. A számokból mindenekelőtt az tűnik ki, hogy azok — különösen az időszak közepén — meglehetősen közel állnak a konstans elaszticitású modell alapján számított értékekhez, de a Stone-modell esetében a jövedelemrugalmasságok rétegenként is és cikkesoportonként is kevésbé szóródnak, lényegesen kiegyensúlyozottabb képet mutatnak. Ennek oka nagyrészt módszerbeli: mivel a Stone-modell összefüggő egyenletekből áll, a cikkesoportokra számított eredményekben bizonyos kiegyenlítődsi tendencia érvényesül.

Az *élelmiszerek* esetében a számított eredmények jellegükben megfelelnek a konstans elaszticitású modell alapján kapott számoknak. Az 1967-es értékek általában egy árnyalatnyival kisebbek a másik modell számainál; az 1974-re számított elaszticitások már minden esetben nagyobbak, mint a konstans elaszticitású modell megfelelő rugalmasságai. Az élelmiszerekével ellentétben, az *élvezeti cikkek* elaszticitásai mind az össztlakosságnál, mind az egyes rétegek-nél csökkenő tendenciát mutatnak. A *ruházati cikkek* ugyancsak csökkenő tendenciájú elaszticitásai közül csupán a szellemiekre számított értékek térnek el jelentősebb mértékben a másik modell eredményeitől, amely itt nagyon alacsony rugalmasságot adott. Nagyjából ugyanez a helyzet a *fűtés és háztartási*

energia esetében is, amelynek rugalmasságai egyébként az élelmiszerekéhez hasonlóan és az összes többi árucsoportétól eltérően a vizsgált időszakban növekedtek. A *tartós fogyasztási cikkek*nél a két modell eredményei között már nagyobb különbségek vannak, különösen a szellemieknél, aholis a Stone-modelllel lényegesen nagyobb jövedelemrugalmasságot kaptunk. Az *egyéb iparcikkek*nél nincsenek nagy differenciák, eltekintve a szellemiektől, aholis — amint ez általános — a Stone-modell 1967-re és 1974-re számított jövedelemrugalmassága egyaránt határozottan nagyobb. Végül, a *szolgáltatások* esetében ismét tapasztalhatjuk a szellemieknél a két modell eredményeinek tendenciózus eltérését.

Összegezve megállapíthatjuk, hogy a Stone-modell eredményei figyelemre méltó mértékben *konzisztensek* a konstans elaszticitású modell alapján számított jövedelemrugalmasságokkal, illetve a *szellemiek esetében korrigálja* a másik modell helyenként irreális eredményeit. Úgy tűnik tehát, hogy a jövedelemrugalmasságokat a fogyasztási szerkezet előreszámítását is lehetővé tevő módon sikerült meghatároznunk.

A továbbiakban megpróbáljuk a konstans elaszticitású modell, illetve a Stone-modell alapján kapott jövedelemrugalmasságokat *összevetni a más országokra* ugyanezen modellekkel számított jövedelemelaszticitásokkal. Ehhez a [21] sz. forrásban található, az OECD 13 európai tagállamára vonatkozó elaszticitásokat használtuk fel, amelyeket az 1948–59. időszak alapján számítottak. A rövidség kedvéért itt a belőlük számított átlagértékeket és a Magyarország-hoz talán leginkább hasonlítható Belgiumra számított rugalmasságokat közöljük. Az árucsoportok közül az élelmiszerek, a ruházati cikkek és a tartós fogyasztási cikkek azok, amelyek hozzávetőleges tartalmi egyezőségük miatt összehasonlíthatók a hazai eredményekkel; a rájuk vonatkozó rugalmasságokat a 6. táblázatban foglaltuk össze. A táblázatban — tájékoztatásul — feltüntettük az egyes országok eredményei közül a legkisebb és a legnagyobb értékeket is.

A számokból kitűnik, hogy az eltérő jövedelemszint, keresleti-kínálati viszonyok stb. ellenére az eredmények hasonlóak. Az élelmiszereknél és a ruházati

6. táblázat

A konstans elaszticitású modell és a Stone-modell alapján különböző országokra számított jövedelemrugalmasságok

	Élelmiszerek	Ruházati cikkek	Tartós fogyasztási cikkek
A konstans elaszticitású modell jövedelemrugalmasságai			
Magyarország	0,57	0,86	1,87
Belgium	0,52	0,87	1,91
OECD országok (átlag)	0,61	0,89	2,02
OECD országok (szélső értékek)	0,12	0,23	1,16
és	1,12	és 1,75	és 3,58
A Stone-modell jövedelemrugalmasságai			
Magyarország	0,64	0,91	1,65
Belgium	0,65	1,01	2,22
OECD országok (átlag)	0,68	0,81	1,98
OECD országok (szélső értékek)	0,38	0,04	0,95
és	1,12	és 1,55	és 3,09

cikkeknel csak minimálisak az eltérések, akár a különböző országok, akár a különböző módszerek vonatkozásában hasonlítjuk össze a rugalmasságokat. A tartós fogyasztási cikkeknel már valamivel nagyobbak az eltérések; úgy tűnik azonban, hogy a különböző országok közötti differenciák nagyobbak, mint a különböző módszerek közötti eltérések. Ez egyébként egészen nyilvánvalóan látszik az itt nem közölt részletes számokból. Mindez megerősíti azt a korábbi megállapításunkat, hogy — legalábbis az összlakosságra vonatkozóan — a jövedelemrugalmasságok a konstans elaszticitású modell és a Stone-modell alapján egyaránt viszonylag jól számszerűsíthetők.

7. A modellek alapján számított árugalmasságok

A két modell árugalmassági eredményei — mint látni fogjuk — meglehetősen eltérőek, és ezek az eltérések sok esetben szisztematikusak is, ezért itt sokkal nehezebb annak az eldöntése, hogy melyik számítási eredményeket kell megbízhatóbbaknak tekintenünk. E cikk keretében ezt meg sem kíséreljük; itt csupán bemutatjuk az árugalmasságok számított értékeit és röviden összefoglaljuk azok jellegzetességeit. Először a modellek alapján számított saját árugalmasságokkal, ezen belül azok nem kompenzált és kompenzált változataival, majd a Stone-modell felhasználásával nyert kereszt-árugalmasságokkal foglalkozunk.

A konstans elaszticitású modell és a Stone-modell alapján számított *nem kompenzált saját árugalmasságokat* a 7. táblázat tartalmazza.

A táblázatból láthatjuk, hogy a *konstans elaszticitású modell* nem kompenzált saját árugalmasságai — mint ahogy erről már az ár-paraméterek tárgyalásánál is szó volt — többségükben negatív előjelűek, a 35 számított érték közül 6 azonban pozitív. Az elaszticitások mind az egyes cikkesoportok, mind pedig a társadalmi rétegek vonatkozásában *erősen szóródnak*.

A *cikkesoportok* rugalmasságainak eltérései az összlakosság esetében nagyrészt realisaknak tűnnek, a rétegeknél tapasztalt differenciák már kevésbé. A ruházati cikkekre több esetben meglepően alacsony árelaszticitásokat kapunk, a fűtés és háztartási energia rugalmasságai pedig minden esetben ennél magasabb értékek. Ami az egyes *társadalmi csoportok* árugalmasságait illeti, az egyes cikkesoportokon belüli differenciák az eltérések irányát tekintve elfogadhatóknak látszanak, az eltérések mértéke viszont már nem.

A *Stone-modell* árugalmasságai sokkal alacsonyabbak, mint a konstans elaszticitású modelléi. Itt az összes szám átlaga mindössze $-0,42$, szemben a másik modell árelaszticitásainak $-0,71$ -es átlagértékével. Emellett, míg a konstans elaszticitású modell az árugalmasságokra $+1,66$ és $-4,03$ közötti értékeket adott, most sem az egyes cikkesoportok, sem pedig az egyes rétegek értékei között *nincsenek nagy különbségek*, az árugalmasságok nagyon szűk intervallumban, $-0,13$ és $-0,73$ között mozognak. A cikkesoportok közötti rugalmassági sorrend és a rétegek eredményeinek egymáshoz való viszonya egyébként nagyjából megfelel a konstans elaszticitású modellnél tapasztaltaknak. A két modell eredményei az egyéb iparcikkek árucsoportjánál és a szolgáltatásoknál térnek el a legjelentősebben. Ez természetes is, hiszen az egyéb iparcikkeknel a nagyfokú heterogenitás miatt, a szolgáltatásoknál pedig a cikkesoport jellege miatt a számított árugalmasságoknak már eleve nem tulajdoníthatunk különösebb jelentőséget. A rétegek közül a parasztságra és a kettős jövedelműekre számított árugalmasságok a Stone-modell esetében — mint

7. táblázat

A konstans elaszticitású modell és a Stone-modell alapján számított nem kompenzált ár rugalmasságok

	Élelmi- szerek	Élvezeti cikkek	Ruházati cikkek	Fűtés, házt. energ.	Tartós fogy. cikkek	Egyéb ipar- cikkek	Szolgál- tatások
Össztlakosság							
Konstans elaszticitású modell (1974)	-0,35	-0,76	-0,22	-0,49	-1,76	-0,25	-0,81
Stone-modell (1967)	-0,31	-0,43	-0,29	-0,29	-0,57	-0,50	-0,33
Stone-modell (1974)	-0,44	-0,60	-0,45	-0,54	-0,73	-0,65	-0,49
Munkások							
Konstans elaszticitású modell (1974)	-0,31	-1,16	-0,60	-0,66	-3,12	+0,76	-0,80
Stone-modell (1967)	-0,31	-0,45	-0,39	-0,33	-0,47	-0,39	-0,43
Stone-modell (1974)	-0,43	-0,65	-0,56	-0,58	-0,71	-0,52	-0,63
Szellemiek							
Konstans elaszticitású modell (1974)	+0,21	-0,88	-1,08	-1,14	-4,03	-0,23	+1,66
Stone-modell (1967)	-0,18	-0,12	-0,19	-0,09	-0,20	-0,21	-0,24
Stone-modell (1974)	-0,30	-0,39	-0,42	-0,37	-0,49	-0,44	-0,45
Parasztság							
Konstans elaszticitású modell (1974)	-0,20	-0,95	+0,41	-0,46	+0,07	-0,37	-0,81
Stone-modell (1967)	+0,18	+0,18	+0,14	+0,22	+0,50	+0,18	+0,25
Stone-modell (1974)	-0,35	-0,13	-0,18	-0,13	-0,25	-0,24	-0,18
Kettős jövedelműek							
Konstans elaszticitású modell (1974)	-0,31	-0,81	+0,03	-0,70	-0,98	-0,60	-1,03
Stone-modell (1967)	-0,21	+0,02	-0,02	+0,09	+0,09	-0,01	+0,02
Stone-modell (1974)	-0,41	-0,30	-0,34	-0,28	-0,43	-0,38	-0,36

ahogy ezt a korábbiakban már láttuk — nem értelmezhetők, azokat csupán a teljesség kedvéért közöljük.

A két modell alapján számított ár rugalmasságok jellegzetes eltérései más országok eredményeiben is megmutatkoznak, mint ahogy ez a 6. sz. táblázathoz hasonló módon összeállított 8. táblázat számaiból kiderül.

Az ár rugalmasságok között nagyobb eltéréseket tapasztalhatunk, mint korábban a jövedelem rugalmasságoknál. Az élelmiszerek és a ruházati cikkek esetében az eredmények ismét közelebb állnak egymáshoz, mint a tartós fogyasztási cikkeké, az eltérések azonban most ezekben az árucsoportokban is nagyobbak, mint a jövedelem rugalmasságok értékei között. Emellett az ár rugalmasságok esetében — szemben a jövedelem rugalmasságok számított értékeinek eltéréseivel — a vizsgált aggregátsági szinten inkább a különböző módszerek közötti differenciák látszanak nagyobbaknak, mint a különböző országokra vonatkozó eredmények eltérései. Úgy tűnik tehát, hogy az ár rugalmasságok számszerűsítése nem is annyira a hazai ár helyzetet, mint inkább módszertani nehézségek miatt problematikus, bár az árak stabilitásának a szerepe is kétségtelen.

Tekintsük át ezeketán a modellek alapján számított kompenzált saját ár rugalmasságokat, amelyeket a 9. táblázatban foglaltunk össze. A kompenzált

8. táblázat

A konstans elaszticitású modell és a Stone-modell alapján különböző országokra számított nem kompenzált saját árrugalmasságok

	Élelmiszerek	Ruházati cikkek	Tartós fogyasztási cikkek
A konstans elaszticitású modell nem kompenzált saját árrugalmasságai			
Magyarország	-0,35	-0,22	-1,76
Belgium	-0,67	-1,36	-1,07
OECD országok (átlag)	-0,48	-0,29	-1,24
OECD országok (szélső értékek)	-0,08	+0,37	+0,88
és	-1,03	és -1,36	és -2,93
A Stone-modell nem kompenzált saját árrugalmasságai			
Magyarország	-0,44	-0,43	-0,73
Belgium	-0,20	-0,14	-0,31
OECD országok (átlag)	-0,38	-0,26	-0,63
OECD országok (szélső értékek)	-0,15	-0,03	-0,27
és	-0,87	és -0,49	és -1,14

9. táblázat

A konstans elaszticitású modell és a Stone-modell alapján számított kompenzált saját árrugalmasságok

	Élelmiszerek	Élvezeti cikkek	Ruházati cikkek	Fűtés, házt. energ.	Tartós fogy. cikkek	Egyéb ipar-cikkek	Szolgáltatások
Össztlakosság							
Konstans elaszticitású modell (1974)	-0,14	-0,53	-0,11	-0,44	-1,60	-0,03	-0,65
Stone-modell (1967)	-0,09	-0,23	-0,18	-0,25	-0,43	-0,33	-0,20
Stone-modell (1974)	-0,22	-0,40	-0,34	-0,50	-0,59	-0,48	-0,36
Munkások							
Konstans elaszticitású modell (1974)	-0,12	-1,02	-0,43	-0,61	-3,02	+0,91	-0,60
Stone-modell (1967)	-0,09	-0,34	-0,23	-0,27	-0,33	-0,26	-0,25
Stone-modell (1974)	-0,21	-0,54	-0,40	-0,52	-0,57	-0,39	-0,45
Szellemiek							
Konstans elaszticitású modell (1974)	+0,32	-0,80	-0,99	-1,11	-3,97	-0,10	+1,77
Stone-modell (1967)	-0,01	-0,03	-0,03	-0,03	-0,04	-0,04	-0,03
Stone-modell (1974)	-0,13	-0,30	-0,26	-0,34	-0,33	-0,27	-0,24
Parasztság							
Konstans elaszticitású modell (1974)	+0,07	-0,84	+0,53	-0,41	+0,28	-0,17	-0,65
Stone-modell (1967)	+0,13	+0,26	+0,26	+0,28	+0,65	+0,35	+0,36
Stone-modell (1974)	-0,04	-0,05	-0,06	-0,07	-0,10	-0,07	-0,07
Kettős jövedelműek							
Konstans elaszticitású modell (1974)	-0,06	-0,71	+0,17	-0,66	-0,74	-0,44	-0,88
Stone-modell (1967)	+0,06	+0,12	+0,12	+0,13	+0,24	+0,14	+0,15
Stone-modell (1974)	-0,14	-0,20	-0,20	-0,24	-0,28	-0,23	-0,23

árrugalmasságokat az egyes cikkcsoportok kiadási arányai mellett a nem kompenzált árrugalmasságok és a jövedelemrugalmasságok értékei határozzák meg. Tekintettel arra, hogy az ezekre kapott eredményeink sajátosságait már ismertettük, úgy véljük, hogy minden további kommentár felesleges — a számok magukért beszélnek.

Az alábbiakban bemutatjuk még a *Stone-modell* alapján számított *kereszt-árrugalmasságokat* is. Az egyes rétegekre vonatkozó eredmények jellegükben hasonlóak, ezért csak az *össztlakosságra* számított árrugalmasság-mátrixot közöljük. Ennek nem kompenzált és kompenzált változatait a *10. táblázat* tartalmazza. A mátrixok diagonálisában feltüntettük a már ismert saját árrugalmasságokat is. A táblázatban az egyes oszlopok a fejrovtban megnevezett cikkcsoportok árváltozásához tartozó rugalmasságokat adják meg, így pl. az első oszlop számai azt, hogy az élelmiszerek árának 1%-os változása esetén hány százalékkal változik az élelmiszerek, az élvezeti cikkek, a ruházati cikkek stb. fogyasztása.

10. táblázat

Az össztlakosság 1974. évre számított árrugalmasság-mátrixai a *Stone-modell* alapján

	Élelmi- szerek	Élvezeti cikkek	Ruházati cikkek	Fűtés, házt. energ.	Tartós fogy. cikkek	Egyéb ipar- cikkek	Szolgál- tatások
Nem kompenzált árrugalmasságok							
Élelmiszerek	-0,44	-0,05	-0,05	-0,01	-0,02	-0,03	-0,05
Élvezeti cikkek	0,30	-0,60	-0,09	-0,02	-0,03	-0,06	-0,09
Ruházati cikkek	-0,23	-0,01	-0,45	-0,01	-0,02	-0,04	-0,07
Fűtés, házt. energ.	-0,30	-0,10	-0,09	-0,54	-0,03	-0,05	-0,09
Tartós fogy. cikkek	-0,40	-0,13	-0,12	-0,03	-0,73	-0,07	-0,12
Szolgáltatások	-0,24	-0,08	-0,07	-0,02	-0,02	-0,04	-0,49
Egyéb iparcikkek	-0,33	-0,11	-0,10	-0,02	-0,03	-0,65	-0,10
Kompenzált árrugalmasságok							
Élelmiszerek	-0,22	0,06	0,03	0,01	0,04	0,05	0,04
Élvezeti cikkek	0,11	-0,40	0,06	0,02	0,07	0,09	0,07
Ruházati cikkek	0,09	0,08	-0,34	0,02	0,05	0,07	0,05
Fűtés, házt. energ.	0,12	0,10	0,06	-0,50	0,07	0,09	0,07
Tartós fogy. cikkek	0,15	0,14	0,08	0,03	-0,59	0,12	0,09
Egyéb iparcikkek	0,15	0,11	0,06	0,02	0,08	-0,48	0,08
Szolgáltatások	0,10	0,08	0,05	0,02	0,06	0,07	-0,36

Láthatjuk, hogy az összes nem kompenzált kereszt-árrugalmasság negatív és valamennyi kompenzált kereszt-árrugalmasság pozitív érték — ezt, mint tudjuk, a modell eleve biztosítja. Az egyes oszlopokat végignéve pedig az tűnik ki, hogy a kereszt-árváltozások közül csupán az *élelmiszerárak* változásának a többi cikkcsoport fogyasztására gyakorolt hatása említésre méltó. Az élelmiszerárak változásának tovagyrűző hatása a vizsgált időszakban — a modell szerint — csaknem olyan erős volt, mint magára az élelmiszerfogyasztásra gyakorolt hatása. Ez természetes is az élelmiszerekre fordított kiadások magas aránya miatt. A mátrixok sorait vizsgálva azt figyelhetjük meg, hogy az árak változása legerősebben a *tartós fogyasztási cikkek forgalmát befolyásolja*, a nem kompenzált esetben éppúgy, mint a kompenzált esetben.

Végül, összegezve a két modell alkalmazásával nyert tapasztalatainkat elmondhatjuk, hogy a számítási eredmények biztatóak és a munka folytatására, az adatbázis kibővítésére, a módszerek tökéletesítésére ösztönöznek.

(Beérkezett: 1978. július 26-án).

IRODALOMJEGYZÉK

1. HULYÁK K.—LOSONCZY I.—MUSZÉLY GY.—SZAKOLCZAI GY.: A klasszikus fogyasztáselemzési modellek számszerűsítésének eredményei. Előzetes tanulmány. I. Módszertan és értékelés. II. Ábrák és táblázatok. Számítógéppalkalmazási Kutató Intézet, Budapest, 1978.
2. SZAKOLCZAI GY.—HULYÁK K.—LOSONCZY I.—MUSZÉLY GY.: Klasszikus fogyasztáselemzési modellek felhasználása a fogyasztói árpolitika megalapozásához. Közgazdasági Szemle, 1978. (Előkészületben).
3. HOUTHAKKER, H. S.: New Evidence on Demand Elasticities. *Econometrica*, April, 1965.
4. STONE, R.: The measurement of consumer's expenditure and behaviour in the U. K., 1920—1938. Vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge 1954.
5. STONE, R.: Linear expenditure systems and demand analysis: An application to the pattern of British demand. *Economic Journal*, 1954.
6. STONE, R.: The changing pattern of consumption. In: R. Stone, ed.: *Mathematics in the Social Sciences and Other Essays*. Chapman and Hall, London, 1966.
7. DEATON, A.: Models and Projections of Demand in Post-War Britain. *Cambridge Studies in Applied Econometrics*, 1975.
8. PHILIPS, L.: A Dynamic Version of the Linear Expenditure Model. Working Paper 6906. Université Catholique de Louvain, 1969.
9. BARTEN, A. P.: Consumer demand functions under conditions of almost additive preferences. *Econometrica*, 1964.
10. THEIL, H.: Theory and Measurement of Consumer Demand, Volume 1—2. North-Holland, 1975.
11. FRISCH, R.: A Complete Scheme for Computing All Direct and Cross Demand Elasticities in a Model with Many Sectors. *Econometrica*, April, 1959.
12. ÉLTETŐ Ö.: A fogyasztói kiadások lineáris modelljének néhány tulajdonsága a hazai tapasztalatok tükrében. VII. Magyar Operációkutatási Konferencia, Pécs, 1977.
13. ENYEDI J.: A fogyasztói kiadások lineáris modellje. Országos Tervhivatal. Budapest, 1977.
14. SIMON A.: A lakosság kiadásainak és megtakarításainak vizsgálata ökonometriai módszerrel. Konjunktúra- és Piacutató Intézet és Tervgazdasági Intézet, 1977.
15. A lakosság jövedelme és fogyasztása 1960—1970, és 1960—1974. KSH Budapest, 1972. és 1976.
16. Statisztikai Évkönyv, 1960, . . . 1974. KSH Budapest.
17. PARKS, R. W.: Efficient Estimation of a System of Regression Equations when Disturbances Are Both Serially and Contemporaneously Correlated. *Journal of the American Statistical Association*, June 1967.
18. ZELLNER, A.: An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias. *Journal of the American Statistical Association*, June, 1962.
19. POLLAK, R. A. and WALES T. J.: Estimation of the Linear Expenditure System. *Econometrica*, October, 1969.
20. LLUCH, C.: The extended linear expenditure system. *European Economic Review* 1973, 4.
21. GOLDBERGER, A. S., and T. GAMALETOS: A cross country comparison of consumer expenditure patterns. *European Economic Review*, 1970.

QUANTIFICATION OF MODELS OF DEMAND ON THE BASIS OF TIME SERIES DATA

In the framework of computations aimed at the foundation of the consumer price policy, two kinds of consumption models were quantified for the period 1960—1974. The consumption of the population was examined by the two models, the so called model of constant elasticity and Stone's linear expenditure model, respectively, in a strongly aggregated form, broken down according to seven groups of consumption goods. Computations were carried out on a comparable data basis, data referring to the entire population and relying on a comprehensive survey of data, as well as on data of household statistics for four various social strata: blue collar workers, white collar workers, peasants and those of double income.

In the present study the theoretical characteristics of the two kinds of models, their estimation method and the numerical results are presented. Estimated income- and price elasticities are discussed, their analysis and comparison enables also the drawing of certain economic conclusions. Both the indicators of the fitting of models and the estimated elasticity coefficients are promising and stimulate for the continuation of the work, the widening of the data basis and the perfection of methods.

ЧИСЛОВАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ СПРОСА НАСЕЛЕНИЯ НА ОСНОВАНИИ ДАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

В рамках расчетов для обоснования политики в области цен на период времени с 1960 до 1974 г. было дано числовая реализация двух моделей потребления. Потребление населения исследовалось с помощью двух моделей, т. н. моделью постоянной эластичности и линейной модели расходов населения по Стоуну, при значительной агрегации, в подразделении на семь групп потребительских товаров. Расчеты проводились на основе сравнимой базы данных, полного охвата данных по всему населению и данных по статистике бюджетов домашних хозяйств для четырех различных слоев общества: рабочие, лица умственного труда, крестьяне и лица двойных занятий.

В статье представлены теоретические особенности двух примененных моделей, методы их оценки и результаты, полученные в результате числовой реализации этих моделей. Более подробно рассматриваются полученные эластичности, анализ и сравнение которых делает возможным сделать определенные экономические выводы. Показатели, дающие представление о приемлемости моделей, и коэффициенты эластичности дают обнадеживающие результаты, что побуждает к продолжению работы, расширению базы данных и совершенствованию методов.

Egy fogyasztási modell számszerűsítése keresztmetszeti adatok alapján

Ebben a cikkben egy fogyasztás-elemzési modell keresztmetszeti adatok alapján való számszerűsítésére kidolgozott módszert, valamint az első számításokból levonható következtetéseket ismertetjük. Munkánknak az volt a célja, hogy a jövedelem és az árak változásának a fogyasztás szerkezetére gyakorolt hatását társadalmi rétegenként, jövedelmi kategóriák szerinti részletezésben is meghatározzuk.

A hazai irodalomból több olyan vizsgálat ismeretes, amikor fogyasztási modelleket az összlakosság, vagy egy-egy társadalmi réteg átlagos fogyasztásának, átlagjövedelmének valamint az árak kapcsolatának leírására alkalmaztak (lásd [3], [4]). Ezek a számítások a jövedelemváltozás hatásának vizsgálatát az *átlagjövedelem* szintjén teszik lehetővé, és csak közvetve tükrözik a különböző jövedelműek fogyasztásában jelentkező különbségeket. Az említett munkák mellett olyan vizsgálatokat is végeztek (lásd pl. [1], [8]), amelyek keresztmetszeti adatok, nevezetesen a háztartásstatisztikai felmérések alapján kizárólag a jövedelmi hatásokat vizsgálták. Egy olyan vizsgálat, mint amelyről jelen cikkünkben számolunk be, s amely több év keresztmetszeti adatainak összehasonlításán alapszik, lehetőséget ad arra, hogy a jövedelemhatások mellett az árhatásokat rétegenként *jövedelmi kategóriák* szerinti bontásban számszerűsítsük, s ezzel a hazai kutatásokat e témakörben tovább gyarapítsuk.

A következőkben ismertetendő számítás része volt a SZÁMKI Ökonometriai Főosztályán végzett fogyasztás-elemzési kutatásnak, amelyről részletesen külön tanulmányban számoltunk be [11]. A legfontosabb közgazdasági következtetéseket a [6] dolgozat összefoglalta, ezért ebben a cikkben az eredményeknek főként módszertani vonatkozásait emeljük ki. A számítások másik része [5]-ben található meg.

Mielőtt a modell, az adatok és az eredmények részletes tárgyalására rátérnénk, kiemeljük a legfontosabb szempontokat, amelyek a kiválasztott modellhez, illetve az alkalmazás módjához vezettek. Kiinduló adatokként a háztartásstatisztikai felméréseket használtuk. Célszerűnek látszott a jövedelemhatást, pontosabban fogalmazva: a jövedelemrugalmasságokat, empirikus úton meghatározni. Az árhatásokat ezután már a jövedelemrugalmasságok ismeretében összefüggő keresleti egyenletekből álló modell alapján számszerűsítettük.

A rendelkezésre álló adatokhoz olyan modellt illesztettünk, amely elsősorban rövidebb időszak — körülbelül 2-4 év — fogyasztásának elemzésére alkalmas. Ilyen esetekben a keresleti egyenleteket a fogyasztás, a jövedelem és az árak változásai közötti lineáris összefüggések formájában is fel lehet írni. A modell-számításokat a főbb társadalmi rétegeken belül jövedelmi kategóriánként külön-külön elvégezve megkaptuk az egyes kategóriák saját és kereszt-
 árrugalmassági együtthatóinak konzisztens rendszerét.

A felhasznált modell leírása

Először ismertetjük a felhasznált modellt, valamint a segítségével származtatott ár rugalmassági formulákat, majd vázoljuk a számszerűsítés módszerét.

Jelöljük azoknak az árucsoportoknak a számát, melyek között a fogyasztók felosztják a jövedelmüket n -nel. Változzon egy bizonyos időszak alatt a vizsgált fogyasztói csoportban az egy főre jutó átlagos jövedelem y -tól $y + \Delta y$ -ra, és változzanak a $p_1, \dots, p_n$ árak $\Delta p_1, \dots, \Delta p_n$ -nel. Ezeknek a változásoknak a hatására változzanak meg a fejenként elfogyasztott $q_1, \dots, q_n$ mennyiségek $\Delta q_1, \dots, \Delta q_n$ -nel. Ha a változások nem túl nagyok, akkor az összefüggések közel *lineárisak*, tehát érvényes a

$$\Delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial y} \cdot \Delta y + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \Delta p_j + u_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

összefüggés, ahol u_i a hibatag. Az

$$E_i = \frac{\partial q_i}{\partial y} \left/ \frac{q_i}{y} \right. \text{ és } e_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \left/ \frac{q_i}{p_j} \right.$$

jövedelem, illetve ár rugalmasságok bevezetésével (1) a következő alakra hozható:

$$\frac{\Delta q_i}{q_i} = E_i \frac{\Delta y}{y} + \sum_{j=1}^n e_{ij} \frac{\Delta p_j}{p_j} + v_i. \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

Az egyenletekben szereplő ismeretlen rugalmassági együtthatók száma elég nagy, ezért ezek becsléséhez kiegészítő feltevésekre van szükség. Általánosan elterjedt, hogy a keresleti függvényeket úgy írják fel, hogy azok adott jövedelem és adott árak mellett kielégítsék egy $u(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ún. *hasznossági függvény optimalizálásának* feltételét. A hasznossági függvénynek szocialista viszonyok közötti létezését sokat vitatják, ezért ezzel a kérdéssel kicsit részletesebben foglalkozunk. Itt a „hasznosság” fogalma azt fejezi ki, hogy a különböző árucsoportokból összetevődő fogyasztás a fogyasztó milyen mértékű megelégedettségére vezet. Feltételezhetjük, hogy a fogyasztó maximális megelégedettségre törekszik, vagyis maximálja hasznossági függvényét. Ez a megközelítés nem tételezi fel a szubjektív „haszon” mérhetőségét, hanem csupán azt, hogy a fogyasztó a különböző lehetséges helyzetekben meg tudja állapítani, hogy jövedelmének a különböző cikkesoportok közötti felosztása számára hogy a legkedvezőbb.

