MIHÁLYFFY LÁSZLÓ—PÖLÖSKEI PÁL—RÉTI JÁNOS

A preferencia-függvényekben szereplő súlyok meghatározásáról

1. Bevezetés

Közgazdasági jelenségek modellezése során különböző természetű nehézségekkel kell megbirkóznunk. Az optimalizálás különböző szempontjai gyakran ellentmondanak egymásnak, és a modellezőnek ekkor az a feladata, hogy az ellentétes tendenciák között valamilyen módon összhangot teremtsen. Matematikai átfogalmazásban ez a törekvés általában több változó együttes optimumának a meghatározását teszi szükségessé; ennek a voltaképpen paradox helyzetnek az áthidalására alkalmazzák az ún. preferencia-függvényeket. Ebben a dolgozatban egy, a preferencia-függvényekkel kapcsolatos speciális kérdésről lesz szó.[1]

Bár elvben tetszőleges n-változós $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt tekinthetünk preferencia-függvénynek, ebben a tanulmányban csak

$$P_1x_1 + \ldots + P_nx_n \tag{1.1}$$

alakú, tehát lineáris preferencia-függvényekkel fogunk foglalkozni. A lineáris preferencia-függvények speciális esetei az alkalmazásokban gyakran szereplő,

$$P_1x_1^{\alpha_1} + \ldots + P_nx_n^{\alpha_n} \tag{1.2}$$

alakú preferencia-függvényeknek,[2] ahol az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ kitevők tetszőleges valós számok lehetnek. A $P_1, \ldots, P_n$ együtthatókról, amelyeket a továbbiakban *súlyoknak* fogunk nevezni, feltételezzük, hogy valamennyien pozitívak. Az a körülmény, hogy meggondolásainkat az (1.1) célfüggvényre alapozzuk, egyrészt egy sor technikai egyszerűsítést eredményez, másrészt azonban azt is jelenti, hogy következtetéseink az (1.2) célfüggvény esetében általában nem maradnak érvényben. Megfelelő értelmezéssel azonban következtetéseink átvihetők az általánosabb esetre is.

Tekintsük mármost az (1.1) preferencia-függvényt. A $P_1, \ldots, P_n$ súlyok tetszőleges rendszeréhez hozzárendeljük az $n\times n$-es

$$P = (p_{ij})$$

súlyarány-mátrixot a

$$p_{ij} = \frac{P_i}{P_j}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

[1] A tanulmányban közölt módszert az Országos Anyag- és Árhivatal megrendelésére a Számítógépalkalmazási Kutató Intézet Ökonometriai Főosztályán kidolgozott ártervezési modellek számszerűsítése tette szükségessé.

[2] Az általunk számszerűsített modellekben [1] $P_1(x_1/\hat{x}_1 - 1)^2 + \ldots + P_n(x_n/\hat{x}_n - 1)^2$ alakú célfüggvény szerepelt, ahol a „ˆ" jellel jelölt értékek rendre a megfelelő változókhoz tartozó konstans célkitűzések.

összefüggés segítségével. A p_{ij} súlyarány az (1.1) preferencia-függvény szempontjából azt fejezi ki, hogy az x_i változó 1%-os változásával az x_j változó p_{ij} %-os változását tartjuk egyenértékűnek. A $P = (p_{ij})$ súlyarány-mátrix tehát lehetővé teszi a $P_1, \ldots, P_n$ súlyrendszer tartalmi áttekintését, s ezért nagy szerepe van annak helyes megválasztásában. Ha ugyanis valamelyik p_{ij} súlyarány irreális értéket vesz fel, akkor nyilvánvalóan módosítani kell a súlyrendszert.

A következőkben a súlyarány-mátrixok néhány egyszerű tulajdonságát soroljuk fel, illetve néhány fogalmat vezetünk be súlyarány-mátrixokkal kapcsolatban.

a) A P súlyarány-mátrix bármely p_{ij} elemére

$$p_{ij} = \frac{1}{p_{ji}},$$

$p_{11} = p_{22} = \ldots = p_{nn} = 1.$

b) A P mátrix elemeinek valamely

$$H = \{p_{ij}, p_{kl}, p_{qr}, \ldots\}$$

részhalmazáról azt mondjuk, hogy a hozzá tartozó súlyarányok függő, illetve független rendszert alkotnak, aszerint, hogy az alábbi feltétel teljesül-e vagy nem: van olyan $p_{ij} \in H$, amely

$$p_{ij} = a_1 a_2 \ldots a_{t-1} a_t \tag{1.3}$$

alakba írható, ahol bármely $1 \leq s \leq t$ esetén $p_{ij} \neq a_s$, $p_{ij} \neq a_s^{-1}$, és $a_s \in H$, vagy pedig $a_s^{-1} \in H$. (Pl. $i \neq k$, $k \neq j$, $i \neq j$ esetén a p_{ij}, p_{ik}, p_{kj} halmaz elemei függők, ugyanis $p_{ij} = p_{ij} \cdot p_{kj}$.)

