SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

ÁBEL ISTVÁN, a Pénzügyminisztérium előadója, BÁNHÍDI FERENC, az Országos Tervhivatal munkatársa, BOD PÉTER, a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Matematikai Kutató Intézete tudományos tanácsadója, DOBÓ ANDOR, a KG INFORMATIK műszaki-gazdasági tanácsadója, FÉNYES TAMÁS, kandidátus, az MTA Matematikai Kutató Intézet tudományos főmunkatársa, HULYÁK KATALIN, a KSH Ökonometriai Laboratórium főelőadója, KISS RÓBERT, a NIM Továbbképző Központ főelőadója, MARÓTI LÁSZLÓ, a SZÁMKI tudományos munkatársa, MÓCSI ZOLTÁNNÉ, a SZÁMKI tudományos munkatársa, MOLNÁR ANDRÁS, az Alumíniumipari Tervező és Kutató Intézet közgazdásza, NYÁRY ZSIGMOND, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, PONGRÁCZ TIBOR, az Állami Népességnyilvántartó Hivatal főosztályvezetője, SCHMIDTNÉ KÍGYÓSSY ÉVA, az NDK Tudományos Akadémiája Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos munkatársa, SIMONOVITS ANDRÁS, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos munkatársa, STAHL JÁNOS, kandidátus, a SZÁMKI tudományos tanácsadója, osztályvezető, TÖRÖK TAMÁS, a NIM Továbbképző Központ főelőadója

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43—45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (PKHI 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKH 215—96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215—11488, és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185—612. Előfizetési díj egy évre: 120,—Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149

Ábel István

Érték és gazdasági dinamika

1. Fizikai és gazdasági mozgástörvények

A gazdaság mozgástörvényeit meg lehet fogalmazni a fizika egyik ágában, a mechanikában, közelebbről a klasszikus dinamikában alkalmazott *Lagrange* és *Hamilton* által kidolgozott matematikai összefüggések formájában. (Ezekről jó áttekintést ad [4] és [14])

A gondolat egyik legkorábbi megjelenése Leon *Walras* 1907 és 1908 telén *Economique et mechanique* címmel írott dolgozata. Ez 1909-es megjelenése után feledésbe merült. (Újra megjelent: [17])

Újabb figyelemre méltó kísérlet fűződik Luigi *Amoroso* nevéhez, aki 1940-ben megjelent cikkében [1] értékelméletet modellez ezzel az eszköztárral.

Napjainkban a probléma reneszánszát éli. Ennek érzékeltetésére elég két mű említése, melyekre e dolgozat is támaszkodik: Magill [8] és Cass—Shell [5].

E munkák mind a polgári árelméletből indulnak ki, így fogalomalkotásuk szükségképpen eltér az általunk használatostól. A fizika eddigi történetéből kitűnik, hogy önmagában megálló dinamikai elméletet csak valami mélyebb megmaradási elvre (invariancia elv) lehet alapozni. Ilyen mélyebb elv a polgári árelméletből hiányzik, azonban a marxi értékelméletben fellelhető, sőt annak egyik alapeleme. A munkaértékelmélet szilárd alappal szolgál az itt tárgyalandó általános kifejtéshez.

Felhasználjuk *Novozsilov* gondolatait is, melyek árnyaltabban kidolgozzák — a *Marx*nál egyébként már felmerült — összefüggést az értéktörvény és a munkamegtakarítás elve között. Eltérünk azonban Novozsilov *modellalkotásától*, mivel az valójában csak az ún. „opportunity cost'' átfogalmazását szolgáltatja.

A dolgozat e bevezetésen kívül négy fejezetre tagolódik. Az első az értéktörvény egy szabatos matematikai alakját adja meg. A második a termelési tényezők — és általában a korlátozott erőforrások — szerepével foglalkozik. A harmadik és a negyedik rész a ráfordításokkal illetve a hozamokkal kapcsolatos összefüggéseket vizsgálja és kidolgozza az értéktörvény és a munkamegtakarítás elvének kapcsolatát.

Az így nyert mozgásegyenletek árelméleti és mozgáselméleti alkalmazása egy későbbi dolgozat tárgya lesz. Ahogy a hamiltoni formalizmus a fizikai dinamika legáltalánosabb megfogalmazása — alkalmazása a modern relativitáselméletet is átvilágítja — úgy remélhető, hogy közgazdasági értelmezése is alkalmas lesz a dinamikai gondolatok világos összefoglalására.

A kifejtés során bőven élünk a jól ismert *Neumann-Leontief-Bródy* féle lineáris rendszerek dinamikai fogalmaival.

Ez azonban pusztán illusztrációként szolgál, a kiépítendő formalizmus jóval általánosabb, tehát helytálló marad nemlineáris összefüggések esetén is, sőt tulajdonképpeni rendező ereje éppen ezen az általánosabb területen bontakozik ki teljesen.

A dolgozatban mindenhol, ahol ráfordítások és hozamok közötti kvantitatív összefüggéseket tárgyalunk, a ráfordításokat negatív előjellel véve vetjük össze a hozamokkal. Ezt tekinthetjük egyszerűen jelölésbeli konvenciónak, melyet indokolhatnánk azzal, hogy a ráfordításokat negatív hozamoknak tekintjük, de úgy is, hogy a hozamokat negatív ráfordításként értelmezzük. Más szóval ugyanazon munkamennyiséghez ellenkező ,,irányítást'' rendelünk akkor, ha azt ráfordításként, mint akkor, ha azt eredményként vizsgáljuk.

2. Az értéktörvény

Az érték nagyságát a társadalmilag szükséges munkaráfordítások összege adja meg.

A következőkben két függvényt vezetünk be. Az első a gazdaság értékteremtő potenciálját adja meg a gazdaság állapotának, helyzetének függvényében, a másik pedig ennek változását. Mindkettő argumentuma ugyanazon vektorváltozó, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ amely az 1.-től n.-ig megszámozott különböző termékek mennyiségét méri, elképzelésünk szerint természetes, azaz fizikai mértékegységekben.

A gazdaság értékteremtő potenciálja bűvös kifejezés helyett használhattuk volna egyszerűen az érték szót is, de hangsúlyozni kívánjuk, hogy ezen a gazdaság olyan mennyiségi összefüggései értendők, melyek az erőforrások optimális allokációja esetében érvényesülnek tiszta formájukban. Találóbb elnevezés híján a *potenciális érték* elnevezést fogjuk használni, de e részben még megmaradunk a megszokottabb *érték* kifejezés mellett, megjegyezve, hogy ezek szinonim fogalmak.

Legyen

$$e = V(x), \tag{1}$$

azaz az x termékhalmaz e értékét adja meg a $V(x)$ függvény.

Ez a V függvény elképzelhető a legegyszerűbb $V(x) = px = \sum_i p_i x_i$ alakban, ahol p_i az i-edik termék egységének értéke. Lehetséges azonban más, általánosabb függvény is, és itt nem teszünk más kikötést a V függvényre, mint hogy vektorváltozós skalárfüggvény, amely korlátos és folytonos. Korlátos, mert véges termékhalmaznak nem lehet végtelen értéke; folytonos, mert a termékhalmaz csekély megváltozása csak kevéssé változtatja meg ennek értékét.

A rendelkezésre álló termékhalmaz megváltoztatása — ez általában együttjár értékének módosulásával is — ráfordításokkal jár. Legyen a ráfordítások kiszámítását szolgáló függvény $F(x)$, akkor

$$- F(x) = \text{grad } V(x), \tag{2}$$

ahol a negatív előjel azért szerepel, mert ráfordítást hasonlítunk össze eredmény jellegű mennyiséggel. A grad $V(x) = \dfrac{\partial V(x)}{\partial x}$ vektor értékű függvény.

A (2) egyenlet jelentése az, hogy az $F(x)$ ráfordítások azok, amelyek az értéknagyságot megnövelik.

Az F függvény ismét elképzelhető egyszerű lineáris alakban, például mint vQ, ahol Q a Leontief-inverz és v a közvetlen munkaráfordítások vektora. Egyelőre azonban ismét nem teszünk más kikötést az F függvényre, mint hogy vektorváltozós vektorfüggvény, amely korlátos és folytonos. Korlátos, mert véges termékhalmaz nem igényelhet végtelen ráfordításokat; folytonos, mert a termékhalmaz csekély megváltoztatása csak kevéssé változtatja meg a szükséges ráfordításokat.

Induljon ki most a gazdaság egy x_0 termékhalmazból és jusson el egy x_T termékhalmazhoz. Ekkor az értéknagyság megváltozását a következőképp számíthatjuk:

$$\Delta e = -\int_{x_0}^{x_T} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_T} \operatorname{grad} V(x)\,dx = V(x_T) - V(x_0). \tag{3}$$

A (3) egyenlet legfontosabb mondanivalója az, hogy mivel a V függvény skalárfüggvény, ezért grad $V(x)$ integrálja csak a megtett út két végpontjától, x_0 és x_T értékétől függ. Nem függ semmiképpen a két végpontot összekötő pálya sajátos alakjától, tehát közömbös, hogy a két végpont közt a gazdaság milyen úton halad. x_0 és x_T a továbbiakban is rögzített állapotokat jelöl, és a dolgozatban csak e két pontot összekötő tetszőleges $x(t)$ pályákkal foglalkozunk, de magukat az x_0 és x_T állapotokat adottnak vesszük.

Az x termékhalmaz a társadalmi szükségleteknek megfeleltetve értékelődik, tehát az egyes termékfajták összmennyiségeikkel vesznek részt az értékelődésben és a termékegyedek egy-egy adott termékfajtán belül azonos értékelést kapnak, függetlenül attól, hogy egyedileg hogyan termelték őket.

Az alábbi idézetek alapján azt is mondhatnánk, hogy a (3) összefüggés a marxi értékmeghatározásból definíciószerűen adódik.

,, . . . a piaci ár alakjában és továbbá a szabályozó piaci ár vagy piaci termelési ár alakjában mutatkozik meg az áruk értékének természete, az, hogy értéküket nem az egy meghatározott árumennyiség vagy egyes áruk termeléséhez egyénileg, egy meghatározott termelő számára szükséges munkaidő határozza meg, hanem a társadalmilag szükséges munkaidő; az a munkaidő, amely szükséges ahhoz, hogy a társadalmi termelési feltételek adott átlaga mellett előállítsák a piacon található árufajták társadalmilag szükséges összmennyiségét.'' [11] (608–609. old.)

,,Az össztermék — azaz az össztermék értéke — ekkor tehát nem a benne foglalt munkaidővel egyenlő, hanem azzal a munkaidővel amelyet arányosan felhasználtak volna, ha az össztermék arányos lett volna a többi terület termelésével.'' [9] (197. o.)

Az értékelésben szükségesnek elismert ráfordítások az adott termékfajta összmennyiségének értékét határozzák meg:

,,Tegyük fel például, hogy aránylag túl sok pamutszövetet termeltek, bár ebben a szövet-össztermékben csak az előállításához az adott feltételek között szükséges munkaidő realizálódik. De egyáltalában túl sok társadalmi munkát adtak ki ebben a különös ágban; azaz a termék egy része haszontalan. Az egész ennélfogva csak úgy kel el, mintha a szükséges arányban termelték volna.'' [11] (604. o.)

Mi a termékfajták összmennyiségeivel és ezek értékelésével foglalkozunk. Ebből a mértékegység megfelelő megválasztásával és osztással megkaphatjuk a termékegység értékelését. Az értékelés ilyen meghatározása a marxi értékelmélet lelke:

„Bár a közvetlen élelmiszertermelők munkája önmaguk szempontjából szétválik szükséges és többletmunkára, a társadalomra vonatkozóan ily módon csak az élelmiszerek termeléséhez megkívánt szükséges munkaidőt jelenti. Egyébként ugyanez a helyzet a munkának a társadalmon belüli minden megosztásánál, eltérően a munkának az egyes műhelyen belüli megosztásától. Ez a különös cikkek termeléséhez — a társadalom különös cikkek iránti különös szükségletének kielégítéséhez szükséges munka. Ha ez az elosztás arányos, akkor a különböző csoportok termékei értékükön (a további fejlődés során termelési árukon) kelnek el, vagy pedig olyan árakon, amelyek ezeknek az értékeknek, illetve termelési áraknak általános törvények által meghatározott módosulásai. Ez valójában az értéktörvény, ahogy érvényesül, nem az egyes árukra vagy cikkekre, hanem a különös, a munka megosztása következtében önállósult társadalmi termelési szférák mindenkori összetermékeire vonatkozóan; úgyhogy nemcsak hogy minden egyes árura csak a szükséges munkaidőt fordítják, hanem a társadalmi összmunkaidőből is csak a szükséges arányos mennyiséget használják fel a különböző csoportokban." [11] (603—604. o.)

Ráfordítások eszközlése mindig a gazdaság erőforrásainak felhasználását jelenti. Esetünkben a munkaráfordítások mértékében csökken a gazdaság még mozgósítható forrástartaléka, az eleven munka lehetséges mennyisége. E csökkenés egyenlő az aktivált ráfordításmennyiséggel. Vagyis ha a potenciális ráfordítások mennyiségét m jelöli, és az előbbi módon a gazdaság az x_0 termékhalmazzal jellemzett állapotból az x_T termékhalmazzal jellemzett állapotba jut, akkor az aktiválódott ráfordításokkal csökken ez a mennyiség:

$$\Delta m = \int_{x_0}^{x_T} F(x) \cdot dx. \tag{4}$$

A (3) és (4) egyenletekből adódik a

$$\Delta e + \Delta m = 0 \tag{5}$$

alapösszefüggés, mely még élesebben fejezi ki a marxi értékelmélet alapelvét, az érték megmaradásának elvét olyan értelemben, hogy értéket csak a munkaráfordítások hoznak létre. Az érték a termelési folyamatban transzformálódik ugyan, de összmennyisége nem változik. Az (5) egyenletből adódik ugyanis, hogy

$$e + m = \text{konstans} \tag{6}$$

Ami az érték megmaradásának elvét fejezi ki.