Feltételezzük, hogy a hasznossági függvény *additív*, vagy *monoton transzformációval additív* alakra hozható:

$$u = F \left(\sum_{i=1}^n f(q_i) \right),$$

ahol F monoton függvény. Ilyen feltételnek tesz eleget a hasznossági függvény az ismert Stone-modell esetén is, ahol a kiadás a jövedelem és az árak lineáris függvénye. Mi azonban a hasznossági függvényre további megszorítást nem teszünk. Az említett feltétel ekvivalens azzal a feltételezéssel, hogy az áruk csoportosítása olyan, hogy *nincs köztük az ún. fajlagos helyettesítési hatás*. A fajlagos helyettesítési hatás akkor jelentkezhet, ha vannak olyan fogyasztási cikkek,

amelyek használati értékük szempontjából egymást helyettesíthetik (vagyis szubsztitútvék) vagy egymást kiegészíthetik (vagyis komplementerek). Ilyen szubsztitutív termékek például a vaj és a margarin, vagy — nagyobb aggregátumot tekintve — a vásárolható élelmiszerek és a vendéglátóipari étkezés, mint szolgáltatás. Komplementer termékekre példa lehet az autó, a benzin és a gépkocsijavítás. Megjegyezzük, hogy mivel a fajlagos helyettesítési hatás csak bizonyos árucikkek között létezik, ezért aggregált árucsoportok között elég kis mértékben érvényesül. Ennek az is az oka, hogy az egyes komplementer és szubsztitutív hatások részben kiegyenlítik egymást. Ha lehetőségünk van az aggregálás módjának megválasztására, akkor azoknak az áruknak az egy csoportba vonásával, amelyek között feltételezhető a fajlagos helyettesítési hatás, csökkenthetjük ennek a hatásnak a nagyságát.

Természetesen ez a feltételezés, hogy ilyen típusú hatás az árucsoportok között nincs, nem jelenti azt, hogy valamely árucsoportnál végbement árváltozásnak nincs hatása a többi árucsoport fogyasztására. Mindig léteznek olyan *másodlagos kereszthatások*, amelyek abból fakadnak, hogy amikor valamelyik árucsoport ára megváltozik, akkor megváltozik az illető árucsoportra fordított kiadás nagysága is, s a csökkenést vagy növekedést a fogyasztók más árukra osztják el, illetve más áruktól vonják el.

Ilyen korlátozások mellett az (1) egyenlet a következő alakot ölti (vö. [2], [7]):

$$\Delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial y} \left(\Delta y - \sum_{j=1}^n q_j \Delta p_j \right) - \Phi y \frac{\partial q_i}{\partial y} \left(\frac{\Delta p_i}{p_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_j}{\partial y} \Delta p_j \right) + u_i, \quad (3)$$

ahol a Φ pozitív konstans minden i -re azonos. Ellentettje ($-\Phi$) az ún. jövedelemhajlékonyság. A (3) egyenlet a rugalmassági együtthatók segítségével a következőképpen alakítható át:

$$\frac{\Delta q_i}{q_i} = E_i \left(\frac{\Delta y}{y} - \sum_{j=1}^n w_j \frac{\Delta p_j}{p_j} \right) - E_i \Phi \left(\frac{\Delta p_i}{p_i} - \sum_{j=1}^n E_j w_j \frac{\Delta p_j}{p_j} \right) + v_i, \quad (4)$$

ahol

$$w_j = q_j p_j / \sum_{i=1}^n q_i p_i$$

a j -edik kiadási arány.

A kapott egyenletek látszólag bonyolultak, azonban a zárójelben levő kifejezések könnyen értelmezhetők. A jobboldal első tagja a *reáljövedelem változásának* hatását fejezi ki, a zárójelben levő kifejezés ugyanis az általános fogyasztói áridexszel csökkentett jövedelem relatív változásának lineáris közelítése. Az is belátható, hogy a második tag az illető árucsoport *relatív árának* a fogyasztásra való hatását adja meg, ugyanis a zárójelben levő kifejezés az árucsoport relatív áridexének változását közelíti. Az árat itt az ún. marginális áridexszel csökkentettük; ezt az egyes árucsoportok áridexeiből a $\partial q_i / \partial y = E_i \cdot q_i / y$ marginális értékrészesedési arányszámokkal súlyozva kaptuk. Ezek a súlyok azt fejezik ki, hogy egy kis jövedelemváltozást — az adott jövedelmi szinten — a fogyasztó milyen arányban oszt szét az egyes árucsoportok között.

Összefoglalva tehát: a jobboldal első tagja a reáljövedelem indexe változásának, második tagja pedig a saját relatív áridex változásának a fogyasztásra gyakorolt hatását adja meg. Összehasonlítva ezeknek az összetevőknek a

modellben szereplő együtthatóit, láthatjuk, hogy nemcsak a reáljövedelem, hanem a relatív árindex változásának a hatása is *arányos* a jövedelemrugalmassággal. Ha például valamely cikkszoport relatív ára 1%-kal megnő, akkor az úgy hat az illető cikkszoport fogyasztására, mint egy Φ százalékos jövedelemcsökkenés.

Modellünk szerint ily módon a fogyasztás ár- és jövedelemérzékenységének ez a kapcsolata minden cikkekre azonos, a fogyasztó preferenciáit már maguk a jövedelemrugalmasságok határozzák meg. Ez a tulajdonság természetesen korlátozza a modell felhasználhatóságát. Különösebb torzítást azonban mégsem okoz. A valóságban is elképzelhető az, hogy azon termékek fogyasztása, amelyeknek nagyobb a jövedelemrugalmasságuk, érzékenyebben reagálnak az árváltozásra is, mint azok, amelyeknek a fogyasztása a jövedelem változására nézve merev. Mint az alábbiakban látható lesz, a modellből levezetett saját árugalmasságok megközelítőleg szintén arányosak lesznek a megfelelő jövedelemrugalmasságokkal, az arányossági tényező a $(-\Phi)$ jövedelemhajlékonyság lesz.

A keresleti egyenletek a jövedelemrugalmasságokat paraméterek formájában tartalmazzák; ezek, valamint a Φ konstans és a w_i kiadási arányok felhasználásával a következő árugalmasságok vezethetők le: saját árugalmasság:

$$e_{ii} = -E_i\Phi - E_iw_i(1 - E_i\Phi), \quad (5)$$

kereszt árugalmasság:

$$e_{ij} = -E_iw_j(1 - E_j\Phi). \quad (j \neq i), \quad (6)$$

A modellben szereplő ismeretlen paraméterek az E_i jövedelemrugalmasságok, valamint a Φ konstans. Ezek két lépésben határozhatók meg. Először a keresztszetszeti adatokból, a modelltől függetlenül megállapíthatók a jövedelemrugalmasságok, majd segítségükkel becslés adható Φ -re. A következőkben részletesen leírjuk a számítások menetét.

A *jövedelemrugalmasságok* a háztartásstatistikai mintából *empirikus* úton határozhatók meg. Számításainkban a nettó jövedelmet használtuk jövedelemként. Ezzel kapcsolatban megemlítjük, hogy itt eltértünk a klasszikus hasznossági függvényeknél szokásos eljárástól, nevezetesen attól, hogy a jövedelmet a kiadások összegével helyettesítsük. Erre általában azért van szükség, mert a keresleti egyenletek a hasznossági függvényt olyan feltétel mellett maximalizálják, hogy a jövedelem egyenlő a kiadások összegével. Ilyenkor a modell segítségével kapott jövedelemrugalmasságok tulajdonképpen a kiadások összege szerinti rugalmasságok. Esetünkben viszont az a tény, hogy a keresleti egyenleteket nem magukra a fogyasztás mennyiségeire, hanem azok változásaira írtuk fel, valamint az a körülmény, hogy a jövedelemrugalmasságokat a modelltől függetlenül becsültük, lehetővé teszi, hogy a valóságos jövedelemváltozót használjuk.

A jövedelemrugalmasságok meghatározásához a rendelkezésre álló néhány (esetünkben három) év statisztikai mintáját a jövedelem nagysága szerint fel kell bontani kategóriákra, kiszámítani az egyes jövedelmi kategóriákban az egy főre jutó átlagjövedelem, valamint az árucsoportonkénti átlagfogyasztás értékeit. Ezek alapján bármely árucsoport tapasztalati Engel-görbéjét megkaphatjuk, ha ez egyes jövedelmikategóriák átlagjövedelmi pontjaiban feltüntetjük az illető árucsoport átlagfogyasztását. Az így kapott szakaszos törtvonal-

ból álló Engel-görbén tetszőleges y jövedelemhez meghatározható, illetve az adatokból kiszámítható a fogyasztás q mennyisége, valamint a görbe m mereksége. Ezekből a mennyiségekből a jövedelemrugalmasság az

$$E = m \frac{y}{q}$$

formulával becsülhető.

A jövedelemrugalmasságok meghatározására megemlítünk még egy közismert, bár általunk nem használt alternatív eljárást [1]. A tapasztalati Engel-görbét megfelelően választott egyváltozós függvénnyel közelítjük, amelynek paramétereit a legkisebb négyzetek módszerével becsülhetjük. Ezután az E számításához szükséges q és m változókat a közelítő görbéből határozhatjuk meg. Ennek az eljárásnak az előnye, hogy a mintából származó véletlen egyenletlenségek kiszűrhetők, ugyanakkor a választott függvénytípus a priori sajátosságai a jövedelemrugalmasságokat is megadják. Ha a jövedelmi kategóriák elég nagyszámú mintaelemet tartalmaznak, akkor a hibalehetőség nem jelentős, s eltekinthetünk a vázolt regressziós számításoktól.

Az ismeretlen Φ paramétert a keresleti egyenletekből becsülhetjük meg. Ehhez már ismernünk kell az E_i jövedelemrugalmasságokat, valamint a Δq_i , Δp_j és Δy változásokat. Ez utóbbiakat legalább két év statisztikai adataiból kiindulva számíthatjuk. Ha kettőnél több év adatait ismerjük, akkor a különböző éveket többféleképpen összepárosítva megnövelhetjük az egyenletek számát, és ezáltal pontosíthatjuk a Φ -re adott becslést. Az egyenletek Φ -ben lineárisak, a becslés elvégezhető a legkisebb négyzetek módszerével.

A kiinduló adatok

A számításokhoz mágnesszalagon rendelkezésünkre állt az 1972., 1973. és 1974. évi háztartásstatisztikai felmérések teljes adattömege. Ezekről összevont formában tájékoztatást a KSH háztartásstatisztikai közleményei [10] adnak. A négy fő társadalmi réteget (munkások, szellemiek, parasztság, kettős jövedelműek) 4—4 jövedelemkategóriára bontottuk. A kategóriák határainak a meghatározását a következőkben részletesen leírjuk.

Számításainkban jövedelemként a *nettó jövedelmet* használtuk, amely a különböző pénzbevételek, a saját termelésű és a természetben kapott javak, valamint az adók és adójellegű kiadások egyenlegeként adódik.

A háztartásokat az egy főre jutó nettó jövedelem alapján elválasztó *jövedelemhatárok* a munkás és a szellemi rétegeknél azonosak voltak, s ugyanez mondható el a paraszti és kettős foglalkozású rétegekre is. A határokat, amelyek az 1. táblázatban láthatók, úgy állapítottuk meg, hogy minden egyes kategóriába hozzávetőleg egyenlő számú fogyasztó essék. Ez természetesen csak az összevont kategóriákra teljesíthető. A legalacsonyabb jövedelmi kategóriába több munkás, mint szellemi, és több paraszt, mint kettősjövedelmű esik, a legmagasabb jövedelmi kategóriában viszont ezek ellenkezője teljesül. Az 1. táblázatból az is látszik, hogy hogyan növekedtek az egyes kategóriák jövedelemhatárai, valamint átlagjövedelmei. Minden társadalmi rétegen belül a négy jövedelmi kategóriára külön-külön, valamint az egyes társadalmi rétegekre összevontan is megkíséreltük meghatározni a jövedelem- és ár rugalmasságokat. Ez tehát összesen 20 réteg vizsgálatát jelentette.

1. táblázat

A jövedelemkategória határok és az egy főre jutó évi jövedelem alakulása 1972 és 1974 között társadalmi rétegenként

	A kategóriát meghatározó egy főre jutó évi nettó jövedelem határai, Ft/fő		Az egy főre jutó évi átlag nettó jövedelem Ft/fő	
	1972	1974	1972	1974
Munkásság:				
1. jövedelmi kategória	15 000 alatt	17 500 alatt	12 420	14 700
2. jövedelmi kategória	15 000—19 000	17 500—22 000	16 880	19 710
3. jövedelmi kategória	19 000—24 000	22 000—28 000	21 070	24 670
4. jövedelmi kategória	24 000 felett	28 000 felett	28 940	33 680
Szellemiek:				
1. jövedelmi kategória	15 000 alatt	17 500 alatt	13 100	15290
2. jövedelmi kategória	15 000—19 000	17 500—22 000	16 890	19 920
3. jövedelmi kategória	19 000—24 000	22 000—28 000	21 320	24 710
4. jövedelmi kategória	24 000 felett	28 000 felett	32 350	37 390
Paraszság:				
1. jövedelmi kategória	13 500 alatt	15 500 alatt	11 080	12 870
2. jövedelmi kategória	13 500—17 000	15 500—19 700	15 370	17 510
3. jövedelmi kategória	17 000—22 000	19 700—25 400	19 460	22 290
4. jövedelmi kategória	22 000 felett	25 400 felett	28 170	33 130
Kettős jövedelműek:				
1. jövedelmi kategória	13 500 alatt	15 500 alatt	11 530	13 280
2. jövedelmi kategória	13 500—17 000	15 500—19 700	15 360	17 710
3. jövedelmi kategória	17 000—22 000	19 700—25 400	19 530	22 420
4. jövedelmi kategória	22 000 felett	25 400 felett	27 080	31 820

A jövedelmi kategóriák most ismertetett meghatározásával kapcsolatban tisztáznunk kell egy kérdést. Első látszatra fontosnak tűnik, hogy bármely vizsgált réteg ugyanazokból a fogyasztókból álljon 1974-ben, mint 1972-ben. Ez azonban több okból sem lehetséges, de nem is teljesen helyes. Gondoljunk arra, hogy a háztartások tekintélyes részében két év leforgása alatt olyan változások mennek végbe, amelyek erősen eltérnek az átlagos változásoktól, s ezek a fogyasztói szokásokat is befolyásolhatják. A háztartások bizonyos százaléka más társadalmi rétegbe kerül, más részükben a keresők vagy éppen az eltartottak számának megváltozása olyan eltolódást eredményez az egy főre jutó jövedelemben, hogy a háztartást más jövedelmi kategóriába kell sorolni.

A most elmondottak értelmében a konkrét mintaelemek stabilitásának elve helyett helyesebb a társadalmi-jövedelmi kategóriák tartalmi stabilitásának elvéhez ragaszkodni. Ezért, amikor valamelyik kategória 1972-es fogyasztását az 1974-es év megfelelő kategóriájának fogyasztásával hasonlítjuk össze, akkor azt abból a feltételezésből kiindulva tesszük, hogy a két kategória háztartásai azonos fogyasztói szokásokat követnek, s az átlagos fogyasztás változását csak az átlagos jövedelmek közötti különbségek, valamint az átváltozások okozzák.

A *fogyasztási* adatokat az évi egy főre eső vásárlási kiadások adták. Az árucsoportokat a javak jellege szerinti szokásos hét fő csoportba soroltuk. Ezek: az élelmiszerek, élvezeti cikkek, ruházati cikkek, fűtés és háztartási energia,

tartós fogyasztási cikkek, egyéb iparcikkek, valamint a szolgáltatások. Választásunkat az indokolja, hogy jövedelemkategóriák szerinti bontásban ezeknek a cikkszoportoknak az árindexei voltak elérhetőek [9]. A fogyasztás volumen adatait a folyóáras kiadásoknak az 1972-es bázisú fogyasztói árindexekkel való elosztásával kaptuk. Maguk az *árindexek* képezték a modell áradatait. Mivel az említett közleményekben az árindexek jövedelem szerinti bontásban csak az összevont munkás—szellemi rétegre találhatók meg, ez utóbbiakat használtuk mind a munkás, mind a szellemi jövedelmi kategóriák árrugalmasságainak meghatározásakor. A paraszti és kettős jövedelmű rétegeknél az árindexeket jövedelem szerinti bontásban nem publikálják, ezért a munka jelenlegi szakaszában az egyes jövedelemkategóriákra az árrugalmasságokat nem tudtuk számszerűsíteni, ezekre csak a jövedelemrugalmasságokat határoztuk meg.

Itt említjük meg, hogy mind általános, mind a marginális árindexek számításánál nagymértékben megnöveltük az élvezeti cikkek súlyát, tekintve, hogy ezek nagyon torzítva szerepelnek a háztartásstatisztikai adatokban. Az árnyok megállapításánál ahhoz a súlyrendszerhez igazodtunk, amelyet az említett kiadványban az összes kiadás árindexének, vagyis az általános árindexnek a meghatározásánál használnak. A 2. táblázat azokat a szorzókat tartalmazza, amelyekkel az árindexek képzése során korrigáltuk a háztartásstatisztikából nyert súlyokat.

2. táblázat

Az élvezeti cikkek korrekciós tényezői

Jövedelmi kategória	Munkások, szellemiek	Paraszság	Kettős jövedelműek
1	2,75	2,4	2,5
2	2,60	2,4	2,5
3	2,35	2,4	2,5
4	2,35	2,4	2,5

Az eredmények

Ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk az ismertetett modellel végzett eddigi számítások eredményeit, elsősorban a módszertani szempontból fontos tanulságokat emelve ki. Az eredményekből levonható legfontosabb közgazdasági következtetések részletesen az említett két tanulmányban találhatók meg ([6], [11]). Így [11]-ben megtalálhatók az Engel-görbék és azok részletes elemzése, rájuk most nem térünk ki. Viszont a 3. táblázatban közöljük az Engel-görbék alapján számolt *jövedelem rugalmasságokat*. Mint a módszertani részben írtuk, segítségükkel számszerűsítettük az árhatásokat. A számítások jelenlegi szakaszában csak az 1972. és 1974. évi fogyasztást hasonlítottuk össze. Mindössze két év fogyasztásának összehasonlítása tulajdonképpen kevés információt szolgáltat az árrugalmasságok megbízható becsléséhez, azonban, mint látni fogjuk, így is értékelhető eredményeket kaptunk.

Először a fogyasztás relatív változásából levontuk a reáljövedelem növekedésének hatását, ez utóbbit a jövedelemrugalmasságok ismeretében adhattuk meg. Ilyen módon megkaptuk, hogy hogyan változott a vizsgált időszakban a

3. táblázat

Az 1972-től 1974-ig terjedő időszakra számított
jövedelemrugalmasságok

	Élelmi- szer	Élve- zeti cikk	Ruházati cikk	Fűtés, házt.-i energia	Tartós fogy. cikk	Egyéb iparcikk	Szolgál- tatás
Munkások	0,75	1,12	0,89	0,67	1,21	1,05	1,32
Ezen belül:							
1. kategória	0,80	1,06	1,19	0,58	1,45	1,12	1,38
2. kategória	0,88	1,21	0,85	0,66	1,18	1,03	1,45
3. kategória	0,79	1,14	0,75	0,69	1,23	1,02	1,31
4. kategória	0,51	0,88	0,59	0,69	1,22	1,03	1,22
Szellemiek	0,58	1,02	0,79	0,67	1,54	1,11	1,27
Ezen belül:							
1. kategória	0,68	0,94	1,24	0,63	1,50	0,90	1,63
2. kategória	0,67	1,03	0,87	0,66	1,68	1,21	1,49
3. kategória	0,59	1,07	0,80	0,66	1,60	1,14	1,39
4. kategória	0,56	0,96	0,40	0,83	1,57	0,93	1,17
Paraszság	0,40	0,62	0,82	0,59	1,30	1,25	1,35
Ezen belül							
1. kategória	0,35	0,66	1,20	0,45	1,45	1,45	1,20
2. kategória	0,41	0,63	0,88	0,63	1,24	1,36	1,30
3. kategória	0,38	0,56	0,61	0,67	1,24	1,22	1,31
4. kategória	0,42	0,50	0,33	0,50	1,54	1,16	1,40
Kettős jövedelműek	0,56	0,68	0,82	0,69	1,37	1,20	1,27
Ezen belül:							
1. kategória	0,77	1,10	1,10	0,61	1,80	1,34	1,10
2. kategória	0,55	0,72	0,90	0,64	1,35	1,16	1,32
3. kategória	0,53	0,46	0,52	0,73	1,29	1,07	1,14
4. kategória	0,48	0,56	0,60	0,85	1,20	1,14	1,50

fogyasztás a jövedelmen kívüli egyéb hatások, elsősorban az árváltozások következtében. A kapott értékeket összehasonlítottuk az illető árucsoport relatív árindexének százalékos változásával. Ezek a mennyiségek egyrészt a fogyasztói struktúra változásának érdekes tanulságaira hívják fel a figyelmet és így tanulmányozásuk önmagában is hasznos, másrészt a keresleti egyenletek végső számszerűsítéséhez szolgálnak közvetlen adatokként. Ezért vizsgálatunkból a keresztmetszeti modell számszerűsítésének várható kimenetelére is következtethetünk.

Az összehasonlítást a munkások és a szellemiek esetében mind a 4—4 jövedelmekategóriára elvégeztük. A parasztságra és a kettős jövedelműekre — amint az adatok ismertetésénél említettük — az árindexek jövedelem szerinti részletezésben nem álltak rendelkezésünkre, ezért a vizsgálatot csak a teljes rétegekre végeztük el. Az összehasonlítást — bár csak a fő rétegekre — a 4. táblázat tartalmazza. Legtöbb esetben — annak ellenére, hogy az árváltozások általában kicsik, — a relatív ár növekedése a fogyasztás csökkenését, a relatív ár csökkenése a fogyasztás növekedését eredményezi.

A kapott részeredményeket először *árucikkeként* fogjuk áttekinteni. Az élelmiszereknél a relatív ár változása nagyon kicsi, ugyanakkor a munkás és szellemi rétegeknél az élelmiszer fogyasztásnak olyan csökkenése tapasztalható,

4. táblázat

Az árváltozások, illetve az ár- és egyéb hatások alakulása 1972 és 1974 között

	Munkások		Szellemiek		Paraszság		Kettős jövedelműek	
	rel. árvált.	ár- és egyéb hatás	rel. árvált.	ár- és egyéb hatás	rel. árvált.	ár- és egyéb hatás	rel. árvált.	ár- és egyéb hatás
	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
Élelmiszer	—,01	—3,6	0,2	—1,2	0,0	6,2	—0,3	4,1
Élvezeti cikk	5,1	—7,1	5,4	—6,7	4,6	6,5	4,6	—11,1
Ruházat	—1,3	4,7	—1,2	0,1	—1,1	—0,9	—1,0	4,7
Fűtés és házt. energia	—1,4	4,8	—1,6	6,2	—2,3	8,2	—2,4	14,7
Tartós fogy. cikk	—0,6	—8,4	—0,4	3,6	—1,6	—1,5	—0,9	26,3
Egyéb iparcikk	—2,4	7,9	—1,8	9,6	—2,0	3,3	—2,1	9,1
Szolgáltatás	—1,5	0,2	—1,3	0,7	1,5	—8,8	0,4	—5,7

a) A relatív árindex százalékos változása (1974/1972)

b) A fogyasztás százalékos változásának a reáljövedelem növekedésének változásával csökkentett része (1974/1972)

amely ezekkel az árváltozásokkal nem magyarázható. Ezek a számok egyértelműen arra utalnak, hogy e két év között a fogyasztási szokások határozott eltolódása következett be ebben a két társadalmi rétegben az alacsonyabb élelmiszerfogyasztás irányába — amit természetesen kompenzált, sőt túlkompenzált a jövedelemnövekedés hatására bekövetkező élelmiszerfogyasztás-növekedés. Ennek a jelenségnek az lehet a magyarázata, hogy az ellátási helyzet kedvező változása következtében a fogyasztás egyéb területein megnyíló újabb, és magasabb szintű lehetőségek ezekben az alacsonyabb jövedelmi kategóriákban csak az élelmiszerfogyasztás relatív korlátozásával voltak elérhetők. Úgy tűnik tehát, hogy a kultúraltabb fogyasztási szerkezetre való törekvés ezekben a rétegekben egyértelműen tapasztalható, és ezt a törekvést az árstruktúra megfelelő módosításával elő kellene mozdítani. A parasztságnál és a kettős jövedelműeknél viszont egészen más a helyzet, mint a munkásoknál és a szellemieknél: az ár- és egyéb hatás pozitív, vagyis a vásárolt fogyasztás görbéje felfelé tolódott el. Ez nyilván annak a következménye, hogy nőtt a vásárolt fogyasztás részesedése a teljes élelmiszerfogyasztásból.

Az élvezeti cikkeknél a munkások és szellemiek valamennyi kategóriájában, valamint — és különösképpen hangsúlyozott módon — a kettős jövedelműeknél a jelentős áremelkedéssel nagy fogyasztáscsökkenés áll szemben. Úgy tűnik tehát, hogy az élvezeti cikkek ezen időszakban bekövetkezett relatív ár-növekedése nagyon határozottan korlátozza a fogyasztást. Az ár-növekedésnek tehát erre a cikkesoporra határozott fogyasztáscsökkentő hatása van, ami tulajdonképpen öröndetes. Végül, ami a parasztságot illeti, itt a vásárolt élvezeti cikk-fogyasztás nőtt; kérdéses, hogy az ilyen mértékű növekedés magyarázható-e azzal, hogy a saját termelésű fogyasztás csökkent.

A ruházati cikkek relatív ára csökkent, és a fogyasztás majdnem minden kategóriában nőtt, ami arra utal, hogy a ruházati fogyasztás rugalmasan reagál a ruházati árak viszonylagos árváltozására. A parasztság esetében viszont most is negatív ár- és egyéb hatást kaptunk, ami azt jelenti, hogy a parasztság

ruházkodási igénye ebben az időben — az árcsökkenés ellenére — lefelé tolódott. Ez azonban megfelel a jövedelemrugalmasságra kapott azon eredményeknek, hogy a parasztság ruházati kiadásai viszonylag alacsony szinten tetőzni látszanak. (Vö. 3. táblázat).

A fűtés és háztartási energia relatív ára valamennyi jövedelmi kategóriában csökkent, és ennek megfelelően az ár- és egyéb hatás valamennyi kategóriában pozitív volt. Úgy tűnik, hogy ezen cikkek árváltozása jelentős mértékben befolyásolja a fogyasztást, valószínű azonban az, hogy a pozitív számok elsősorban az ellátás javulását követő strukturális eltolódást tükrözik.

Megvizsgálva a táblázat „tartós fogyasztási cikk” sorát, szembeötlő a munkások és szellemiek fogyasztása közötti különbség. Az egész szellemi rétegnél a fogyasztás alakulása megfelel a relatív árcsökkenésnek, azaz az ár- és egyéb hatás pozitív, a munkásoknál viszont ez a mennyiség nagy abszolút értékű negatív szám. A jelenség a személyautó vásárlásokkal van szoros kapcsolatban. Mint az 5. táblázatból is kiderül, a munkások ebben az időszakban még elsősorban gyűjtöttek személygépkocsira, a szellemiek viszont már jelentős mértékben vásároltak is.

5. táblázat

Az évi egy főre eső gépkocsi-vásárlások
folyóáron kifejezve

	1972	1973	1974
	forint		
Munkások	375	366	340
Szellemiek	736	992	1051

Figyelemre méltó a parasztságnál és kettős jövedelműeknél kapott számok jelentős eltérése is, úgy tűnik, hogy itt ugyanaz a helyzet, mint a munkások és a szellemiek esetében.

Az egyéb iparcikkeknel az ár- és egyéb hatás mindenütt egyértelműen pozitív, tehát e cikkek fogyasztása határozott formában reagál az árváltozásokra. A különböző társadalmi és jövedelmi csoportok közötti eltérések ez esetben nem csupán az ár- és egyéb hatások, hanem a relatív árváltozások tekintetében is elég nagyok, ami nyilván e fogyasztási csoport nagyfokú heterogenitásának a következménye.

A szolgáltatások relatív árindexe különbözően alakul a munkás-szellemi, illetve a paraszti-kettősjövedelmű rétegeknél. A munkás és szellemi rétegeknél a szolgáltatások viszonylag stabil árának megfelelően valamelyest csökkent, a paraszti és kettősjövedelmű rétegeknél viszont az új és ennek megfelelően nagyobb árszintű létesítmények növekvő számával együtt nőtt a relatív árindex. Az ár- és egyéb hatások azonban csak ez utóbbi két rétegnél alakultak az árváltozásokkal összhangban, azaz a két rétegnél a számított ár- és egyéb hatás negatív. A munkásokra és szellemiekre vonatkozó számok azonban a szolgáltatásokkal kapcsolatos problémákra mutatnak rá: a kínálat nem megfelelő növekedése fokozta a kielégítetlen igényeket. E két rétegnél — néhány jövedelmi kategóriát kivéve —, a csökkenő relatív árakhoz negatív ár- és egyéb hatás tartozik, azaz az alacsony szolgáltatási díjak ellenére sem növekedett a fogyasztás a jövedelemnek és árnak megfelelően.

Tekintsük most át az eredményeket *rétegek* szerint. A munkás és szellemi rétegeknél és azok valamennyi jövedelem kategóriájánál az ár- és egyéb hatások megfelelnek az árváltozások irányának. Ezért, amint látni fogjuk, a modellt sikeresen alkalmazhattuk ezekre a rétegekre, illetve kategóriákra.

A parasztságnál a redukált fogyasztás-változás a legtöbb árucsoportban nem felel meg az árváltozások irányának.