c) A P mátrix elemeinek valamely

$$H = \{p_{ij}, p_{kl}, p_{qr}, \ldots\}$$

részhalmazát *minimális halmaznak* nevezzük, ha elemei független rendszert alkotnak, és ha bármely $p_{ij} \notin H$ esetén p_{ij} előállítható az (1.3) alakban, ahol $1 \leq s \leq t$ esetén vagy $a_s \in H$, vagy pedig $a_s^{-1} \in H$.

A minimális halmazok bevezetése R. Frisch nevéhez fűződik [3]. A preferencia-függvény súlyrendszerével való kapcsolatuk nyilvánvaló: ha adott egy H minimális halmaz, akkor a hozzá tartozó súlyarányok értékét a $0 < p_{ij} < \infty$ feltétel figyelembevételével tetszőlegesen megszabhatjuk, és a többi súlyarány értékét ezek segítségével meghatározhatjuk.

Dolgozatunkban az alábbi, R. Frisch által felvetett problémák megoldásával foglalkozunk:

— annak eldöntésével, hogy súlyarányok adott H halmaza minimális halmaz-e;

— adott minimális halmaz esetén a teljes P súlyaránymátrix meghatározásával, s végül,

— a különböző minimális halmazok számának meghatározásával.

2. A minimális halmazok jellemzése és a súlyarány-mátrixok kitöltése

Az alábbiakban súlyarányok tetszőleges

$$H = \{p_{ij}, p_{kl}, p_{qr}, \ldots\} \tag{2.1}$$

halmazához mindig hozzá fogjuk rendelni a

$$B_0 = \{(i, j) \mid p_{ij} \in H\} \tag{2.2}$$

és a

$$B = B_0 \cup \{(1,1), (2, 2), \ldots, (n, n)\} \tag{2.3}$$

halmazokat. Indexpárok valamely $(2n-1)$-elemű K halmazáról azt fogjuk mondani, hogy az a szállítási feladat egy bázisát reprezentálja, ha a

$$\sum_{\substack{j \\ (i,j)\in K}} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.4}$$

$$\sum_{\substack{i \\ (i,j)\in K}} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.5}$$

egyenletrendszernek $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ minden olyan értéke mellett van megoldása, melyre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{2.6}$$

(2.4)-ben és (2.5)-ben az összegezést j illetve i olyan értékeire kell elvégezni, amelyekre $(i, j) \in K$. Ez annyit jelent, hogy amennyiben $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ a (2.6) feltételt kielégítő rögzített pozitív valós számok, továbbá adott valamely $C = (c_{ij})$ költségmátrix, akkor az így meghatározott szállítási feladat összes bázismegoldását figyelembe vesszük, nemcsak azokat, amelyek primál- vagy duál-megengedettek.

A súlyarány-mátrixok minimális halamazai és a szállítási feladat bázisai között az alábbi összefüggést állapíthatjuk meg.

1. *Tétel.* A (2.1) képletben szereplő H halmaz akkor és csak akkor minimális halmaz, ha a (2.2)—(2.3) összefüggésekkel meghatározott B halmaz a szállítási feladat egy bázisát reprezentálja.

Bizonyítás. Tekintsük a

$$p_{ij} = \frac{P_i}{P_j}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.7}$$

egyenletrendszert. Egyszerűség kedvéért nem zárjuk ki az $i = j$ lehetőséget, s így a következő meggondolásokban p_{ii} értékét mindig egységnyinek tekintjük $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Mivel P_i minden i-re pozitív, (2.7) egyenértékű a következő egyenletrendszerrel:

$$u_i - v_j = d_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.8}$$

ahol $u_i = v_i = \log P_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, és $d_{ij} = \log p_{ij}$. (Itt kihasználtuk azt, hogy feltevésünk szerint $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén $\log p_{ii} = 0$.)