Két megjegyzés kívánkozik ide. Az első az, hogy az (5) egyenlet úgynevezett „konzervatív" rendszerekre vonatkozik, amelyben tehát a technikai lehetőségek adottak. Így nem merül fel bennük „erkölcsi kopás", tehát olyan értékcsökkenés, amelyet a technikai változás vált ki. Ugyanúgy nem merül fel az erőforrások esetleges kimerülésével kapcsolatos, a technika „romlásából" származó értékemelkedés sem. Az erőforrások korlátozottságának kérdésére a következő részben térünk ki, a nemkonzervatív (időparaméteres) rendszerek későbbi vizsgálat tárgyai.

A második megjegyzés az, hogy az egyenletek nem elosztási viszonyokat fejeznek ki, bennük a munkaerőráfordítás az általa létrehozott értéknagysággal és nem saját értékével szerepel.

3. A termelési tényezők és az érték

Eddig az x_0-ból x_T-be vezető pályákra semmilyen kikötést nem tettünk. A meglévő termelési feltételek azonban nem teszik lehetővé, hogy x_0-ból bizonyos t idő alatt tetszőleges x_t-be eljuthassunk. Az x_0-ból x_T-be vezető tetszőleges pályák egy része megsérti a termelési feltételek oldaláról érvényesülő korlátozásokat. Ezeket gazdaságilag nem lehetséges pályáknak nevezzük. A továbbiakban csak a feltételeket kielégítő, gazdaságilag lehetséges pályákkal foglalkozunk.

A termelési feltételek oldaláról jelentkező korlátozásokat forráskorlátokként vesszük figyelembe. A forráskorlát mindig valamiféle technológiai összefüggésen keresztül jelentkezik. Nyilván, ha olyan technológiai lehetőségünk lenne, mely a korlátos forrás kimerítése nélkül állítaná elő a termékmennyiséget, akkor a korlát nem lenne aktív létező. Ugyanakkor a technológiákkal kapcsolatos korlátokat minden esetben forráskorlátokra vezetjük vissza, mondván, hogy minden esetben valamiféle forráskorlát akadályozza meg adott technológiai lehetőség kiterjesztését. Egyszóval forráskorlát alatt mindenféle a termelési feltételek oldaláról jelentkező gazdaságilag reálisan létező, vagyis aktív korlátozást értünk.

A termelési tényezők korlátozottsága azt jelenti, hogy ezen tényezők rendelkezésre álló mennyisége vagy termelése az irántuk mutatkozó keresletnél, vagy pontosabban, lehetséges hatékony felhasználásuk volumenénél kisebb. Minden korlátos tényező monopolizálható, vagy legalábbis a monopolizálódás bizonyos jeleit veszi fel, ami járadékok realizálását teszi lehetővé az elosztásnál. Ez azonban már az árakon keresztül történik — amire egy későbbi vizsgálatban térünk vissza — és elosztási viszonyokat tükröz — ami szintén kívül esik jelenlegi vizsgálatunk körén.

Nagyon is ide tartozik azonban ezen termelési tényezők modellünkben való szerepeltetésének kérdése. Vagy ami ezzel szorosan összefügg, az hogy a termelési tényezők (korlátos források) milyen szerepet játszanak az értékmeghatározásban.

A forráskorlátozások egyszerűbb esetét úgy írhatjuk le, hogy a gazdaságilag lehetséges pályák pontjait az n-dimenziós pozitív ortánsnak a következő

$$g_k(x) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{7}$$

egyenletek által meghatározott többdimenziós alakzatára korlátozzuk.

Lehetőség van a korlátozásoknak egy ennél általánosabb megadására is, melyre részletesebben az árelméleti kérdéseknél térünk majd ki. Itt g_k skalár értékű vektorfüggvényeket jelöl, melyekről feltesszük, hogy folytonosak. Folytonosak, mert a termékhalmaz csekély változtatása csak kis mértékben változtatja meg a pótlólagos forrásigényt.

Az egyedi termékek termelése során, ha forráskorlátba ütközünk, akkor az adott forrásból fellépő lokális hiány miatt kényszerráfordítások merülnek fel. Ezen kényszerráfordításoknak a

$$G(x)=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k \operatorname{grad} g_k(x) \tag{8}$$

függvényt feleltetjük meg, ahol $\operatorname{grad} g_k(x)=\dfrac{\partial g_k(x)}{\partial x}$.

A (8) meghatározásban kifejezésre jut, hogy a kényszerráfordítás annál nagyobb, minél nagyobb az adott termelési szint mellett a termelés pótlólagos forrásigénye $(\operatorname{grad} g_k(x))$ és minél nagyobb az adott forrásfajta egységének helyettesítéséhez szükséges ráfordítás (λ_k). Természetesen λ_k is változhat a termelési feltételek változásával (akárcsak x ez is t függvénye), de negatív értelemszerűen nem lehet.

A kényszerráfordítások $G(x)$ függvénye vektorértékű vektorfüggvény, akárcsak az $F(x)$ ráfordításfüggvény.

A kényszerráfordításokat is figyelembe véve értékmeghatározásunk (3) mintájára a következő lesz:

$$\Delta e=-\int_{x_0}^{x_T}[F(x)+G(x)]\,dx. \tag{9}$$

Mivel azonban x_t csak olyan értékeket vehet föl, hogy a (7) egyenletek egyikét se sértse meg, így x változása: dx ortogonális $\operatorname{grad} g_k(x)$-el. Ugyanis (7) miatt:

$$\int \lambda_k \operatorname{grad} g_k(x)\,dx=\lambda_k g_k(x)=0. \qquad (k=1,2,\ldots,r)$$

Ebből pedig már következik

$$\int G(x)\,dx=0. \tag{10}$$

Vagyis a (9) összefüggés (10) felhasználásával (3)-ba megy át.

Ez éppen azt fejezi ki, hogy a termelési tényezők nem értékalkotók. A források korlátozottsága a monopolizálhatóság révén az áralakulásra, az elosztási viszonyokra hat, de értékalkotóként csak a munka jön szóba.

4. A ráfordítás

4.a. A társadalmilag szükséges ráfordítások intenzitása

Eddig az értéket határoztuk meg a társadalmilag szükséges ráfordításokkal. A termékhalmaz megváltoztatásához az x állapotban szükséges ráfordításokat $F(x)$ jelölte. Példaként említettük a statikus Leontief modellt, melyben a termékhalmaz megváltoztatásához szükséges ráfordításokat vQ fejezi ki, a termékhalmaz növekményét pedig y jelöli. Vagyis az $y=x_T-x_0$ változáshoz szükséges ráfordításokat vQy adja.

A (3) egyenlet alapján láttuk, hogy az értéknagyság megváltozása (Δe) független attól, hogy milyen $x(t)$ $(0\leq t\leq T)$ pályán jutunk el x_0-ból x_T-be. A tényleges ráfordítások nagysága azonban nagyon is függ attól, hogy milyen tényleges pályán mozog a gazdaság. Az értéknagyság meghatározásának vizsgálatáról áttérve a ráfordítások vizsgálatára éppen ez a vonatkozás kerül a középpontba. Az előző részekben a társadalmilag szükséges ráfordításokat tekintettük ismertnek, és azokkal határoztuk meg az értéket. Most megfordítjuk a dolgot. Az értéket véve alapul a társadalmilag szükséges ráfordítások meghatározására irányítjuk figyelmünket. Pontosabban arra, hogyan határozhatók meg a társadalmilag szükséges ráfordítások az időben alakuló konkrét termelési pályák mentén.

A $V(x_T) - V(x_0)$ értékváltozás ismeretében az értékváltozást időbeli alakulása alapján is felírhatjuk.

$$\Delta e = \int_0^T \frac{dV(x(t))}{dt}\, dt$$

alakban. Feltevésünk szerint azonban $V(x)$ csak közvetett módon függ t-től, így e felírás tulajdonképpen a következő alakot veszi fel:

$$\Delta e = \int_0^T \operatorname{grad} V(x(t))\, \dot{x}(t)\, dt, \tag{11}$$

ahol $\dot{x}(t)$ az $x(t)$ függvény idő szerinti deriváltja.

A (2) összefüggés alapján a társadalmilag szükséges ráfordításokra (5) figyelembevételével a következő meghatározást kapjuk:

$$\Delta m = \int_0^T F(x(t))\, \dot{x}(t)\, dt. \tag{12}$$

Ilyen formában a termékhalmaz x_0-ról x_T-re történő változtatásához társadalmilag szükséges ráfordítások nagyságát időbeli folyamat összegeként adjuk meg. Kézenfekvő az integrandust a *társadalmilag szükséges ráfordítások intenzitásának* nevezni, mivel időegységre (pontosabban infinitezimális időegységre) eső társadalmilag szükséges ráfordítást jelöl.

De ez még mindig csak elméleti képződmény, amiről biztosan csak azt tudhatjuk, hogy nem megfigyelhető. Legjobb esetben is csak a konkrét tényleges ráfordítások megfigyelhetők.

4.b. *A tényleges ráfordítások*

A gazdaság konkrét pályáján a *tényleges ráfordítások intenzitását* $\mathfrak{L}(x(t), \dot{x}(t))$ funkcionállal jelöljük. E funkcionálról a kezelés egyszerűsítése céljából feltesszük, hogy megengedett függvényei, a termelési pályát leíró $x(t)$ függvények kétszer folytonosan differenciálhatók. A dolgozatban használt levezetések eredményei kevésbé megszorító feltevések mellett is helytállóak maradnak (esetleges apróbb módosításoktól eltekintve), tehát feltevéseink nem szükséges, csak elégséges feltevések. A tárgyalás egyszerűsítése érdekében csak ezekre szorítkozunk.

A tényleges ráfordításokat $[C(x(t))]$ a ráfordításintenzitásból integrálással kapjuk:

$$C(x(t)) = \int_0^T \mathfrak{L}(x(t), \dot{x}(t))\, dt. \tag{13}$$

A korábbi Leontief-féle modellünk egyszerű példájánál maradva ezt a következőképp illusztrálhatjuk. Figyelembe véve a (12) összefüggést és azt, hogy F-re a vQ alakot említettük, $\mathfrak{L}$-re példaként a $vQ\dot{x}$ alak adódna, ahol feltevés szerint v és Q független t-től. Ne feledkezzünk azonban meg arról, hogy $\dot{x}$ itt nem a termelési szint idő szerinti deriváltját jelöli, hanem a termékhalmaz idő szerinti deriváltját. Leontief zárt dinamikus modelljében, ahol a nettó terméket fölhalmozásra fordítják, a termékhalmaz idő szerinti deriváltját $B\dot{\underline{x}}$ jelöli, ahol $\dot{\underline{x}}$ a termelési szint idő szerinti deriváltja. Így példánk $\mathfrak{L}$-re $vQB\dot{\underline{x}}$ alakot nyeri. Hasonló meggondolásokkal $x = B\underline{x}$ fejezi ki a gazdaság rendelkezésére álló termékhalmaz és a termelési szint közötti összefüggést.

Ez a példa egyébként a következő meggondolásokkal is indokolható. A termelés növekedését időpontról időpontra a köetkező egyenlet írja le:

$$\underline{x}_t = A\underline{x}_t + B\dot{\underline{x}}_t + y_t \tag{14}$$

ahol A a közvetlen ráfordítási együtthatók mátrixa, B pedig a tőkelekötési mátrix. Feltesszük, hogy A és B matrixok konstansok, vagyis technológiai változás nem módosítja a ráfordítási viszonyokat.

A $[O, T]$ intervallumot n részre osztva, véges differenciákkal a következő alakban írhatjuk le a termelés növekedését ezen időintervallumokban:

$$\underline{x}_t = A\underline{x}_t + B(\underline{x}_{t+\Delta t} - \underline{x}_t) + y_t, \tag{15}$$

ahol

$$0 \leq t \leq T - \Delta t \quad \text{és} \quad \Delta t = \frac{T}{n}.$$

A (15) egyenletből átrendezéssel kapjuk:

$$y_t = (E - A + B)\,\underline{x}_t - B\underline{x}_{t+\Delta t}$$

Bevezetve a $G = (E - A + B)$ jelölést, a $[O, T]$ intervallumban a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_{\Delta t} \\ \vdots \\ y_t \\ \vdots \\ y_{T-\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & -B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G & -B & \dots & 0 \\ 0 & 0 & G & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -B \\ 0 & 0 & 0 & \dots & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_{\Delta t} \\ \vdots \\ \underline{x}_t \\ \vdots \\ \underline{x}_{T-\Delta t} \end{bmatrix}.$$

Az utolsó egyenlet csonka marad, mert már nem fér bele a hipermátrixba $\underline{x}_T$ szorzója $-B$. A beosztás finomításával tetszőlegesen csökkenthetjük azonban e csonkítás okozta torzítást. A beosztás finomítása azt jelenti, hogy $n \to \infty$ és $\Delta t \to 0$.

Innen Leontief dinamikus inverzszámításával kapjuk: (ld. [7] 77—107 old.)