Az áremelkedések ellenére az élelmiszerek és élvezeti cikkek vásárlása jelentékeny mértékben nőtt. Részben ennek a növekedésnek a pénzvonó hatása miatt a ruházati és tartós fogyasztási cikkek vásárlása alatta maradt annak az értéknek, amelyet a jövedelem és az árváltozások megszabnak. Ebből arra következtethetünk, hogy a parasztság fogyasztási magatartása elsősorban nem az áraktól, hanem a jövedelem alakulásától, valamint egyéb, a modellben jelenleg még figyelembe nem vett tényezőktől függött. Ezért már most sejthető, hogy modellünk kevésbé jól illeszkedik a parasztság fogyasztási adataira.

Végül, ha a 4. táblázat kettős jövedelműekre vonatkozó részeredményeit megfigyeljük, azt látjuk, hogy a redukált fogyasztás-változások előjelükben megfelelnek az árváltozásoknak, de a többi réteghez viszonyítva nagyok. Ha szabad ezekből az adatokból következtetni, akkor azt állapíthatjuk meg, hogy a kettős jövedelműeknél — szemben a korábbi években tapasztaltakkal — igen nagy az árérzékenység. Természetesen szükség lesz ennek a jelenségnek a további vizsgálatára, más évek adatai alapján is.

A 4. táblázatból a fentiekben levont tanulságokat tükrözik a *keresleti egyenletek* végső alakjai is, amelyeket a következőkben fogunk ismertetni. Az itt közölt

6. táblázat

A modell számított paraméterei és egyéb jellemzői

	A jövedelemhajlékonyság	A jövedelemhajlékonyság Ft értéke ^a	t-próba	Korrelációs együttható	A relatív hibák négyzetes átlaga (%)
Munkások	-1,30	-249	1,88	-0,61	5,0
Ezen belül:					
1. kategória	-1,60	-211	3,06	-0,78	4,4
2. kategória	-1,21	-215	1,69	-0,30	8,4
3. kategória	-1,05	-233	2,15	-0,66	4,9
4. kategória	-1,07	-325	0,45	-0,18	13,1
Szellemiek	-1,32	-324	2,96	-0,77	3,6
Ezen belül:					
1. kategória	-1,21	-167	2,15	-0,66	6,2
2. kategória	-1,61	-289	1,17	-0,43	11,8
3. kategória	-1,48	-331	1,74	-0,58	4,3
4. kategória	-1,15	-389	2,21	-0,67	4,4
Parasztság	-0,66	-127	0,58	-0,23	6,1
Kettős jövedelműek	-3,15	-625	2,40	-0,70	10,1

^a) A jövedelemhajlékonyság forintértéke $c = \Phi \cdot Y/100$ kifejezi, hogy 1%-os árváltozás hány forint egy főre eső évi jövedelemváltozás hatásával ekvivalens

főleg módszertani jellegű rész az ár rugalmasságok értékelése szempontjából fontos. A számításokból levonható közgazdasági következtetések tulajdonképpen a 4. táblázattal kapcsolatos vizsgálatok más formában való megfogalmazásai lesznek.

A módszertani részben leírtak szerint a modell feltételezte, hogy a saját árhatások arányosak a relatív árindexek változásának és a megfelelő jövedelemrugalmasságnak szorzatával. Az egyéb hatásokat véletlen hibáknak tekintették, azaz a számításokhoz a 4. táblázatban közölt relatív árindex-változásokat, továbbá az ár- és egyéb hatásokat, valamint a már korábban meghatározott jövedelemrugalmasságokat használtuk fel. Az arányossági tényező a $(-\Phi)$ jövedelemhajlékonyság, amelynek a legkisebb négyzetek módszerével való becslése után végleges formában felírhatjuk a keresleti egyenleteket.

A 6. táblázat tartalmazza a $(-\Phi)$ jövedelemhajlékonyságra kapott eredményeket, valamint a forintértékben kifejezett $c = -\Phi \cdot y/100$ együtthatókat, amelyek megadják, hogy 1%-os árváltozás a modell szerint hány forint évi jövedelemváltozás hatásával ekvivalens. Ez a mutató az eredmények értelmezésénél fog hasznos segítséget nyújtani. A becslés megbízhatóságára vonatkozóan a t-próba értékeit tüntettük fel. A keresleti egyenletek illeszkedésének mértékét kétféle mutatószámmal jellemeztük, a korrelációs együtthatóval, valamint a százalékban kifejezett relatív hibák négyzetes átlagával. Az előbbi az árváltozás, valamint az ár- és egyéb hatás közötti kapcsolat szoroságát, az utóbbi pedig a fogyasztási értékek közelítésének pontosságát jellemzi a fogyasztás százalékában kifejezve.

A táblázatból kitűnik, hogy a kapott jövedelemhajlékonyság, s ezzel együtt a korrelációs együttható minden esetben a vártnak megfelelően negatívnak adódott, azaz helyesen tükrözi az árváltozás hatását a fogyasztásra. Vizsgáljuk meg fogyasztói csoportonként, részletesen is az eredményeket, párhuzamosan figyelembe véve három szempontot, nevezetesen a kapott paraméterek gyakorlati értelmezését, a becslés megbízhatóságát és a keresleti egyenleteknek az adatokhoz való illeszkedését.

A munkás és szellemi rétegeknél a jövedelemhajlékonyságok -1 és -2 közötti értékeket vesznek fel, a kategoriánkénti eredmények pedig összhangban vannak egymással, ugyanis a jövedelemhajlékonyság értéke a jövedelem növekedésével általában monoton csökken. Ez a csökkenés azonban nem túl nagy, amit az is mutat, hogy a c együtthatók a jövedelem növekedésével valamelyest nőnek. A modell leírásánál ismertettük a jövedelemhajlékonyságnak azt a tulajdonságát, hogy megközelítőleg kifejezi a saját ár- és jövedelemrugalmasságok arányát. Így, mielőtt magukat a rugalmasságokat tárgyalnánk, már most megállapíthatjuk, hogy a keresleti modellel az erre a két rétegre számított ár rugalmasságok nagyobbak a jövedelemrugalmasságoknál. Ugyanakkor a jövedelemhajlékonyság csökkenése azt jelzi, hogy az ár iránti érzékenység a jövedelem növekedésével csökken. A jövedelemhajlékonyságnak a kereszt-ár rugalmasságok meghatározásában játszott szerepére a fejezet végén visszatérünk.

Amellett, hogy a jövedelemhajlékonyságra valamint a c együtthatóra kapott becslések jól értelmezhetők, el kell mondanunk, hogy a statisztikai mutatószámok nem minden esetben megfelelőek. Így a t-próba értéke néhány esetben nem éri el a 90%-os valószínűségi szintnek megfelelő 1,94 értéket. Bár az illeszkedés mértékét kifejező korrelációs együttható előjele negatív, abszolút értéke azonban ugyanezekben az esetekben alacsony.

Ez azt jelenti, hogy bár a fogyasztás változását a jövedelemhatás mellett az ár is jelentősen befolyásolja, ugyanakkor az egyéb tényezők is komoly szerepet játszanak. Jobb képet kapunk, ha a közelítés pontosságát kifejező mutatószámot, a relatív hibák négyzetes átlagát vizsgáljuk. Természetesen a későbbiekben az adatbázis kiszélesítésével és a modell pontosításával ezek az értékek is csökkenthetők lesznek.

A modell hibájának, valamint a fogyasztásra ható egyes tényezőknek az arányát szemlélteti a 7. táblázat is. Mielőtt áttérnénk a 6. táblázat parasztságra és kettős jövedelműekre vonatkozó eredményeire, ezzel a táblázattal fogunk részletesebben foglalkozni. Itt — bár csak a munkás és szellemi rétegekre — a fogyasztás 1972 és 1974 közötti százalékos változását felbontottuk a modellel számított összetevőkre. Erre a modell konkrét alakja adott lehetőséget, ugyanis csak az 1972. és 1974. közötti reáljövedelem — valamint relatív árindex változásokat kellett behelyettesíteni. Látható, hogy a vizsgált időszakban a fogyasztás változását elsősorban a jövedelem növekedése szabta meg. Az árváltozás hatása kisebb az egyéb tényezők hatásánál, amelyet a modell hibájaként foghatunk fel. Ez azonban következik abból, hogy 1972. és 1974. között csak az élvezeti cikkek ára változott jelentősebben.

A 7. táblázat sorai még világosabban tükrözik azokat a sajátosságokat, amelyeket már korábban a 4. táblázat elemzések soroltunk fel. Látható, hogy mindkét rétegnél az élelmiszerfogyasztás, valamint a szolgáltatások igénybevétele alatta marad a jövedelem- és árváltozások alapján várhatónak. Az élvezeti cikkek fogyasztását a modell jól írja le, a fogyasztás alacsony növekedésének a jelentős áremelkedés az oka. A táblázat is tükrözi a két réteg között a tartós fogyasztási cikkek vásárlásaiban mutatkozó különbséget, amelyet az autóvásárlásokkal hozhatunk kapcsolatba.

7. táblázat

A fogyasztás 1972 és 1974 közötti változásának összetevői^a

	A fogyasztás relatív változása	A reáljöve- delem változásának hatása	A relatív árváltozás hatása	Egyéb hatások	Egyéb hatások
	százalékszámok				Ft/ft
Munkások:					
Élelmiszer	4,1 =	7,7	+ 0,1	- 3,7	-187
Évezeti cikkek	5,0 =	12,1	- 7,6	+ 0,5	16
Ruházati cikkek	14,2 =	9,5	+ 1,5	+ 3,2	82
Fűtés és házt. energ.	11,9 =	7,1	+ 1,2	+ 3,6	28
Tartós fogy. cikkek	3,9 =	12,3	+ 0,9	- 9,3	-154
Egyéb iparcikkek	19,2 =	11,3	+ 3,3	+ 4,6	100
Szolgáltatás	14,3 =	14,1	+ 2,6	- 2,4	-75
Szellemiek					
Élelmiszer	4,1 =	5,3	- 0,1	- 1,1	-65
Évezeti cikkek	2,9 =	9,6	- 7,3	+ 0,6	9
Ruházati cikkek	7,3 =	7,2	+ 1,2	- 1,1	-38
Fűtés és házt. energ.	12,4 =	6,2	+ 1,4	+ 4,8	45
Tartós fogy. cikkek	18,5 =	14,9	+ 0,9	+ 2,7	64
Egyéb iparcikkek	20,3 =	10,7	+ 2,8	+ 6,8	205
Szolgáltatás	12,6 =	11,9	+ 2,2	- 1,5	-75

^aAz 1972. évi egy főre eső átlagos fogyasztásra vetítve

Visszatérve a 6. táblázat eddig még nem elemzett, a parasztságra és a kettős jövedelműekre vonatkozó soraira, megfigyelhetjük, hogy bár mindkét rétegnél negatív jövedelemhajlékonyságot kaptunk, a statisztikai mutatószámok valamint a kapott jövedelemhajlékonyság értelmezése problémákat vet fel. A parasztságnál az alacsony korrelációs együttható az ár és a fogyasztás laza kapcsolatára utal. Emiatt a jövedelemhajlékonyságra adott becslés standard hibája is nagyobb, mint maga a becslött paraméter: a t-próba értéke 1-nél kisebb. Mindez a 4. táblázat elmezése alapján várható volt.

Ehhez hasonlóan nem meglepő, hogy a kettős jövedelműek jövedelemhajlékonysága igen nagy. Ugyanakkor meg kell említenünk, hogy a becslés biztonságára vonatkozó t-próba érték és az árnak a fogyasztásra gyakorolt hatását jellemző korrelációs együttható is meglepően magas. A jövedelemhajlékonyság nagy értéke — néhány árucsoportra —3 és —4 közötti saját árugalmasságokat eredményez. Ezért további évek adatain is ellenőrizni kell, hogy a kettős jövedelműek ilyen nagy mértékű árérzékenysége reális-e.

A jövedelemhajlékonyság ismeretében az (5)–(6) képletek alapján kiszámítottuk a modell által becslött *árugalmasságokat*. A saját árugalmasságokat mind a négy rétegre, a munkás és szellemi rétegen belül az összes jövedelmi kategóriára a 8. táblázat tartalmazza. Mint korábban említettük, a másik két rétegnél a megfelelő árindexek hiánya miatt jövedelmi kategóriákra bontást nem számoltunk. A jövedelemhajlékonyságra kapott becslésekről írtaknak megfelelően magukat a teljes paraszti és kettős jövedelmi rétegekre kapott árugalmasságokat sem fogadhatjuk el kellő biztonsággal. A munkás és szellemi rétegek saját árugalmasságait megfigyelve a legszembeeszkőbb tanulság az, hogy a kapott értékek általában nagyobbak az idősoros modellekkel kapott hazai és külföldi becsléseknél (vö. [5], [2]). Ez összhangban van azzal a tapasztalattal, hogy az idősoros számításoknál — összehasonlítva a keresztmetszeti-ekkel — a jövedelem szerepe a fogyasztásban jobban érvényesül, mint az árváltozásoké. A kapott árugalmasságokat a jövedelemrugalmasságokkal összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a modell tulajdonságainak következtében ezek valóban megközelítőleg arányosak egymással. Annak megfelelően, hogy

8. táblázat

A saját árugalmasságok jövedelmi kategóriák szerinti részletezése

	Élelmiszer	Élvezeti cikkek	Ruházati cikkek	Fűtés, hűzt., energia	Tartós fogy. cikkek	Egyéb ipar- cikkek	Szolgál- tatás
Munkások	— 0,98	— 1,37	— 1,14	— 0,88	— 1,51	— 1,32	— 1,56
Ezen belül:							
1. jövedelmi kategória	— 1,21	— 1,57	— 1,75	— 0,71	— 2,17	— 1,70	— 1,97
2. jövedelmi kategória	— 1,05	— 1,37	— 1,03	— 0,81	— 1,39	— 1,21	— 1,62
3. jövedelmi kategória	— 0,87	— 1,16	— 0,81	— 0,74	— 1,04	— 1,06	— 1,29
4. jövedelmi kategória	— 0,61	— 0,95	— 0,65	— 0,74	— 1,27	— 1,09	— 1,24
Szellemiek	— 0,78	— 1,20	— 1,02	— 0,85	— 1,41	— 1,20	— 1,34
Ezen belül:							
1. jövedelmi kategória	— 0,86	— 1,12	— 1,41	— 0,77	— 1,75	— 1,08	— 1,70
2. jövedelmi kategória	— 1,06	— 1,57	— 1,35	— 1,06	— 2,46	— 1,81	— 2,02
3. jövedelmi kategória	— 0,90	— 1,50	— 1,17	— 0,99	— 2,18	— 1,59	— 1,77
4. jövedelmikategória	— 0,69	— 1,09	— 0,48	— 0,96	— 1,66	— 1,06	— 1,25

az arányossági tényező a $(-\Phi)$, az is megfigyelhető, hogy az árérzékenység a munkásoknál a jövedelem növekedésével csökken, a szellemieknél ez a jelenség annyiban módosul, hogy a legalacsonyabb jövedelmi kategóriára jellemző ár-rugalmasságok viszonylag kicsik.

A munkás és szellemi rétegeken belül minden kategóriára kiszámoltuk a kereszt-árugalmasságokat is, azonban helyszűke miatt itt csak a teljes rétegekre vonatkozókat közöljük, őket a főatlóban levő saját árugalmasságokkal együtt a 9. táblázat tartalmazza.

9. táblázat

Az árugalmasságok mátrixai

	Élelmi- szer	Élvezeti cikkek	Ruházati cikkek	Fűtés, házt. energia	Tartós fogy. cikkek	Egyéb ipar- cikkek	Szolgál- tatás
Munkások							
Élelmiszer	- 0,98	0,05	0,02	0,00	0,04	0,03	0,12
Élvezeti cikkek	0,01	- 1,37	0,02	- 0,01	0,06	0,08	0,17
Ruházati cikkek	- 0,01	0,06	- 1,14	- 0,01	0,05	0,04	0,19
Fűtés, házt.-i energia	0,00	0,05	0,01	- 0,88	0,03	0,02	0,12
Tartós fogy. cikkek	- 0,01	0,08	0,03	- 0,01	- 1,51	0,05	0,14
Egyéb iparcikkek	- 0,01	0,07	0,02	0,00	0,05	- 1,32	0,13
Szolgáltatás	- 0,01	0,10	0,03	0,00	0,06	0,06	- 1,56
Szellemiek							
Élelmiszer	- 0,80	0,02	0,01	0,00	0,05	0,04	0,09
Élvezeti cikkek	- 0,06	- 1,28	0,00	- 0,01	0,10	0,06	0,14
Ruházati cikkek	- 0,04	0,04	- 1,04	0,00	0,08	0,05	0,11
Fűtés, háztart. energia	- 0,01	0,03	0,01	- 0,89	0,07	0,04	0,14
Tartós fogy. cikkek	- 0,10	0,08	0,01	- 0,01	- 1,87	0,09	0,22
Egyéb iparcikkek	- 0,07	0,06	0,01	0,00	0,11	- 1,40	0,16
Szolgáltatás	- 0,08	0,06	0,01	- 0,01	0,13	0,07	- 1,49

A kereszt-árugalmasságokból ugyanis sok következtetés már nem vonható le, ezek a modell tulajdonságainak megfelelően alakultak. Így nem tükrözik az egyes cikkesoportok közötti fajlagos kereszthatásokat. A táblázatban található keresztárugalmasságok- csak az ún. másodlagos kereszthatást számszerűsítik. Ez a hatás azért jön létre, mert a megváltozott árúciók fordított kiadás is megváltozik, s ez szükségképpen vagy pénzt von el a többi cikktől, vagy ellenkezőleg, mint felesleg jelentkezik. Mint a

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{q_i} = q_i + p_i \frac{\partial q_i}{\partial p_i} = q_i (1 + e_{ii})$$

összefüggésből meggyőződhetünk, attól függően, hogy a saját árugalmasság abszolút értéke 1-nél kisebb-e vagy nagyobb, a kiadás változása a saját ár változásával megegyező, illetve ellenkező irányú. A munkás és szellemi rétegeknél az árugalmasságok — annak következtében, hogy $\Phi > 1$ — általában 1-nél nagyobb abszolút értékűek. Így a rugalmasabb tartós fogyasztási cikkek, az élvezeti és ruházati cikkek, az egyéb iparcikkek és szolgáltatások drágulására a fogyasztó csökkenti a cikkesoportra költött kiadásokat és a megmaradt pénzt más cikkekre fordítja. Ezeknek a cikkesoportoknak az oszlopaiban ezért pozitív kereszt-árugalmassági együtthatókat találhatunk. Viszont a kevésbé rugalmas

élelmiszer árának drágulásakor a fogyasztó ragaszkodik a megszokott mennyiséghez, ezért kénytelen az ehhez szükséges pénzt elvonni a többi cikktől. Ez mutatkozik meg abban, hogy az élelmiszer, valamint a fűtés és háztartási energia oszlopában negatív értékeket találhatunk.

Következtetések

Ebben a dolgozatban összefoglaltuk annak a vizsgálatnak az első eredményeit, amely a társadalmi rétegek fogyasztását keresztszatszeti adatok felhasználásával jövedelmi kategóriák szerinti bontásban akarja leírni. Az első számítások összesen csak három év adatainak felhasználásával folytak, ennek ellenére fontos következtetésekre vezettek. Megállapítható volt, hogy a munkás és szellemi rétegek fogyasztása a jövedelem hatásán kívül az árváltozásokra is élesen reagál. A parasztságnál ez a hatás kisebb volt, a kettős jövedelműeknél pedig további vizsgálatokra van szükség, hogy az ár szerepét pontosabban meghatározzuk. Emellett mindegyik rétegnél jelentős a súlyuk egyéb tényezőknek, amelyeket ezután kell majd megvizsgálnunk.

Az árváltozások hatásának becslésénél szerepet játszottak a modell speciális tulajdonságai, ugyanis a jelenleg felhasznált adatbázis önmagában nem volt elég az ár rugalmasságok megbízható becslésére. Ezért a munka későbbi szakaszában több év keresztszatszeti adatainak összehasonlítását kell elvégezni annak az ellenőrzésére, hogy a modellben tett feltevések érvényesek-e, vagy helyükre milyen összefüggések állíthatók. Végül az adatbázis időbeli kiterjesztése mellett szükség lesz az árucsoportok nagyobb fokú dezaggregálására is. Erre egyrészt a gyakorlati felhasználhatóság igénye vezet, másrészt az a körülmény, hogy nagyobb aggregáltsági szinten az árucsoportok inhomogenitása erősen tompítja a fogyasztásra jellemző tulajdonságok érvényesülését.

(Beérkezett: 1978. július 21-én.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. BENEDECKI J.-NÉ: A rugalmassági számítások gazdasági alkalmazásának néhány módszertani kérdése. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1964.
2. BRIDGE, J. L.: Applied Econometrics. North Holland, 1971.
3. ÉLTETŐ Ö.: A fogyasztói kiadások lineáris modelljének néhány tulajdonsága a hazai tapasztalatok tükrében. VII. Magyar Operációkutatási Konferencia, Pécs, 1977.
4. ENYEDI J.: A fogyasztói kiadások lineáris modellje. Országos Tervhivatal, 1977. június.
5. HULYÁK K.—LOSONCZY I.-NÉ: Keresleti modellek számszerűsítése idősorok alapján. Szigma, 1979. január.
6. SZAKOLCZAI GY.—HULYÁK K.—LOSONCZY I.-NÉ—MUSZÉLY GY.: Klasszikus fogyasztáselemzési modellek felhasználása a fogyasztói árpolitika megalapozására. Közgazdasági Szemle, 1979. január.
7. THEIL H.: Közgazdaságtan és információelmélet. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1970.
8. Fogyasztási cikkek és szolgáltatások jövedelemrugalmasságai. KSH Időszaki Közlemények, 246. kötet. 1972.
9. A fogyasztói árak alakulása a lakosság egyes rétegeinél, 1973., 1974., KSH Időszaki Közlemények.
10. Háztartástatisztika. 1972., 1973., 1974. KSH Időszaki Közlemények.
11. A klasszikus fogyasztáselemzési modellek számszerűsítésének eredményei. I. Módszertan és értékelés. II. Ábrák és táblázatok. Számítógéppalkalmazási Kutató Intézet. 1978. március.

QUANTIFICATION OF A CONSUMPTION MODEL ON THE BASIS OF CROSS-SECTIONAL DATA

In this paper a method elaborated for the quantification of consumption analysis model on the basis of cross-sectional data as well as the conclusions drawn from the first computations are presented. This work was aimed at determining income and price effects within social strata also in a breakdown according to income categories. By comparing household-statistical samples of some years estimates can be given also for price elasticities beside income elasticities. The latter were determined from cross-sectional data empirically, while the former by means of a linear model established for relative changes in consumption, income and prices, respectively. In order to decrease the number of unknown parameters it was supposed that equations of demand are obtained from the maximization of an additive utility function.

The first computations were made by utilizing data of three years only, nevertheless, some important conclusions could be drawn. It could be stated that consumption of blue collar and white collar workers vividly reacted, beside income changes, also to changes in prices. In the case of peasantry this effect was smaller, while in that of those with double income further investigations are required in order to determine the role of price more precisely. Besides, some other factors have an important part, too, in the case of each stratum, whose study is a similarly important task.

ЧИСЛОВАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ПОТРЕБЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ СЕМЕЙНЫХ БЮДЖЕТОВ

В этой работе представлен метод, разработанный для числовой реализации модели потребления на основе данных семейных бюджетов а также выводы, которые могут быть сделаны из первых расчетов. Кроме того, работа имела целью определение влияния доход и цен соответственно категориям доходов общественных групп. Сравнения статистические выборки по бюджетам домашних хозяйств за несколько лет, наряду с эластичностью по доходу можно оценить и эластичность ценам. Первые были определены на основании данных семейных бюджетов эмпирическим путем, а последние с помощью линейной модели, основанной на относительных изменениях потребления, дохода и цен. С целью сокращения числа неизвестных параметров предполагалось, что уравнения спроса вытекают из максимизации аддитивной функции полезности.

Первые расчеты были проведены с использованием данных лишь за три года, но несмотря на это были сделаны важные выводы. Можно было констатировать, что потребление рабочих и служащих заметно реагирует не только на изменение доходов, но и на изменение цен. У крестьянства это влияние было меньше, а в категории лиц с двойным источником доходов необходимо проводить дополнительные исследования с целью более точного определения роли цены. Наряду с этим у каждой группы значительную роль играют и другие факторы, определение которых также является важной задачей.

Egy terjedési folyamat elemzése (A hólabda-modell)

Bevezetés

Az elmúlt években néhány alkalommal egy érdekes játék terjedt el hetek alatt szinte az egész országban. Egyre többen kaptak olyan levelezőlapot, amely a játékba való bekapcsolódásra szólított fel. Akar-e Ön 5 hét alatt 25 000 Ft-ot nyerni? Ha igen, küldjön 10 Ft-ot egy megadott címre és gondoskodjék arról, hogy további 5 személy bekapcsolódjék a játékba! (Meg kell jegyezni, hogy ez a „megadott cím” egy korábbi játékos címe volt.) Ha mindenki becsületesen játszik, 5 hét alatt 25 000 Ft üti a markát!

A szöveg természetesen nem pontosan így szólt, de a játék lényege ez volt. Egy vagy több személy elindította a „hólabdát”, s az „becsületesen” ment is egészen addig, amíg eljutott arra a pontra, ahol már szinte mindenki ismert, s ha pontosan nem is tudták, de érezték, hogy ezen már nem lehet nyerni. A játékot természetesen betiltották, hiszen könnyen belátható, hogy egyesek — a játék elindítói, illetve azok, akik az elején bekapcsolódtak — valóban nagy összeget nyernek, mások viszont, ha kicsiben is, de pontosan ezt az összeget veszítik el. A „hólabda” tehát megállt, de matematikai elemzése mégsem haszontalan, hiszen belátható, hogy sok társadalmi, gazdasági folyamat „hólabda-szerűen” zajlik le, s közös *fejlődési, növekedési törvényszerűségeik* éppen a „steril hólabda” modell segítségével írhatók le.

Az információ terjedése, a fogyasztói szokások (divat) elterjedése, a nagyértékű, tartós fogyasztási cikkek elterjedése éppen úgy összefüggésben van a hólabda folyamattal, mint például a fertőző betegségek elterjedése. Mindezen folyamatok közös jellemzője az, hogy adott egy véges számú elemet tartalmazó zárt közeg, melynek elemei közül az induló állapotban egy, vagy néhány bizonyos kitüntetett tulajdonsággal rendelkezik (az információ birtokában van, van színes televíziója, fertőző beteg stb.). Ez a kitüntetett tulajdonság terjed, mégpedig úgy, hogy időegység alatt minden elem átlagosan a további elemnek adja tovább egészen addig, ameddig az összes elem nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. E modellel kapcsolatban több feladat is megfogalmazható. Keressük mindenen előtt a folyamatot leíró függvényt, vizsgáljuk ennek tulajdonságait, majd adott megfigyelések esetén becsüljük a folyamat paramétereit, előre jelezzük várható alakulását és a prognózisra megbízhatósági intervallumot készítünk.

A fenti leírás természetesen erősen leegyszerűsített, modellszerű. A későbbiek során — elsősorban a gazdasági alkalmazásokat tekintve — látni fogjuk, hogy a különböző folyamatok nem teljesen analógok a hólabda folyamattal, viszont az is nyilvánvaló, hogy *alapmotivációjuk* megegyezik, így a hólabda folyamat elemzése jó kiindulópontot jelent ezeknek a folyamatoknak a vizsgálatához. Ezen belül is — most már a közgazdasági jellegű feladatnál maradva — első-

sorban a fogyasztás, a fogyasztói szokások, a divat és más hasonló folyamatok időbeli lefutásának elméleti és ökonometria vizsgálatára alkalmazható ez a modell.

A hasonló jelenségeket a matematikai-közgazdaságtan általában a *logisztikus-függvény* segítségével vizsgálja. Ennek a függvénynek a tulajdonságai általánosan ismertek [4], [7], paramétereinek becslésére különféle eljárásokat dolgoztak ki [1], [3], [6], és létjogosultságát nagyszámú, sikeres gyakorlati alkalmazás is bizonyítja. Valószínűnek látszik, hogy hasonló folyamatokkal más tudományok (pl. fizika, biológia stb.) is foglalkoznak, de ezeknek a kutatásoknak az eredményei a közgazdasági kutatók számára ismeretlenek, így természetesen eredményeiket sem hasznosíthatják. (Ennek kapcsán felmerül a különböző tudományok, tudományágak közös fejlődési törvényszerűségeit együttesen vizsgáló, interdiszciplináris, rendszerszemléletű megközelítés — bizonyos vonatkozásokban már régóta sürgetett — szükségessége.)

A cikk első része a hólabda modell elméleti vizsgálatával foglalkozik. Kimutatja, hogy a legegyszerűbb, elméleti esetben a folyamatra vonatkozó, egymástól csak csekély mértékben különböző feltételezések milyen modellre és milyen növekedési folyamatra vezetnek. Megvizsgálja tulajdonságait és a legegyszerűbb esetre megadja a növekedési függvény explicit megoldását is. A második fő rész a gyakorlati vonatkozásokat tárgyalja. Kiterjeszti az elméleti modellt úgy, hogy az már numerikus felhasználásra is alkalmas legyen, összehasonlítja a „hólabda” folyamatot a logisztikus folyamattal, majd konkrét példán is bemutatja a hólabda folyamat ökonometria alkalmazását. A cikket az eredményeknek és a megoldatlan problémáknak az összefoglalása és az irodalomjegyzék zárja.

1. Az elméleti modell

Vezessük be a következő jelöléseket:

N : az adott zárt közeg elemeinek száma

n : a vizsgált, kitüntetett tulajdonság terjedési sebessége; jelentése az, hogy Δt idő alatt egy kitüntetett elem n elemnek adja át ezt a tulajdonságot;

s_t : a kitüntetett tulajdonsággal rendelkezők száma a t -ik időpontban.

A fenti mennyiségekre az alábbi relációknak kell teljesülniük:

$0 < N < \infty$ (hiszen véges számú elemből áll az alaphalmaz);

$0 < n < \infty$ és integer (hiszen n darabszámot jelöl);

$0 < s_t < N$ (definíció szerint);

$0 < t < \infty$ és integer (hiszen a folyamat lefutását diszkrét időpontokon vizsgáljuk).