Legyen B az (i, j) indexpárok egy tetszőleges részhalmaza, $1 \leq i, j \leq n$. Figyelembe véve, hogy (2.8) bal oldala egy szállítási feladat duálisának baloldalával egyezik meg, a következőket mondhatjuk. *Tetszőlegesen* rögzített d_{ij}, $(i, j) \in B$ esetén (2.8)-nak az u_i, v_j és a d_{ij}, $(i, j) \notin B$ ismeretlenekre akkor és csak akkor van megoldása, ha B a szállítási feladat egy bázisát reprezentálja.

Mivel esetünkben $d_{11} = d_{22} = \ldots = d_{nn} = 0$, B szükségképpen tartalmazza az $(1, 1), (2, 2), \ldots, (n, n)$ indexpárokat, s ennélfogva a (2.3) alaba írható. Állításunk tehát (2.7) és (2.8) ekvivalenciájából következik.

Korollárium (R. Frisch). n-változós preferencia-függvény esetén bármely minimális halmaznak $n-1$ számú eleme van.

Az 1. tétel alapján könnyen eldönthető, hogy súlyarányok adott halmaza minimális-e, és hasonlóképpen egyszerű út kínálkozik a teljes súlyaránymátrix kitöltésére adott minimális halmaz esetén. Az alábbi algoritmus azon a meggondoláson alapul, amellyel Dantzig kimutatta a szállítási feladat bázismátrixainak trianguláris voltát ([2], 303–305); B olyan $(2n-1)$-elemű halmazt jelöl, amely a (2.3) alakba írható.

Algoritmus

1. $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén legyen n_i azoknak a j oszlopindexeknek a száma, amelyekre $(i, j) \in B$ és $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén legyen m_j azoknak az i sorindexeknek a száma, amelyekre $(i, j) \in B$. Legyen k kezdeti értéke 0.
2. Ha van olyan $1 \leq i \leq n$, hogy $n_i = 1$, jelölje j azt az egyértelműen meghatározott oszlopindexet, amelyre $(i, j) \in B$ és $m_j \neq 0$;[3] folytassuk a számítást az 5. lépésnél.
3. Ha van olyan $1 \leq j \leq n$, hogy $m_j = 1$, jelölje i azt az egyértelműen meghatározott sorindexet, amelyre $(i, j) \in B$ és $n_i \neq 0$;[3] folytassuk a számítást az 5. lépésnél.
4. Stop; B_0 nem reprezentál minimális halmazt.
5. Csökkentsük n_i és m_j értékét 1-gyel, k értékét pedig növeljük 1-gyel, és legyen $i_k = i$, $j_k = j$. Ha $k < 2n-1$, folytassuk az eljárást a 2. lépésnél.
6. Legyen $v_{2n-1} = 0$ és $u_{2n-1} = d_{ij}$, ahol $i = i_{2n-1}$, $j = j_{2n-1}$, és $k = 2n-2, 2n-3, \ldots, 2, 1$ esetén tegyük a következőt. Legyen $i = i_k, j = j_k$; ha az előzőkből u_i ismert, akkor legyen $v_j = u_i - d_{ij}$, ha pedig az előzőekből v_j ismert, akkor legyen $u_i = v_j + d_{ij}$. Stop.

Ezzel az algoritmussal megoldható a (2.8) egyenlet, föltéve, hogy $B_0 = B \setminus \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (n, n)\}$ minimális halmazt reprezentál. Ha nem ez a helyzet, akkor az algoritmus a 4. lépésnél fejeződik be, és bármely n_i, illetve m_j aktuális értéke vagy nulla, vagy 1-nél nagyobb. A nullától különböző $n_i = \mathrm{k}$ és $m_j = \mathrm{k}$ segítségével megállapítható, hogy milyen összefüggések állnak fenn a $H = \{p_{ij} \mid (i, j) \in B_0\}$ súlyarányrendszer elemei között; ezt itt nem részletezzük.

Ha a fenti algoritmussal megoldottuk a (2.8) egyenletet, akkor — $d_{11} = d_{22} = \ldots = d_{nn} = 0$ miatt — a tekintett minimális halmazhoz tartozó súlyrendszer a következőképpen adódik: $P_i = e^{u_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ezzel együtt adottnak tekinthetjük a teljes $P = (p_{ij})$ súlyarány-mátrixot is.

[3] Az eljárás kezdetén $n_i \neq 0$ és $m_j \neq 0$ valamennyi i-re és j-re.

3. A minimális halmazok számára vonatkozó R. Frisch-féle sejtés igazolása

A minimális halmazoknak az előző pontban adott jellemzése lehetővé teszi a következő állítás igazolását:

2. *Tétel.* n-változós preferencia-függvény esetén az egymástól különböző minimális halmazok száma n^{n-2}.