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_{\Delta t} \\ \vdots \\ \underline{x}_t \\ \vdots \\ \underline{x}_{T-\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{-1} & G^{-1}BG^{-1} & (G^{-1}B)^2G^{-1} & \dots & (G^{-1}B)^{n-1}G^{-1} \\ 0 & G^{-1} & G^{-1}BG^{-1} & \dots & (G^{-1}B)^{n-2}G^{-1} \\ 0 & 0 & G^{-1} & \dots & (G^{-1}B)^{n-3}G^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_{\Delta t} \\ \vdots \\ y_t \\ \vdots \\ y_{T-\Delta t} \end{bmatrix}.$$

A finomítás során a részintervallumok száma a végtelenhez tart és ezzel hipermátrixunk is végtelen mátrixá alakul. Azonban bizonyos feltételek mellett (ld. [2] (297. old.) e matrix minden sorának és oszlopának összege Q:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(E-A+B)^{-1}B]^n(E-A+B)^{-1}=[E-(E-A+B)^{-1}B]^{-1}(E-A+B)^{-1}=$$
$$=[(E-A+B)-B]^{-1}=(E-A)^{-1}=Q.$$

Így ha $v_t = v$ és $y_t = y$ minden t-re, akkor funkcionálunkra példaként vQy említhető, ahol Q a dinamikus inverzből speciális esetként adódó jól ismert Leontief-féle inverz. Ez a zárt modell esetén, mivel ott $y = B\dot{\underline{x}}$, a $vQB\dot{\underline{x}}$ alakot veszi fel. A nyílt dinamikus modellben, ahol a termékhalmaz növekményét $y + B\dot{\underline{x}}$ jelöli, a ráfordításintenzitás függvényt $vQy + vQB\dot{\underline{x}}$ jelöli.

4.c. *A tényleges és a társadalmilag szükséges ráfordítások kapcsolata*

Marx az adott társadalmi szükségleteknek megfelelő összetételű végtermék előállításához társadalmilag szükséges ráfordításokat a termelési feltételek szerint minimálisan szükséges ráfordításokkal határozza meg.[1] Ezt a meghatározást veszi alapul Novozsilov is és a munkaértékelméletet a társadalmilag szükséges ráfordítások konkretizálásán keresztül felépítvén fejti ki a munkamegtakarítás törvényét. Eszerint a társadalmilag szükséges ráfordításokat a tényleges ráfordításokat minimalizáló feladattal határozhatjuk meg:

$$\Delta m = \min C(x(t)) \tag{16}$$

vagyis

$$\Delta m = \min \int_0^T \mathfrak{L}(x(t), \dot{x}(t))\, dt \tag{17}$$

$x(t) \in$ {gazdaságilag lehetséges pályák halmaza}.

Azt a termelési pályát keressük, amely a legalacsonyabb ráfordításokat adja; amelyet már nem tudunk úgy változtatni, hogy $C(x(t))$ értéke javuljon. Legyen ez a pálya x, és a lehetséges pályamódosítás (perturbáció) h legyen olyan, hogy $h(O) = h(T) = 0$ (zérus vektor) és $h(t)$, $O < t < T$ tetszőleges. A módosított pálya tehát $x + h$ lesz. A ráfordítások virtuális változása a h virtuális

[1] „Ha a tőkésnek az az ötlete támad, hogy vasorsók helyett aranyorsókat alkalmaz, a fonal értékében akkor is csak a társadalmilag szükséges munka számít, azaz a vasorsók termeléséhez szükséges munkaidő." ([10] 178. old.) „. . . a munka csak annyiban számít, amennyiben a használati érték termelésére felhasznált idő társadalmilag szükséges. Ez különféle dolgokat foglal magában. A munkaerőnek normális feltételek között kell funkcionálnia. Ha a fonás társadalmilag uralkodó munkaeszköze a fonógép, akkor a munkás kezébe nem szabad rokkát adni. Normális minőségű gyapot helyett nem szabad hulladékot kapnia, amely minden pillanatban elszakad. Mindkét esetben a társadalmilag szükségesnél többet használna fel egy font fonal termeléséhez, ez a fölös idő azonban nem alkotna értéket . . . " ([10] 184. old.)

pályamódosítás esetén a Taylor-formula felhasználásával (ld. [15] 598–605 old.):

(18)
$$C(x+h)-C(x)=\int_0^T[\mathfrak{L}(x+h,\dot{x}+\dot{h})-\mathfrak{L}(x,\dot{x})]dt=\int_0^T\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}h+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{x}}\dot{h}\right]dt+o(\|h\|).$$

Mivel parciális integrálással

$$\int_0^T\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{x}}\dot{h}\,dt=-\int_0^T\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{x}}\right)h\,dt,$$

így $h\to 0$ határátmenetet véve (18)-ban adódik:

(19)
$$dC(x)=\int_0^T\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{x}}\right]h\,dt=0.$$

Innen a *Du Bois Reimond* lemma alkalmazásával nyerjük, hogy a vizsgált funkcionál minimumához az szükséges, hogy a függvényei kielégítsék a következő, *Euler–Lagrange* differenciálegyenlet rendszernek nevezett feltételt:

(20)
$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{x}}=0.$$

A zárt modellből származó korábbi példánkon illusztrálva $\mathfrak{L}=pB\dot{\underline{x}}$ és $\underline{x}=A\underline{x}+B\dot{\underline{x}}$ összefüggések alapján adódik, hogy ugyanakkor $\mathfrak{L}=p(E-A)\underline{x}$, így tehát

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\underline{x}}}=pB \quad \text{és} \quad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\underline{x}}=p(E-A).$$

Ebből adódóan a (20) összefüggés a következő alakot veszi fel:

$$p(E-A)-\frac{d}{dt}pB=0.$$

Ebből a jól ismert áregyenlet adódik:

$$p=pA-\dot{p}B.$$

E differenciálegyenlet rendszer megoldása a marxi termelési ár egyenletét adja. Ugyanis a $p=-\dot{p}B(E-A)^{-1}$ egyenletrendszert kielégítik a $p=\pi e^{-\frac{1}{r}t}$ függvények, ahol π az $\frac{1}{r}\pi=\pi B(E-A)^{-1}$ sajátérték – sajátvektor feladat megoldása. E sajátérték – sajátvektor feladattal részletesen foglalkozik Bródy [2] $\pi=\pi(A+rB)$ alakban. Így tehát megkaptuk a $\pi=\pi A+r\pi B$ termelési áregyenletet, melyben a profit a tőkelekötés szerint az átlagprofit rátája (r) arányban oszlik el.

5. A hozam

Az allokáció optimalitását föltételezve a társadalmilag szükséges ráfordításokat vesszük alapul a továbbiakban. Miután az előző részben a társadalmilag szükséges ráfordítások meghatározására helyeztük a hangsúlyt, e részben visszatérünk az eredeti gondolatmenethez, vagyis az érték változásának — más szóval a hozamnak — a társadalmilag szükséges ráfordításokkal történő meghatározását tárgyaljuk.

Az allokáció optimalitása azt jelenti, hogy a vizsgált termelési pályák kielégítik a (20) egyenletet, pontosabbban a ráfordításokat a (17) feladat szerint határozzuk meg. Formailag adott (optimális) pályára korlátozzuk a most következő összefüggések tárgyalását, és ezen belül is ezen pálya valamely tetszőleges, de rögzített pontjáról lesz szó. E megszorítások a matematikai összefüggések egyszerűbb kezelhetősége miatt kívánatosak.

A *hozam intenzitását* (melyet $\mathcal{H}(p, x)$ jelöl majd) a *ráfordításintenzitás* függvény duálisaként értelmezzük. Az $\mathfrak{L}(x, \dot{x})$ és $\mathcal{H}(x, p)$ függvények közötti dualitást *L. C. Young* szerinti értelemben használjuk. Ez tulajdonképp azt jelenti, hogy a Legendre duális transzformációt alkalmazva az egyik függvényre, megkapjuk a másikat. (ld. [6] 71—79. old.)

A Legendre duális transzformációban p_i-vel jelölt duális változókat a következőképp definiáljuk:

$$p_i = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{21}$$

Ne feledkezzünk meg arról, hogy $\mathfrak{L}(x, \dot{x})$ függvényben x-et rögzítettük, így tehát p_i a függvény adott pontjához van definiálva — esetünkben az optimális allokációhoz tartozó duális változókat jelöli.

A (20) összefüggésből adódóan, melynek teljesülését e részben eleve feltételeztük:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}_i} = \int \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} dt. \tag{22}$$

Vagyis a duális értékelést egy függvény $\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i}\right)$ idő szerinti integráljának primitív függvénye adott helyen (az optimális allokációt jellemző x helyen) vett helyettesítési értékével definiáltuk. Ez gazdaságilag azt jelenti, hogy a duális értékelést differenciális ráfordítással határoztuk meg, ugyanis $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i}$ az i-edik termék szerinti differenciális ráfordításintenzitást jelöli, amelynek idő szerinti integrálja a differenciális ráfordítás. Mégpedig itt, mivel feltételezzük az allokáció optimalitását, ezek egyben *differenciális társadalmilag szükséges ráfordítások*. (A differenciális ráfordítás fogalmát novozsilovi értelemben használjuk. (ld. [12] 370—380 old.)

A duális függvényt ezen új változók segítségével a következőképp definiáljuk:

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{x}_i - \mathfrak{L}(x, \dot{x}). \tag{23}$$

A (21) alakú n egyenlet lehetővé teszi, hogy $\dot{x}_i$ változóinkat kifejezzük p és x függvényében, vagyis a *hozamintenzitás* kifejezhető p és x explicit függvényeként.

Az értékváltozás pedig a társadalmilag szükséges ráfordításokkal a (17) feladat duálisaként írható fel:

$$\Delta e = \max \int_0^T \mathcal{H}(x, p)\, dt \tag{24}$$

$p \in$ {a gazdaságilag lehetséges pályamódosításoknak megfelelő duális értékelések halmaza}.

Az allokáció optimumának megfelelő értékeléseket véve (24) átmegy az egyszerűbb

$$\Delta e = \int_0^T \mathcal{H}(x, p)\, dt \tag{25}$$

alakba, ahol tehát p a (24) maximumának, x pedig a (17) minimumának megfelelően vannak megválasztva.

Ez azt jelenti, hogy a hozamimpulzus primitív függvényeként áll elő az értékmegváltozás függvény, melyet korábban a potenciális érték függvény $\left(V(x)\right)$ változásaként állítottunk elő. Nincs szükségünk azonban a primitív függvény meghatározására, hiszen a (25) határozott integrál már megadja az értékmegváltozást, anélkül hogy az értékmegváltozás-függvényt elő kelljen állítanunk. Egyebek között ez az egyik érv dinamikus rendszerünk mellett — pontosabban amellett, hogy az értéktörvény helyett a sok tekintetben általánosabb munkamegtakarítás törvényét alkalmazzuk —, hiszen könnyen konstruálhatunk olyan gyakorlati eseteket, ahol $\mathcal{H}(x, p)$-nek nincs primitív függvénye. Például ilyenek azok az esetek, ahol a ϱ diszkonttényező szerinti diszkontálást explicite szerepeltetjük $e^{-\varrho t}$ formában. Ekkor a primitív függvény nem létezik, így a (3) meghatározás használhatatlan, mert $V(x)$ nem létezik. Továbbra is érvényes azonban a (25) meghatározás. A példaként felhozott eset azonban már az időt explicite tartalmazó $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ és $\mathcal{H}(x, p, t)$ függvényekkel jellemzett rendszerek köréből származik.

A (25) feladatból a termelési pályákra, melyek az allokáció optimalitása esetén írják le a gazdaság mozgását, a következő mozgásegyenleteket nyerjük (kanonikus mozgásegyenletek):

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{x}_i, \tag{26}$$

ami a (23) meghatározásból következik és

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = -\dot{p}_i, \tag{27}$$

ami (21) folyománya, mivel a (23) meghatározás szerint $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}$.

Ha az időt is explicit termelési tényezőként vesszük figyelembe, melynek változásával változnak a ráfordítási és hozamviszonyok, akkor (27) mintájára e hatások pályameghatározó szerepére a következő összefüggések adódnak:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\dot{p}_t \quad \text{és} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \dot{p}_t. \tag{28}$$

Mivel p_t-t kézenfekvő időtényezőnek tekinteni, így a ráfordítási és hozamviszonyok változását eredményező technikai változásnak az időtényezőre gyakorolt hatását fejezik ki a (28) összefüggések. Amennyiben a technikai változástól eltekintünk és így t nem szerepel explicit változóként, akkor (28)-ból azt kapjuk, hogy $\dot{p}_t = 0$, vagyis az időtényezőt konstansnak tekinthetjük. Ez összhangban van azzal, ahogy az irodalomban elterjedt modellek a technikai változást kezelik.

E részhez szemléltetésül *Bródy* András [3] cikkéből merítve egy időoptimum feladatot említünk.

Vegyünk egy zárt *Leontief* modellel leírt gazdaságot, melyben meg akarjuk határozni az x_0-ból x_T-be vezető azon pályát, mely minimális T idő alatt futható be. A gazdaságilag lehetséges pályák nem sérthetik meg a következő feltételeket:

(29) $\quad B\dot{\underline{x}} \leq (E - A)\,\underline{x}$ $\quad$ a termelési szintek vonatkozásában,

(30) $\quad \dot{p}B = -\,p(E - A)$ $\quad$ az árak vonatkozásában.