A további vizsgálatok során csak az $n = 1$ esettel foglalkozunk, ami az elméleti modell esetében nem jelenti az általánosság megsértését, hiszen Δt tetszés szerint választható meg, úgy, hogy az $n = 1$ éppen teljesüljön.

1. 1. A modellek megfogalmazása és a folyamat leírása

Az elméleti modellt — melynek alapkérdését már a bevezetőben megadtuk — két változatban fogalmazzuk meg. Mindkét változat közös jellemzője, hogy egy kitüntetett tulajdonsággal rendelkező elem ezt a tulajdonságát a folyamat során nem veszti el, sőt aktív marad, azaz a tulajdonság terjesztésében részt

vesz. Közös jellemzője a két változatnak az is, hogy a kitüntetett elemek a folyamat lezajlása során egyenlő valószínűséggel adják át tulajdonságukat az összes többi elemnek. Itt meg kell jegyezni, hogy a tulajdonság terjesztésének számszerűsítésekor valamely elem saját maga felé való terjesztését (azaz a tulajdonság terjesztésének elmaradását) is figyelembe vettük. Ez a megoldás vitatható, és elsősorban az így adódó egyszerűbb formulák indokolják, ugyanakkor megjegyzendő, hogy az „önfertőzés” kihagyása esetén a korrektebb megoldás elvi útja teljesen megegyezik az itt leírtakkal, gyakorlatilag pedig — főként elég nagy N esetén — a két megoldás egyenértékű.

Az első (ún. alapmodell) változat fontos feltételezése az, hogy a tulajdonság terjedése meghatározott idő-intervallumokban történik, egy időintervallumon belül a fertőzés időbeli sorrendiségétől eltekint, hiszen ezen az intervallumon belül az újonnan megfertőzött elemek még nem aktívak, a kitüntetett tulajdonság csak bizonyos késleltetéssel, lappangási idővel terjed. Ez az eset fordul elő a hólabda folyamatnál, ahol — legalábbis elvben — a kitüntetett tulajdonság egy hetes kvantumokban terjed, de közel áll ehhez a modellhez a lappangási idővel járó fertőző betegségek terjedési folyamata is.

A második (az ún. továbbfejlesztett) modell ezzel szemben a megfertőzött elemek közt időbeli sorrendiséget tételez fel, azaz úgy számol, hogy egy elem megfertőződésekor azonnal aktív lesz, így a következő fertőzés kialakításakor már szerepet játszhat. Ez az előző — szakaszos — terjedéssel szemben valamilyen folyamatos terjedést ír le. Úgy tűnik, hogy ez a második eset realisztikusabb, az alapmodell kezelése, megoldása viszont egyszerűbb. Mint később kimutatjuk, a két változat egymáshoz közel álló eredményeket szolgáltat. Végül utalni kell arra, hogy a modell az itt specifikált két változaton kívül nyilvánvalóan több változatban is felírható. Egy ilyen változat lehet például az, amikor egy elem egy bizonyos mennyiségű információt ad át a másiknak, amely azonban csak akkor aktivizálódik, ha a kapott információ volumene meghalad egy meghatározott határt. Valószínűnek látszik, hogy ezek a feladatok is hasonló folyamatokhoz vezetnek, bár itt csak az említett két változatot vizsgáltuk meg részletesebben.

1.1.1. Az alapmodell

Keressük tehát a kiemelt tulajdonsággal rendelkező elemek számának időbeli alakulását, feltéve, hogy a tulajdonság a Δt időintervallumon belül időbeli sorrendiség feltételezése nélkül terjed. Ekkor a kitüntetett elemek száma $t = 1$ időpontban

$$s_1 = s_0 + s_0 - g_0 = 2s_0 - g_0$$

lesz, azaz a kiinduló ($t = 0$) időpontban a kitüntetett elemek száma (s_0), azok száma akiknek ezek továbbadták s_0 , (hiszen $n = 1$ feltétel volt) és levonandó azon elemek száma, amelyek a $t = 0$ időpontban már rendelkeztek a tulajdonsággal és másodszor is megkapták. Látható, hogy g_0 valószínűségi változó, mely a $(0; s_0)$ intervallumban vehet fel egészszámú értéket. Mivel a további elemzések során g_0 (illetve g_t) fontos szerepet játszik, vizsgáljuk meg eloszlását!

Azonnal látható, hogy g_0 eloszlásának meghatározásakor egy egyszerű mintavételi feladattal állunk szemben. Adott az összes elem száma N , mely két csoportba sorolható

- a kiemelt tulajdonsággal rendelkezik s_0 db;
- nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal $N - s_0$ db.

Vegyünk egy s_0 elemű mintát, és vizsgáljuk meg mi a valószínűsége annak, hogy a mintában éppen k db a kiemelt tulajdonsággal rendelkező elem lesz!

$$\begin{aligned}
 P(g_0 = 0) &= \binom{s_0}{0} \left(\frac{s_0}{N}\right)^0 \left(\frac{N-s_0}{N}\right)^{s_0} \\
 P(g_0 = 1) &= \binom{s_0}{1} \left(\frac{s_0}{N}\right)^1 \left(\frac{N-s_0}{N}\right)^{s_0-1} \\
 &\vdots \\
 P(g_0 = k) &= \binom{s_0}{k} \left(\frac{s_0}{N}\right)^k \left(\frac{N-s_0}{N}\right)^{s_0-k} \quad (k \leq s_0) \\
 &\vdots \\
 P(g_0 = s_0) &= \binom{s_0}{s_0} \left(\frac{s_0}{N}\right)^{s_0} \left(\frac{N-s_0}{N}\right)^0.
 \end{aligned}$$

A fenti eloszlás ismeretében a folyamat már számítógépen szimulálható, de tulajdonságainak jobb megismerése érdekében határozzuk meg a várható értéket is. Ismeretes, hogy a fenti binomiális eloszlás várható értéke

$$E(g_0) = s_0 \frac{s_0}{N} = \frac{s_0^2}{N},$$

s ezt felhasználva s_1 várható értéke

$$E(s_1 | s_0) = s_0 + s_0 - E(g_0) = 2s_0 - \frac{s_0^2}{N} \quad \text{lesz.}$$

Mivel a folyamat a többi időpontra is hasonlóan írható fel:

$$s_2 = 2s_1 - g_1$$

$$\vdots$$

$$s_{t+1} = 2s_t - g_t,$$

a várható értékekre is igaz, hogy

$$E(s_2 | s_1) = 2s_1 - \frac{s_1^2}{N}$$

$$\vdots$$

$$E(s_{t+1} | s_t) = 2s_t - \frac{s_t^2}{N}.$$

A folyamat időbeli lefutásának *várható értékét* tehát egy elsőrendű, nemlineáris rekurzív formula határozza meg, ami természetesen felírható differencia-egyenlet alakjában is az alábbi módon:

$$\Delta s_t = s_{t+1} - s_t = s_t - \frac{s_t^2}{N} = s_t \left(1 - \frac{s_t}{N} \right).$$

Ez a forma egyértelműen meghatározza a folyamat várható értékét minden t időpontra, de mielőtt elemeznénk, illetve explicite időfüggvényre megoldanánk, felírjuk a továbbfejlesztett feladatot.

1.1.2. A továbbfejlesztett modell

Ez a modell — mint arra már utaltunk — csupán abban különbözik az előzőtől, hogy itt egy elem a megfelelő tulajdonságot nem csak egy másiktól kaphatja meg. A modellt — az előző jelölések megtartásával — a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 + s_0 - \tilde{g}_0 = s_0 + \tilde{h}_0 \\ s_2 &= s_1 + s_1 - \tilde{g}_1 = s_1 + \tilde{h}_1 \\ &\vdots \\ s_{t+1} &= s_t + s_t - \tilde{g}_t = s_t + \tilde{h}_t, \end{aligned}$$

ahol $\tilde{h}_t$ azon elemek számát jelöli, amelyek a $(t; t+1)$ időintervallumban a kiemelt tulajdonságot megkapták. Keresendő $\tilde{h}_t$ eloszlása és várható értéke, melyek segítségével a folyamat szimulálható, illetve várható értéke felírható. (Az itt következő levezetés során az egyszerűség kedvéért a t indexet elhagyjuk.)

Definiáljunk egy s elemű $z = (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_s)$ vektort a következőképpen

$\xi_i = 0$, ha az i -edik elem olyan elemnek adja át a tulajdonságot, amely már rendelkezett vele;

$\xi_i = 1$, ha a tulajdonságot olyan elem kapja, amely még nem rendelkezett vele.

Nyilvánvaló, hogy $\tilde{h}$ a 0 értéket csak úgy veheti fel, ha minden elem csak már „fertőzött” elemnek adja át a tulajdonságot, azaz valamennyi ξ_i 0 értéket vesz fel, tehát

$$P(h=0) = P(\xi_1=0; \dots \xi_s=0).$$

$\tilde{h}$ az 1 értéket többféleképpen veheti fel. Vagy az első elem talál „új, még nem fertőzött” elemet és a többi nem, vagy a második stb. . . Fontos megjegyezni, hogy az egyes elemek aktivizálódása közt *időbeli sorrendiséget* tételeztünk fel. Ez jogos lehet abban az esetben, ha egy homogén sokaságot vizsgálunk, hiszen két „fertőzés” tökéletes időbeli egybeesése gyakorlatilag kizárt. Ezért pl. a második elem „fertőzési esélyei” függnak attól, hogy az első elem talált-e új, még nem fertőzött elemet a mintában, azaz ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók egymástól *nem függetlenek*. A megfelelő valószínűségek az elmondottak értelmében a következőképpen írhatók fel:

$$\begin{aligned}
P(\tilde{k} = 1) &= P(\xi_1 = 1) P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 1) P(\xi_3 = 0 \mid \xi_1 + \xi_2 = 1) + \dots \\
&+ P(\xi_1 = 0) P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 0) P(\xi_3 = 0 \mid \xi_1 + \xi_2 = 1) + \dots \\
&\vdots \\
&+ P\left(\xi_s = 1 \mid \sum_{i=1}^{s-1} \xi_i = 0\right) \\
&\vdots \\
P(\tilde{k} = k) &= P(\xi_1 = 1) P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1) \dots P\left(\xi_{k+1} = 0 \mid \sum_{i=1}^k \xi_i = k\right) + \dots \\
&\vdots \\
P(\tilde{k} = s) &= P(\xi_1 = 1) P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1) \dots P\left(\xi_s = 1 \mid \sum_{i=1}^{s-1} \xi_i = s-1\right).
\end{aligned}$$

Látható, hogy $\tilde{k}$ eloszlása, bár meglehetősen bonyolult, a folyamat szimulációjára alkalmas¹, de zárt formában aligha oldható meg. Meghatározható viszont $\tilde{k}$ várható értéke az alábbi módon:

$$\begin{aligned}
E(\tilde{k}) &= E(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_s) = E(\xi_1) + E(\xi_2) + \dots + E(\xi_s) \\
E(\xi_1) &= \frac{N-s}{N} \\
E(\xi_2) &= E(\xi_2 \mid \xi_1 = 0) P(\xi_1 = 0) + E(\xi_2 \mid \xi_1 = 1) P(\xi_1 = 1) = \\
&= \frac{N-s}{N} \cdot \frac{s}{N} + \frac{N-s-1}{N} \cdot \frac{N-s}{N} = \frac{N-s}{N} \left(\frac{N-1}{N} \right) = \\
&= \frac{N-s}{N} - \frac{1}{N} \frac{N-s}{N} = E(\xi_1) - \frac{1}{N} E(\xi_1).
\end{aligned}$$

Általánosságban is felírható, hogy

$$\begin{aligned}
E(\xi_k) &= E\left(\xi_k \mid \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = 0\right) P\left(\sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = 0\right) + \\
&+ E\left(\xi_k \mid \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = 1\right) P\left(\sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = 1\right) + \\
&\vdots \\
&+ E\left(\xi_k \mid \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = k-1\right) P\left(\sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = k-1\right) = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} E\left(\xi_k \mid \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = j\right) P\left(\sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = j\right). \quad (1)
\end{aligned}$$

¹ Erre F. Liska Tibor végzett kísérleti számításokat.

Könnyen belátható, hogy

$$E\left(\xi_k \mid \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = j\right) = \frac{N - s - j}{N}$$

(ez ξ_i definíciójából következik), s így az (1) formula az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} E(\xi_k) &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{N - s - j}{N} P\left(\sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = j\right) = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{N - s}{N} P\left(\sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = j\right) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{N} P\left(\sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = j\right). \end{aligned}$$

Mivel

$$\sum_{j=0}^{k-1} P\left(\sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = j\right) = 1$$

és

$$\sum_{j=0}^{k-1} j P\left(\sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = j\right) = E \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i = \sum_{i=1}^{k-1} E(\xi_i),$$

ξ_k várható értékre az alábbi összefüggés adódik

$$E(\xi_k) = \frac{N - s}{N} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k-1} E(\xi_i). \quad (2)$$

A (2) képletből teljes indukcióval belátható, hogy az alábbi rekurzió érvényes

$$E(\xi_k) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(\xi_{k-1}), \quad (3)$$

hiszen

$$E(\xi_{k-1}) = \frac{N - s}{N} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k-2} E(\xi_i)$$

és

$$\begin{aligned} E(\xi_k) &= \frac{N - s}{N} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k-1} E(\xi_i) = \frac{N - s}{N} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k-2} E(\xi_i) - \frac{1}{N} E(\xi_{k-1}) = \\ &= E(\xi_{k-1}) - \frac{1}{N} E(\xi_{k-1}). \end{aligned}$$

A (3) képlet felhasználásával

$$E(\xi_1) = \frac{N - s}{N}$$

$$E(\xi_2) = 1 - \frac{1}{N} E(\xi_1)$$

⋮

$$E(\xi_k) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(\xi_{k-1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1} E(\xi_1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1} \left(\frac{N - s}{N}\right)$$

adódik. Ekkor $\bar{h}$ keresett várható értéke már megkapható az alábbi módon²:

$$\begin{aligned} E(\bar{h}) &= \sum_{i=1}^s E(\xi_i) = \frac{N-s}{N} \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{i-1} = \frac{N-s}{N} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^s}{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)} = \\ &= (N-s) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^s\right]. \end{aligned}$$

A kapott formulát érdemes tovább vizsgálni a szögletes zárójelben levő kifejezés binomiális kifejtésével:

$$\begin{aligned} 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^s &= 1 - \left[\binom{s}{0} - \binom{s}{1} \frac{1}{N} + \binom{s}{2} \frac{1}{N^2} - \dots \right] = \\ &= 1 - \left(1 - \frac{s}{N} + \binom{s}{2} \frac{1}{N} \dots\right) = \frac{s}{N} + R_1, \end{aligned}$$

$\bar{h}$ várható értéke ekkor az

$$E(\bar{h}) = (N-s) \frac{s}{N} + R_2 \quad (4)$$

alakot ölti, ahol R_2 a maradéktag és nagyságára *becslés konstruálható*.

A továbbfejlesztett modell bemutatása után megmutatjuk, hogy az alapmodell ennek speciális esete. Az itteni felírásnak megfelelően az alapmodell esetében $h = s - g$ és az itt definiált ξ_i karakterisztikus valószínűségi változók az alapmodell esetében egymástól függetlenek. A függetlenség abból következik, hogy a Δt időintervallumon belül nem tételeztük fel az újonnan fertőzött elemek aktivizálódását.

Ekkor, mivel
$$P(\xi_i = 1) = \frac{N-s}{N}$$

és
$$P(\xi_i = 0) = \frac{s}{N},$$

s így
$$E(\xi_i) = \frac{N-s}{N}$$

a $h = \sum_{i=1}^s \xi_i$ változó binomiális eloszlást követ $(N-s)/N$, illetve s/N paraméterekkel, és várható értéke $E(h) = s(N-s)/N$ lesz.

Ekkor az is látható, hogy a két feladatban központi fontosságú $E(h)$, illetve $E(\bar{h})$ érték csak egy maradéktagban tér el egymástól, amiből arra lehet következtetni, hogy egyik a másikkal jól közelíthető.

Visszatérve a továbbfejlesztett modellre, annak általános tagja az alábbi rekurzióval fejezhető ki

$$E(s_{t+1} | s_t) = s_t + (N - s_t) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{s_t}\right].$$

²Hasonló, de nem teljesen azonos feladat megoldását idézi más levezetéssel Prékopa. A [5].

Ez a formula nem túlságosan áttekinthető, éppen ezért a továbbiakban az elemzést a lényegesen egyszerűbb alapmodellen végezzük el és numerikus számításokra is azt használjuk. Ahhoz azonban, hogy az alapmodell tulajdonságait a továbbfejlesztett modellre is kiterjesszük, becsülni kellene az R_2 maradéktagot és elemezni viselkedését. Ez a vizsgálat eddig nem készült el.

1. 2. Az alapmodell tulajdonságai és explicit megoldása

Az $s_{t+1} = 2s_t - \frac{s_t^2}{N}$ alakú alapmodell olyan folyamatot ír le, melynek legfontosabb tulajdonságai az alábbiak:

- s_t monoton növekvő;
- s_t felső korlátja N , és végül
- s_t határértéke $t \rightarrow \infty$ esetén N .

A fenti tulajdonságok közül az első kettő bizonyítható a rekurzív formula alapján. Az első tulajdonság azonnal belátható, ha az egyenletet differencia-egyenletként írjuk fel, hiszen a $\Delta s_t = s_t(1 - s_t/N)$ formában $0 \leq s_t < N$ (ami kiinduló feltétel volt) biztosítja Δs_t pozitivitását, ami s monoton növekedését jelenti.

A második tulajdonság bizonyítására írjuk fel az $s_t < N$ kiinduló feltételt az alábbi módon:

$$s_t + \varepsilon = N, \quad \varepsilon > 0$$

Azt kell belátni, hogy $s_{t+1} < N$. A bizonyítás igen egyszerű, hiszen

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= 2s_t - \frac{s_t^2}{N} = 2(N - \varepsilon) - \frac{(N - \varepsilon)^2}{N} = \\ &= 2N - 2\varepsilon - \frac{N^2 - 2\varepsilon N + \varepsilon^2}{N} = 2N - 2\varepsilon - N + 2\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{N} = N - \frac{\varepsilon^2}{N} < N, \end{aligned}$$

azaz, $s_{t+1} < N$ adódik, ami az N felső korlát voltát bizonyítja.

A harmadik tulajdonság bizonyítását az explicit megoldott időfüggvény alapján lényegesen egyszerűbb elvégezni. Ezért, most előbb megadjuk az alapmodell megoldását, azaz a folyamat várható értékének explicit időfüggvényét³.

Kiindulva az $s_{t+1} = 2s_t - s_t^2/N$ alakból, szorozzuk meg mindkét oldalt $-N$ -nel és adjunk mindkét oldalhoz N^2 -et, így a jobb oldal teljes négyzetté válik

$$N^2 - Ns_{t+1} = s_t^2 - 2s_t N + N^2,$$

azaz

$$N(N - s_{t+1}) = (N - s_t)^2.$$

Bevezetve a $Z_t = N - s_t$ helyettesítést, azt kapjuk, hogy

$$Z_{t+1} = \frac{Z_t^2}{N}.$$

³ Ez a megoldási mód Tihanyi Ambrustól származik.

Kiindulva Z_0 értékéből sorozatosan képezhetjük a Z_i értékeket

$$Z_1 = \frac{Z_0^2}{N}; \quad Z_2 = \frac{Z_1^2}{N} = \frac{\left(\frac{Z_0^2}{N}\right)^2}{N} = \frac{Z_0^4}{N^3}; \quad \dots \quad Z_t = \frac{Z_0^{2^t}}{N^{2^t-1}}.$$

Visszatérve az eredeti változóra

$$N - s_t = \frac{(N - s_0)^{2^t}}{N^{2^t-1}},$$

és átlakítások után

$$s_t = N \left[1 - \left(1 - \frac{s_0}{N} \right)^{2^t} \right]$$

adódik.

Ez a növekedési folyamatok leírására a szakirodalomból már ismert *Gompertz függvény* [7] egy speciális változata. Speciális két okból:

- egyrészt azért, mert az ökonometria ezeket a függvényeket folytonos függvényként értelmezi, míg itt csak *diszkrét t értékek mellett vesz fel értékeket*;
- másrészt azért, mert az *időváltozó a 2 alapú hatvány kitevőjeként szerepel*, míg az általános esetben az időváltozó hatványalapja tetszőleges pozitív értéket vehet fel.

Az explicit megoldásfüggvény ismeretében most már a harmadik tulajdonság is könnyen belátható, hiszen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N \left[1 - \left(1 - \frac{s_0}{N} \right)^{2^t} \right] = N - N \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{s_0}{N} \right)^{2^t} = N.$$

Az eddigiek alapján a hólabda folyamat elméleti vizsgálata az alábbi *összefoglaló következtetések*hez vezetett:

- az *alapmodell Gompertz típusú növekedést mutat*, a kiemelt tulajdonsággal rendelkezők száma monoton növekszik, eleinte lassú, majd gyorsuló, végül ismét lassuló ütemben, és elég sok lépés után közelíti meg a felső korlátot, mely az összes elem számával egyenlő.
- a továbbfejlesztett modell hasonló tulajdonságot mutat az alapmodellhez, a kettő minden lépésben csak egy maradéktagban tér el egymástól, de erre a maradéktagra eddig jó becslést nem tudunk adni;
- a fenti modell alapján ki lehet mutatni a hólabda játék „inkorrekt” voltát, pontosabban azt, hogy kinek milyen esélye van a nyeresre és a vesztesre, de ez természetesen nem célja e cikknek. Sokkal inkább célunk az, hogy az eddigi eredményeket kiterjesszük egy olyan formára, amely már konkrét *ökonometria*i számítások céljára is alkalmas. Ezzel foglalkozik a következő érsz.

2. Gyakorlati alkalmazások

A gyakorlati alkalmazáshoz először a modellnek azt a módosítását készítjük el, amelynek alapján numerikus számítások végezhetőek, majd rámutatunk az itteni eredmények és az ökonometriában hagyományosan alkalmazott eljárás közti különbségre, végül pedig számszerű példát mutatunk be az elmondottak illusztrálására.

2.3. A statisztikai modell

Az alapmodell (és a továbbfejlesztett modell) azért nem alkalmas közvetlenül numerikus számításokra, mivel feltételeztük, hogy időegység alatt az átadások száma (a terjedési sebesség) egységnyi. Ezt egy elméleti modellben fel lehetett tételni, hiszen az időegységet tetszés szerint választottuk meg, de *gyakorlati számítások esetében az időegységet a statisztikai adatbázis határozza meg* és semmi sem garantálja, hogy a terjedési sebesség egységnyi legyen.

A probléma megoldása érdekében definiáljuk n -t a korábbiaktól eltérően olyan 0 és 1 közé eső számként, amely azt mondja meg, hogy egy elem átlagosan milyen valószínűséggel adja tovább a kiemelt tulajdonságot. Az elméleti modellek esetében ez a szám 1 volt, azaz a továbbadást biztos eseménynek feltételeztük. Ez a némiképp zavaró jelölés azért indokolt, mivel n ez esetben is a terjedési sebesség mutatója.

Definiáljuk az új $\bar{\xi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) változókat (a t index átmeneti elhagyásával) a korábbi ξ_i változókhoz hasonló módon, de már az új, fenti feltételek mellett.

$\bar{\xi}_i = 0$ ha az i -edik elem olyan elemnek adja át a tulajdonságot, amely már rendelkezett vele;

$\bar{\xi}_i = 1$ ha a tulajdonságot olyan elem kapja, amely még nem rendelkezett vele

Mivel $\bar{\xi}_i = n \xi_i$ és $E(\bar{\xi}_i) = n E(\xi_i)$ az *alapmodell* esetében $E(\bar{h}) = \sum_{i=1}^s E(\bar{\xi}_i) = n \sum_{i=1}^s E(\xi_i) = nE(h) = ns(N-s)/N$, avagy a t indexek bevezetésével:

$$E(\bar{h}_t) = ns_t \frac{N - s_t}{N}. \quad (5)$$

Az (5)-ből pedig felírható az alapmodell statisztikai változatának differenciaegyenlete az alábbi módon:

$$\Delta s_t = s_{t+1} - s_t = ns_t \left(1 - \frac{s_t}{N}\right),$$

avagy

$$s_{t+1} = (n + 1) s_t - \frac{ns_t^2}{N}. \quad (6)$$

Erre a folyamatra a korábbiakhoz hasonló módon belátható az s_t értékek monotonitása. A forma explicit megoldása ezideig nem sikerült és semmi sem bizonyítja, hogy ez a megoldás (t , illetve s_0 függvényében) zárt alakban előállítható. Ezért a második és harmadik tulajdonságot, nevezetesen azt, hogy N a sorozat felső korlátja és egyben határértéke $t \rightarrow \infty$ esetén, a (6) formula alapján bizonyítjuk. Ehhez ismét az

$$s_t = N - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < N$$

felírást használjuk. Ekkor

$$s_{t+1} = (n + 1) (N - \varepsilon) - \frac{n(N - \varepsilon)^2}{N} = N - \varepsilon \left(1 - n + \frac{n\varepsilon}{N}\right).$$

A zárójelben levő kifejezésre az alábbi egyenlőtlenség érvényes:

$$0 < 1 - n + \frac{n\varepsilon}{N} < 1,$$

hiszen $n-1 < n\varepsilon/N$, ami a baloldali egyenlőtlenség, valamint $-n + n\varepsilon/N < 0$, ami pedig a jobboldali egyenlőtlenség fennállását igazolja. A baloldali egyenlőtlenségből az következik, hogy $s_{t+1} < N$, azaz N a sorozat felső korlátja. A jobboldali egyenlőtlenség pedig azt jelenti, hogy N -hez tetszés szerint közel eső s_t esetére is igaz az, hogy s_{t+1} még közelebb esik N -hez, azaz N a sorozat supremuma. Ez egyben azt is jelenti, hogy N a sorozat, illetve a folyamat határértéke.

A továbbfejlesztett modell statisztikai változata némiképp bonyolultabb, de levezetése teljesen analóg az elméleti változatával.

$$\text{Ismeretes, hogy } P(\bar{\xi}_1 = 1) = nP(\xi_1 = 1) = n - \frac{N-s}{N}$$

$$P(\bar{\xi}_1 = 0) = 1 - P(\bar{\xi}_1 = 1) = 1 - n \frac{N-s}{N},$$

s ezekből

$$E(\bar{\xi}_1) = n \frac{N-s}{N}.$$

A $\bar{\xi}$ változóknak a korábban leírt összefüggése alapján

$$\begin{aligned} E(\bar{\xi}_2) &= E(\bar{\xi}_2 | \bar{\xi}_1 = 0) P(\bar{\xi}_1 = 0) + E(\bar{\xi}_2 | \bar{\xi}_1 = 1) P(\bar{\xi}_1 = 1) = \\ &= n \frac{N-s}{N} \left(1 - n \frac{N-s}{N} \right) + n \frac{N-s-1}{N} \cdot n \frac{N-s}{N} = \\ &= n \frac{N-s}{N} \left(1 - \frac{n}{N} \right) = E(\bar{\xi}_1) - \frac{n}{N} E(\bar{\xi}_1). \end{aligned}$$

Ekkor (2)-nek megfelelően:

$$\begin{aligned} E(\bar{\xi}_k) &= n \frac{N-s}{N} - \frac{n}{N} \sum_{i=1}^{k-1} E(\bar{\xi}_i) \\ E(\bar{\xi}_k) &= n \left(1 - \frac{n}{N} \right)^{k-1} \left(\frac{N-s}{N} \right) \\ E(\bar{h}) &= (N-s) \left[1 - \left(1 - \frac{n}{N} \right)^s \right]. \end{aligned}$$

Ez sorbafejtés után $E(\bar{h}) = ns \frac{N-s}{N} + R_3$ alakra írható.

Ez a forma analóg az alapmodell megfelelő formájával, de részletes elemzésére csak az R_3 maradéktag ismeretében lehet vállalkozni.

2.4. A hólabda folyamat és a logisztikus növekedés

A telítettségi szinttel rendelkező gazdasági folyamatokat (például a tartós fogyasztási cikkek állományának időbeli alakulását) az ökonometriában a leggyakrabban a *logisztikus függvénnyel* írják le. A logisztikus függvényt a *Robertson differenciálegyenletből* [4] szokták levezetni, amelynek alakja:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b}{k} y(k - y).$$

Ennek megoldása:

$$y = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}$$

az említett logisztikus függvény. Érdemes rámutatni a Robertson egyenlet és a (6) képlet közti hasonlóságra, amely az alábbi alakba is felírható:

$$\Delta s_t = \frac{n}{N} s_t (N - s_t).$$

Még szemléletesebb az analógia, ha a logisztikus függvény diszkrét pontokra felírt formáját tekintjük. (Ezt a formát a logisztikus függvény paramétereinek becslésekor szokták használni [6]).

$$y_{t+1} = \left(\frac{1 - e^b}{e^b} + 1 \right) y_t - \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - e^b}{e^b} y_t y_{t+1}.$$

Ha elvégezzük az $\frac{1 - e^b}{e^b} = \tilde{n}$ és a $k = \tilde{N}$ helyettesítést, akkor az

$$y_{t+1} = (\tilde{n} + 1) y_t - \frac{\tilde{n}}{\tilde{N}} y_t y_{t+1} \quad (7)$$

alakhoz jutunk, melynek „párja” a hólabda esetében az

$$s_{t+1} = (n + 1) s_t - \frac{n}{N} s_t \cdot s_t \quad (8)$$

alak. A két folyamat összevetéséből az alábbi következtetések vonhatók le:

- a két folyamat egymáshoz való viszonya a *folytonos és a diszkrét* modell, illetve megoldás közötti különbségre vezethető vissza;
- a „hólabda”-modell, mint diszkrét folyamat jobban reprezentálja a gazdasági valóságot, elméletileg megalapozottabb és ennek folytán alkalmas arra, hogy a terjedési folyamatokhoz minden egyes időpontban valószínűség-eloszlást és ennek segítségével konfidencia intervallumot határozzunk meg;
- a logisztikus függvény folytonosságánál fogva bizonyos esetekben kényelmesebben kezelhető, explicit időfüggvénye könnyebben megoldható, a folyamat tulajdonságai jobban elemezhetők;
- a (7) formula alapján látható, hogy amennyiben a megfigyelési időpontokat „sűrítjük”, a két függvény közti különbséget okozó tagok egymáshoz közelítenek, hiszen

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} y_t y_{t+\Delta t} = y_t^2;$$

- bár a paraméterbecslésről — amely a numerikus alkalmazhatóság egyik fontos kérdése — csak a későbbiekben lesz szó, azt már az eddigiek alapján is megállapíthatjuk, hogy mindkét folyamat alkalmazásának vannak előnyös és hátrányos oldalai. Ezért nem is vetjük fel azt a kérdést, hogy melyik jobb, hanem arra hívjuk fel a figyelmet, hogy *a két elemzés egymást kiegészíti*; ismereteinket teljesebbé, a gyakorlati alkalmazást hatékonyabbá teszi az együttes vizsgálat;
- visszatérve az alapmodell megoldására a Gompertz és a logisztikus függvény bizonyos kapcsolatára is fény derül. Megjegyezzük, hogy korábban [7] a két függvény között — más megközelítés alapján — rokonságot lehetett kimutatni.