Ez a minimális halmazok számára vonatkozó megállapítás lényegében R. Frischtől származik, aki $n \leq 5$ esetén empírikus vizsgálatokat végzett ebben az irányban, általános érvényű bizonyítást azonban nem közölt. Megjegyezzük, hogy a 2. tétel szempontjából két minimális halmazt azonosnak tekintünk, ha ezek egymástól bizonyos p_{ij} súlyarányoknak a $p_{ji} = p_{ij}^{-1}$ súlyarányokkal való helyettesítésével előállíthatók. Ezért az alábbiakban mindenütt olyan minimális halmazokra szorítkozunk, amelyek bármely p_{ij} elemére $i \leq j$. A bizonyításban szükségünk lesz a következő segédtételre.

1. *Lemma.* Legyen $1 \leq i \leq n-1$, és $k_1, k_2, \ldots, k_i$ jelöljön olyan természetes számokat, amelyekre $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_i \leq n-1$. Legyen B a szállítási feladat egy olyan bázisa, amely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

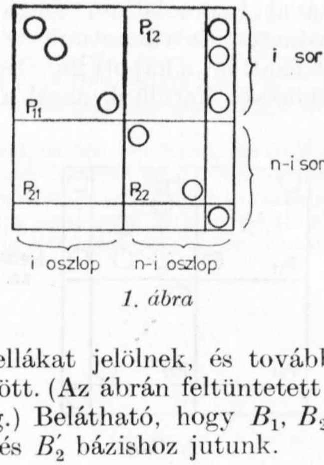
(a) $(k, k) \in B$, $k = 1, 2, \ldots n$;

(b) ha $(k,l) \in B$, akkor $k \leq l$;

(c) $(k_1, n), (k_2, n), \ldots, (k_i, n) \in B$.

Legyen végül S az összes olyan B bázis halmaza, mely rendelkezik az $(a) - (c)$ tulajdonságokkal; ekkor S elemeinek száma csak i-től függ, viszont $k_1, k_2, \ldots, k_i$ értékétől független.

Bizonyítás. Nevezzünk minden olyan átalakítást megengedett bázistranszformációnak, amelyek segítségével valamely B bázisból olyan B' bázist lehet előállítani, hogy B és B' csupán egy-egy cellában különböznek. Mármost megengedett transzformációk segítségével az $(a) - (c)$ feltételeket kielégítő tetszőleges B bázist az 1. ábrán látható alakra lehet hozni.



1. ábra

Itt a körök rögzített cellákat jelölnek, és további $n-i-1$ rögzített cella helyezkedik el a főátló fölött. (Az ábrán feltüntetett P_{11}, P_{12}, P_{21} és P_{22} jelölésekre később lesz szükség.) Belátható, hogy $B_1, B_2 \in S$, $B_1 \neq B_2$ esetén ily módon két különböző B_1' és B_2' bázishoz jutunk.

A 2. tétel bizonyítása. Jelöljük a szóban forgó minimális halmazok számát $F(n)$-nel. Az 1. tétel miatt minimális halmazok helyett mindig olyan B bázisokkal fogunk számolni, amelyek rendelkeznek a segédtételben szereplő (a) és (b) tulajdonságokkal. A segédtétel alapján

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} f(n, i),$$

ahol $f(n, i)$ jelenti az (a) — (c) tulajdonságokkal jellemzett S halmaz elemeinek a számát. Tekintettel a

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} i(n-1)^{n-i-2} = n^{n-2}$$

azonosságra, elegendő az alábbi összefüggést igazolnunk:

$$f(n, i) = i(n-1)^{n-i-2},$$
$$n = 2, 3, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad n-1.$$

Az állítás helyessége $n = 2$ és $n = 3$ esetén közvetlenül belátható. Tegyük fel mármost az állítás helyességét minden n-nél kisebb n'-re, és minden 1 és $n' - 1$ közé eső i-re.

Rögzített i esetén $(1 \leq i \leq n-1)$ a segédtétel szerint $f(n, i)$ megegyezik azoknak a bázisoknak a számával, melyeket az 1. ábra segítségével szemléltethetünk; a szóban forgó bázisok mindegyikében rögzítettek a körökkel megjelölt cellák, és ezek mellett még található bennük további $n—i—1$ számú cella. Azt kell megvizsgálnunk, hogy ez utóbbiak hányféleképpen helyezkedhetnek el. A következőket lehet megállapítani:

a még nem rögzített n-i-1 bázis-cella a P_{12} és a P_{22} blokkban helyezkedik el, éspedig, ha j jelöli a P_{12}-ben található bázis-cellák számát, akkor $1 \leq j \leq n—i—1$, és így P_{22} összesen $(n—i—1) + (n—i—1—j)$ számú bázis-cellát tartalmaz. Továbbá, P_{12} minden oszlopa legfeljebb egy bázis-cellát tartalmaz.