A (29) egyenlőtlenséget az y slack változó bevezetésével a következő formában írhatjuk:

(31) $$y + B\dot{\underline{x}} = (E - A)\underline{x}$$

E feladat *Hamilton* függvényével a következő szélsőértékfeladat írható fel:

(36) $$H = -1 + pB\dot{\underline{x}} - p(E - A)\,\underline{x} + py$$
$$\int_0^T H\,dt \to \max$$

(Az itt szereplő H-val felírt szélsőértékfeladat ugyanaz, mint amit Bródy [3] tanulmányában elemzett.)

A Legendre duális transzformáció alkalmazásával határozzuk meg az L Lagrange függvényt!

Figyelembe véve a termelési szint és a termékhalmaz közötti már korábban említett megfeleltetést ($\dot{x} = B\dot{\underline{x}}$ és $x = B\underline{x}$):

$$p = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial H}{\partial B\dot{\underline{x}}}$$

és a (23) szabályt, kapjuk:

$$L = p\dot{x} - H = pB\dot{\underline{x}} + 1 - pB\dot{\underline{x}} + p(E - A)x - py$$

Ebből a (31) összefüggés figyelembevételével adódik:

$$L = 1 + pB\dot{\underline{x}}$$

ami csak az 1 skalárban tér el az előzőekben emlegetett zárt modell példától. Másrészt azonban (36) feladat ugyancsak (31) figyelembevételével

$$\int_0^T -1\,dt \to \max \quad \text{vagyis} \quad \int_0^T 1\,dt \to \min$$

feladattá alakul, ami a beígért időoptimum feladat.

Megjegyzés

Köszönetet mondok *Bródy András* professzornak a lelkes bátorításért, tanácsaiért, a segítségért, amellyel e dolgozat előkészülését támogatta. Nagyrészt az ő figyelmes támogatásának köszönhető, hogy egyáltalán bele mertem kezdeni e munkába, támaszkodva állandó közreműködésére a fellépő nehézségek leküzdésében. Megjegyzései áthatják a dolgozat egész tartalmát. Éppen ezért úgy érzem, hogy nem fejezné ki e kérdés tárgyalásához való hozzájárulását, ha pusztán kiragadott részleteket jelölnek meg mint tőle származó elgondolást. Hálás vagyok *Molnár György* matematikusnak, hogy felhívta figyelmemet a dolgozat egy korábbi változatának számos hibájára.

(Beérkezett: 1978. okt. 10-én)

IRODALOM

1. AMOROSO, L.: *The transformation of value in the productive process.* Econometrica, *8* (1940) pp. 1–11
2. BRÓDY, A.: *Érték és újratermelés* Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
3. BRÓDY, A.: *Optimal and time-optimal paths of the economy.* Contribution to Input-Output Analysis. CARTER, A. P.–BRÓDY, A. (szerk.) Amsterdam–London, North-Holland P. C. (62–74. old.)
4. BUDÓ, Á.: *Mechanika*, Budapest, 1965. Tankönyvkiadó
5. CASS, D.–SHELL, K. (szerk.): *The Hamiltonian approach to dynamic economics.* New York–San Francisco–London, 1976. Academic Press.
6. Гельфанд, И. М.–Фомин, С.В.: Вариационное исчисление. Москва, 1961. Государственное Издательство физико-математичезкой литературы.
7. LEONTIEF, W.: *Terv és gazdaság.* Budapest, 1977. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
8. MAGILL, M. J. P.: *On a general economic theory of motion.* Berlin–Heidelberg–New York, 1970. Springer-Verlag.
9. MARX, K.: *Értéktöbblet-elméletek* (Első rész) Budapest, 1958. Kossuth Könyvkiadó.
10. MARX, K.: *A tőke* I. Budapest, 1973. Kossuth Könyvkiadó.
11. MARX, K.: *A tőke* III. Budapest, 1974. Kossuth Könyvkiadó.
12. NOVOZSILOV, V. V.: *Ráfordítások és eredmények mérése*, Budapest, 1971. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
13. Новожилов, В. В. Теория трудовой стоимости и математика. Вопросы Экономики, 1964. 12 (96–110).
14. SYNGE, J. L.: *Classical dynamics.* Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1960. Springer-Verlag.
15. SZÉP, J.: *Analízis*, Budapest, 1972. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
16. YOUNG, L. C.: *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory.* Philadelphia–London–Toronto, 1969. W. B. Saunders Company
17. WALRAS, L.: *Economique et mechanique.* Metroeconomica *12* (1960)1: 3–11.

VALUE AND ECONOMIC DYNAMICS

Application of the mathematical structure of classical dynamics to the theory of value will provide such a formulation of the theory of economic motion in which growth theory and price theory melt together.

Even within the discussion of the theory of value this formalism can be considered rather general not only in the technical sense that it enables to deal with non-linear relations, but also in the sense that not only questions of the labour theory of value can be discussed by using it, but even some problems of the theory of marginal utility.

Here only problems of the theory of value will be modelled. This will provide a basis for the subsequent study of questions of price and growth theory.

The socially necessary inputs will be determined by a problem minimizing actual inputs as it is done also by Novozhilov. In the dual problem which can be interpreted as the maximization of returns, the shadow prices express socially necessary differential inputs.

The examples presented as illustrations to the model are taken from the sphere of thought of the Neumann—Leontief—Bródy's linear systems. We proceed from the static model through the dynamic one to time-optimum problems.

СТОИМОСТЬ И ДИНАМИКА ЭКОНОМИКИ

Применяя математическую структуру классической динамики к теории стоимости, получаем такую формулировку теории движения экономики, в которой теория экономического роста и теория цен представляют собой одно целое.

В то же время формализм, к которому прибегают в рассматриваемой работе даже и в рамках изучения теории стоимости может считаться довольно общим не только в том смысле, что с точки зрения техники моделирования делает возможным изучение нелинейных зависимостей, с его помощью могут рассматриваться не только вопросы теории трудовой стоимости, но и некоторые вопросы теории предельной стоимости.

В данном случае производится лишь моделирование вопросов теории стоимости. Это является основой дальнейшего рассмотрения вопросов теории цен и теории роста.

Общественно необходимые затраты решались посредством задачи по минимализации фактических расходов как это делает Новожилов. Двойственные оценки, фигурирующие в двойственной задаче, которая может толковаться в качестве максимализации получаемого дохода выражает дифференцированные общественно необходимые затраты.

Примеры, приводимые в порядке иллюстрации модели связаны с аспектом линейных систем Неймана—Леонтьева—Броди, исходя из статической модели через динамическую приводят к проблемам оптимума времени.

TUDOMÁNYOS ÉLET

Operációkutatás a gyakorlatban 1978'
(VIII. Magyar Operációkutatási Konferencia)

A Neumann János Számítástudományi Társaság Operációkutatási Szakosztálya a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának, a Bolyai János Számítástechnikai Társulat Alkalmazott Matematikai Szakosztályának és az NJSZT Csongrád megyei szervezetének társrendezősége mellett 1978. szeptember 26—29 között Szegeden a Technika Házában rendezte meg „Operációkutatás a gyakorlatban '78" című konferenciáját.

A konferencia iránt élénk érdeklődés volt tapasztalható, a 350 résztvevő 4 napon keresztül két plenáris ülés, 61 előadás és egy félnapos kerekasztal vita keretében igen aktívan foglalkozott a hazai elméleti kutatásokkal, a makro és mikrogazdaság, valamint más területek operációkutatási gyakorlatában elért eredményekkel és a feladatok megoldásához többnyire nélkülözhetetlen számítástechnikai háttér problémáival.

A megnyitó plenáris előadást *dr. Trethon Ferenc* munkaügyi miniszter tartotta, ami nagyban aláhúzta az operációkutatás gyakorlati alkalmazásának aktualitását és fontosságát népgazdaságunkban. Beszédében nagy jelentőséget tulajdonított a gyakorlat igényének, amit a konferencia címe kifejez. A konferenciának ösztönzést kell adnia ennek szellemében a további kutatásokhoz, kezdeményezésekhez, hozzá kell járulnia az elért eredmények gyakorlati alkalmazásához, az alkalmazásban résztvevők körének bővítéséhez, pontosabban kell szolgálnia alapvető tudománypolitikai célkitűzésünket, hogy a tudományt mindinkább termelőerővé változtassuk. Elismeréssel szólt a magyar operációkutatókról, akiknek széles köre nemzetközileg ismert szaktekintély, de megállapította, hogy tevékenységük, eredményeik hazai gyakorlati hasznosításában a várakozástól elmaradt. Óvott a „hódító metafizikai" szemlélettől, amely egy kutatási terület tudományos jellegét a matematikai megfogalmazás mértékével egyenes arányban levőnek tételezi fel. A mechanikus szemlélet elkerülése érdekében előtérbe kell helyezni, fel kell használni az „emberi tényezővel" foglalkozó tudományágak— így a szociálpszichológia, a szociológia, a pszichológia és az ergonómia — eredményeit, hiszen a várható emberi magatartás figyelembevétele nélkül kialakított optimális cselekvéssorozatok sokszor nem is hajthatók végre.

Az operációkutatók aktív munkáját a népgazdaság sok területén igényli, így segítséget nyújthatnak a tervezésben, növekedési szakaszban levő gazdaságunk tartalékainak felderítésében, a tartósan hatékony gazdasági szerkezet kialakításában, a tudományosan megalapozott prognosztikai munkában, a vállalati stratégiák kialakításában, a vállalati munka szervezettségének magasabb szintre emelésében. A szervezés és operációkutatás „kölcsönös függőségéből és egymásrautaltságából következik, hogy a vonatkozó kormányhatározat nemcsak a szervezés tudományos alapjainak, hanem az operációkutatás fejlődéséhez is kedvező feltételeket teremtett, mivel politikai-társadalmi követelményként is megfogalmazza a szervezettség és hatékonyság növelését szolgáló tudományos ismeretek, eredmények intézményes alkalmazását — mondta a miniszter.

Próbáljuk meg tömören áttekinteni a szekció előadások tárgykörét (1. táblázat) és a problémák megoldásához felhasznált matematikai módszereket (2. táblázat).

1. táblázat

A konferencia előadásainak tárgyköre

Matematikai tárgyú előadások

Egész értékű programozás	5
Nem lineáris programozás	4
Matematikai statisztika	4
Gráfelmélet	3
Lineáris programozás	3
Egyéb	2
Összesen:	21

Alkalmazási tárgyú előadások

Népgazdasági, ágazati szintű alk.	9
Iparvállalati témák alk. példákkal	9
Tényleges iparvállalati alk.	13
Mezőgazdasági alkalmazások	4
Vízgazdálkodási alkalmazások	4
Egyéb alkalmazás	1
Összesen	40
Mindösszesen	61

Az alkalmazási és elméleti tárgyú előadások különválasztása természetesen kissé önkényes dolog. A matematikai tárgyú előadások között számos olyat találunk, amelyek konkrét alkalmazásokra utalnak — mint pl. *Kovács László Béla* „Gráfszínezési algoritmusok és alkalmazásaik ütemezési feladatok megoldására" c. előadása, amely a különböző heurisztikus és egzakt eljárásokról adott matematikai megközelítésű áttekintést, ugyanakkor foglalkozott ezek ütemezési feladatokra történő alkalmazásával beleértve ebbe bizonyos számítógépes tapasztalatokat is —, egyes esetekben pedig alkalmazási projektek módszertani vonatkozású kiemelésének tekinthettük őket. Ez utóbbit jól példázza *Scherr Károly* előadása, amely „Egy korszerű útvonalkereső algoritmus és alkalmazása közúthálózati gráfokon" címmel hangzott el. A téma egyik módszertani részét képezi a KPM által a Közlekedési Tudományos Kutató Intézet számára a korszerű forgalom és hálózattervezési feladat végrehajtásának. Ugyancsak nehezen választhatók szét az alkalmazási tárgyú előadások között az elméleti—közgazdasági jellegűek, az általános modellek és a tényleges alkalmazások. Ez különösen a makro- és ágazati szintű operációkutatási előadások esetében volt bonyolult, mert legtöbbjük ugyan konkrét népgazdasági problémákat elemzett, de általános elméleti következtetések jószerével mindegyikből levonhatók.

Tekintsük át röviden azokat a módszereket, amelyekre ebben a 61 előadásban a szerzők támaszkodtak:

2. táblázat

Az előadások módszertani háttere

Megnevezés	Elméleti előadás	Gyakorlati előadás	Össz.
Egészértékű programozás	5	5	10
Nem-lineáris programozás	4	2	6
Matematikai statisztika	4	12	16
Gráfelmélet	3	2	5
Lineáris programozás	3	9	12
Készletgazdálkodás	—	4	4
Szimuláció	—	3	3
Egyéb (játékelmélet, dinamikus programozás stb.)	2	3	5
Összesen	21	40	61

A módszertani szétválasztás sem egészen egyértelmű, a több módszerre támaszkodó előadásoknál a csoportosítás alapja a domináns vagy az újszerűbben alkalmazott eljárás volt.

Beszámolómban nem kívánok kitérni az egyes előadások értékelésére, hiszen ebben az esetben vagy meg kellene maradni a címeken túlmenő információkat alig tartalmazó felsorolásoknál, vagy csupán néhány jelentősnek vagy elhibázottnak tartott előadás ismertetésével és kritikájával lehetne foglalkozni. Megjegyzem, hogy az operációkutatási konferenciákon alkalmazott szokásainknak megfelelően a SZIGMA most is felkért néhányat a szerzők közül, hogy kézirataikat küldjék be a folyóiratnak, és várhatóan ezekből a jövő év folyamán több meg is jelenik.