A továbbiakban a paraméterbecsléssel kapcsolatos problémákat tekintjük át, s az elmondottakat számszerű példával is illusztráljuk.

2.5. Paraméterbecslési eljárások és numerikus eredmények

Az ökonometria gyakorlata a logisztikus függvény paramétereit két fő módon becsüli: az explicit időfüggvényből nemlineáris normálegyenletrendszer felhasználásával (közönséges legkisebb négyzetek módszerével), vagy a (7) rekurzív összefüggésrendszer felhasználásával két paraméterre linearizált formából, a harmadikra pedig iterációval. Ezek az eljárások meglehetősen bonyolultak, bár a számítástechnika fejlődésével egyre hatékonyabbá válnak. A konvergenciájuk sincs megnyugtató módon tisztázva, ezért alkalmazásuk nem minden probléma nélküli. A paraméterbecslési eljárások összefoglaló ismertetése és értékelése részletesen megtalálható a szakirodalomban [3], [7].

A *hólabda folyamatra javasolt paraméterbecslési eljárás* előnye egyszerűségében van. Kiindulva a statisztikai modell (6) összefüggéséből az alábbi lineáris regresszió írható fel:

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + u$$

ahol $y = s_t$, $x_1 = s_{t-1}$, $x_2 = (s_{t-1})^2$, u pedig a maradékváltozót jelenti.

Az ismeretlen α_1 és α_2 paraméterek a *közönséges legkisebb négyzetek* módszerével becsülhetők, majd a becsült paraméterekből meghatározhatók az eredeti folyamat paraméterei is az alábbi módon:

$$\hat{n} = \hat{\alpha}_1 - 1$$

$$N = \frac{\hat{\alpha}_1 - 1}{\hat{\alpha}_2}.$$

A folyamat harmadik paramétere (az induló állapotot kifejező paraméter) közvetlenül adott, mint a megfigyelési értékek idősorának első tagja. Megjegyzendő, hogy az induló állapot ilyen meghatározását a folyamat tisztán rekurzív jellege teszi indokolttá.

Az elmondottakat a rádióelőfizetők számának alakulását leíró függvény példáján illusztráljuk⁴. A rádióelőfizetők számának alakulása tipikus „hólabda” folyamat, hiszen jól definiálható felső korláttal rendelkezik (az ország családjainak száma), és a tulajdonság (a rádiózás, mint szokás) elterjedése

⁴A példát egy korábbi, részben e témával foglalkozó tanulmányból [2] vettem át.

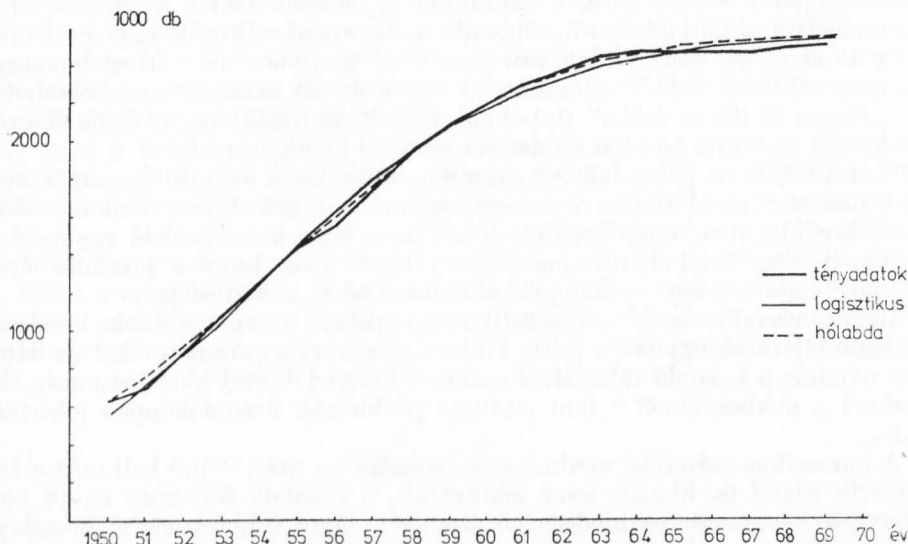
valóban a feltételezett egyszerű törvényszerűséget követi. A megfigyelési adatokat a KSH megfelelő évkönyvéből [8] vettük. A megfigyelési időszak 1950–1969-ig terjedt. A kapott regressziós függvény

$$\hat{y} = 1.2903 x_1 + 0.0001126 x_2$$

volt, ahonnan $n = 0.2903$, $N = 2578$ adódott. Tehát a folyamat

$$\hat{s}_{t+1} = 1.2903 s_t - \frac{0.2903 s_t^2}{2578}$$

alakot ölti. (A rádióelőfizetők számát 1000 db-ban fejeztük ki.) A függvény (l. 1. ábra) igen kedvező statisztikai mutatókkal rendelkezik. Az R^2 értéke 0.99 felett van, a relatív hiba pedig 1,5%, ami végső soron azt jelenti, hogy *a vizsgált jelenség lényeges jellemzői a modell feltételezéseivel nagymértékben konformak.*



1. ábra

Az összehasonlítás kedvéért bemutatjuk az ábrán az ugyanebből az időszorból becsült logisztikus függvény értékeit is. Ez a függvény ugyancsak jól illeszkedik a tényadatokhoz, relatív hibája 1,49%, tehát valamivel kisebb, mint az előbbi folyamatnál. Ez feltehetően abból adódik, hogy a logisztikus függvény paramétereit meglehetősen bonyolult eljárással, minden paraméterre optimálisan becsültük [1], míg a „hólabda” s_0 paraméterét nem becsültük, hanem közvetlenül az időszorból vettük át. A két becslés közötti igen csekély eltérés arra is utal, hogy az itt javasolt becslési eljárás (legalábbis ebben az esetben) lényegileg egyenértékű a lényegesen bonyolultabb és áttekinthetlenebb eljárással.

A bemutatott példa kapcsán néhány megjegyzést kell tenni. Egyrészt arra hívjuk fel a figyelmet, hogy a numerikus alkalmazáshoz alaposan meg kell fontolni, hogy *a vizsgált idősor valóban az elméleti modellben megfogalmazott viselkedést tükrözi-e.* Ha például ez esetben nem a rádióelőfizetők számát,

hanem a rádiókészülékek állományát vizsgáltuk volna, nem kaptunk volna ilyen jó eredményt, hiszen akkor a második, harmadik stb. . . készülék belépése megzavarta volna a folyamatot. Másodszor utalni kell arra, hogy még a leggondosabb előkészítés mellett is számolni kell azzal, hogy a gazdaságban — és általában a társadalomtudományokban — *a törvényszerűségek tendenciákban érvényesülnek*, ami az eredmények más szemléletű értékelését követeli meg, mint a természettudományokban. Végül megemlítjük, hogy a becslés során nem vettünk figyelembe egy sor olyan, ökonometria jellegű problémát, mely a becslési eredményeket ronthatja, így

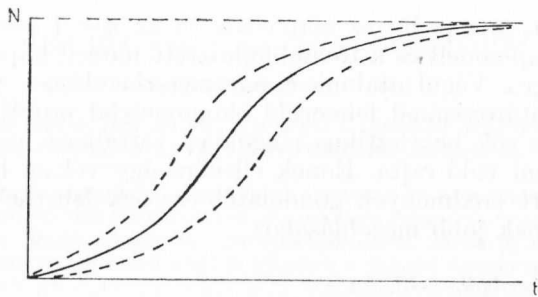
- a magyarázó változók s_i és s_j^2 közt káros multikollinearitás léphet fel és ez jelentősen ronthatja a becslések értékét;
- a hagyományos ökonometria általában feltételezi, hogy a magyarázó változók nem valószínűségi változók, és ilyen feltételek mellett ad idősoros modellek esetén a közönséges legkisebb négyzetek módszere konzisztens, sőt legjobb becslést. Már a szimultán egyenletek esetén is el kell tekinteni ettől a feltételezéstől, hiszen a magyarázó változók egy része ott is valószínűségi változóként van specifikálva. Ebben az esetben a magyarázó változók valódi valószínűségi változók, ezt az esetet az ökonometria „*Errors in the variables*” (hibákkal terhelt változók) c. speciális fejezete kezeli, melynek becslési módszerei kevésbé kidolgozottak;
- bár a folyamat jellegéből természetesen következik az induló s_0 érték megválasztása, az általában nem vezet optimális illeszkedéshez. Érdemes lenne a későbbiekben megvizsgálni, hogy nem lehet-e valamiféle egyszerű és elméletileg indokolható megoldást találni arra, hogy a kiinduló érték megválasztása egyben az optimális illeszkedést is biztosítja.

Megjegyezendő, hogy a logisztikus függvény paramétereinek becslésére szolgáló eljárások egy része (pl. a Tintner-módszer) a paramétereket az ittenihez némiképp hasonló rekurzív formula felhasználásával határozza meg. Így ezeknél a módszereknél a fent említett problémák hasonlóképpen jelentkeznek.

A numerikus számítási eredmények bemutatása után szólni kell még a *konfidencia sávról* is, hiszen, mint említettük, a hólabda folyamat egyik nagy előnye a hagyományos módszerrel szemben, hogy többé-kevésbé megalapozott konfidencia sávot tud meghatározni. A fenti numerikus példához nem tudunk konfidencia sávot mellékelni, mivel a statikus modell esetére ($n \neq 1$), nincs elég jól működő gépi szimulációs program. Ehelyett egyszerű esetben, fiktív példán szimuláltuk az alapmodell konfidencia sávjának alakulását.⁵

Helyhiány miatt nem mutatjuk itt be ezeket a számításokat, csupán egy fontos tapasztalatra utalunk. Nevezetesen arra, hogy a konfidencia sáv a folyamat középső értékeinél a legnagyobb, az alsó és felső szakasznál egyre szűkebb, azaz a folyamat „szabadsága” a középső szakaszon a legnagyobb. Ez érdekes és fontos eredménynek tűnik, hiszen azt jelenti, hogy a sáv nem monoton tágul, hanem egy idő után összeszűkül, azaz az *előrebecslés* a folyamat felső szakaszában lényegesen megbízhatóbb lesz, mint a középső szakaszon, sőt *megbízhatósága az inflexió ponton túl egyre növekszik*. A konfidencia-sáv alakját a 2. ábra jellemzi.

⁵ A gépi számításokat F. Liska Tibor végezte, akinek ezért, valamint a megoldás egyéb részeihez kapcsolódó ötleteiért köszönettel tartozom.



2. ábra

A konfidenciasáv említett tulajdonsága egyébként logikailag könnyen belátható. A konfidenciasáv az előrebecsült értékeken is megkonstruálható. Így az előrejelzés jobban értelmezhető és megbízhatóbb lesz, mint a hagyományos előrejelzések, amelyek „csak” az előrejelzés várható hibáját adják meg, vagy esetleges konfidenciasávjuk erős, gyakorlatilag nehezen értelmezhető feltételezéseken nyugszik. A becslés és előrebecslés kérdését röviden még az alábbi két gondolattal kell kiegészíteni.

Egyrészt a konfidenciasáv megkonstruálásánál eltekintettünk a folyamat paramétereinek becslési hibáitól. Elméleti konfidenciasávot határoztunk meg azzal a feltételezéssel, hogy a paraméterek értékei rögzítettek. A másik megjegyzés azzal kapcsolatos, hogy a paraméterbecslések hibája nagy mértékben függ attól, hogy a folyamat mekkora szakaszát ismerjük megfigyelések alapján. Ezért a megbízhatóság vizsgálatakor a jelenleginél sokkal mélyebb elemzésre van szükség, s úgy tűnik, hogy a hálózat folyamattal kapcsolatos további kutatásokkal éppen ezeket a — gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából alapvető — kérdéseket kell elsősorban tisztáznunk.

Összefoglalás

A cikk témája egy eléggé általános terjedési folyamat vizsgálata és elemzése a matematikai modell kidolgozásától egészen a numerikus számítás problémáig. A folyamat ilyen vizsgálata némiképp eltér a hagyományos ökonometriai kezeléstől, s ezáltal egy sor érdekes eredménnyel járul hozzá a folyamat megismeréséhez és alkalmazásához.

A folyamatot alapvetően nem időfüggvényként, hanem *rekurzív sémaként fogtuk fel*. Ennek nagy előnye, hogy megmagyarázza a folyamat alakulását akkor is, ha a konkrét időbeli lefutásban valami külső ok miatt zavaró hatás lépne be. A folyamat valószínűségszámítású megalapozása lehetőséget adott *konfidenciasáv* meghatározására, amely elsősorban az előrejelzések készítésénél játszik fontos szerepet. A rekurzív felírás további előnye az is, hogy *a paraméterek becslésére igen egyszerű eljárás volt konstruálható*. Végül eredménynek tekinthető az is, más hasonló folyamatok hasonló szellemű megoldásához is irányt mutathat ez az elemzés.

A feladat megoldása során természetesen *megoldatlan problémák* is maradtak. Nem foglalkoztunk a folyamattal $n > 1$ esetén (ennek értelmezése sincs teljesen tisztázva). Nem sikerült explicit megoldást találni sem a továbbfej-

lesztett feladatra, sem pedig az alapfeladatra az $n \neq 1$ esetben⁶. Nincs még becslésünk az alapmodell és a továbbfejlesztett modell kapcsolatát meghatározó maradéktagra. Végül utalunk a paraméterbecslésnél, valamint a konfidenciasáv meghatározásánál felmerülő ökonometria problémákra. A feladat így meglehetősen sok heurisztikus megoldást tartalmaz, matematikailag sok még a kiegészíteni való rajta. Ennek ellenére úgy vélem, hogy a kérdés felvetése és az elért eredmények gondolatébresztőek lehetnek az ökonometria egyes problémáinak jobb megoldásához.

(Beérkezett: 1977. október 13.-án.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. ÉLTETŐ Ö.—HUNYADI L.: On the Estimation of the Parameters of the Logistic Function. Paper presented to the European Meeting of the Econometric Society, Budapest, 5—8 September 1972. 12 p.
2. HUNYADI L.: Folytonos és diszkrét gazdasági modellek összehasonlító elemzése (Doktori értekezés). Budapest, 1974. 90 o.
3. KREKÓ B.—THEISZ É.—PÁRNICZKI L.—PINTÉR S.: Korreláció és trendszámítás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1958. 318 o.
4. LANGE, O.: Введение в эконометрию. Прогресс. Москва, 1964. 294 o.
5. PRÉKOP A.: Valószínűségelmélet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974. 440 o.
6. PRÉKOP A.—ÉLTETŐ Ö.: Matematikai jegyzetek IV. Matematikai Statisztika (kézirat). Statisztikai Kiadó, Budapest, 1961. 127 o.
7. Az ártervezés ökonometria modelljének munkanyagai VII.: Növekedési függvények elemzése. Országos Anyag- és Árhivatal és INFELŐR Rendszertechnikai V., Budapest, 1971. 51 o.
8. Statisztikai Évkönyv 1970. Központi Statisztikai Hivatal, Budapest, 1971. 563 o.

ANALYSIS OF A SPREADING PROCESS

(The snowball model)

Starting from the basic idea of „snowball” game the article examines a spreading process suitable for the analysis of various economic and biological problems.

In Part One the theoretical model is formulated in two variants. The theoretical model relies on the assumption that there is a given closed medium containing a finite number of elements where a marked property is spreading among the elements subject to simple laws. The basic model (first variant) assumes that this property is spreading discontinuously with a lag, while the improved model (second variant) reckons with continuous spreading. In Part One of the article beside reviewing the models also their difference equation is presented and the characteristics of the time-path of the process are analyzed.

Part Two deals with the practical application of the models. Firstly theoretical models are transformed in such a way that they become suitable for numerical computation. The close connection between the „snowball” process and the logistic function is demonstrated. As a consequence it is pointed out that the spreading process examined can be used for the analysis of the time-paths of contagious diseases, fashion or consumption patterns as well. Finally, a simple procedure is presented by which parameters of the process can be estimated in possession of empirical data, furthermore, important statements are made concerning the shape of the confidence interval too. The article presents an illustrative numerical problem describing the development of the number of radio subscribers.

⁶ Egy speciális esetre Dancs István készített szellemes megoldást, melyet azonban itt nem tudunk közölni.

АНАЛИЗ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ

(Модель снежного кома)

В рассматриваемой статье, исходя из идеи игры в снежный ком рассматривается процесс распространения, пригодный для анализа различных экономических и биологических проблем.

В первой части в двух вариантах дается формулировка теоретической модели. Теоретическая модель исходит из той предпосылки, что налицо замкнутая система, включающая в себя определенное число элементов, распространяется какое-то особое свойство по простым закономерностям. Базовая модель (первый вариант) предполагает, что это свойство распространяется по-этапно, с некоторым замедлением, в то время как усовершенствованная модель (второй вариант) считается с непрерывным процессом распространения. В первой части статьи наряду с изложением самих моделей приводятся также и их дифференциальные уравнения и с их помощью анализируются характерные черты протекания этого процесса во времени.

Во второй части рассматриваются вопросы конкретного использования моделей. В первых, теоретические модели перестраиваются так, чтобы они были пригодны для выполнения численных расчетов. Указывается на тесную связь между процессом «снежного кома» и логической функции. В силу этого указывается также и то, что изучаемый процесс распространения может быть использован применительно, например, для изучения распространения развития во времени инфекционных заболеваний, мода или потребительских привычек. В заключении приводится простой метод, с помощью которого на основании эмпирических данных станет возможным оценивать параметры процесса а также несколько важных замечаний относительно формы доверительного интервала. В конкретном разделе статьи, рассматривающей практическое применение, все изложенное проиллюстрировано на численном примере формирования численности радиослушателей (подписчиков).

A preferencia-függvényekben szereplő súlyok meghatározásáról

1. Bevezetés

Közgazdasági jelenségek modellezése során különböző természetű nehézségekkel kell megbirkóznunk. Az optimalizálás különböző szempontjai gyakran ellentmondanak egymásnak, és a modellezőnek ekkor az a feladata, hogy az ellentétes tendenciák között valamilyen módon összhangot teremtsen. Matematikai átfogalmazásban ez a törekvés általában több változó együttes optimumának a meghatározását teszi szükségessé; ennek a voltaképpen paradox helyzetnek az áthidalására alkalmazzák az ún. preferencia-függvényeket. Ebben a dolgozatban egy, a preferencia-függvényekkel kapcsolatos speciális kérdéstről lesz szó.¹

Bár elvben tetszőleges n -változós $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvényt tekinthetünk preferencia-függvénynek, ebben a tanulmányban csak

$$P_1 x_1 + \dots + P_n x_n \quad (1.1)$$

alakú, tehát lineáris preferencia-függvényekkel fogunk foglalkozni. A lineáris preferencia-függvények speciális esetei az alkalmazásokban gyakran szereplő,

$$P_1 x_1^{\alpha_1} + \dots + P_n x_n^{\alpha_n} \quad (1.2)$$

alakú preferencia-függvényeknek,² ahol az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ kitevők tetszőleges valós számok lehetnek. A $P_1, \dots, P_n$ együtthatókról, amelyeket a továbbiakban *súlyoknak* fogunk nevezni, feltételezzük, hogy valamennyien pozitívak. Az a körülmény, hogy meggondolásainkat az (1.1) célfüggvényre alapozzuk, egyrészt egy sor technikai egyszerűsítést eredményez, másrészt azonban azt is jelenti, hogy következtetéseink az (1.2) célfüggvény esetében általában nem maradnak érvényben. Megfelelő értelmezéssel azonban következtetéseink átvihetők az általánosabb esetre is.

Tekintsük mármint az (1.1) preferencia-függvényt. A $P_1, \dots, P_n$ súlyok tetszőleges rendszeréhez hozzárendeljük az $n \times n$ -es

$$P = (p_{ij})$$

súlyarány-mátrixot a

$$p_{ij} = \frac{P_i}{P_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

¹ A tanulmányban közölt módszert az Országos Anyag- és Árhivatal megrendelésére a Számítógéppalkalmazási Kutató Intézet Ökonometriai Főosztályán kidolgozott ártervezési modellek számszerűsítése tette szükségessé.

² Az általunk számszerűsített modellekben $[1] P_1(x_1/\hat{x}_1 - 1)^2 + \dots + P_n(x_n/\hat{x}_n - 1)^2$ alakú célfüggvény szerepelt, ahol a „ $\cdot$ ” jellel jelölt értékek rendre a megfelelő változókhoz tartozó konstans célkitűzések.

összefüggés segítségével. A p_{ij} súlyarány az (1.1) preferencia-függvény szempontjából azt fejezi ki, hogy az x_i változó 1%-os változásával az x_j változó p_{ij} %-os változását tartjuk egyenértékűnek. A $P = (p_{ij})$ súlyarány-mátrix tehát lehetővé teszi a $P_1, \dots, P_n$ súlyrendszer tartalmi áttekintését, s ezért nagy szerepe van annak helyes megválasztásában. Ha ugyanis valamelyik p_{ij} súlyarány irreális értéket vesz fel, akkor nyilvánvalóan módosítani kell a súlyrendszert.

A következőkben a súlyarány-mátrixok néhány egyszerű tulajdonságát soroljuk fel, illetve néhány fogalmat vezetünk be súlyarány-mátrixokkal kapcsolatban.

a) A P súlyarány-mátrix bármely p_{ij} elemére

$$p_{ij} = \frac{1}{p_{ji}},$$

$$p_{11} = p_{22} = \dots = p_{nn} = 1.$$

b) A P mátrix elemeinek valamely

$$H = \{p_{ij}, p_{kl}, p_{qr}, \dots\}$$

részhalmazáról azt mondjuk, hogy a hozzá tartozó súlyarányok függő, illetve független rendszert alkotnak, aszerint, hogy az alábbi feltétel teljesül-e vagy nem: van olyan $p_{ij} \in H$, amely

$$p_{ij} = a_1 a_2 \dots a_{l-1} a_l \quad (1.3)$$

alakba írható, ahol bármely $1 \leq s \leq t$ esetén $p_{ij} \neq a_s$, $p_{ij} \neq a_s^{-1}$, és $a_s \in H$, vagy pedig $a_s^{-1} \in H$. (Pl. $i \neq k$, $k \neq j$, $i \neq j$ esetén a p_{ij} , p_{ik} , p_{kj} halmaz elemei függők, ugyanis $p_{ij} = p_{ij} \cdot p_{kj} \cdot$)

c) A P mátrix elemeinek valamely

$$H = \{p_{ij}, p_{kl}, p_{qr}, \dots\}$$

részhalmazát *minimális halmaznak* nevezzük, ha elemei független rendszert alkotnak, és ha bármely $p_{ij} \notin H$ esetén p_{ij} előállítható az (1.3) alakban, ahol $1 \leq s \leq t$ esetén vagy $a_s \in H$, vagy pedig $a_s^{-1} \in H$.

A minimális halmazok bevezetése R. Frisch nevéhez fűződik [3]. A preferencia-függvény súlyrendszerével való kapcsolatuk nyilvánvaló: ha adott egy H minimális halmaz, akkor a hozzá tartozó súlyarányok értékét a $0 < p_{ij} < \infty$ feltétel figyelembevételével tetszőlegesen megszabhatjuk, és a többi súlyarány értékét ezek segítségével meghatározhatjuk.

Dolgozatunkban az alábbi, R. Frisch által felvetett problémák megoldásával foglalkozunk:

- annak eldöntésével, hogy súlyarányok adott H halmaza minimális halmaz-e;
- adott minimális halmaz esetén a teljes P súlyaránymátrix meghatározásával, s végül,
- a különböző minimális halmazok számának meghatározásával.

2. A minimális halmazok jellemzése és a súlyarány-mátrixok kitöltése

Az alábbiakban súlyarányok tetszőleges

$$H = \{p_{ij}, p_{kl}, p_{qr}, \dots\} \quad (2.1)$$

halmazához mindig hozzá fogjuk rendelni a

$$B_0 = \{(i, j) \mid p_{ij} \in H\} \quad (2.2)$$

és a

$$B = B_0 \cup \{(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)\} \quad (2.3)$$

halmazokat. Indexpárok valamely $(2n-1)$ -elemű K halmazáról azt fogjuk mondani, hogy az a szállítási feladat egy bázisát reprezentálja, ha a

$$\sum_{(i,j) \in K} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in K} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

egyenletrendszernek $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ minden olyan értéke mellett van megoldása, melyre

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (2.6)$$

(2.4)-ben és (2.5)-ben az összegezést j illetve i olyan értékeire kell elvégezni, amelyekre $(i, j) \in K$. Ez annyit jelent, hogy amennyiben $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ a (2.6) feltételt kielégítő rögzített pozitív valós számok, továbbá adott valamely $C = (c_{ij})$ költségmátrix, akkor az így meghatározott szállítási feladat összes bázismegoldását figyelembe vesszük, nemcsak azokat, amelyek primál- vagy duál-megengedettek.

A súlyarány-mátrixok minimális halmazai és a szállítási feladat bázisai között az alábbi összefüggést állapíthatjuk meg.

1. *Tétel.* A (2.1) képletben szereplő H halmaz akkor és csak akkor minimális halmaz, ha a (2.2)–(2.3) összefüggésekkel meghatározott B halmaz a szállítási feladat egy bázisát reprezentálja.

Bizonyítás. Tekintsük a

$$p_{ij} = \frac{P_i}{P_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

egyenletrendszert. Egyszerűség kedvéért nem zárjuk ki az $i = j$ lehetőséget, s így a következő megfontolásokban p_{ii} értékét mindig egységnyinek tekintjük ($i = 1, 2, \dots, n$). Mivel P_i minden i -re pozitív, (2.7) egyenértékű a következő egyenletrendszerrel:

$$u_i - v_j = d_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.8)$$

ahol $u_i = v_i = \log P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, és $d_{ij} = \log p_{ij}$. (Itt kihasználtuk azt, hogy feltevésünk szerint $i = 1, 2, \dots, n$ esetén $\log p_{ii} = 0$.)

Legyen B az (i, j) indexpárok egy tetszőleges részhalmaza, $1 \leq i, j \leq n$. Figyelembe véve, hogy (2.8) bal oldala egy szállítási feladat duálisának bal oldalával egyezik meg, a következőket mondhatjuk. *Tetszőlegesen* rögzített d_{ij} , $(i, j) \in B$ esetén (2.8)-nak az u_i , v_j és a d_{ij} , $(i, j) \notin B$ ismeretlenekre akkor és csak akkor van megoldása, ha B a szállítási feladat egy bázisát reprezentálja.

Mivel esetünkben $d_{11} = d_{22} = \dots = d_{nn} = 0$, B szükségképpen tartalmazza az $(1, 1)$, $(2, 2)$, $\dots$, (n, n) indexpárokat, s ennél fogva a (2.3) alakba írható. Állításunk tehát (2.7) és (2.8) ekvivalenciájából következik.

Korollárium (R. Frisch). n -változós preferencia-függvény esetén bármely minimális halmaznak $n - 1$ számú eleme van.

Az 1. tétel alapján könnyen eldönthető, hogy súlyarányok adott halmaza minimális-e, és hasonlóképpen egyszerű út kínálkozik a teljes súlyarány-mátrix kitöltésére adott minimális halmaz esetén. Az alábbi algoritmus azon a megfontoláson alapul, amellyel Dantzig kimutatta a szállítási feladat bázis-mátrixainak trianguláris voltát ([2], 303–305); B olyan $(2n-1)$ -elemű halmazt jelöl, amely a (2.3) alakba írható.

Algoritmus

1. $i = 1, 2, \dots, n$ esetén legyen n_i azoknak a j oszlopindexeknek a száma, amelyekre $(i, j) \in B$ és $j = 1, 2, \dots, n$ esetén legyen m_j azoknak az i sorindexeknek a száma, amelyekre $(i, j) \in B$. Legyen k kezdeti értéke 0.
2. Ha van olyan $1 \leq i \leq n$, hogy $n_i = 1$, jelölje j azt az egyértelműen meghatározott oszlopindexet, amelyre $(i, j) \in B$ és $m_j \neq 0$;³ folytassuk a számítást az 5. lépésnél.
3. Ha van olyan $1 \leq j \leq n$, hogy $m_j = 1$, jelölje i azt az egyértelműen meghatározott sorindexet, amelyre $(i, j) \in B$ és $n_i \neq 0$;³ folytassuk a számítást az 5. lépésnél.
4. Stop; B_0 nem reprezentál minimális halmazt.
5. Csökkentsük n_i és m_j értékét 1-gyel, k értékét pedig növeljük 1-gyel, és legyen $i_k = i$, $j_k = j$. Ha $k < 2n - 1$, folytassuk az eljárást a 2. lépésnél.
6. Legyen $v_{2n-1} = 0$ és $u_{2n-1} = d_{ij}$, ahol $i = i_{2n-1}$, $j = j_{2n-1}$, és $k = 2n - 2, 2n - 3, \dots, 2, 1$ esetén tegyük a következőt. Legyen $i = i_k$, $j = j_k$; ha az előzőkből u_i ismert, akkor legyen $v_j = u_i - d_{ij}$, ha pedig az előzőekből v_j ismert, akkor legyen $u_i = v_j + d_{ij}$. Stop.