A mondottak indoklásával kapcsolatban megjegyezzük, hogy — mint könnyen belátható — akárhogyan is választunk az itt rögzített szabályoktól eltérően $n—i—1$ cellát a táblázatban, a kapott $2n—1$ számú cella vagy nem alkot bázist, vagy pedig összeütközésbe kerülünk azzal a feltétellel, miszerint $(k,l) \in B$ esetén $k \leq l$.

2. ábra

Rögzítsünk j számú bázis-cellát valamilyen módon P_{12}-ben. Ha ezek mindegyikét a 2. ábrán látható módon a táblázat i-edik sorába visszük át (ami megengedett bázis transzformációt jelent), akkor belátható, hogy P_{22}-ben az $(n-i-1-j)$ számú szabadon választható bázis-cella elhelyezkedésére éppen $f(n-i, j)$ számú lehetőség adódik. Mivel P_{12}-ben a j számú bázis-cella kiválasztására $\binom{n-i-1}{j} i^j$ lehetőségünk van, az

$$f(n, i) = \sum_{j=1}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{j} i^j f(n-i, j)$$

eredményhez jutottunk, ahonnan az indukciós feltevés kihasználásával, rövid számolás útján a bizonyítandó állítást kapjuk.

(*Beérkezett: 1977. augusztus 18-án*)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Az ártervezés ökonometriai modelljének eredményei. XX.: Konzisztens árelőrebecslések 1980. Budapest, 1976. Országos Anyag- és Árhivatal és Számítógépalkalmazási Kutató Intézet. 178 p.
2. DANTZIG, G. B.: Linear Programming and Extensions. Princeton, N. J., 1963. Princeton University Press.
3. FRISCH, R.: Cooperation between Politicians and Econometricians on the Formalisation of Political Preferences. Federation of Swedish Industries, Stockholm, 1971. Magyar fordítás: FRISCH, R.: Kvantitatív és dinamikus közgazdaságtan. Válogatott tanulmányok. Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

ON THE DETERMINATION OF WEIGHTS IN PREFERENCE FUNCTIONS

The use of many economic-mathematical models requires the computation of the optimum of a preference function of form

$$P_1 x_1^{\alpha_1} + P_2 x_2^{\alpha_2} + \ldots + P_n x_n^{\alpha_n}.$$

In the application the proper choice of weights P_i in the function is of great importance. According to results obtained by R. *Frisch* and other authors this problem can be reduced to the examination of an $n \times n$ matrix where the values of individual entries are the quotients P_i/P_j. In connection with this matrix the notion of the so called minimum set was introduced, that proved to be of basic importance in the proper determination of weights P_i.

This paper provides a method, on the one hand, for deciding whether a given subset of entries of a matrix with the above characteristics forms a minimum set or not, and, on the other hand, for filling in the complete matrix in the knowledge of some given minimum set. Over and beyond that we have succeeded in proving R. Frisch's conjecture concerning the number of various minimum sets belonging to preference functions with n variables.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВЕСОВ, ФИГУРИРУЮЩИХ В ФУНКЦИЯХ ПРЕФЕРЕНЦИИ

Использование большого числа математико-экономических моделей вызывает необходимость в расчете оптимума функции преференции

$$P_1 x_1^{\alpha_1} + P_2 x_2^{\alpha_2} + \ldots + P x_x^{\alpha_n}$$

В ходе применения большое значение имеет правильный выбор весов P_i, указанных в функции. В соответствии с результатами, полученными Р. Фрищем и другими авторами эта проблема может быть сведена к изучению матрицы размера $n \times n$, в которой значение отдельных элементов дается посредством частного P_i/P_j. В связи с этой матрицей было введено понятие т. н. минимального множества, которое по значению стало основополагающим в надлежащем определении весов P_i.

В данной работе дается, с одной стороны, метод принятия решения относительно того, что дает ли совокупность элементов матрицы с указанными выше свойствами минимальное множество или нет и, с другой стороны, заполнения всей матрицы на основании некоторого минимального множества. Помимо этого удалось доказать догадку Р. Фриша относительно количества различных минимальных множеств, относящихся к функциям преференций с n переменными.