A konferencia a gyakorlati operációkutatás érdekében kívánt elsősorban hatást gyakorolni az operációkutatók táborára és lehetőségeinek megfelelően szerény mértékben a potenciális alkalmazókra. Egyet kell értenünk a Munkaügyi Miniszter által a megnyitó plenáris előadáson elmondottakkal, nevezetesen, hogy reményt keltő indulás után az operációkutatás nem vált széles körben alkalmazott döntéselőkészítési eszközzé sem a makro- sem a mikrogazdaság területén. Konferenciánk anyagát elsősorban ebből a szempontból kell megvizsgáljuk.

Az előadások 60 százaléka — amint az a táblázatokból kitűnik — kifejezetten gyakorlati igényű volt. Tényleges alkalmazásokról azonban mindössze 20—25 előadáson hallottunk, ami ugyan nem kevés, de nem is elegendő. Ezek közül a legegyértelműbb csoport a termelővállalati alkalmazások (ipari) köre volt. Sok előadásnál inkább gyakorlatiasságot éreztünk gyakorlat helyett, ami számos okra vezethető vissza, amelyek közül néhányra még a tárgyban folytatott vita áttekintésénél visszatérünk.

Elgondolkoztató, hogy milyen következtetéseket vonunk le áttekintve azt, hogy az előadások alapját képező kutatásokat milyen jellegű intézményekben végezték.

3. táblázat

Az előadók munkáltatója	Előadások száma
Termelő vállalat	5
Egyetem, főiskola	10
Intézet, ágazati számítóközpont	46
Összesen	61

A legtöbb előadással az MTA SZTAKI munkatársai jelentkeztek. 12 színvonalas előadásukból 9 jobbára matematikai módszertani témakörű volt, ami azt mutatja, hogy a módszertani kutatások legaktívabban ebben az intézetben folynak. Jelentős számú előadást — összesen kilencet — tartottak a SZÁMKI munkatársai és ezek közül 6 az Intézet profiljának megfelelően alkalmazási tárgyú volt. A konferencián elhangzott összes előadás kereken 30 szervezet munkatársaitól hangzott el.

Az előadásoknak a 3. táblázaton bemutatott eloszlása mindenesetre azt mutatja, hogy termelő vállalataink öntevékeny aktivitása ezen a területen még nem elegendő, az alkalmazási kutatásokat általában külső — egyetemeken, intézetekben vagy számítóközpontokban dolgozó — munkatársak irányítják, hiszen vállalati társszerzőkkel is alig találkoztunk. A 2. sz. táblázaton bemutatott módszertani megoszlásból viszont arra lehet következtetni, hogy az egyszerűbb technikákon alapuló alkalmazásokkal — hálótervezés, lineáris programozás, különböző AKM modellek — közismertségük és gyakorlati hasznosításuk következtében már kevésbé lehet szerepelni egy szakmai konferencián. Bizonyos optimizmusra ad okot az is, hogy a hallgatóság soraiban az államigazgatási szervek és a termelő vállalatok számos munkatársa is megjelent.

Örvendetesnek tartjuk, hogy a sztochasztikus kapcsolatok elemzése az előadások tanúsága szerint előretört, hiszen gazdasági életünk, helyzetünk áttekintése, fejlődési lehetőségeink vizsgálata, a gazdasági szabályozás átgondolt fejlesztésének igénye ezt nagyban indokolja. Az ezekben a témakörökben elhangzott elméleti előadások közül a sokváltozós matematikai statisztikai módszertani előadásokat emelnénk ki, amelynek alkalmazására napjainkban a számítógépes adatfeldolgozás kiszélesedése gyakorlati lehetőségeket teremt. Ezeket a módszereket sikerrel alkalmazhatjuk az empirikus vizsgálatok eredményeinek értékelésénél, mivel a különböző klasszifikációs technikák a legáltalánosabban értelmezett kvantitatív és kvalitatív jellemzőkkel meghatározott egyedekből (objektumokból) álló rendszerek vizsgálatát teszik lehetővé.

A népgazdasági és ágazati szintű problémák vizsgálatáról tartott előadások elsősorban tervezési, kisebb mértékben szabályozási kérdésekkel foglalkoztak. Joggal hiányolható azonban, hogy egy sor fontos gazdasági problémánkhoz hosszabb távon kapcsolódó égető kérdésről nem vagy alig hallottunk előadást. Ezek közül csak néhányat kiemelve: munkaerőproblémák, valutáris kérdések, külkereskedelmi vizsgálatok, vállalati szabályozási problémák, árkérdések hiányoztak a beszámolókból. Reméljük, hogy kutatóintézeteink, egyetemi tanszékeink ezeken a területeken az operációkutatás eszközeit is igénybevevő jelentős kutatásokat folytatnak, és a soron következő konferenciáink programjában kellő súllyal fognak szerepelni.

A vállalati alkalmazások témakörénél előrelépésnek tekintendő, hogy egyre gyakrabban támaszkodnak a kidolgozott modellek számítógépes adatfeldolgozásra, ami a legtöbb esetben garanciája annak, hogy az operációkutatás a hatékonyság fokozását célzó döntések előkészítésének ténylegesen részévé válik.

A konferencia Szervező Bizottsága egy egész délutánt a számítástechnika gazdaságossága és az operációkutatás helyzete kerekasztal vitájára szabadított fel. A négy órán át tartó vitán több, mint százan vettek részt, és 29 felszólalás hangzott el. A számítógépesítés gazdaságosságának vizsgálatát a résztvevők fontosnak tartották — az V. ötéves terv folyamán például mintegy 13—14 milliárd forintot fordítunk erre a célra —, hasznos gondolatok merültek fel egy sor ehhez kapcsolódó kérdésben. Az elhangzottakat összefoglalva: megállapították, hogy a számítógépesítés gazdaságossága infrastrukturális jellegénél fogva nem vizsgálható, különösen ha arra gondolunk, hogy az eredmények hasznosítása az esetek jelentős részében végső soron a felhasználótól — elsősorban a vezetőktől — függ. A gazdaságosság fogalmának itt újszerű fogalmazásban kell megjelennie, ami ma még ismeretlen előttünk, így mérésére módszerekkel nem rendelkezünk. Ugyanakkor nem várható, hogy ez a kérdés a hagyományos gazdaságossági szemléletet kielégítő mennyiségi mutatókkal lefedhetővé válik. A számítástechnika gazdaságosságának megfogalmazásában és az ehhez kapcsolódó módszerek kidolgozásában az operációkutatók fontos szerepet vállalhatnak. A gazdaságosság egy-egy konkrét feladatra kiválasztott rendszer esetében lehet követelmény. Minden alkalmazásnak határozott célokat kell megfogalmaznia, a számítógépesítéssel kapcsolatos elvárásokat azonban nem kell okvetlenül mennyiségi haszonnal alátámasztani.

A záró plenáris előadást *dr. Németh Lóránt*, a KSH OSZI igazgatója tartotta „A számítástechnika alkalmazásának fejlesztési feladatai a VI. ötéves terv időszakában" címmel. Elmondotta, hogy a számítógépesítésnek a VI. ötéves tervben általános gazdaságpolitikai célkitűzéseinket kell támogatnia. Prioritást kell adni az olyan információs rendszerek fejlesztésének, amelyek lehetővé teszik a gazdasági helyzet gyors észlelését, a hatékony döntések előkészítését. Olyan vállalatok számítógépesítését kell előtérbe helyezni, amelyek a külgazdasági egyensúly érdekében versenyképes export árualapot termelnek, segíteni kell a munkaerőhiányból eredő feszültségek feloldását. Beszélt a számítástechnikában jelentkező új irányzatokról és ezek várható hazai jelentkezéséről, számítógépesítésünk eredményeiről nemzetközi összehasonlításban.

Elmondotta, hogy a következő ötéves tervnek már elkészült egy durva koncepciója, konkrét számokról azonban ma még nem érdemes beszélni. Az 1981—85-ös időszak számítógépesítése azonban várhatóan rekonstrukciós jellegű lesz, mivel 8 milliárd körüli cserepótlást kell eszközölnünk. A számítógépes teljesítőképesség a technikai fejlődést is figyelembevéve az 1980. évinek mintegy kétszerese lesz, a kapcsolódó létszámnövekedés azonban csak 30% körül alakul.

Összefoglalásként megállapíthatjuk: aktív, sikeres konferenciát zártunk. A sikerhez nagyban hozzájárultak a kitűnő feltételek, amelyek Szegeden egy konferencia rendezéséhez rendelkezésre állnak. Az operációkutatás gyakorlati alkalmazásának széles körű elterjesztésében azonban még nagyon sok tennivaló van hátra.

PONGRÁCZ TIBOR

„Matematikai Programozás és Közgazdasági Alkalmazásai"

(Nemzetközi tudományos konferencia Velencében)

A Velencei Egyetem Közgazdaságtudományi és Kereskedelmi Kara — több olasz tudományos egyesület közreműködésével — 1978. június 12. és 16. között nemzetközi jellegű konferenciát szervezett a Canale Grande-ra néző, festői szépségű épületében a Ca' Foscari palotában.

A Konferencia rendezői a tanácskozással kettős célt kívántak elérni. Egyrészt alkalmat akartak teremteni az operációkutatás terén dolgozó hazai matematikusok és közgazdászok eszmecseréjére; különös tekintettel a matematikai programozás gyakorlati alkalmazásai terén elért eredmények értékelésére. Másfelől külföldi szakemberek meghívása révén külső impulzusokat reméltek nyerni mind a matematikai programozás gyakorlati alkalmazása, mind az elméleti-módszertani kutatások ösztönzése érdekében.

A konferencián 12 külföldi vendégelőadón kívül kb. 120—140 hazai szakember vett részt. A konferencia végig plenáris ülések keretében tanácskozott. Délelőttönként került sor a felkért előadók egyenként 1—1 órás előadásaira; míg délutánonként a bejelentett előadások 20—30 perces ismertetése szerepelt a programon. A Konferencia teljes anyaga kiadványkötetben meg fog jelenni angol nyelven.

A felkért előadók az alábbi témákkal foglalkoztak:

— *Benassy, J. P.* (Paris): Az egyensúlytalanság matematikai modelljei
— *Bod P.* (Budapest): A matematikai programozás szerepe a magyar távlati népgazdasági tervezésben.
— *Bródy A.* (Budapest): Telatív árak matematikai modelljei a tervezésben
— *Crémer, J. C.* (Paris): Árak kontra volumenek a tervezésben
— *Dantzig, G. B.* (Stanford): Árak-e a duális megoldások és ha nem: hogyan tehetők inkább azzá?
— *Giannessi, F.* (Pisa): Integer programozás és alkalmazásai
— *Heal, G.* (Sussex): A tervezéselmélet újabb eredményeiről
— *Impicciatore, G.—Rossi, E.* (Roma): Árak és volumenek dinamikája nem-egyensúlyi makro-modellekben
— *Ritter, K.* (Stuttgart): Algoritmusok lineáris feltételű nem-lineáris programozási feladatokhoz
— *Rockafellar, R. T.* (Univ. of Washington): Lagrange szorzók majdnem biztos létezése nem lineáris programozásban
— *Sitzia, B.* (Milano): Ökonometriai modellek közelítő vezérelhetősége
— *Stone, R.* (Cambridge): Input-output elemzés és tervezés
— *Volpato, M.* (Padova): A dinamikus programozás alapjai
— *Wets, R.* (Kentucky): Újabb eredmények a sztochasztikus programozásban különös tekintettel a közgazdasági alkalmazásokra.

Ez a felsorolás is jól mutatja már, hogy milyen széles volt a konferencián érintett problémák köre. A hazai résztvevők által ismertetett rövid előadások — ha lehetséges — még tarkább képet mutattak. Ilyen körülmények között az egyszerű résztvevő számára meglehetősen nehéz volt a konferencia tartalmi követése. Ez kifejezésre is jutott abban, hogy a teremben tartózkodók száma előadásról előadásra jelentős ingadozást mutatott.

A tematikai tarkaság miatt reménytelen lenne megkísérelni az elhangzott előadások tartalmi áttekintését. Ehelyett inkább arra vállalkozunk, hogy egyetlen előadást — George Dantzigét — részletesen ismertessünk.

G. B. Dantzig az árnyékárakról

Dantzig előadásában egy rendkívül egyszerű és ugyanakkor igen gyümölcsözőnek tűnő ötlettel járult hozzá ahhoz, hogy a lineáris programozás technikáján alapuló tervezési modellek duális megoldásait eredményesebben lehessen felhasználni az értékviszonyok elemzésére.

Ismeretes, hogy az ún. árnyékárak közgazdasági értelmezése és főként gyakorlati elemzési célokra való felhasználása eléggé problematikus. Világszerte széles körben vitatták a kérdést és a vitákhoz — különösen a szocialista országokban — jelentős ideológiai összecsapások is járultak. Ez nem egyszer azzal járt, hogy „a priori" meggyőződések korlátozták a kutatók érzékenységét a gazdasági valóság tényei iránt, amelyek pedig általában eléggé makacs dolgok. Mindez arra vezetett, hogy a matematikai tervezők modelljeik duális megoldásait a gyakorlatban általában nem tudták értelmezni, és így teljesen az illúziók birodalmába került minden olyan próbálkozás, amely valamilyen volumen-maximalizáló makro-modell árnyékárrendszeréből kívánt a primál feladat preferenciarendszerével konzisztens „optimális" árrendszert levezetni.