Ezzel az algoritmussal megoldható a (2.8) egyenlet, feltéve, hogy $B_0 = B \setminus \{(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)\}$ minimális halmazt reprezentál. Ha nem ez a helyzet, akkor az algoritmus a 4. lépésnél fejeződik be, és bármely n_i , illetve m_j aktuális értéke vagy nulla, vagy 1-nél nagyobb. A nullától különböző $n_i = k$ és $m_j = k$ segítségével megállapítható, hogy milyen összefüggések állnak fenn a $H = \{p_{ij} \mid (i, j) \in B_0\}$ súlyarányrendszer elemei között; ezt itt nem részletezzük.

Ha a fenti algoritmussal megoldottuk a (2.8) egyenletet, akkor $-d_{11} = -d_{22} = \dots = d_{nn} = 0$ miatt – a tekintett minimális halmazhoz tartozó súlyrendszer a következőképpen adódik: $P_i = e^{u_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ezzel együtt adottnak tekinthetjük a teljes $P = (p_{ij})$ súlyarány-mátrixot is.

³ Az eljárás kezdetén $n_i \neq 0$ és $m_j \neq 0$ valamennyi i -re és j -re.

3. A minimális halmazok számára vonatkozó

R. Frisch-féle sejtés igazolása

A minimális halmazoknak az előző pontban adott jellemzése lehetővé teszi a következő állítás igazolását:

2. *Tétel.* n -változós preferencia-függvény esetén az egymástól különböző minimális halmazok száma n^{n-2} .

Ez a minimális halmazok számára vonatkozó megállapítás lényegében R. Frischtől származik, aki $n \leq 5$ esetén empirikus vizsgálatokat végzett ebben az irányban, általános érvényű bizonyítást azonban nem közölt. Megjegyezzük, hogy a 2. tétel szempontjából két minimális halmazt azonosnak tekintünk, ha ezek egymástól bizonyos p_{ij} súlyarányoknak a $p_{ji} = p_{ij}^{-1}$ súlyarányokkal való helyettesítésével előállíthatók. Ezért az alábbiakban mindegyik olyan minimális halmazokra szorítkozunk, amelyek bármely p_{ij} elemére $i \leq j$. A bizonyításban szükségünk lesz a következő segédételre.

1. *Lemma.* Legyen $1 \leq i \leq n-1$, és $k_1, k_2, \dots, k_i$ jelöljön olyan természetes számokat, amelyekre $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_i \leq n-1$. Legyen B a szállítási feladat egy olyan bázisa, amely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

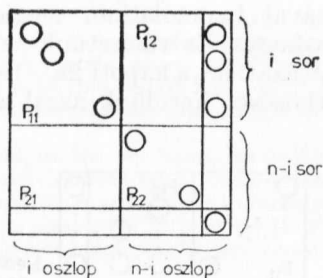
(a) $(k, k) \in B, k = 1, 2, \dots, n$;

(b) ha $(k, l) \in B$, akkor $k \leq l$;

(c) $(k_1, n), (k_2, n), \dots, (k_i, n) \in B$.

Legyen végül S az összes olyan B bázis halmaza, mely rendelkezik az (a) – (c) tulajdonságokkal; ekkor S elemeinek száma csak i -től függ, viszont $k_1, k_2, \dots, k_i$ értékétől független.

Bizonyítás. Nevezzünk minden olyan átalakítást megengedett bázistranszformációnak, amelyek segítségével valamely B bázisból olyan B' bázist lehet előállítani, hogy B és B' csupán egy-egy cellában különböznek. Mármost megengedett transzformációk segítségével az (a) – (c) feltételeket kielégítő tetszőleges B bázist az 1. ábrán látható alakra lehet hozni.



1. ábra

Itt a körök rögzített cellákat jelölnek, és további $n-i-1$ rögzített cella helyezkedik el a főátló fölött. (Az ábrán feltüntetett P_{11}, P_{12}, P_{21} és P_{22} jelölésekre később lesz szükség.) Belátható, hogy $B_1, B_2 \in S$, $B_1 \neq B_2$ esetén ilyen módon két különböző B'_1 és B'_2 bázishoz jutunk.

A 2. tétel bizonyítása. Jelöljük a szóban forgó minimális halmazok számát $F(n)$ -nel. Az 1. tétel miatt minimális halmazok helyett mindig olyan B bázisokkal fogunk számolni, amelyek rendelkeznek a segédátételben szereplő (a) és (b) tulajdonságokkal. A segédátétel alapján

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} f(n, i),$$

ahol $f(n, i)$ jelenti az (a) – (c) tulajdonságokkal jellemzett S halmaz elemeinek a számát. Tekintettel a

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} i(n-1)^{n-i-2} \equiv n^{n-2}$$

azonosságra, elegendő az alábbi összefüggést igazolnunk:

$$f(n, i) = i(n-1)^{n-i-2},$$

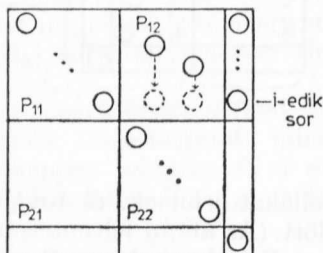
$$n = 2, 3, \dots, i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Az állítás helyessége $n = 2$ és $n = 3$ esetén közvetlenül belátható. Tegyük fel mármint az állítás helyességét minden n -nél kisebb n' -re, és minden 1 és $n' - 1$ közé eső i -re.

Rögzített i esetén ($1 \leq i \leq n-1$) a segédátétel szerint $f(n, i)$ megegyezik azoknak a bázisoknak a számával, melyeket az 1. ábra segítségével szemléltethetünk; a szóban forgó bázisok mindegyikében rögzítettek a körökkel megjelölt cellák, és ezek mellett még található bennük további $n-i-1$ számú cella. Azt kell megvizsgálnunk, hogy ez utóbbiak hányféleképpen helyezkedhetnek el. A következőket lehet megállapítani:

a még nem rögzített $n-i-1$ bázis-cella a P_{12} és a P_{22} blokkban helyezkedik el, és pedig, ha j jelöli a P_{12} -ben található bázis-cellák számát, akkor $1 \leq j \leq n-i-1$, és így P_{22} összesen $(n-i-1) + (n-i-1-j)$ számú bázis-cellát tartalmaz. Továbbá, P_{12} minden oszlopa legfeljebb egy bázis-cellát tartalmaz.

A mondottak indoklásával kapcsolatban megjegyezzük, hogy — mint könnyen belátható — akárhogy is választunk az itt rögzített szabályoktól eltérően $n-i-1$ cellát a táblázatban, a kapott $2n-1$ számú cella vagy nem alkot bázist, vagy pedig összeütközésbe kerülünk azzal a feltétellel, miszerint $(k, l) \in B$ esetén $k \leq l$.



2. ábra

Rögzítsünk j számú bázis-cellát valamilyen módon P_{12} -ben. Ha ezek mindegyikét a 2. ábrán látható módon a táblázat i -edik sorába visszük át (ami megengedett bázis transzformációt jelent), akkor belátható, hogy P_{22} -ben az $(n-i-1-j)$ számú szabadon választható bázis-cella elhelyezkedésére éppen $f(n-i, j)$ számú lehetőség adódik. Mivel P_{12} -ben a j számú bázis-cella kiválasztására $\binom{n-i-1}{j}$ lehetőségünk van, az

$$f(n, i) = \sum_{j=1}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{j} i^j f(n-i, j)$$

eredményhez jutottunk, ahonnan az indukciós feltevés kihasználásával, rövid számolás útján a bizonyítandó állítást kapjuk.

(Beérkezett: 1977. augusztus 18-án)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Az ártervezés ökonometriai modelljének eredményei. XX.: Konzisztens árelőrebecslések 1980. Budapest, 1976. Országos Anyag- és Árhivatal és Számítógéppalkalmazási Kutató Intézet. 178 p.
2. DANTZIG, G. B.: Linear Programming and Extensions. Princeton, N. J., 1963. Princeton University Press.
3. FRISCH, R.: Cooperation between Politicians and Econometricians on the Formalisation of Political Preferences. Federation of Swedish Industries, Stockholm, 1971. Magyar fordítás: FRISCH, R.: Kvantitatív és dinamikus közgazdaságtan. Válogatott tanulmányok. Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

ON THE DETERMINATION OF WEIGHTS IN PREFERENCE FUNCTIONS

The use of many economic-mathematical models requires the computation of the optimum of a preference function of form

$$P_1 x_1^{\alpha_1} + P_2 x_2^{\alpha_2} + \dots + P_n x_n^{\alpha_n}.$$

In the application the proper choice of weights P_i in the function is of great importance. According to results obtained by R. Frisch and other authors this problem can be reduced to the examination of an $n \times n$ matrix where the values of individual entries are the quotients P_i/P_j . In connection with this matrix the notion of the so called minimum set was introduced, that proved to be of basic importance in the proper determination of weights P_i .

This paper provides a method, on the one hand, for deciding whether a given subset of entries of a matrix with the above characteristics forms a minimum set or not, and, on the other hand, for filling in the complete matrix in the knowledge of some given minimum set. Over and beyond that we have succeeded in proving R. Frisch's conjecture concerning the number of various minimum sets belonging to preference functions with n variables.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВЕСОВ, ФИГУРИРУЮЩИХ В ФУНКЦИЯХ ПРЕФЕРЕНЦИИ

Использование большого числа математико-экономических моделей вызывает необходимость в расчете оптимума функции предпочтения

$$P_1x_1^{z_1} + P_2x_2^{z_2} + \dots + Px_n^{z_n}$$

В ходе применения большое значение имеет правильный выбор весов P_i , указанных в функции. В соответствии с результатами, полученными Р. Фришем и другими авторами эта проблема может быть сведена к изучению матрицы размера $n \times n$, в которой значение отдельных элементов дается посредством частного P_i/P_j . В связи с этой матрицей было введено понятие т. н. минимального множества, которое по значению стало основополагающим в надлежащем определении весов P_i .

В данной работе дается, с одной стороны, метод принятия решения относительно того, что дает ли совокупность элементов матрицы с указанными выше свойствами минимальное множество или нет и, с другой стороны, заполнения всей матрицы на основании некоего минимального множества. Помимо этого удалось доказать догадку Р. Фриша относительно количества различных минимальных множеств, относящихся к функциям предпочтения с n переменными.

A preferencia-függvényekben szereplő súlyok egyszerű meghatározásáról

Mihályffy László, Pölöskei Pál és Réti János [1] alatti cikkükben Ragnar Frisch által felvetett néhány problémára adnak választ. Megmutatják:

- hogyan lehet eldönteni, hogy a súlyarányok valamely H halmaza minimális-e;
- adott minimális halmaz segítségével miként lehet a teljes súlyarány mátrixot meghatározni;
- mekkora az egymástól különböző minimális halmazok száma.

A szerzők a súlyarány mátrix elemeit egy „szállítási feladat” változóiként fogják fel; kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést mutatnak ki a mátrixok minimális halmazai és a szállítási feladat bázisai között. Így a H halmaz minimális voltának eldöntése a szállítási feladat egy bázisának azonosítása révén történik. A teljes súlyarány-mátrix meghatározása a szállítási feladat duális egyenletrendszerének a megoldását igényli. Végül ebben az ábrázolásban sikerül a szerzőknek R. Frischnek a minimális halmazok számára vonatkozó sejtését igazolni.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a fenti kérdések gráfmodszerekkel történő megközelítésben közismert tételek alapján trivális módon megválaszolhatók és a megoldások egy gráf rajzán végrehajtandó elemi számolásokkal megtalálhatók.

Tekintsünk egy n elemű súlyrendszert: $P_1, P_2, \dots, P_n$ és a hozzá tartozó

$$P = (p_{ij}); \quad p_{ij} = \frac{P_i}{P_j}$$

súlyarány mátrixot. Rendeljünk a problémához egy n szögpontú, hurokmentes, teljes gráfot:

$$G = (X, U)$$

ahol $X = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ és $U = X \& X$ (X önmagával vett szubdirekt szorzata, azaz az X halmaz elemiből képezhető nem rendezett elempárok összessége).

Minthogy

$$p_{ii} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ és } p_{ij} = \frac{1}{p_{ji}},$$

a gráf éleit a súlyarányok képviselőinek tekintjük, azzal a megjegyzéssel, hogy a p_{ii} alakú trivális súlyarányokat nem ábrázoljuk és hogy valamely

$u = (P_i, P_j) \in U$ él attól függően ábrázolja a p_{ij} vagy a p_{ji} súlyarányt, hogy P_i -ből P_j -be vagy megfordított irányban haladunk-e át rajta.

Ebben az ábrázolásban minden

$$H = (p_{ij}, p_{kl}, p_{qr}, \dots)$$

súlyarányhalmaznak megfelel a G gráf éleinek egy $\bar{U}$ részhalmaza, amely végpontjaival együtt a gráf egy $\bar{G} = (\bar{X}, \bar{U})$ részgráfját alkotja. $\bar{G}$ definíciójából világos, hogy nem tartalmazhat elszigetelt pontokat.

Vegyük észre, hogy ha $\bar{G}$ -ben létezik ciklus, akkor H nem független. Tekintsünk ugyanis egy ciklust $\bar{G}$ -ben, amely a

$$P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{ik-1}, P_{ik}, P_{i1}$$

csúcsokon megy át és k élből áll. Haladjunk végig a cikluson, akkor érvényesek a következő összefüggések:

$$\begin{aligned} p_{i1,i2} &= \frac{P_{i1}}{P_{i2}} \\ p_{i2,i3} &= \frac{P_{i2}}{P_{i3}} \\ &\dots\dots\dots \\ p_{ik-1,ik} &= \frac{P_{ik-1}}{P_{ik}} \\ p_{ik,i1} &= \frac{P_{ik}}{P_{i1}} \end{aligned}$$

Fentiek szorzata alapján

$$p_{i1,i2} \cdot p_{i2,i3} \cdot \dots \cdot p_{ik-1,ik} \cdot p_{ik,i1} = 1$$

adódik, vagyis a súlyarányhalmaz nem független.

Független súlyarányhalmazoknak tehát csak G ciklusmentes részgráfjai felelhetnek meg. Ha viszont olyan független rendszereket keresünk, amelyek az R. Frisch-féle értelemben minimálisak: tehát lehetővé teszik bármely $p_{ij} \notin H$ előállítását független elemek szorzataként — akkor az ilyeneket ábrázoló részgráfoknak nyilván tartalmazniuk kell X minden elemét. Vagyis minimális halmazoknak csak olyan ciklusmentes részgráfok felelhetnek meg, amelyekben $\bar{X} = X$.

Független elemek segítségével azonban akkor tudjuk csak valamely $p_{ij} \notin H$ súlyarányt meghatározni, ha a P_i és P_j csúcsok közötti él a H elemei által meghatározott élekkel együtt a $\bar{G}$ gráfban ciklust alkot.

Meggondolásainkat összefoglalva az adódik, hogy a minimális halmazoknak G olyan n szögpontú — tehát feszített — ciklusmentes részgráfjai felelnek meg, amelyek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy egy tetszőleges új él felvétele a gráfba létrehoz egy ciklust. De ezzel a felismeréssel már teljesen célnál vagyunk.

Emlékeztetünk az ún. fák definíciójára. Egy $G = (X, V)$ gráfot, amely legalább két csúcsot tartalmaz, $|V| > 1$ fának nevezünk, ha összefüggő és ciklusmentes. Közismert azonban a következő:

Lemma: Ha a $G = (X, V)$ gráfban $|G| = n > 1$: az alábbi állítások egymással ekvivalensek:

- i. G összefüggő és ciklusmentes,
- ii. G ciklusmentes és $n - 1$ éle van,
- iii. G összefüggő és $n - 1$ éle van,
- iv. G ciklusmentes és ha egy új élt húzunk be két nem szomszédos csúcs között: pontosan egy ciklus jön létre,
- v. G összefüggő és ha bármely élt töröljük, megszűnik összefüggő lenni,
- vi. G bármely csúspárja között pontosan egy lánc húzódik.

Bevezető megfontolásaink és a Lemma (iv.) pontja alapján kimondható az 1. Tétel. A H halmaz akkor és csak akkor minimális halmaz, ha a neki megfelelő $\bar{G} = (X, \bar{U})$ gráf: fa.

A Lemma (ii.) pontja alapján következik a

Korollárium: n változós preferencia-függvény esetén bármely minimális halmaznak $n - 1$ eleme van.

Az egymástól különböző minimális halmazok száma pontosan annyi, ahány különböző feszített fát lehet találni az n szögpontú teljes gráfban. Ez a szám a gráfelméletben Cayley tétele néven ismert klasszikus eredmény szerint: n^{n-2} . [2] Tehát:

2. Tétel: n változós preferencia-függvény esetén az egymástól különböző minimális halmazok száma: n^{n-2} .

Tekintsünk ezek után egy H súlyarányhalmazt. Kérdés, tartalmaz-e H minimális halmazt. Állítsuk sorba a súlyarányokat valamilyen rájuk vonatkozó preferencia alapján. Vegyünk fel n diszkrét pontot a papíron és menjünk sorba a súlyarányoknak megfelelő éleken. Valamely sorrakerülő élt felvesszünk a $\bar{G}_0$ gráfba, ha a már korábban felvett élekkel nem zár ciklust. Az eljárás kétféle módon ér véget:

a) Elfogy valamennyi jelölt él és nem sikerül $n - 1$ élt berajzolnunk. Ebben az esetben H nem tartalmaz minimális halmazt.

b) Találunk $n - 1$ berajzolható élt. Ebben az esetben a $\bar{G}$ -ben megjelenő éleknek megfelelő súlyarányok minimális halmazt alkotnak: H_0 . Sőt, ez a minimális halmaz ráadásul még a súlyarányokra vonatkozó preferencia sorrendünk szerint „optimális” is.

H_0 birtokában már minden hiányzó súlyarányt egyszerűen kiszámolhatunk. Legyen $p_{ij} \notin H_0$. Tekintsük $\bar{G}_0$ -ban a P_i -ből P_j -be vezető egyetlen láncot (Lemma vi. pontja). Irányítsuk a lánc éleit P_i -ből P_j -be. Húzzuk meg a $P_i P_j$ élt a gráfban. Ezzel $\bar{G}_0$ -ban pontosan egy ciklus keletkezik és a keresett ismeretlen súlyarány egyenlő a láncot alkotó élek által reprezentált súlyarányok szorzatával.

A leírt módszer alkalmazása mindaddig nem igényel semmiféle számítástechnikai apparátust, amíg a gráf papíron áttekinthető. Nagy n esetén az elvégzendő számítások egyszerű lineáris algebrai feladatokká alakíthatók, amelyek könnyen gépesíthetők.

(Beérkezett: 1978 május 18-án)

IRODALOMJEGYZÉK

1. MIHÁLYFFY L. — PÖLÖSKEI P. — RÉTI J.: A preferencia-függvényekben szereplő súlyok meghatározásáról. SZIGMA. E számban, 210. old.
2. BERGE, C.: Théorie des Graphes et ses Applications. Dunod, 1963.

KÖNYVEKRŐL

PÁRNICZKY G.: *A statisztikai informatika alapjai*. Budapest, 1977. Statisztikai Kiadó. 190 o.

Párniczky Gábor könyve a „Korszerű Informatika Könyvtára” sorozatban jelent meg. A kiadó ezúttal igen jól választott, a mű tényleg korszerűen, a mai igényeknek megfelelő szemlélettel közelíti meg tárgykörét — felesleges kitérők nélkül, a leglényegesebb problémákra koncentrálván.

Az első néhány fejezetben a szerző a statisztikai informatika szempontjából legfontosabb alapfogalmakat, továbbá azokat a tételeket, bizonyításokat tárgyalja, amelyek alapos tanulmányozása a későbbi fejezetek anyagának elsajátításához és a gyakorlati alkalmazásoknál is elengedhetetlenül szükséges. Nagyon hasznos és a megértést is sok esetben megkönnyíti az a metodikai alapelv — amely egyébként végigkíséri a könyv egészét — hogy egész sor konkrét, gyakorlati példát találhatunk az elméleti kérdések fejtegetésénél az adott témakörre vonatkozóan.

A statisztikai informatika fundamentumát a halmazalgebrai fogalmak, a különböző halmazalgebrai műveletek és a logikai változók algebraja alkotják. Ezen kérdések ismerete nélkülözhetetlen ahhoz, hogy egy-egy problémával szembe kerülve tudatosan építsük fel a megoldást és az intuitív módszerek helyett biztos elméleti, logikai alapokra támaszkodva kíséreljük meg a leginkább megfelelő módszer alkalmazását.

Hasonlóan a halmazelméleti alapfogalmakhoz és elemi halmazműveletekhez, a logikai változók algebrajának és a logikai változókkal végzett műveleteknek is nagy teret szentel a szerző könyvében, hiszen a logikai változók Boole-algebraja a statisztikai információs rendszerek működésének elvi alapja. A Boole-algebra és a Boole-algebrai műveletek kapcsán már a halmazalgebrából is jól ismert műveletekről és fogalmakról van szó: a kommutativitásról, az asszociativitásról, az egyváltozós műveletekről, az idempotenciáról, az abszorpció-

ról, a De Morgan szabályokról. Mindezen műveletek tulajdonságait együtt tárgyalja a könyv halmazalgebrai megfelelőjükkel — rámutatván az azonosságokra, továbbá arra, hogy milyen fontos előnyökkel jár a halmaz műveleteknél a logikai kvantifikátorok bevezetése. Szó van továbbá itt — az előzőekben nem említett —, de az informatikában lényeges szerepet játszó többi Boole-algebrai műveletről: így a szimmetrikus különbségről, az implikációról, a kölcsönös implikációról, a Sheffer-féle műveletről is.

A második fejezet tisztázza pontosan a halmazalgebra és a Boole-algebra viszonyát, megismertetvén az olvasót az absztrakt Boole-algebra posztulátumaival és axiómarendszerével, valamint a konkrét Boole-algebrákkal és az izomorfizmus fogalmával. A halmaz „atomjai” által generált Boole-algebrának és a logikai függvény tulajdonságainak kifejtésénél látható, ezt is példa illusztrálja, hogyan szerkeszthető meg egy — a statisztikai informatika szempontjából adekvát — nomenklatúra rendszer. Fontos kérdés még a Boole-algebrák izomorfizmusa, amelynek értelmében két Boole-algebrát akkor tekintünk izomorf-nak, ha közöttük egyértelmű és művelet-tartó hozzárendelés létesíthető.

A fejezet végén egy ismert és rendkívül lényeges Boole-algebrát tárgyal részletesen a szerző az ítéletalgebrát. Az ítéletalgebrának természetesen elsősorban a formális logikában van jelentősége, itt csak a tárgy szemszögéből fontos jellemzőiről van szó, az ítéletalgebrai műveletekről, a következtetésről, a logikai kvantifikátorokról. A fejezet végén rövid ismertetés található a számítógépek működésében kitüntetett szerepet játszó kapcsolóalgebráról, amely szintén a Boole-algebra elméleti alapjaival hozható összefüggésbe. A kapcsolóalgebra elemeinek, így a kapuáramköröknek, a bináris összeadó áramköröknek leírása zárja ezt a fejezetet.

„A statisztikai adatok kezelésénél, adatfeldolgozási tervek készítésénél különösen

fontos a reláció- és gráfelmélet elemeinek ismerete. Az osztályozási rendszer felépítése, fogalmi rendszerek, az információstruktúrák alkotása elméleti modell nélkül, tisztán empirikus alapon körülményes és aránytalanul nagy munkafordítással jár. A relációk és gráfok ismeretében viszont a bonyolult feladatok is viszonylag egyszerűen oldhatók meg,” — írja Párniczky Gábor a harmadik fejezet bevezetésében. Praktikus okokból is igen lényeges tehát a könyvnek ez a része, ahol a már ismertetett Boole-algebrai és halmazelméleti alapokra támaszkodva fejti ki a szerző a reláció- és gráfelmélet kérdéseit, alkalmazási területeit. A relációkkal végzett műveletek, a relációk típusai, majd a homogén relációk után a homogén relációkhoz rendelhető speciális alakzattal, a gráfokkal foglalkozik a könyv. Ismerteti a gráfok legfontosabb tulajdonságait, az útszámlálásnak és útkeresésnek, az elérhetőség vizsgálatának és a tranzitív lezárásnak módszereit. Végül a gráfok között kiemeltetett jelentőséggel bíró irányított kátról találhatunk leírást.

A negyedik fejezet a formális nyelvek, formális nyelvtanok elméletével, továbbá a formális nyelvek és az automaták kapcsolatával, az automaták különböző típusaival, a véges állapotú, a nem-determinisztikus és a reguláris nyelvet értelmező automatával foglalkozik.

A könyv ötödik fejezete, amely az automatikus osztályozást tárgyalja, sok szempontból talán a legérdekesebb. Mindenesetre a leginkább úttörő jellegű része a könyvnek, hiszen az automatikus osztályozás — cluster analysis — módszertana eddig nem igen volt hozzáférhető magyar nyelven. Holott a statisztikában és a szociológiában — legalábbis külföldön — már több éve alkalmazott módszerről van szó, amely nagyon fontos segítséget képes nyújtani különböző társadalomtudományi problémák vizsgálatára.

Az automatikus — vagy más néven taxonómikus — osztályozás viszonylag „objektív” módszer. Ellentétben a hagyományos csoportosítási módszerekkel, itt egy algoritmus szolgáltatja a különböző csoportokat, a vizsgálatba bevont dimenziók mentén. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy az adott problémákra szakértőinek valóságismeretére nincs szükség, hiszen a dimenziók, a tulajdonságok kiválasztása — amelyek szerint a csoportok képződnek — továbbra is az ő feladatuk. Ugyanakkor a módszer tényleg objektívebb osztályozást képes életre hívni, hiszen a heterogén sokaságokból hagyományos módon gyakran igen nehéz megfelelően elkülöníteni az egymáshoz „közel”, illetve az egymástól „tá-

volalló” elemeket. Az automatikus osztályozás módszere ezt szigorú matematikai feltételrendszer alapján végzi.

A könyv hatodik, egyben utolsó fejezete a logikai és fizikai adatstruktúrák kapcsolatát, az adattárolási rendszereket és az ehhez szorosan kapcsolódó kódírási és kódellenőrzési problémákat elemzi.

Végezetül el kell mondani a könyvről, hogy azon igen ritka művek közé tartozik, amelyek világosan, érthetően tárgyalnak elméleti szempontból nehéz és gyakran igen bonyolult problémákat. Ezenkívül igen alkalmas mind arra, hogy egyetemi tananyagként, mind arra, hogy a gyakorlatban jól használható „kézikönyvként” funkcionáljon. Az előszóban a következőket írja a szerző: „Könyvem az informatika, a számítástechnika iránt érdeklődő statisztikusok és közgazdászok számára írtam. Ezeknek a szakembereknek ma már magyar nyelven is bőséges és színvonalas irodalom áll rendelkezésre, amely a számítógépek működését és a programozás szabályait tárgyalja... Tudomásom szerint azonban hiányzik az informatika elméleti alapjait tárgyaló munka.” Ez utóbbi mű — méghozzá magas színvonalon — már nem hiányzik a magyar nyelvű szakirodalomban sem.

UJVÁRI JÓZSEF

MÜLLER, E.: *Volkswirtschaftlicher Reproduktionsprozess und dynamische Modelle*. Berlin. Verlag Die Wirtschaft. 491 o.

Miután a statikus input-output-elemzés bevonult a népgazdasági tervezés gyakorlatába, a tervezők részéről megnőtt az igény a dinamikus makromodellek iránt. Egyrészt az ötéves tervek jobb kvantitatív megalapozása, másrészt a néhány éve indult távlati tervezés igényel gyakorlatban alkalmazható dinamikus, az egész gazdaságot átfogó modelleket. Így, már jó ideje folynak a szocialista országokban ilyen irányú kutatások.

Eva Müller és szerzőkollektívája művel kísérletet tesz arra, hogy összegezze az NDK-ban a népgazdasági dinamikus modellekkel kapcsolatban felhalmozódott tapasztalatokat. A könyv két, nagyjából azonos terjedelmű részből áll. Az első rész a népgazdasági újratermelés folyamatának elemeivel és ezeknek a modellekben való megjelenésével foglalkozik. Ennek megfelelően az első rész fejezetei rendre a nemzeti jövedelmet, társadalmi terméket, nemzeti vagyont; az anyagfelhasználást; a termelési álló- és forgóeszköz szükségletét; a munkaerőt és élőmunka ráfordítást; a

fogyasztást; a külkereskedelmet; és az időtényezőt tárgyalják a modellezési lehetőségek szemszögéből.

Az első részben leginkább figyelemre méltó a termelés álló- és forgóeszközeivel foglalkozó fejezet. E fejezet bemutatja a RAS-módszer alkalmazását az egyszerű ráfordítások mátrixának előrebecslésére. A módszer érdekessége, hogy az árváltozás, a műszaki haladás és a szerkezeti változás autonóm prognosztizálása alapján állítják elő az R és S diagonális mátrixot, majd e két mátrix segítségével az új tőkemátrixot.

Egy másik modellszerkesztési javaslat oly módon közelíti meg az állóeszköz-beruházások problémáját, hogy bevezet két különböző állóeszköz-szükségleti mátrixot: az egyik a bővítő és pótló beruházásokra vonatkozó ráfordításokat írja le, a másik az állóeszköz-felújításra jellemző ráfordításokat. Ezáltal az optimalizálási modellekben lehetővé válna az állóeszköz-bővítés, -pótlás és -felújítás differenciáltabb kezelése. A szerzők azonban hozzátézik, hogy a statisztikai adatszolgáltatás az ilyen adatigényeket még nem képes kielégíteni.