Az elméleti nehézségek és a gyakorlati kudarcok a dualitás tétel ún. „complementary slackness" tulajdonságából fakadtak. Köztudott, hogy a primál-duál feladatpár optimális megoldásánál a primál feladat maradékváltozóinak a vektora merőleges a duális feladat optimális megoldásvektorára. Vagyis a maradékváltozók és az árnyékárak skaláris szorzata zérus. Egyenlőtlenség alakú feltételek esetén mind a maradékváltozók, mind az árnyékárak nem-negatívak és ebből következik, hogy minden olyan erőforrás, amelyet a primál feladat optimális megoldása nem használ fel maradék nélkül, az árnyékárrendszerben szükségképpen nulla értékelést kap.

Ez a körülmény reális anyagi ráfordításokat kifejező erőforráskorlátok esetén összeegyeztethetetlen ellentmondást hoz létre az árnyékárak és a gyakorlatban létező árak között. Egy tervezési modellben ki nem merülő munkaerő korlát a munkaerőt „ingyenes", „szabad" erőforrásnak mutatja. A valóságban azonban a munkaerő foglalkoztatott része nincs ingyenben, a dolgozók munkabért kapnak, és csak a nem foglalkoztatott munkaerő nem okoz költséget.

Az összes eddigi modellezési tapasztalat azt mutatta, hogy az ellentmondás áthidalására irányuló különböző marginalista meggondolások semmi segítséget sem adtak ahhoz, hogy az árnyékárakat az értékviszonyok elemzésére hasznosítani lehessen. Az árnyékárak felhasználása az ún. érzékenységvizsgálatokra korlátozódott, vagyis megmaradt a primál feladat szférájában.

Dantzig előadásában megmutatta, hogy hogyan lehet a fentiekben jelzett problémát megkerülni, hogyan lehet a primál feladatot, annak megoldása után, úgy módosítani, hogy egyfelől az optimális primál megoldás ne változzék; másfelől az árnyékárak viselkedése közelebb kerüljön az igazi árakéhoz.

A javasolt eljárás a következő három feltételezésen alapszik:

— egy adott gazdasági rendszer szempontjából az optimális megoldás által fel nem használt kapacitások értéktelenek és törölhetők a rendszerből;

— a felhasznált kapacitások egy infinitezimálisan kicsi ε hányadban nyújthatók és zsugoríthatók;

— a kapacitások értéke úgy mérhető, hogy zsugorítjuk őket ε mértékben, majd megnézzük, mennyivel növekszik a célfüggvény, ha ezt az ε-nyi részt visszatesszük.

Az ilyen módon perturbált feladat optimális primál megoldása azonos az eredeti primál optimummal; ugyanakkor új árnyékárrendszer adódik, amely nem változik, miközben ε tart a nullához.

Tekintsük a következő lineáris programozási feladatot: egy gazdasági rendszert, amely n tevékenységet képes megvalósítani és m terméket bocsát ki, úgy akarunk működtetni, hogy a rendszer rögzített struktúrában maximális volumenű kibocsátást nyújtson, miközben r számú és adott kapacitású erőforrást használhat fel.

Legyen:	$A:(m\times n)$	típusú mátrix a kibocsátások mátrixa;
	$B:(r\times n)$	típusú mátrix a ráfordítások mátrixa;
	$k\in R^r$	a rendelkezésre álló erőforrások vektora;
	$b\in R^m$	a kibocsátások tervezett struktúrája;
	$\lambda\in R$	indikátorváltozó.

Modellünk a következő:

$$P_1:\quad \begin{array}{l} Ax-\lambda b\geq O \\ Bx \qquad\;\; \leq k \\ \hline x\geq O;\quad \lambda\geq O \\ \lambda\to\max! \end{array}$$

Legyen a primál feladat optimális megoldása $(x^0;\ \lambda^0)$.

Az optimális megoldás $k^0=Bx_0$ mennyiségű erőforrást használ fel. Az optimális megoldáshoz tartozó kapacitásfelesleg most $u_0=k-k^0\geq O$. Ha $u_0=O$ akkor nincs probléma, mert az optimális megoldás minden erőforrást felhasznál, és így az árnyékárak rendre pozitívak. Ha viszont $u_0\neq O$, akkor a kiinduló feltevéseknek megfelelően a felesleges erőforrásokat töröljük a modellből, vagyis k helyett k^0 kerül a korlátok jobb oldalára. A kiinduló feladat tehát módosult:

$$P_2:\quad \begin{array}{l} Ax-\lambda b\geq O \\ Bx \qquad\;\; \leq k^0 \\ \hline x\geq O\ \ \lambda\geq 0 \\ \lambda\to\max! \end{array}$$

Nyilvánvaló, hogy $(x_0;\ \lambda^0)$ továbbra is optimális megoldás, azonban a módosított feladatban minden körülmények között degeneráció lép fel.

A dualitástételből ismeretes, hogy ez a körülmény azt jelenti: a duál feladat optimális megoldása nem egyértelmű; létezik a duáloptimális megoldásoknak egy végtelen sok elemet tartalmazó halmaza. A duális megoldás egyértelművé tétele érdekében ezért egy perturbációt alkalmazunk a módosított feladaton. Megvizsgáljuk, hogyan viselkedik a rendszer „ε"-nál kevesebb összerőforrás mellett, hogyan értékeli az erőforrásokat. A következő feladatból indulunk ki:

$$P_3: \quad \begin{array}{l} Ax - \lambda b \geqq O \\ Bx + u \leqq k^0 \\ p^*u \geqq \varepsilon \\ \hline x \geqq O;\ u \geqq O;\ \lambda \geqq 0 \\ \lambda \to \max! \end{array}$$

A perturbációs feltételben szereplő $p^* = (P_1; P_2; \ldots P_r) > O^*$ vektor kívülről bevezetett paramétereket tartalmaz. Ezek segítségével valamilyen közös egységre vezetjük vissza a különböző erőforrásokat, P_i pl. arányos lehet egy egység pótlólagos i-ik erőforrás előteremtésének költségeivel valamilyen bázisidőszak árrendszerében. Legyenek a perturbált feladat duális változói: $(\pi^*; \sigma^*; \varrho)$. Akkor a duális feladat így fest:

$$\begin{array}{l} -\pi^*A + \sigma^*B \geqq O^* \\ \pi^*b \geqq 1 \\ \sigma^* - \varrho p^* \geqq O^* \\ \hline \pi \geqq O;\ \sigma \geqq O;\ \varrho \geqq 0 \\ (\sigma^*k_0 - \varrho\varepsilon) \to \min! \end{array}$$

Minthogy az eredeti feladat optimális megoldása k^0 erőforrásmennyiséget használt fel: általában elvárhatjuk, hogy a perturbált feladat optimális primál megoldásában $p^*u_0 = \varepsilon$ adódik és a megfelelő duál változó pozitív lesz. Vagyis $\varrho_0 > 0$-t nyerünk. Ebben az esetben viszont a duális feltételek harmadik blokkja szerint: $\sigma_i \geqq \varrho P_i$, és ez biztosítja, hogy valamennyi erőforrás duális értékelése pozitívnak adódik.

Ha történetesen mégis $\varrho_0 = 0$ lenne, a következőket lehet tenni: az eredeti problémát nem úgy módosítjuk, hogy az eredeti feladat optimális megoldása által felhasznált erőforrásokat rögzítjük, hanem úgy, hogy az itt nyert optimális kibocsátást írjuk elő. Majd keressük azt a primál megoldást, amely ezt a kibocsátást a lehető legkevesebb erőforrással képes előállítani.

$$P_2': \quad \begin{array}{l} Ax \geqq \lambda^0 b \\ Bx + u \leqq k \\ \hline x \geqq O;\ u \geqq O;\ \lambda \geqq O \\ p^*u \to \max! \end{array}$$

Ha a perturbált feladatban most már ennek az optimális megoldását használjuk x_0-ként, biztosítva van $\varrho_0 > 0$ és ezzel az árnyékárrendszer pozitivitása.

A perturbált feladat alapján nyert árnyékárrendszer nyilván ε függvénye. Azonban létezik olyan ε_1 küszöbérték, hogy minden $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_1$-re azonos duál optimum adódik. Az árnyékárak ugyanis kizárólag a megengedett bázistól függnek. Ha azonos bázis megengedett ε_1 és ε_2 esetén és $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$: akkor a bázis megengedett marad minden $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon \geqq \varepsilon_2$-re. Minthogy a különböző megengedett bázisok száma véges, létezik legalább egy olyan bázis, amely végtelen sokszor ismétlődik, ahogy ε tart a 0^+-hoz. Így a duális megoldás változatlan lesz valamilyen $(0, \varepsilon_1)$ intervallumban, ha ε_1 elég kicsi.

Az ismertetett módon tehát mindig biztosítható olyan erőforrás-értékelés, amely konzisztens a primál feladat preferenciarendszerével és amely minden erőforráshoz pozitív árat rendel.

Dantzig nem említette előadásában a hagyományos árnyékárrendszer egy másik, hatásában szintén igen kellemetlen anomáliáját. Ez pedig abból adódik, hogy minden tervezési modellben szerepelnek olyan feltételek is, amelyek nem a szűkebb értelemben vett anyagi erőforráskorlátokra vonatkoznak. Piaci korlátok, gazdaságpolitikai minimumokat előíró követelmények, a modell lineáris jellegét korlátozni hivatott feltételek stb. formálisan hasonló szerepet játszanak a modellekben, mint a szűkebb értelemben vett erőforráskorlátok. Ezek egy része az optimális megoldásokban kimerül, egyenlőségre teljesül és gyakran éppen ezek a korlátok teszik lehetetlenné bizonyos anyagi erőforrások teljes felhasználását. Minthogy a primál feladat optimális célfüggvényértékét a megoldás „szétosztja" a kimerülő „erőforrások" között, nem anyagi jellegű feltételek pozitív értékelést kapnak, miközben zérus értékelésű marad egy sor anyagi erőforrás.

Úgy tűnik, hogy ez a jelenség is kezelhetővé tehető a fentiekben ismertetett gondolatok segítségével. A nem anyagi típusú feltételek jobboldalait rendszerint eleve elég sok szubjektív meggondolás alapján számszerűsítik. Így ezekkel kapcsolatban a nyújthatóság és zsugoríthatóság teljes joggal feltehető — méghozzá nem is csak infinitezimális szinten. Míg azonban az anyagi jellegű korlátok esetében a perturbációt azért alkalmazzuk, hogy a megfelelő feltételeket aktívként őrizzük meg; a nem anyaginak ítélt feltételek esetében a cél éppen ellenkezőleg: a feltételek redundánssá tétele kell, hogy legyen.

Úgy tűnik, érdemes Dantzig ismertetett ötleteinek fényében újra megvizsgálni, hogy mire használhatók az árnyékárak a tervezési gyakorlatban.

BOD PÉTER

ESEM '78

Szeptember 4. és 9. között Genfben tartotta meg hagyományos évi európai Konferenciáját az Ökonometriai Társaság. Francia-Svájc, a matematikai közgazdaságtan e bölcsője, nem először látja vendégül az ökonometrikusokat, hiszen a Társaság legelső konferenciáját Lausanne-ban rendezték. A mostani tanácskozást a genfi Egyetem UNI II. nevű épületének kényelmes, modern előadótermeiben tartották.

A mintegy 350 résztvevő, köztük 15 magyar, több mint 150 előadás közül válogathatott. Ez alkalommal valamivel kevesebb előadás hangzott el, mint az előző konferenciákon, Helsinkiben vagy Bécsben. A beszámolók számának csökkenése arra utal, hogy a program összeállítói tudatosan törekedtek a napirend zsúfoltságának enyhítésére (bár érzésem szerint ezt nem sikerült megvalósítani). Az előzetesen benyújtott dolgozatokat a rendezőség 40 szekcióba sorolta. Az egyes szekciókat az előadások tartalmi hasonlósága alapján állították össze. A szekciók többségében szűkebb értelemben vett *ökonometriai kutatásokról* számoltak be, mintegy 15 szekcióban *gazdaság-matematikai modellekről* hallhattunk, 7 szekciót szenteltek *módszertani kérdéseknek*.

A konferencián három plenáris ülést tartottak. A tanácskozás hivatalos megnyitása és az üdvözlőbeszédek után *R. Stone* (Anglia) emlékezett meg a Konferencia Szervező Bizottságának közelmúltban elhunyt elnökéről, *Luigi Solari* professzorról.

A tanácskozás második munkanapján került sor az Ökonometriai Társaság 1978. évi elnökének, *Kornai János*nak nagy érdeklődést keltő előadására az erőforrás- és a kereslet-korlátos gazdasági rendszerekről. Kornai vizsgálatának középpontjában a klasszikus szocialista gazdasági rendszer egyik legjellemzőbb jelensége, a hiány áll, végső soron ennek leíró-magyarázó elméletét próbálja megadni. Először mikrogazdasági elemzéssel egy egyszerű termelővállalat példáján vizsgálja a termelésnövekedés korlátozó feltételeit. Megmutatja, hogy ha a három alapvető korláttípust, a keresleti, az erőforrás és a költségvetési korlátokat tekintjük, akkor egy szocialista vállalatnál végső soron mindig csak az erőforrás-korlátok működnek, a másik két korlát nem hat a termelés növekedésére. Külön kiemeli a költségvetési korlátok szerepét. Véleménye szerint e korlátok „puha" (laza) volta teremti meg a hiánygazdaság intézményes szabályozási feltételeit, a szocialista vállalatok soha ki nem elégíthető, árrugalmatlan keresletét. A „puha" költségvetési korlátokkal kapcsolatban külön felhívja a figyelmet a mérési nehézségekre. Óv attól, hogy *ex-post* mérlegek alapján mutassuk ki e korlátok jellegét, mivel véleménye szerint ezek *ex-ante* magatartási szabályoknak tekinthetők.

Előadása második részében egy kétszektoros makrogazdaság viszonyai között mutatja ki a fenti törvényszerűségek összgazdasági hatásait. Bebizonyítja, hogy a szocialista gazdaság két igen gyakran előforduló jelensége — a mennyiségi mutatók teljesítésére való törekvés és a növekedés hajszolása — éppen a fenti, „puha" költségvetési korlátok következtében kap olyan automatikus és decentralizált mechanizmust, amely függetlenné teszi e jelenségeket a gazdaságpolitika akaratlagos hatásaitól.

Az elnöki előadást követően, idén első ízben adták át a Ragnar Frisch emlékérmet a Társaság folyóiratában, az Econometricában megjelent legjobb alkalmazott ökonometriai cikkért. Az érmet az angol A. Deaton kapta „A vásárlói kereslet elemzése az Egyesült Királyságban, 1900—1970" című írásáért (Econometrica, 1974. március).

Minden esztendőben sor kerül az úgynevezett „Fischer—Schultz előadás" megtartására. Idén e megtisztelő feladatra *Herbert Scarf*-ot (USA) kérték fel. Scarf folyamatban levő kutatásait és annak egyes részeredményeit ismertette „Termelési halmazok oszthatatlanságokkal" című előadásában.

Az alkalmazott ökonometriával foglalkozó szekciók témái igen változatos képet mutatnak. Külön szekciókban volt szó a hitelügyletek, a jövedelemelosztás, a reklámozás, a biztosítási ügyletek, az erőforrások kihasználása, a foglalkoztatás, a beruházáspolitika, az ipari szervezetek és egyes társadalompolitikai kérdések számszerűsített ökonometriai modelljeiről, valamint e modellek alkalmazási problémáiról. A felsorolt tárgyköröket nem érintő alkalmazási előadásokat általánosabb témájú szekciók keretében tartották meg, például „Empirikus ökonometria" vagy „Témák az alkalmazott ökonometria területéről" címszók alatt.

B. van Praag, T. Goedhart és A. Kapteyn (Hollandia) az egyéni és az átlagos nyomorszint jövedelemtől és családnagyságtól függő görbéjének meghatározásáról beszéltek. Függvényüket 10 EGK tagország lakossága körében — igen kis mintán — végzett kérdőíves felmérés alapján, a vizsgált országokra egyenként számszerűsítették. E „nyomor-függvények" segítségével a politikailag elviselhető létminimum behatárolását kísérelték meg.

M. Paldam (Dánia) az úgynevezett választási ciklus létezését bizonyította be. Számításait 17 OECD-ország nemzetgazdasági számviteli adatai alapján, az 1948—1975 közötti évek mind 3, mind 4 éves (nyugaton általános) választási periódusaira elvégezte. Kiragadva egyet figyelemre méltó eredményei közül: statisztikailag igazolható, hogy a választási ciklus az exportárakban úgy jelentkezik, hogy azok a kormány beiktatását követő első évben átlag alatti szinten, a további 2—3 évben átlag felett alakulnak. Az importárak az első 2 évben átlag alatt, majd az új választásokig átlag felett alakulnak.

J. Berkouwer, J. Hartog és J. Tinbergen (Hollandia) egy kereseti egyenlet magyarázó változóinak elméleti és tapasztalati vizsgálatát ismertették. Céljuk az volt, hogy a keresetek egy úgynevezett „kereseti egyenleten" keresztül bizonyos munkavégzési képességek meglétére vagy hiányára vezessék vissza. Ha egy dolgozó rendelkezik bizonyos képességekkel (ez a „kínálat"), még nem biztos, hogy az általa végzett munkához szükséges képességekkel (ez a „kereslet") bír. Kutatásaik fő eredménye a következő: A „képesség-kereslet" alapján jobban lehet a kereseteket magyarázni, mint a rendelkezésre álló („kínált") képességek szerint, bár bizonyos nem-számszerűsíthető szempontok, valamint a „túlkereslet" és „alulkereslet" egyaránt jelentős szerepet játszanak a keresetek alakulásában.

Az ökonometriai és gazdaság-matematikai modellek hagyományosnak tekinthető fő elméleti háttere az általános egyensúly-elmélet. A konferencián azonban több olyan előadást is hallhattunk, melyek viszonylag új elméleti alapokra, az ún. „*disequilibrium*" elméletre támaszkodnak. Ez utóbbi körbe tartozott *R. Portes és D. Winter* (Anglia) előadása. Munkájuk négy szocialista ország, Csehszlovákia, Lengyelország, Magyarország és az NDK lakossági fogyasztásával kapcsolatos feltételezéseiket, számításaikat és következtetéseiket tartalmazza. Előadásuk két szempontból is figyelmet érdemel. Először is, mivel — többek között — a magyar gazdaság problémáival is foglalkoztak, másodszor, mivel munkájuk az előző napon elhangzott elnöki előadásban bírált elméleti alapokon nyugodott. Portes és Winter célja a központi népgazdasági tervezést folytató országokban fellépő ún. „fojtott infláció" létének bizonyítása volt. Feltételezésük szerint a szóban forgó országok fogyasztói piacait — a korábbi megítéléssel ellentétben — *nem mindig* a javak alulkínálata (azaz a fogyasztói túlkereslet) jellemzi. De ha esetenként ez a helyzet, akkor fellép a „fojtott infláció". Modelljükben így végső soron az *aggregált* túlkereslet és túlkínálat számszerűsítésére, egymáshoz való viszonyuk minősítésére kellett törekedniük. Kiemelve egyet számítási eredményeik közül: Magyarországon 1959-ben, 1963-ban, 1968-ban, majd 1970-ben volt túlkereslet, azaz „fojtott infláció" a fogyasztási javak és szolgáltatások piacán (1957—1975 megfigyelési időszak alapján számítva).

Hozzászólásában *Kornai János* ismét kifejtette ellenvéleményét az e modell alapjául szolgáló *Barro-Grossman* elmélettel kapcsolatban, valamint rámutatott, hogy a *helyi jelleggel fellépő mikrogazdasági hiányok* nem összegezhetők valamiféle *aggregált*-hiány-mutatóvá, így az ismertetett modellnek nem csupán eredményeit, de kérdésfelvetését is használhatatlannak, értelmezhetetlennek tartja. A szerzők rövid válaszukban kitértek a vita elől, hangsúlyozva, hogy véleményük szerint a hiányok aggregálható vagy nem-aggregálható volta egyszerűen *hit* kérdése: ők pedig az előbbiben hisznek.

A „*Marx és Sraffa*" szekcióban hangzott el *A. Roamer* (USA) előadása „A marxi közgazdaságtan és az általános egyensúly" címen. Az előadó nagy feladatra vállalkozott. Célja a jelenleg legfejlettebb — és legalábbis a felszínen összehasonlíthatatlannak tűnő — két iskola összevetése volt. Az első lépésben azt mutatja meg — matematikai bizonyítással alátámasztva —, hogy a marxi-sraffai egyensúly-fogalom (a gazdaság produktivitása) egyáltalán nem idegen a profitmaximalizáláson alapuló általános egyensúlyi megoldásoktól, sőt, adott feltételek mellett bizonyítható a kettő azonossága.

Roamer a következőkben az eddigi marxi modellek általánosításával foglalkozott. Véleménye szerint ugyanis az eddigi modellek matematikai egyszerűsége felesleges támadási felületet nyújtott az általános egyensúlyelmélet kifinomult módszereivel összevetve. Bebizonyítja, hogy a marxi modell legfontosabb kategóriái (a produktivitás és a kizsákmányolási ráta) meghatározhatók és értelmezhetők az eddiginél általánosabb, ún. *konvex gazdaság* feltételrendszerében is. Roamer lényeges eredménye, hogy új feltételek mellett bizonyítja *Morishima* ismert tételét, amely kimondja, hogy a pozitív kizsákmányolási ráta szükséges és elégséges feltétele a pozitív profitrátának — lényegében a gazdaság produktivitásának. Ebből eredően — véleménye szerint — a marxi kizsákmányolás-fogalom használható az egyensúlyi megoldás leírásában. Előadása harmadik részében Roamer az emberi munkaerő értékének meghatározásával foglalkozott. Kísérletet tett az érték meghatározásában résztvevő történelmi-erkölcsi elemek ábrázolására és az egyensúlyi állapot kialakulásában betöltött szerepük vizsgálatára.

A többszektoros növekedési modellekkel foglalkozó előadások többsége igen speciális, elméleti jellegű problémákról szólt. Két előadást is hallhattunk az osztrák tőkeelmélet lineáris termelési modellben történő formalizálásáról, és az így nyert, valamint az ismert egyensúlyi modellek összehasonlításáról.

A. Steenge (NSZK) a dinamikus *Leontief-modellek* instabilitási problémájára próbált megoldást találni. Kimutatta, hogy bármely instabil modellváltozat stabilizálható az idődimenzió egységperiódusának megfelelő meghosszabbításával. A stabilizálhatóság szempontjából összehasonlította a kétféle — az ex-post és az ex-ante beruházási késleltetéssel dolgozó — modellváltozatot, és megállapította, hogy az első variáns lényegesen használhatóbb.

W. Grais (Kanada) gazdaság-matematikai előadása a kisszámú, gyakorlati alkalmazást is bemutató beszámolók közé tartozott. Modelljét, melyet az egyiptomi hosszú távú tervezés számára dolgozott ki, a munkaerő-felhasználás és -korlátok, valamint az árhatások szokásosnál árnyaltabb kidolgozása jellemezte. Szinte üdítő volt a sok nehézveretű előadás közben, hogy tőle az adatbázis megszerzésének és az eredmények értelmezhetőségének nehézségeiről is hallhattunk értékes tapasztalatokat.

Az ökonometriai jellegű fogyasztási modellek közül érdeklődést keltett *F. Carlevaro* (Svájc) előadása. Ő a széles körben használt *Stone-modellt* nem-lineáris Engel-görbék bevezetésével úgy próbálta általánosítani, hogy az eredeti modell paraméterbecslő eljárásai használhatók maradjanak.

A világgazdasági szekcióban hangzott el *R. Arad és A. Hillman* (Izrael) előadása a nemzetközi kereskedelem egy viszonylag gyakran előforduló, az elméletben mégis ritkábban tárgyalt kérdésről, a kereskedelmi embargóról. Alapproblémájuk, hogy mit tegyen egy — az embargó által fenyegetett — kis ország, milyen gazdaságpolitikával tudja veszteségeit a minimálisra csökkenteni. Két alternatív lehetőséget vizsgáltak. Az egyikben a gazdaság a fogyasztás rovására növeli felhalmozását és az élenjáró technika alkalmazásával csökkenti az embargó által fenyegetett cikk termelési költségeit. A másik lehetőség, hogy az ország a fejlesztéshez szükséges többletköltséget külföldi hitelekből fedezze. Az elemzést a komparatív statika szokásos módszerével végezték, összehasonlították az embargó előtti, illetve az annak életbe lépésével kialakult egyensúlyi állapotokat.

B. Hazari és P. Pattanaik (Ausztrália) a gyengén fejlett országok nemzetközi kereskedelmének esetét vizsgálta. Az általuk elemzett gazdaságban (3 ágazat és 3 erőforrás mellett) az egyik ágazat külföldi tőkével dolgozik, így a fizetési mérlegben a szokásos áruforgalmi tételek mellett az átutalt profit is szerepel. Termelési függvények, valamint a fizetési mérleg egyensúlya — mint korlátozó feltételek — mellett maximalizálják az ország gazdaságát reprezentáló hasznossági függvényt. Elemzésük központi kérdése az, hogy hogyan hat a célfüggvényre, ha a bérdifferenciákat a külföldi tőkével működő szektor javára növelik.

Az utóbbi években — többek között nagy hatékonyságuk miatt — különböző *idősor-modellek*, elemzési eljárások kerültek az ökonometria módszertanával foglalkozó szakemberek figyelmének középpontjába. *P. Otter* (Hollandia) előadása az ún. *Kalman-szűrő* alkalmazásával foglalkozott. Bemutatta az idősor-modellek két típusán az ún. súlyozott regressziós, valamint a differenciaegyenlet formájú idősor-modellekre, hogy e szűrő használatával hogyan kapjuk meg az ismeretlen modell-paramétereket s hogyan készíthetünk ezek alapján egyperiódusos előrejelzéseket. Az egyszerű exponenciális simítás, a Box-Jenkins módszer és a Kalman-szűrés egyperiódusos előrejelzési hibáját összehasonlítva kimutatta, hogy bizonyos kezdeti feltételek teljesülése esetén az általa javasolt prediktor átlagos négyzetes hibája a legkisebb.

A konferencián az elnöki előadás mellett még két magyar beszámolót hallhattunk. *Glattfelder Péter* A. P. Carter ÁKM koefficiens-becslési módszerének hazai alkalmazási tapasztalatairól beszélt, *Subicz Péter* egy rövidtávú előrejelzésre használt lineáris programozási modell-számításról számolt be.