A munkaerőről szóló fejezet a modellezési gyakorlat két lényeges hiányosságára hívja fel a figyelmet. Nem lehet kielégítő megoldásnak tekinteni, hogy a legtöbb modell a munkaerőt teljesen homogén erőforrásként kezeli. Az egyes ágazatok, illetve eljárások munkaerőszükségletét szakmánként és képzési színvonal szerint kellene felbontani. Így számottevően megnőhet a modellek mérete, de jelentős információ-többlet is lehet jutni a szakmai struktúra távlati tervezéséhez. A munkaerőképzés és oktatás folyamatának ábrázolása is szükségessé válik a munkaerő újratermelésének modellezésében. Az állóeszköz-állománnyal teljesen analóg módon lehetne definiálni egy szakmai ismeretállományt, amelyre ezután hasonló módon lehetne vonatkoztatni a kopás, pótlás és bővítés fogalmait. A szerzők statisztikai adatok hiánya miatt még nem tudnak beszámolni a gyakorlati alkalmazásról egyik modellezési javaslat esetében sem.

Az első rész további fejezetei új eredményekkel nem szolgálnak. Az anyagfelhasználásról szóló fejezet tankönyvszerűen vezeti be az ÁKM folyó ráfordítások mátrixát, bemutatja a Leontief-inverz előállítását a Neumann-sor segítségével, foglalkozik az inverzmátrix elemeinek közgazdasági értelmezésével.

A fogyasztást, a külkereskedelmet és az időtényezőt tárgyaló fejezetek nem merítik ki a témát.

Feltétlenül érdekesebbnek látszik a könyv második része. Itt bemutatnak ki-

lenc konkrét dinamikus modellt. A modellek zömét vagy adaptálták, vagy az NDK-ban fejlesztették ki, és tényadatokkal való futtatásuknál szerzett tapasztalatokról is be tudnak már számolni a szerzők. Az első modell a marxi újratermelési séma formális matematikai elemzését foglalja magába. Konstans ráfordítási együtthatók feltételezése mellett be lehet látni, hogy a marxi modell a termelés I. és II. osztályában exponenciális növekedést implikál. Emellett levezethetők a folyamatos egyensúlyt biztosító feltételek. A szerzők szerint a később bemutatandó többszektoros modellek formális kapcsolatba hozhatók Marx és Lenin újratermelési modelljeivel, de a modellek közti tartalmi különbség jelentős.

A II. rész következő fejezete a távlati tervezésben alkalmazott egyszektoros modellt, illetve modellesládót mutat be. Ezek a modellek konstans vagy autonóm módon változó tőke-termelés hányados mellett vizsgálják a felhalmozás hatását a nemzeti jövedelem növekedésére. A gyakorlati számítások egyik tapasztalata az volt, hogy az összefogyasztás maximalizálásánál irreálisan magas felhalmozási hányad adódik a vizsgált időintervallum első éveiben.

A könyv utolsó, legterjedelmesebb fejezete több dinamikus, többszektoros modellt mutat be. Ez a fejezet nemesak tartalmát, hanem szerkezetét tekintve is kiemelkedik a többi közül. Itt a szerzők minden modellt azonos módon mutatnak be: először megadják a modell strukturális alakját, utána a redukált alakot, megoldását, illetve a megoldás algoritmusát. A szükséges levezetések mindenhol világosak és áttekinthetők. Ezután egyszerű szám-példa segítségével mutatják be a modell működését. Amennyiben lehetséges, mindig egyik modellnél azonos alapadatokból indulnak ki, így lehetővé válik az egyes modellek számszerű összehasonlítása is. Mindegyik modell leírásának végén található egy értékelés és a gyakorlati alkalmazás során szerzett tapasztalatok összegzése.

A fejezet elején a nyílt, dinamikus ÁKM kerül tárgyalásra. Ez a modell három változatban adható meg: differencia-egyenletként egy éves késleltetéssel, késleltetés nélkül és folytonos modellként differenciálegyenlettel. A szerzők által végzett számításoknál problematikusnak mutatkozott a késleltetett differencia-egyenletes modell, mert nem lehetett kizárni negatív elemek fellépését a bruttó termelés vektorában.

A következőkben két olyan modell kerül bemutatásra, amelyekben a nyílt dinamikus ÁKM-hez további pótlólagos egyenletek kapcsolódnak. Az egyik modell egy beruházási egyenletrendszer tartalmaz.

Ez az egyenletrendszer felosztja az egyszeri ráfordításokat a bővítésre, a pótlásra és a befekeszten beruházások állományának növekedésére. A modell használhatónak bizonyult a középtávú tervezésben. A pozitív termelési vektorokat biztosítani lehet, ha a modell megoldása egy LP-feladatból adódik. Ekkor az esetleges ellentmondások nem a negatív bruttó termelésben, hanem az állóeszköz állomány kihasználatlanságában jutnak kifejezésre.

A második kiegészített dinamikus ÁKM a munkaerőre és más korlátos erőforrásokra tartalmaz pótlólagos egyenleteket. Ez a modell iteratív módon oldható meg. Itt azonban még nem állnak rendelkezésre tapasztalatok. A továbbiakban még négy, más jellegű modellt mutatnak be: egy háromszektoros modellt, amely az optimális folyamatok elméletének alkalmazásán alapul; a többperiódusos programozás két alapmodelljét és egy két technológiás programozási modellt.

A négy modell közül az első még erősen elméleti jellegű. Az irányítás a beruházások elosztásán keresztül valósul meg. A szerzők szerint a modell megoldása a Pontrjagin-féle maximumelv segítségével nem járt sikerrel.

Lényegesen nagyobb gyakorlati jelentősége van a többperiódusos programozás két alapmodelljének. Az egyik a Neumann-modell átalakításán alapul. Az időben változó ráfordítási és kibocsátási mátrixok beépülnek egy LP-feladatba, ezáltal figyelembe lehet venni a technikai haladás és a növekedési ütem változásait. Mindamellett nagyon szemléletes és világosan értelmezhető primál és duálfeladata van a modellnek. A másik alapmodell a dinamikus ÁKM-nek LP-feladattá való átalakításán alapul. Mindkét modell kapcsán a szerzők igen kedvező eredménnyel járt próbaszámításokról beszélnek.

Az utolsó modell egy két-technológiás, többperiódusos nagyobb méretű programozási modell, amelyet az utóbbi években az NDK-ban fejlesztettek ki. A modell $81 \times T$ számú változót és $113 \times T$ számú korlátozó feltételt tartalmaz, ha a periódusok száma T . A célfüggvény a többlet fogyasztás maximalizálása. A modell még kísérleti stádiumban van.

A könyv igen bő irodalomjegyzékkel zárul. Eva Müller könyve jó tájékoztatást nyújt az NDK-ban folyó kutatásokról és az eddig elért eredményekről. Kifogásolni lehet, hogy a szerzők semmiféle tényadatmodelladat összehasonlítást nem tettek közre és hogy a könyvben végig uralkodik a modelltechnikai szemlélet a közgazdasági elemzés rovására.

RIECKE WERNER

FRIEDMAN, B. M.: *Economic stabilization policy. Methods in Optimization*. Amsterdam, 1975. North Holland. 483 o.

A szerző az érdemi tárgyalást az USA gazdaságát leíró egyik ökonometria modell elemzésével kezdi, melynek kiválasztásában az volt a fő szempont, hogy alkalmas legyen a gazdasági stabilizációs politika problémakörének elemzésére. Szerencsés választása az EVANS és KLEIN által 1968-ban kidolgozott Wharton-modellre esett, a könyvben ismertetett különféle módszereket e modell kapcsán mutatja be. Miután a modell igen részletes elemzése más könyvekben is megtalálható, a szerző csupán a modell struktúrájának rövid ismertetésére tér ki, azonban a könyve egyéb fejezeteiben a modell egészét, vagy egyes egyenleteit igen részletesen elemzi a bemutatott módszerek illusztrálása céljából.

A 3. fejezetben Taylor sorokon alapuló linearizálási módszert ismertet a szerző, melynek segítségével egy nemlineáris egyenleteket is tartalmazó ökonometria modell linearizálható, pontosabban előállítható a modellnek linearizált változatai; minden ilyen linearizált változat egy meghatározott időpontra vonatkozik. E fejezetben összegzi a szerző e linearizálási módszer alkalmazásának eredményeit a Wharton-modell egész sor linearizált változatának bemutatásával, amelyeket különböző formájú Taylor-sorok alkalmazásával állított elő a modell különböző nemlineáris egyenleteiből. Ugyancsak elemzi a Wharton-modell időpontontkénti linearizált formáit, annak a fontos következtetésnek a levonásával, hogy a nemlineáris makroökonómiai viselkedés egyszerű lineáris reprezentációjának két legfontosabb információs eleme a munkanélküliségi ráta és az árváltozások rátája.

A könyv 4. fejezete a nemlineáris ökonometria modellek linearizálásának egy más típusú módszerét mutatja be, mely az időpontontkénti linearizálások sorozatait használja fel. Az előző fejezetben ismertetett időpontontkénti linearizálási módszerrel szemben e módszerrel igen fontos elem, hogy a modell milyen időegységre épült (a Wharton-modell pl. negyedéves ökonometria modell). A linearizálás e módszerrel nem egy időpontra vonatkozik hanem egy időintervallumra, melyet a modell alapidegysége határoz meg. A módszer ismertetése után a szerző bemutatja annak alkalmazását a Wharton-modellre, amikor azt is megvizsgálja, hogyan alkalmazható e módszer gazdaságstabilizációs kérdések megoldására. Az elemzés eredményeként a Wharton-modell linearizált egyenletei kö-

zül néhányat elvet, másokat pedig gazdaságpolitikai kérdések megválaszolására linearizált formában is potenciálisan alkalmaznak tart.

Az 5. fejezet egy ökonometriai modell dinamikus multiplikátorainak definiálásával kezdődik. Ezek a multiplikátorok, amelyek a modell endogén és exogén változói közötti időbeli kapcsolatokat írják le, teszik képessé az ökonometriai modellt arra, hogy alkalmazható legyen stabilizációs problémák kezelésére. Ezután a szerző egy analitikus módszert ismertet, amelynek segítségével egy lineáris modellnek — vagy egy nemlineáris modell linearizált változatának — a dinamikus multiplikátorai explicite meghatározhatók. Ugyanek ebben a fejezetben összegzi a módszernek alkalmazását és eredményeit a Wharton-modell dinamikus multiplikátorainak meghatározása kapcsán.

A 6. fejezet a gazdaságpolitikai célváltozók és instrumentális változók Tinbergen-féle koncepciójával foglalkozik, és megmutatja, hogy e koncepcióknak hogyan képezik az 5. fejezetben származtatott multiplikátorok kiindulási alapját. Ezután ismerteti a szerző a Theil-féle elméletet, amely már optimalizációs problémaként kezeli a kérdést: kvadratikus célfüggvény szélsőértékét keresi lineáris feltételek mellett. Elemzi azokat a módszereket, melyeket a későbbiekben fog használni a gazdasági stabilizációs politikák kialakítására. Végül vizsgálja a Tinbergen—Theil-féle koncepció és az optimalizálás kérdéseivel foglalkozó irodalom kapcsolatait; meglehetősen részletesen mutatja be a dinamikus programozás metodológiáját; a kvadratikus optimalizációs és dinamikus programozási struktúrák alkalmazását determinisztikus rendszerekre. A következő fejezet a szakaszonként kvadratikus kritériumfüggvény tulajdonságait írja le és megmutatja, hogy e függvény a kvadratikus kritériumfüggvény általánosítása, és mint ilyen, igen jelentős szerepet kap a gazdaságpolitikai preferenciák modellezésében.

A 8. fejezetben a Tinbergen—Theil-féle közgazdasági koncepciót két szempontból teszi részletes vizsgálat tárgyává. Egyrészt a koncepció dinamikus tulajdonságainak kapcsán az optimalizálás határfeltételeit vizsgálja, másrészt a gazdasági stabilizációs problémák időhorizontjának kérdéskörét elemzi.

A 9. fejezetben egy sor gazdasági stabilizációs problémát vet fel az USA 1957—1958 évi recessziós gazdaságával kapcsolatban. E problémák megoldása során felhasználja mindazokat a módszereket, melyeket könyve előző fejezeteiben bemutatott. Hangsúlyozza, hogy ezek az általa

gyakorlatoknak nevezett problémák az ismertett módszereknek nemcsak egyszerű illusztrációi, hanem fontos gazdasági tartalommal és elemzési lehetőséggel teli kérdések, hiszen a vizsgálatok egy igen jól sikerült modell — a Wharton-modell — alapján készültek.

A záró fejezetben a szerző összefoglalja könyvének lényegesebb problémáit és felhívja a figyelmet azokra a megoldatlan kérdésekre, melyeknek kidolgozása e témakör kutatóinak fontos feladata lenne.

Összefoglalva, B. M. FRIEDMAN könyvéről elmondható, hogy a gazdasági stabilizációs politikák kialakítására alkalmas módszereknek nagy fegyvertárát mutatja be mind elméleti, mind pedig gyakorlati szempontból igen magas színvonalon. A könyv természetesen elsősorban azoknak a gazdasági szakembereknek ajánlható, akik e terület kutatói. Hasznos lehet azonban azok számára is, akik a népgazdasági tervezés gyakorlati szakemberei, hiszen a könyvben bemutatott alkalmazások és elemzések munkájuk színvonalát nagymértékben emelhetik.

SUBICZ PÉTER

PANNE, C. van de: *Linear Programming and Related Techniques*. North-Holland Publishing Company, 1976.

Sokszorosan kimerített, és mégis kimeríthetetlennek látszó téma. C. van de Panne könyve a lineáris programozás elméletében és technikájában még oly járatos olvasónak is — minden bizonnyal — képes újat nyújtani, legalábbis e többé-kevésbé ismert anyagnak a megszokottól eltérő megvilágítása révén. A szerző könyvét egyéves tartamú tanfolyam anyagául szánta és olvasói, illetőleg tanítványai részéről minimális matematikai jártasságot tételezett fel. Ennek ellenére, imposzans módon, szinte csak a négy alapművelet matematikai eszközére szorítkozva, viszont jókora adag közgazdasági látásmódra számítva, olyan módszertani fogásokkal és finomságokkal ismertet meg, mint például a primál-duál algoritmus, az érzékenységi vizsgálat, vagy egy adott értékszintet meghaladó szuboptimális megoldásbalmaz előállítása az ún. Reverse Simplex Method alkalmazásával stb. A könyv a lehetséges alkalmazási területek bemutatásakor is örvedetesen rendhagyó módon jár el. Az optimális termékválaszték vagy a takarmánykeverési arány közhely-példáin túl például ökonometriai egyensúlyszámítási feladatot közöl igen részletesen, mint további alkalmazási lehetőséget. A szerző, láthatóan a teljességre törekvő igényével, a tárgyalást

minden olyan technikára és feladattípusra kiterjeszti, amelyekbe a lineáris programozást használni kívánó szakember beleütközhet, akár a módszerek elvével való ismerkedés, akár a modellezés során. Sőt, a témakör szigorú értelemben vett határán is túllép, mikor az egész értékű programozásra is rátér az elválasztás és korlátozás módszerezének ismertetése keretében. Nem foglalkozik a szerző azokkal a technikákkal és problémákkal, amelyek a numerikus végrehajtás érdekében, illetőleg szempontjából alakultak ki vagy vetődtek fel, mint például a Revised Simplex Method, a bázis inverz szorzat formában való tárolása, a nagyon nagy feladatok tablójának kezelése, a gépi számítás pontatlanságából felhalmozódó előjelhibák kiküszöbölése, és ehhez hasonlóknak.

Vagyis nem programozói (kódlói) szempontokat tart szem előtt. A könyv négy részből áll. Az első a szimplex módszert és a vele kapcsolatos technikákat ismerteti. A második rész korántsem szokványos alkalmazási területeket mutat be. A harmadik rész a szállítási problémával, a negyedik a döntési fákon alapuló módszerekkel foglalkozik.

A „Lineáris programozás alapszereit” címet viselő első rész első két fejezete a szimplex módszert építi fel lépésről lépésre egy numerikus példa mentén, teljesen közgazdasági okoskodást követve. Figyelemre méltó, hogy az árnyékár fogalma és értelmezése már a tárgyalás kezdetén megjelenik a primál megoldásával egyidejűleg és vele szerves összhangban. Egyelőre csak a megengedett bázissal rendelkező (pozitív felsőkorlátos) feladatok szerepelnek. A „Kapcsolt problémák és módszerek” című következő fejezet vezet be a mesterséges változó és a két megoldási fázis fogalmát, továbbá az előjelben nem korlátos változót. A duális problémát úgy interpretálja, hogy a vállalat a kapacitását termelés helyett külső vállalkozóknak adja bérbe, olyan egyensúlyi áron, amely mellett a vállalatnak még érdemes a termelésről lemondania, de ugyanakkor a bérbevevő fél árminimalizáló törekvése is érvényesül. Sor kerül az egyenlőségi feltétel és az előjelben nem korlátozott változó duális viszonyának megvilágítására és a Lemke-féle duális szimplex módszer bemutatására is. A negyedik fejezet érzékenységi elemzéssel és az optimálishoz közel álló megoldások meghatározásával foglalkozik. Külön vizsgálja, hogy a célfüggvények, illetőleg a korlárendszer milyen mértékű megváltozását viseli el az optimális bázis. Szó esik az alternatív optimumokról és ismerteti a Reverse Simplex Method technikát is, melynek útján az optimális célfüggvény-

érték ε -sugarú környezetébe eső valamennyi megoldás csekély lépésszámban előállítható. Az ötödik fejezet két téma között oszlik meg. Egyik a degenerációra és a ciklizálás veszélyére mutat rá, és bevezeti a Charnes-féle perturbációs technikát. A fejezet másik témája az egyedi felsőkorlátos technika. Az első rész hatodik és egyben utolsó fejezete a parametrikus programozást tárgyalja. Az érzékenységelemzéshez hasonlóan külön tárgyalja a célfüggvény és a korlátok paraméterezését. A fejezet a primál-duál algoritmus ismertetésével egészül ki a meg szokottól kissé eltérő levezetésben.

A könyv második részének címe: „A lineáris programozás alkalmazásai”. Első fejezete a legkevésbé tarthat nálunk számot általános érdeklődésre, ugyanis a CDC APEX-III, illetőleg az IBM MPSX nevű programcsomagján mutatja meg, hogy az eddig tanultak hogyan realizálhatók számítógépen, a feladatok az említett programcsomagok milyen formátumú paraméterrendszerével írhatók le, hogyan kell az adatokat előkészíteni, hogyan jelenik meg az eredmény stb. Érdekesebb a következő három fejezet, amelyet erős tartalmi rokon-ságánál fogva egyetlen témaként említünk meg: a modellalkotással és a különböző alkalmazási területek bemutatásával foglalkozik. Az itt szereplő témák csak felsorolva: termelés-tervezés önállóan is értékesíthető közbelső termékek termelése esetén; több periódusra kiterjedő (dinamikus) termelési terv készítése; termelési és készletgazdálkodási szempontok összekapcsolása; optimális tőkebefektetési probléma; dinamikus termelési, értékesítési és készletgazdálkodási döntések; közgazdasági tevékenység elemzése (activity analysis) és egyensúly számítás stb. Az utóbbi probléma megoldása során a kvadratikus programozásba is belekóstoltat. A második rész utolsó fejezete a játékelmélet elemeivel ismerteti meg, és megmutatja hogyan lehet a kétszemélyes, zérusösszegű, kevert stratégiájú problémára lineáris programozási feladatot felírni.

A harmadik rész a szállítási problémával foglalkozik. Az első fejezet a problémába való bevezetésen és a standard szimplex algoritmus (északnyugati sarok szabály) levezetésén túl megismerteti a duális módszert és primál-duál módszer szállítási problémabeli változatával. A második fejezet tárgyalja a hozzárendelési problémát (a magyar módszert meg sem emlíve, a primál-duál technikával dolgozik). Bemutat egy termelés-tervezési, tehát tulajdonképpen az „eredeti” lineáris programozás tárgykörébe tartozó problémát, amely viszont előnyösen írható fel szállítási prob-

lémaként. Adaptálja az egyedi felsőkorláto-
 tos technikát szállítási problémák esetére.
 Végül megismerteti az alternatív útvonalak-
 kal bővíttet szállítási feladat megoldásával
 (transshipment problem). A harmadik rész
 utolsó fejezete a szállítási feladatok gráf-
 reprezentációjával és az ebből fakadó algo-
 ritmusokkal foglalkozik.

A lineáris programozással megoldható
 feladatokban való otthonossá válás előbb-
 utóbb óhatatlanul megszüli az érdeklődést
 a diszkrét döntések iránt is. Ennek az
 igénynek a kielégítésére szolgál a könyv
 negyedik része, amelyből a döntési fák-
 kal, pontosabban a branch-and-bound techni-
 kával ismerkedhet meg az olvasó. A negy-
 dik rész két fejezete közül az első a mód-
 szer alapszempontjait, mibenlétét és al-
 kalmazásként az utazó ügynök probléma
 megoldásával foglalkozik, a második fejezet
 mutatja be alkalmazását az egészértékű
 feladatokra külön tárgyalva a 0–1 értékű
 és az általános egész értékű problémákat.
 A fejezet és egyben a könyv az elválasztás
 és korlátozás elméletének egy tételével ér-
 véget.

Noha a mű a teljes anyagot közgazda-
 sági megfontolásokra és a józan belátásra
 építi fel, és nem takarékoskodik az egészen
 elemi lépésekre bontott szemléltető szám-
 példák felvonultatásával sem, az önálló
 témaegységek végén mindenütt ott talál-
 ható az eljárás szimbólumokkal kifejezett,
 képletekbe foglalt summája, sőt helyen-
 ként az algoritmikus lépések tömör, szóbeli
 leírása is. A könyv valamennyi fejezetét
 gyakorló feladatok zárják le, amelyek kö-
 zül a páratlan sorszámúak megoldásai a
 könyv végén megtalálhatók.

ZSELLÉR GYULA

KRALLMANN, H.: *Heuristische Optimierung von Simulationsmodellen mit dem Razor-Search-Algorithmus*. Birkhäuser Verlag, 1976.

A könyvben tulajdonképpen egyetlen
 roppant terjedelmű modelltől van szó, és
 ehhez mérten a kötet végén szereplő két
 rövidre fogott alkalmazás-leírás függelék-
 nek érződik. A címben ígért algoritmus is
 szerény keretek közé helyezve szolgálja a
 témát: az innovációs tevékenység kihatá-
 sait szimuláló mamutmodell bemutatását.
 A téma valójában nagyon érdekes, ugyanis
 azt vizsgálja, hogy egy számítógép-soft-
 ware gyártó cég új software-csomag kibo-
 csájtása esetén milyen fejleményeknek néz-
 het elébe, természetesen tőkes körülmé-
 nyek, konkurenciahatások közepette. Egy
 új termék megjelenésének a piacon komp-

lex előfeltételei és következményei van-
 nak. Az aránytalan bonyolult közgazdasági
 kölcsönhatások széleskörű ábrázolásán túl,
 a modell olyan számszerűsített kvalitatív
 és főleg szubjektív szempontokat is felölel,
 mint az új terméknek a cég hírnevét öreg-
 bítő hatása, vagy, hogy miként hat vissza
 az új termék sikere a dolgozók buzgalmá-
 ra, nem is beszélve a modell központi
 paramétereiről, az új termék minőségszint-
 jéről.

A rengeteg információs anyaggal meg-
 alapozott munka két kitüntetett pillére
Forrester Industrial Dynamics című köny-
 ve és *Macdonald Razor-Search-Technique*
 nevű optimumközelítési módszere. A struk-
 túra és főleg a rendszerparaméterek össze-
 állításához számos esettanulmányt hasz-
 náltak fel, valamint huszonhét pontból
 álló körkérdest intéztek software-cégekhez.
 A modellt a FORTRAN-nal kompatibilis
 DYNAMO nevű szimulációs nyelven vitték
 gépre.

Bevezetésképpen a könyv az innováció
 által felvett általános közgazdasági kérdé-
 seket veszi szemügyre. Ezután nekilát,
 hogy a szimulálandó jelenséget, az új
 software-csomag kifejlesztéséből és piacra
 dobásából származó következményeket
 rendszerbe foglalja.

A modell két alrendszerből áll. Az egyik
 a (terméket létrehozó) vállalatot, a másik
 a piacot testesíti meg. Az alrendszerek
 szektorokra bomlanak. A vállalati alrend-
 szer négy szektora: kutatás és fejlesztés,
 piackutatás, pénzügyek és vállalatvezetés.
 A piacnak két szektora van, a keresleté
 és a konkurenciáé.

A szektorok természetesen nem képezik
 a rendszer legkisebb elemeit, hanem külön-
 böző funkciókra bomlanak. A struktúrát
 alkotó funkciókat egyelőre csak kvalitatív,
 pozitív és negatív visszacsatolású hurkok-
 ban fejezi ki. Egy-egy körbekapcsolt funk-
 ciólánc vagy erősítő (kedvezően befolyá-
 solja), vagy gyengítő (akadályozza) ön-
 maga tevékenységét. Például pozitív hu-
 roknak minősül az alábbi sorbakapcsolt
 funkciók köre: kutatási-fejlesztési output,
 a vállalat műszaki tekintélye, kereslet,
 forgalom ismét kutatási-fejlesztési output
 stb.

Ezzel szemben az alábbi kör már nega-
 tív: kereslet, piaci részesedés, kielégítetlen
 potenciális kereslet, (ismét) kereslet stb.
 A hurkok nagy részben nem diszjunktak, az
 előbbi példa negatív köre is osztozik egy
 pozitív, öngerősítő körrel két funkciójában
 (kereslet, piaci részesedés). A modell tizen-
 hat ilyen öngerősítő vagy gyengítő funkció-
 kört ad meg a minőségi tendenciák feltér-
 képezésére. A minőségi előkészítés után
 kerül sor az egzakt modell összeállítására,

a szektorok egyértelmű struktúrákként való definiálására, és egyáltalán: a mennyiségi rögzítésre, a modell egyenletrendszerének felállítására alszektoronként. Ugyanis, például a kutatási és fejlesztési szektor (a vállalati alrendszer keretében) kutatási alszektorra és fejlesztési alszektorra bomlik. Az egyenleteket a könyv már a DYNAMO szimulációs nyelv szintaxisa szerint közli, megmagyarázva az összefüggésekben előforduló operandusok jelentését. Kár, hogy a DYNAMO szintaxisáról magáról nem kapunk valamilyen áttekinthető leírást, mindössze egy lábjegyzetben utalást a DYNAMO II. User's Manual-ra. A könyv egyébként mindenütt bőszegesen kommentálja közgazdasági tartalmára nézve az éppen terítéken levő DYNAMO-utastást, amelynek a száma végül is száz körül jár.

A szimuláció nem éri be a különböző bemenő paraméterértékekből származó folyamatok pusztá regisztrálásával, hanem szabályozásra és ezen keresztül optimalizálásra törekszik. A modellre ráadott vezérlés valamilyen modell-állapotot vált ki. Ez az állapot egyértelműen meghatároz egy célfüggvényértéket. Amennyiben ez az érték nem éri el a várt szintet, akkor egy optimalizáló algoritmus olyan új vezérlő értékeket állít elő, amelyek a modellt — a célfüggvény szempontjából — jobb állapotba hozzák. A célfüggvényt az ilyen szimulációs feladatoknál úgy definiálják, hogy optimumához vagy közeli optimumához a rendszernek bizonyos feltételeket kielégítő állapotba tartozzék. Nevezetesen, minél jobban megközelíti a célfüggvény extrémumát (minimumát), annál maradéktalanabban teljesül az a követelmény, hogy a modell valamennyi vezérlési és állapotértéke egy-egy számukra előírt intervallumba essék. Mivel pedig időbeli folyamatról van szó, és a vezérlés-optimalizálást „minden” időpillanatra el kell végezni, a dinamikus optimalizálás arra irányul, hogy a szabályozandó értékek a számukra kijelölt sávokban fussanak. A célfüggvény felépítése ennek a számára szokatlan feladatnak úgy felel meg, hogy a kordában tartandó mértékeknek a kérdéses sáv alsó, illetőleg felső határától való eltérése, pontosabban abszolút értékeik súlyozott összege minimalizálódik. Mivel a súlyok egyazon sáv alsó és felső határára nézve is különbözhetnek, az állapotfolyamok optimális esetben sem a sávok kellős közepén futnak, hanem a nagyobb súlyú határhoz közelebb. Az optimalizálás eszközeként ismerteti a könyv a címben meghírdetett „razor-search-algoritmus”-t. Leírhatatlan bonyo-

lultságú tartományon értelmezett nem analitikus függvényről lévén szó, ez az algoritmus valahol a teljesen heurisztikus „trial-and-error” módszerek és a gradiens típusú módszerek között helyezkedik el. A szerző nagy elismeréssel nyilatkozik az algoritmus eredményeiről, hatékonyságáról, de kellő részletességgel megvilágításával adósunk marad. Annyi azonban mégis kiderül, hogy a hosszúkás-keskeny alakú, törésvonalakkal határolt felületdarabokon folytatott keresésben, rossz folytonossági, simasági tulajdonságokkal rendelkező helyeken válik nagyon be — innen származik a neve.

A szabályozás gyakorlati működését a könyv a bonyolult innovációs modell helyett egy készletezési modellen mutatja be előbb. Az innovációs modellt, mielőtt a szabályozásba bekapcsolná, úgynevezett érzékenységi tesztnek veti alá. Ez azt a meggyőződést van hivatva megszilárdítani, hogy a modell valóban jól képezte le a valóságot, hiszen „az elemek és kapcsolataik adekvát ábrázolása esetén a modell kénytelen a realitásnak megfelelően viselkedni.” Ha a modell a tesztet kiállta, akkor kerül sor az optimalizálásra. Szabályozó paraméterül, többek között, az ár- és beruházási stratégia szolgál, változtatandó „környéményparaméterekként” pedig az új termék minőségsszintje és a konkurencia időbeli reagálása. Az eredményül kapott folyamatok tabellált és grafikus formában jelennek meg, részletes szöveges értelmezéssel.

Míg a könyv a szimuláció technikájáról tulajdonképpen kevés újat, lényegeset és használhatót közöl, számottevőt produkál annak feltárásában, hogy egy olyan nem szokványos feladat esetén, mint amilyen egy új software-csomag következményeinek szimulációs modellezése, mi mindenre kell tekintettel lenni, hogyan lehet a megoldáshoz egyáltalán hozzáfogni. A tárgyalásmód tagadhatatlan hátránya nehézkessége. A túl száraz, tárgyilagos szakstílus és a gondolatmenet lendületét lépten-nyomon megszakító idézettömeg a könyv anyagában való kitartó elmélyedést kétségtelenül hálátlan feladattá teszi. A könyvet két kisebb önálló modell zárja le. Az első közgazdasági témájú: a nyugatnémet szolgáltató ipar keresetének és kínálatának hosszú távú összekapcsolására készült. A második kis modell műszaki problémát szolgál: műanyaggyártó processzus bemenő hőmérsékletének és nyomásának görbét kívánja úgy meghatározni, hogy a viszkozitás adott sávba essék.

TUDOMÁNYOS ÉLET

A „Gazdasági rendszerek és ökonometria” c. konferencia Lyon, 1977. április 21—23.

Az Association Rhodanienne pour l'Avancement de l'Econométrie és a Groupe de Recherche Structures Probabilistes et Economiques által szervezett ökonometriai konferenciát 1977-ben a lyoni Claude Bernard Egyetemen tartották. A résztvevők, mintegy 50—80 fő, elsősorban a francia nyelvterületről kerültek ki, ezenkívül Lengyelországból, Magyarországról és a Szovjetunióból érkeztek előadók. A következő témakörökben hangzottak el előadások:

- alkalmazott ökonometria
- ökonometria-elmélet
- gazdasági matematika
- játékelmélet
- rendszerelemzés
- környezetvédelmi modellezés.

A konferencia első napján *R. Fortet* (Université de Paris VI.) „Panelek és magatartás vizsgálat” címmel tartotta előadását, amelyben a piackutatás és háztartásstatisztikai vizsgálatok során, a mintavétellel és a fogyasztói döntések modellezésével kapcsolatban felmerülő gyakorlati és matematikai-statisztikai problémákat elemezte. A második plenáris ülést *J. — M. Grandmont* (CEPREMAP) tartotta „A pillanatnyi egyensúly elmélete” címmel. Először a fogyasztói döntések modellezésére tett kísérleteket ismertette, s részletesen kitért az anticipációs függvények felhasználási lehetőségeire, melyek beépítése a modellbe merőben új vonás az általános egyensúly-elmélet modelljeihez képest. Ezután az árak szerepét tárgyalta versenyző egyensúly esetén. Itt elsősorban a pénz- és tőkepiaci jelenségekkel foglalkozott. Végül érintette a fixáras modellekkel kapcsolatos problémákat.

Az alkalmazott ökonometria szekcióban elkülönítve tárgyalták az energiamodelleket. *J. J. Snella* (Université de Genève) az ipari szektorok energia igényét vizsgálta. 1963—1974-ig terjedő időszakok alapján 11 ipari szektorra és 9-féle energiatermékre végzett számításokat. Kétszintű modelljében egyrészt termékenkénti keresleti függvények, másrészt az összenergiakeresletre vonatkozó regressziós egyenletek szerepeltek. Az exogén változók között fontos szerephez jutottak az árindexek. *Y. Guillaume* (Université de Bruxelles) „Egy belga energiamodell” címmel tartott előadást. A bemutatott modellrendszer egy több intézetre kiterjedő 5 éves kutatási program első eredménye. A végleges változat kialakítására még nem került sor. Több, rendkívül nagyméretű, a gazdaság különböző területeire kiterjedő modell kidolgozását és számszerűsítését tervezik, majd második lépésben a részmodellekből kapott eredmények konzisztenciáját célzó eljárásokat alakítanak ki. Céljuk egy 5 éves előrejelzési periódusú (2000-ig tartó időhorizontú) vizsgálatok céljára alkalmas, dinamikus, input-output bázison alapuló modellesalád létrehozása. A modellrendszer középpontjában egy lineáris programozási modell áll, amelyet a szektormodellekkel dekompozíciós eljárás segítségével kapcsolnak össze. A központi modellhez csatlakozik egy keresleti szemléletű ökonometriai modell. A két modellből kapott végső fogyasztások összhangjának biztosítására iterációs eljárásokat dolgoztak ki. A bemutatott első eredmények egyelőre a tervezettnél jóval egyszerűbb és kisebb méretű feladatra vonatkoztak. *A. Dramais* (Université de Bruxelles) egy európai energiamodell (EURECA) mutatott be, amelyben országmodellek összekapcsolásával próbálkoznak.

Ugyancsak az alkalmazott ökonometria szekcióban hangzott el *J. P. le Goff* (Montreal) előadása, melyben azt vizsgálta, hogy 1965—1974-ig terjedő időszakban a kanadai kormány által nyújtott ösztönzések milyen hatást gyakoroltak a beruházási volumen alakulására. Számítási eredményeit egy neoklasszikus és egy ún. hibrid modellből nyerte. Ez utóbbit a kapacitás akcelerator hatás, a profitliquiditás, valamint a központilag kidolgozott korlátozások figyelembevételével alakította ki. *H. Sterdyniak* (INSEE, Párizs) „Az

angol pénzügyi rendszer modellje” címmel tartott előadást. Viszonylag kisméretű — mindössze 7 endogén változót tartalmazó — modelljében mind keresleti, mind pedig kínálati szemléletben felírta a főbb pénz- és hitelpiaci összefüggéseket. Becslési eredményei alapján a pénz- és költségvetési politikának a gazdasági környezetre gyakorolt hatását elemezte.

Az ökonometria-elmélet szekciójában több előadás is foglalkozott a gazdasági döntések és az előrejelzések kapcsolatával. Erről beszélt *M. Turek* (Université de Poznan) „Alternatív előrejelzések „fuzzy halmazok”-kal” címmel. Ugyanezt a problémakört vizsgálta elemi esemény-algebrai és valószínűségszámítási alapokon *Lányi Kamilla* (KOPINT, Budapest) „Paradox helyzet az ökonometriában” című előadásában. Nagyon érdekes előadást tartott *G. Tintner* (Université de Vienne) „Az osztrák gazdaság stabilitása” címmel. Ebben egy viszonylag kisméretű (5 egyenletes) ökonometriai modell redukált és végső formájának előállítását ismertette. Bemutatta a multiplikátorelemzéssel végzett rendszerstabilitás vizsgálatok eredményeit is. *J. Paelinck* (Université de Rotterdam) „Területileg komplex rendszerek becslése” címmel tartott előadásában egy olyan regionális modellt ismertetett, amely az ipartelepítés számára szolgáltat információt a döntéselőkeztetés időszakában. A modell eredményei főleg akkor lehetnek nagyon hasznosak, ha az ország egyes körzetei között jelentős növekedési ütem-különbségek vannak. A szerző számításai a spanyol textiliparra vonatkoztak.

Többen foglalkoztak az ökonometriai modellek becslési problémáival és hipotézisvizsgálatokkal. Ezeken az előadásokon általában az elméleti-módszertani ismertetés állt a középpontban és csak elvétve találkoztunk számszerű eredményekkel. *R. Giraud* (Université de Poitiers) a reziduumok függetlenségére vonatkozó hipotézisvizsgálatokról tartott átfogó, összehasonlító ismertetést. Áttekintette *J. Durbin*, *John Fitts* és *James L. Kenkel* ebben a témakörben elért eredményeit. *A. Holly* (Université de Paris IX.) a nem-lineáris ökonometriai modellek paraméterbecslésével kapcsolatos hipotézisvizsgálatokról beszélt. Vizsgálta a lineáris esetre különben jól ismert tesztek (Wald-teszt, Lagrange-multiplikátor teszt) asszimptotikus tulajdonságait nem-lineáris esetben. Mindezt azonos, de nem feltétlenül normális eloszlású véletlen eltérések feltételezésével vizsgálta, s az endogén változókra nem kötötte ki, hogy azonos eloszlásúak legyenek.

A rendszerelemzés szekciójában *G. Bray* (Université de Rennes) a csoportosított gazdasági változók közötti ok-okozati kapcsolatok feltárására *H. Wold* által kidolgozott látens változókkal operáló modellek felhasználásáról és továbbfejlesztéséről tartott előadást. Néhány számítási eredményt is bemutatott az ún. NIPALS módszerrel (Nonlinear Iterative Partial Approximation Least Squares) végzett becslésre. „A gazdasági rendszerek elemzésének információ-elméleti megközelítése” címmel hangzott el *J. Dufour* és *B. Oudet* előadása. A sok változós rendszerek függőségi kapcsolatainak kvantifikálására főleg az entrópiákat használták fel. A francia pénzügyi rendszerre végeztek számításokat. Tapasztalataik szerint a módszer rendkívül hatékonynak bizonyult a modellspecifikációk kialakításában.

Végül a környezetvédelmi-modellezéssel foglalkozó előadások közül kettőt érdemes kiemelni. *P. Thionet* (Université de Paris IX.) „Az élet minősége: Környezetvédelem és ökonometria” címmel átfogó ismertetést tartott az e témakörben létrehozott modellekről. *B. Hugonnier* (BIPE, Párizs) a környezetvédelmi célokra fordított beruházások fedezeti forrásainak optimális elosztásával foglalkozott.

Ismertetésemben, érdeklődési körömmek megfelelően, inkább az egyes előadások gyakorlati-modellezési vonatkozásait próbáltam kiemelni, habár a konferencián a matematikai-elméleti jellegű előadások voltak többségben. A módszertani előadások általában nem közöltek új eredményeket, hanem több módszer összehasonlítását vagy bizonyos módszerek újabb alkalmazási lehetőségeit tárgyalták.

A konferencia elsősorban azért volt hasznos, mert széles körű betekintést nyújtott az érintett országokban folyó ökonometriai és gazdaság-matematikai kutató munkába.

NEMÉNYI JUDIT

Optimálási eljárások — az IFIP 8. konferenciája

Az IFIP (International Federation for Information Processing) TC 7 elnevezésű bizottsága 1977. szept. 5—9. között rendezte 8. konferenciáját az optimálási eljárások tárgyköréből a nyugat-németországi Würzburgban.¹ A konferencia gördülékeny technikai lebonyolításának feltételeit a würzburgi Alkalmazott Matematikai és Statisztikai Intézet munkatársai teremtették meg, J. Stoer professzor irányításával.

A konferenciának mintegy 230 résztvevője volt, és hozzávetőleg százharminc előadás hangzott el. Az előadások közül nyolc volt plenáris, a többi pedig párhuzamos szekciókban tartották; és volt egy kerekasztal-beszélgetés is, amelyen több fontos kérdést vetettek fel a „világ-modellekkel” kapcsolatban. A plenáris előadások keretében meghívott előadók tekintették át egy-egy tudományág legújabb, illetve legjelentősebb eredményeit. Időrendi sorrendben a következő plenáris előadások hangzottak el:

M. R. Hestenes (Los Angeles): A konjugált irányok módszere az optimálásban;

J. L. Lions (Rocquencourt, Franciaország): A szabad felületek kapcsolata az optimális vezérléssel egyes feladataival;

W. Hildenbrand (Bonn): Matematikai közgazdaságtan;

P. Wolfe (Yorktown Heights, Egyesült Államok): Optimálási eljárások a differenciálhatóság feltételezése nélkül;

G. I. Marcsuk (Novoszibirszk): Vírus és baktérium okozta betegségekkel szembeni immunitás modellje;

R. Bulirsch (München): A közgazdasági és a műszaki tudományokban fellépő vezérlésméleti feladatok numerikus megoldása;

H. J. Sussmann (New Brunswick, Egyesült Államok): A katasztrófaelmélet alkalmazásának kritikája.

L. S. Pontrjagin (Moszkva) „Lineáris differenciáljátékok” című plenáris előadása az előadó betegsége miatt elmaradt, helyette *A. V. Balakrishnan* (Los Angeles) tartott előadást a sztochasztikus vezérlésmélet témaköréből. A konferencia előadásait — természetesen a plenáris előadások kivételével — az alábbi tizenhárom szekcióban tartották:

1. Az optimális vezérlésmélet számítástechnikai eljárásai;
2. Sztochasztikus vezérlésmélet;
3. Differenciáljátékok;
4. Vezérlésméleti problémák parciális differenciálegyenletekkel;
5. Matematikai programozás, elmélet;
6. Nemlineáris és sztochasztikus programozás;
7. Egész számú programozás, hálózatok elmélete;
8. Immunológia, vezérlésmélet a terápiában;
9. Rendszertervezés a városfejlesztésben;
10. Energiahálózatok és környezetvédelmi rendszerek;
11. Gazdasági alkalmazások;
12. Operációkutatás;
13. Számítógépes és távközlési rendszerek; software problémák.

A konferencia sikeresen valósította meg a nemzetközi tapasztalateserét az optimálási problémákkal foglalkozó kutatók között. Az előadások összessége jól tükrözte az egyes rész tudományok helyzetét, és elősegítette az új és a korábbiaknál hatékonyabb eljárások áttekintését. Az előadások hozzávetőleg egyharmad—egyharmad arányban oszlottak meg a vezérlésmélet, a matematikai programozás és a további témakörök között. Egyes tudományágakat viszonylag kisszámú előadás képviselt — így például a „Gazdasági alkalmazások” szekciójában mindössze négy előadás hangzott el, — az effajta aránytalanság azonban szinte elkerülhetetlen, és semmiképpen sem írható a rendezők rovására. Mind a plenáris előadásokkal, mind pedig az egyes szekciókban elhangzott előadásokkal

¹ Az előző IFIP konferenciával kapcsolatban lásd Kovács Á. és Sivák J. ismertetését a Sigma 1975. évi 4. számában (314—316 p.) továbbá a konferencia kiadványát: Optimization Techniques. Modeling and Optimization etc. Parts 1—2. Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1976.

kapcsolatban számos kérdést és megjegyzést tettek fel a jelenlevők, annak jeléül, hogy a kutatók kölcsönösen érdeklődnek egymás munkája iránt. Különösen nagy volt az érdeklődés a szovjet matematikusok eredményei iránt; L. S. Pontrjagin előadásának elmaradása nagy sajnálkozást váltott ki, kivált a vezérelélmélettel foglalkozók körében.

Egy konferencia ismertetésének elmaradhatatlan velejárója néhány előadás mondani valójának a felidézése. Ha elfogadjuk, hogy általában nagyon nehéz (egyes esetekben meg éppen lehetetlen) egy konferencia száznál több előadása közül néhányat úgy kiválasztani, hogy azok jól reprezentálják a szóban forgó rendezvényt, akkor ez a megállapítás fokozott mértékben vonatkozik a 8. IFIP konferenciára. Az alábbiakban néhány előadás rövid ismertetése következik, azzal a megjegyzéssel, hogy más választás esetleg szerencsésebb lett volna.²

W. Hildenbrand (Bonn), „Matematikai közgazdaságtan” című előadásában az egyensúlyi árendszerek elméletének legfontosabb eredményeit foglalta össze. Az elmélet egyik legjelentősebb következtetéseként értékelte azt a megállapítást, hogy az egyensúlyi árendszert — feltéve, hogy létezik — abban az értelemben stabil, hogy bármely fogyasztó csupán egy másik fogyasztó rovására javíthatja pénzügyi helyzetét.

R. Bulirsch (München) „A közgazdasági és a műszaki tudományokban fellépő vezérelélméleti feladatok numerikus megoldása” címmel tartott előadást. A legfontosabb eljárásokat három csoportba sorolta; 1. variációs módszerek (Galerkin); 2. gradiens eljárások; 3. a Newton-módszer függvényterekre kidolgozott változata. Az előadó utalt az egyes eljárások alkalmazásával kapcsolatos problémák kezelésére is, így pl. a konvergenciasugár növelésének lehetőségére, továbbá a kollokációs módszer valamint az interpolációs eljárás szerepére.

R. Mifflin (Laxenburg, IIASA) „Félig sima (semismooth) és szemikonvex függvények a feltételes optimumkeresésben” című előadásában az alábbi programozási feladat megoldására adott eljárást igen általános feltételek mellett: minimáljuk az $f(x)$ függvényt a $h_i(x) \leq 0$ feltételek mellett, ahol f és h_i n -változós valós függvények, $i = 1, 2, \dots, m$. Az előadó bevezette a félig sima és a szemikonvex függvények fogalmát, és kimutatta, hogy amennyiben f és h_i rendelkezik ezen tulajdonságok közül legalább az egyikkel, akkor a gradiens módszer általánosítása konvergens vektorsorozatot eredményez, és a határérték a feladat stacionárius pontja. Az eredmény súlyának illusztrálására tekintsük az alábbi értelmezést (R^n a valós szám- n -esek euklideszi terét jelöli). Az $f: R^n \rightarrow R$ függvény az x pontban félig sima, ha a (g_k, d) skalársorozatoknak ($k = 1, 2, 3, \dots$) egyetlen torlódási pontja van bármely $d \in R^n$ és bármely g_k sorozat esetén, feltéve, hogy ez utóbbi eleget tesz az alábbi követelményeknek:

- (a) $g_k \in \partial f(x + t_k d + h_k)$, ahol ∂f az f függvény Clarke-féle általánosított gradiensét jelöli (l. alább);
- (b) $t_k \in R$, t_k monoton fogyva tart 0-hoz;
- (c) $h_k \in R^n$, $h_k/t_k \rightarrow 0$.

A Clarke-féle általánosított derivált értelmezése a következő:

$$\partial f(x) = \{g \in R^n \mid (g, d) \leq f^\circ(x, d) \text{ minden } d \in R^n \text{ esetén}\},$$

ahol

$$f^\circ(x, d) = \limsup_t \frac{1}{t} (f(x + h + td) - f(x + h)),$$

$h \in R^n$, $h \rightarrow 0$, $t \in R$, és t monoton fogyva 0-hoz tart.

H. Maurer és J. Zowe (Würzburg) „Másodrendű szükséges és elégséges feltételek végtelen-dimenziós programozási feladatok optimumára” c. előadásukban a véges dimenziós esetre vonatkozó alábbi eredményt általánosították ha $f: R^n \rightarrow R$, $g: R^n \rightarrow R^k$ kétszer differenciálható függvények, továbbá $l \in R^k$, $l \geq 0$, $F(x) = f(x) + l^T g(x)$, és $x = x_0$ esetén $L(x_0) = \{h \in R^n \mid g_i(x_0) h \leq 0 \text{ ha } g_i(x_0) = 0, \text{ és } l^T g'(x_0) h = 0\}$ akkor $h^T F''(x_0) h$ nemnegativitása $L(x_0)$ -on szükséges, ugyanennek a kifejezésnek a szigorú pozitivitása az $L(x_0) \setminus \{0\}$ halmazon pedig elégséges feltétele annak, hogy x_0 (lokális) optimuma legyen a következő programozási feladatnak: $f(x) \rightarrow \min$, $g(x) \leq 0$. Az általánosítás iránya a következő: R^n és R^k szerepét az X és az Y normált terek veszik át, a $g(x) \leq 0$ egyenlőtlenség helyébe pedig a $g(x) \in K$ feltétel lép, ahol K zárt konvex kúp. A szükséges feltételt szó szerint

² A konferencia teljes anyaga a Springer Verlag kiadásában jelenik meg.

sikerült átvinni, az elegendő feltételt viszont csak bizonyos megszorítással. Az eredményt optimális vezérlésméleti problémákban lehet alkalmazni.

S. Walukiewicz és M. Faner (Varsó) „A pseudo-Boole-változós programozás alkalmazása a dekompozíciós eljárásban” c. előadásukban olyan kevert programozási feladatokkal foglalkoztak, melyek az egész értékű változókban nemlineárisak, a folytonos változókban pedig lineárisak voltak. A problémára a Benders-féle dekompozíciós eljárás egy változatát alkalmazták, melynek technikai megvalósítását a pseudo-Boole-változós programozás segítségével sikerült egyszerűsíteni. Az eredményt sikeresen alkalmazták a gyakorlatban is, így pl. statikailag határozatlan vázszerkezetek minimális anyagköltséggel való megtervezésénél.

H. J. Sussmann (New Brunswick, Egyesült Államok) „A katasztrófa-elmélet alkalmazásának kritikája” c. előadása kétségtelenül a konferencia egyik legérdekesebb színpontja volt, s ebben az előadó dinamikus egyénisége is közrejátszott. Az előadó szerint a matematika alkalmazásának területén talán sehol sem akkora a szakadék a modell és a valóság között, mint a katasztrófa-elméletben. Ennek az elméletnek a hívei a biológiai és a természettudományi folyamatokat többnyire differenciálegyenletrendszer segítségével modellezik, és ezek szinguláris pontjait nevezik „katasztrófáknak”. Kétséges azonban, hogy a modell szinguláris pontjai és a modellezett folyamatok szokásostól eltérő eseményei (kataklizmák, konfliktusok stb.) között van-e lényeges kapcsolat.

A konferencia magyar résztvevői a következők voltak: Dancs István (OTSZK), Harnos Zsolt (OTSZK), Mihályffy László (SZÁMKI), Pogány Zsuzsa (Egyetemi Számítóközpont) és Székely Gábor (MTA Izotóp Intézet). Pogány Zsuzsa „Egy algoritmus az általánosított szállítási feladat megoldására”, Mihályffy László pedig „Egy újabb eljárás a hozzárendelési feladat megoldására a szukcesszív optimumok elve alapján” címmel tartott előadást.

A konferencia zárószavában A. V. Balakrishnan bejelentette, hogy a soron következő IFIP konferenciát 1979. szeptemberében rendezik Varsóban.

MIHÁLYFFY LÁSZLÓ

Pályázati felhívás

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya és a SZIGMA Szerkesztősége pályázatot hirdet a következő címmel:

*Matematikai (operációkutatási) módszerek konkrét felhasználása
a gazdasági hatékonyság javítása érdekében*

Pályázati feltételek:

1. A pályázaton egyénileg vagy csoportosan bárki résztvehet.
2. A pályaművek terjedelme a 100 gépelt oldalt ne haladja meg. A felhasznált irodalmat fel kell tüntetni.
3. Pályázni csak eddig nem publikált művekkel lehet; disszertációs munkák a pályázatból ki vannak zárva.
4. A Bíráló Bizottság nem javasol jutalmazásra olyan tanulmányokat, melyekben kizárólag a szakirodalomra támaszkodó modelleképzelések és javaslatok találhatók, de hiányzik belőlük a vizsgált gazdasági folyamatok adottságainak a konkrét elemzése. A gyakorlatban kipróbált, ténylegesen felhasználásra kerülő és bevált módszereket ismertető tanulmányokat — egyébként azonos színvonal esetén — előnyben részesítjük, a kizárólag elméleti értékű tanulmányokkal szemben.
5. A pályaműveket jeligével ellátva 3 példányban 1980. június 30-ig kell eljuttatni a SZIGMA Szerkesztőségéhez (Budapest, XII., Budaörsi út 45). A pályázathoz jeligével ellátott lezárt borítékot kell mellékelni, amely a szerző (szerzők) nevét, lakcímét, munkahelyét és beosztását tartalmazza. A jeligés borítékokat a Bíráló Bizottság a díjak odaítélése után és csak díjazott vagy dícséretben részesített pályázatok esetén bontja fel.
6. A pályadíjakat erre felkért Bíráló Bizottság javaslatai alapján a Matematikai Közgazdasági Szakosztály vezetősége ítéli oda 1980. szeptember 30-ig. Eredményhirdetésre az 1980. évi Operációkutatási Konferencia megnyitó ülésén kerül sor.

7. A pályadíjak a következők:
- | | |
|----------|--------------|
| I. díj | 15 000. — Ft |
| II. díj | 10 000. — Ft |
| III. díj | 5 000. — Ft |

A Szakosztály vezetősége a pályaművek alkalmasságától függően további néhány pályázatot dícséretben és 1000—2000 — forintos jutalomban részesíthet.

8. A díjazott pályamunkákat szerzőik a pályázat elbírálása után saját belátásuk szerint publikálhatják. Kívánságra a tanulmányokat vagy egyes részeit a SZIGMA külön szerzői honorárium mellett közli.

9. A pályázat részleges sikertelensége esetére a Szakosztály vezetősége fenntartja magának azt a jogot, hogy a díjakat egyáltalában ne, illetve csökkentett összegben vagy más megosztásban adja ki.

10. A pályázattal kapcsolatban szükség esetén felvilágosítást nyújt *Meszéna György* (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Matematikai és Számítástudományi Intézet. Tel.: 175-120).

A Magyar Közgazdasági Társaság
Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya
és a SZIGMA Szerkesztősége

Szerkesztőségi közlemény

A Szigma folyó XI. évfolyamának kiegészítéseképpen az eddig megjelent két kettős számon kívül egy pótfüzetet is közreadunk. Ez az eddig megjelent összes 1968—78. évi kötetek egyesített tartalomjegyzékét közli majd tárgy-körök szerint csoportosítva.

Köszönet a kötet lektorainak

A Szigma 1978. évfolyamához benyújtott cikkeket — a Szerkesztőség állandó munkatársain kívül — a következő külső munkatársak lektorálták:

Bródy András
Csernátorny Csaba
Éltető Ödön
Forgó Ferenc
Gyires Béla
Kotász Gyuláné
Neményi Vilmos
Pillís Pál
Simon András
Szepesi György

Tusnádi Gábor

Csepinszky Andor
Dancs István
Enyedi József
Gábor Győző
Hulyák Katalin
Kovács L. Béla
Peák István
Rimler Judit
Simonovits András
Tényi György

Áldozatkész munkájukért ezúton is köszönetet mond a Szerkesztőség.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója.

Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat nyomdába érkezett: 1978. XI. 3 — Terjedelem: 11,55 (A/5) ív
79.6469 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

PÉTER SUBICZ: Solution of an econometric model by mathematical programming ...	111
LÁSZLÓ HUNYADI—JUDIT NEMÉNYI: A method of the combination of yearly and quarterly econometric models	129
KATALIN HULYÁK—Mrs. ISTVÁN LOSONCZY: Quantification of models of demand on the basis of time series data	151
GYÖRGY MUSZÉLY: Quantification of a consumption model on the basis of cross-sectional data	173
LÁSZLÓ HUNYADI: Analysis of a spreading process (The snowball model)	191
LÁSZLÓ MIHÁLYFFY—PÁL PÖLÖSKEI—JÁNOS RÉTI: On the determination of weights in preference functions	211
PÉTER BOD: On a simple determination of weights in preference functions	219

BOOK REVIEWS

G. PÁRNICZKY: Foundations of statistical informatics (<i>József Ujvári</i>)	223
E. MÜLLER: Volkswirtschaftlicher Reproduktionsprozess und dynamische Modelle (<i>Werner Riecke</i>)	223
B. M. FRIEDMAN: Economic stabilization policy; methods in optimization (<i>Péter Subicz</i>)	226
C. van de PANNE: Linear programming and related techniques (<i>Gyula Zsellér</i>)	227
H. KRALLMANN: Heuristische Optimierung von Simulationsmodellen mit dem Razor-Search-Algorithmus (<i>Gyula Zsellér</i>)	229

SCIENTIFIC LIFE

JUDIT NEMÉNYI: "Economic systems and econometrics" conference	231
LÁSZLÓ MIHÁLYFFY: Optimization techniques — the 8th IFIP conference	233

СОДЕРЖАНИЕ

Петер Шубиц: Решение эконометрической модели с помощью методов математического программирования	111
Ласло Хуняди—Юдит Немени: Метод соединения годовых и квартальных эконометрических моделей	129
Каталин Хуяк—Иштванне Лошонци: Числовая реализация моделей спроса населения на основании данных временных рядов	151
Дердь Мусей: Числовая реализация модели потребления на основе данных семейных бюджетов	173
Ласло Хуняди: Анализ процесса распространения (Модель снежного кома) ...	191
Ласло Михайфи—Пал Пелешкеи—Янош Рети: Об определении весов, фигурирующих в функциях по предпочтениям	211
Петер Бод: О простом определении весов, фигурирующих в функциях по предпочтениям	219

О КНИГАХ

Г. Парницки: Основы статистической информации (<i>Йожеф Уйвари</i>)	223
Э. Мюллер: Процесс воспроизводства в народном хозяйстве и динамические модели (<i>Вернер Рике</i>)	224
В. М. Фридман: Политика экономической стабилизации; методы оптимизации (<i>Петер Шубиц</i>)	226
Ц. ван де Панне: Линейное программирование и связывающиеся техники (<i>Дюла Желлер</i>)	227
Х. Крамманн: Геуристическое программирование симуляционных моделей с помощью Разор-Серч алгоритма (<i>Дюла Желлер</i>)	229

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Юдит Немени: Конференция «Экономические системы и эконометрия»	231
Ласло Михайфи: Методы оптимизации — 8ая конференция ИФИП	233

TARTALOM

✓ SUBICZ PÉTER: Ökonometriai modell megoldása matematikai programozással	111
✓ HUNYADI LÁSZLÓ—NEMÉNYI JUDIT: Éves és negyedéves ökonometriai modellek összekapcsolásának egy módszere	129
✓ HULYÁK KATALIN—LOSONCZY ISTVÁNNÉ: Keresleti modellek számszerűsítése idősoros adatok alapján	151
✓ MUSZÉLY GYÖRGY: Egy fogyasztási modell számszerűsítése keresztmetszeti adatok alapján	173
✓ HUNYADI LÁSZLÓ: Egy terjedési folyamat elemzése (A hólabda-modell)	191
✓ MIHÁLYFFY LÁSZLÓ—PÖLÖSKEI PÁL—RÉTI JÁNOS: A preferencia-függvényekben szereplő súlyok meghatározásáról	211
✓ BOD PÉTER: A preferencia-függvényekben szereplő súlyok egyszerű meghatározásáról	219

KÖNYVEKRŐL

PÁRNICZKY G.: A statisztikai informatika alapjai (<i>Újvári József</i>)	223
MÜLLER, E.: Volkswirtschaftlicher Reproduktionsprozess und dynamische Modelle (<i>Riecke Werner</i>)	224
FRIEDMAN, B. M.: Economic stabilization policy; methods in optimization (<i>Subicz Péter</i>)	226
PANNE, C. van de: Linear programming and related techniques (<i>Zsellér Gyula</i>)	227
KRALLMANN, H.: Heuristische Optimierung von Simulationsmodellen mit dem Razor-Search-Algorithmus (<i>Zsellér Gyula</i>)	229

TUDOMÁNYOS ÉLET

NEMÉNYI JUDIT: A „Gazdasági rendszerek és ökonometria” e. konferencia	231
MIHÁLYFFY LÁSZLÓ: Optimalizációs eljárások — az IFIP 8. konferenciája	233