BÁNHIDI FERENC

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Marton Andor
A kézirat nyomdába érkezett: 1979. III. 28. — Terjedelem: 12,6 (A/5 ív)
79.7016 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Schmidtné Kígyóssy Éva

Ágazati kölcsönhatások a népgazdaság anyagi és nem-anyagi szférái között egy dinamikus rendszerben

(Egy több éves késleltetésű, nem-anyagi ágazatokat is tartalmazó, dinamikus ÁKM elemzés alapján)

A probléma körülhatárolása

1. A szocialista országok társadalmi-gazdasági fejlődésének jelenlegi szakaszában egyre sürgetőbb feladat *a nem-anyagi ágazatok megfelelő struktúrában és mértékben* való fejlesztése. A nem-anyagi ágazatok viszonylagos elmaradottsága — az iparhoz és más anyagi ágazatokhoz képest — gátolhatja az újratermelési folyamat zavartalan lefolyását és lényegesen ronthatja a rendelkezésre álló gazdasági erőforrások hatékony kihasználását. A gazdaságfejlesztés távlati kihatásainak a mérlegelésénél ezért elengedhetetlen az anyagi és nem-anyagi ágazatok népgazdasági kölcsönhatásainak a felmérése is. A dinamikus ÁKM felhasználásával — ennek korlátai és lehetőségei mellett — az említett kérdés-komplexum kutatásához kívánunk hozzájárulni.

2. Az anyagi és nem-anyagi ágazatok kölcsönhatásainak kimunkálását — mindenekelőtt a nem-anyagi ágazatok elhatárolását — nagymértékben megnehezíti az a körülmény, hogy a nem-anyagi szolgáltatások zöme egyidejűleg fogyasztási és termelés-befolyásoló jellegű. Mi azokat a *nem-anyagi ágazatokat* vontuk be a vizsgálat körébe, amelyek a *munkaerő újratermelésében* játszanak szerepet és így az anyagi termeléssel többé-kevésbé közvetlen kapcsolatban állnak. A munkaerő újratermeléséből kiindulva nem tettünk különbséget a nem-anyagi szolgáltatások fogyasztási és termelés-befolyásoló hatása között.

3. Az anyagi és nem-anyagi ágazatok népgazdasági kölcsönhatását az *ágazati kapcsolatok mérlegének* segítségével vizsgáltuk. E célból az anyagi ágazatokat tartalmazó hagyományos ÁKM belső négyzetét kiegészítettük néhány nem-anyagi ágazattal. Ez a kiegészítés, első megközelítésben a nem anyagi ágazatokra eszközölt népgazdasági ráfordításokat tartalmazta (pl. költségvetési kiadásokat, beruházási ráfordításokat). A kiegészített ÁKM a hagyományos ÁKM átcsoportosítását és kibővítését jelenti, az ÁKM alapösszefüggései változatlanok maradtak. A nem-anyagi ágazatok szerepeltetése az ÁKM-ben nem jár együtt a nemzeti jövedelem kategóriájának újrafogalmazásával (ezen ágazatok teljesítménye nem tartalmaz új értéket). A kibővített ÁKM az anyagi és nem-anyagi ágazatok teljesítményének szembeállítását ill. kölcsönhatásainak elemzését célozza.

4. A dinamikus ÁKM felhasználása a közgazdasági elemzésben egy sor problémát vet fel. Felmerül többek között a konvergencia és a stabilitás kérdése, mint a közgazdasági alkalmazhatóság kritériuma, továbbá a közgazdasági interpretálhatóság problémája. A kísérleti számítások (egy 7×7-es ÁKM sorozattal, 15 évre az NDK gazdaságának példáján) arra engednek következtetni, hogy a több éves késleltetésű dinamikus ÁKM alkalmazható a felvetett

közgazdasági probléma elemzésére. A dinamikus inverz a kísérleti számítások során konvergens volt. A dinamikus ÁKM, a tovagyűrűző hatás kimutatása révén, alkalmas a nem-anyagi ágazatok hosszútávú hatásának a figyelemmel kísérésére. Egy kísérleti számítás-sorozatban a nem-anyagi ágazatok közül az oktatásügyet szerepeltettük több éves késleltetéssel. Az elemzés során azt tapasztaltuk, hogy egységnyi 1975. évi *ipari végső felhasználás* előállításában az *oktatási szektor* teljes ráfordítási részesedése (valamennyi szektor teljes ráfordítását 100-nak véve) a *dinamikus inverz* alapján eléri a 8–10%-ot is. Ezzel szemben a *statikus inverz* alapján számítva az oktatási szektor teljes ráfordítási részesedése csupán 1–2%-át tette ki az 1975. évi egységnyi ipari végső felhasználásnak.

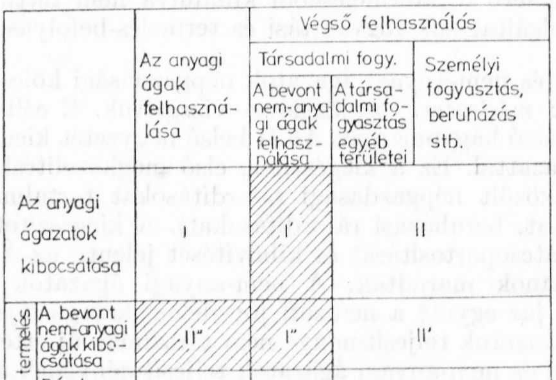
Az anyagi és nem-anyagi ágazatok kölcsönhatásának kimutatására alkalmas a módszer többek között azért is, mert a hagyományos és a kibővített dinamikus ÁKM szembeállítása lehetőséget nyújt az anyagi és nem-anyagi ágazatok közötti *strukturális hatások* kimutatására:

— a beruházási átfutási idők illetve a nem-anyagi ráfordítások átfutási idejének *több éves és különböző késleltetése* lehetővé teszi a késleltetések elemzését az anyagi és nem-anyagi ágazatok kölcsönhatásainak szempontjából;

— a beruházási, termelési és nem-anyagi ráfordítási együtthatók variálásával figyelemmel kísérhető a *technikai haladás hatása* az anyagi és nem-anyagi ágazatok kölcsönhatására stb.

A vizsgálat módszere

5. Az *ÁKM nem-anyagi ágazatokkal való kibővítését* a statikus ÁKM példáján mutatjuk be.[1]



1. ábra Néhány nem-anyagi ágazattal kibővített statikus ÁKM sémája

[1] A kibővített *statikus* ÁKM-mel folytatott vizsgálatokat az NDK Tudományos Akadémiája Közgazdasági Intézetében, az NDK Állami Tervhivatalának a közreműködésével végeztük, vö. [1].

A I'-el jelölt blokk az anyagi ágazatoknak a nem-anyagi ágazatokra eszközölt kibocsátásait tartalmazza. A I''' és II'' blokkok a nem-anyagi ágazatoknak az anyagi és nem-anyagi ágazatokra eszközölt kibocsátásait jelöli (ráfordításaikon mérve). A hagyományos, MPS rendszerű statikus ÁKM alapösszefüggései nem módosultak a néhány nem-anyagi ágazattal kiegészített ÁKM-ben.

Az ÁKM nem-anyagi ágazatokkal való kiegészítésének egyik központi kérdése a *nem-anyagi ágazatok kibocsátásának az ágazati elosztása.* Mivel a bevont nem-anyagi ágazatok kibocsátása jórészt a munkaerő újratermelését célozza, a nem-anyagi ágazatok kibocsátását a foglalkoztatott munkaerőre vetítve osztottuk el a különböző ágazatok között. Az egészségügyi szektor és a közművelődési szektor kibocsátásait a foglalkoztatott létszám arányában vetítettük az egyes szektorokra. Az oktatási szektor kibocsátásait az egyes szektorokban foglalkoztatott különböző szakképzettségi szintű munkaerő összes szakképzési költségeinek az arányában osztottuk fel. A különböző nemanyagi ágazatok kibocsátásainak így meghatározott elosztási struktúrái nem mutattak lényeges eltérést.

Az anyagi és nem-anyagi ágazatok kölcsönhatásának a kimutatására az NDK tényleges statikus ÁKM-jeit elemeztük különböző évekre. A nemanyagi ágazatokkal kibővített *statikus* ÁKM-ek 13 anyagi és 3 nem-anyagi szektort (Oktatásügy, Egészségügy és Közművelődés) tartalmaztak. A 13 szektoros ÁKM-ek a hagyományos MPS rendszerben álltak rendelkezésre. A statikus ÁKM-ekkel végzett kísérleti számítás-sorozat elemzése azt mutatja, hogy a nem-anyagi ágazatok súlya — a teljesítmény alábecsült, ráfordítási szinten való értékelése következtében — sem a közvetlen, sem a közvetett ráfordítások alapján nem volt számottevő.

6. A nem-anyagi folyamatok jelentős részére jellemző, hogy *népgazdasági hatásuk hosszú távon* bontakozik ki. E dinamikus hatások kimunkálása céljából egyes nem-anyagi ágazatokkal kibővített dinamikus ÁKM-mel végeztünk vizsgálatokat. A Leontief-féle dinamikus inverzet módosítottuk, v.ö. [5]. Egyéves késleltetés helyett tetszőleges időtartamú késleltetést megengedve, a következő formában alkalmaztuk a dinamikus ÁKM-et:

$$x_t - A_t x_t - \sum_{\tau=t+1}^{t+h} B_t^\tau (x_\tau - x_{\tau-1}) = y_t \quad (t = 0, 1, \ldots, m) \tag{1}$$

ahol:

x_t — a bruttó termelés vektora;
y_t — a végső felhasználás vektora;
A_t — a technológiai együtthatók mátrixa;
B_t^τ — a beruházási együtthatók mátrixa;
t és τ — idő indexek;
h — a leghosszabb beruházási átfutási periódus években.

Az (1) egyenletrendszer megoldásakor az egyenletrendszer egy véges szeletét vettük figyelembe. Az adott egyenletrendszer ugyanis $m + 1$. egyenletből és $m + 1 + h$ ismeretlenből áll. ($m + 1$ a megfigyelt időszakok számát, h pedig a leghosszabb átfutási időt jelenti az adott idődimenzióban kifejezve.) Az egyenletrendszer egyértelmű megoldásához h számú változót exogén kell megadni. Mi a megoldásnál az $x_{m+1}, \ldots, x_{m+h}$ változókat tekintettük exogénnek. Az így megoldásra kerülő egyenletrendszert az 1. sz. táblázatban mutatjuk be. Ahogyan a táblázatból kitűnik, a csonkított végtelen mátrix megoldásához h egyenletet módosítottunk az időszak végén. A végső felhasználás adott évi vektorait a következő összefüggés szerint vettük figyelembe.

$$y^*_{m-h+1} = y_{m-h+1} + B^{m+1}_{m-h+1} x_{m+1}$$

$$y^*_{m-h+2} = y_{m-h+2} + (B^{m+1}_{m-h+2} - B^{m+2}_{m-h+2})\, x_{m+1} + B^{m+2}_{m-h+2} x_{m+2}$$

$$\vdots$$

$$y^*_{m-1} = y_{m-1} + (B^{m+1}_{m-1} - B^{m+2}_{m-1})\, x_{m+1} + \ldots + (B^{m+h-2}_{m-1} - B^{m+h-1}_{m-1})\, x_{m+h-2} + B^{m+h-1}_{m-1} x_{m+h-1}$$

$$y^*_m = y_m + (B^{m+1}_m - B^{m+2}_m)\, x_{m+1} + \ldots + (B^{m+h-1}_m - B^{m+h}_m)\, x_{m+h-1} + B^{m+h}_m x_{m+h}.$$

$W_t = E - A_t + B^{t+1}_t$ és $D^\tau_t = B^\tau_t - B^{\tau+1}_t$ jelölések felhasználásával rekurzíve oldottuk meg az (1) egyenletet. A megoldásul kapott (2) egyenlet K^γ_t koefficiensmátrixainak a definiálására a 7. pontban térünk ki részletesen. Az (1) egyenlet megoldása:

$$\left.\begin{aligned} & W_t^{-1} y_t + \sum_{\gamma=t+1}^{m} K^\gamma_t y_\gamma = x_t \quad (t = 0, 1, \ldots, m-1) \\ & \text{és} \\ & W_t^{-1} y_t = x_t \quad (t = m). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

A megoldást a 2. táblázatban foglaltuk össze.

A kidolgozott algoritmus lehetővé teszi nagy volumenű feladatok leegyszerűsítését, mivel csak az éves ÁKM-ek nagyságrendjében szükséges intertálni ill. alapműveleteket elvégezni az adatbázissal. Az algoritmus ellenőrzésére kísérleti számításokat végeztünk. Egy ES 1040 (512 K-Bytes) számítógépen az együtthatómátrix közvetlen invertálásával határozta meg a dinamikus inverzet *Bernd Grahl*. Egy HP—30 (Disk-egység nélkül, 16 k-Bytes) típusú számítógépen a kidolgozott algoritmus szerint számította ki a dinamikus inverzet *Rainer Schwarz*. A számítás 3 ill. 90 percet vett igénybe. A kétféle megközelítés eredménye azonos volt.

7. A K^γ_t *együtthatómátrix meghatározása* a következő összefüggéseken alapszik:

$$K^\gamma_v = W_v^{-1} \cdot \left(\sum_{q=v+1}^{\gamma-1} D^q_v K^\gamma_q + D^\gamma_v W_\gamma^{-1} \right),$$

ha $\gamma - v < h$, ahol $\gamma - v = 1$ esetében: $D^q_v K^\gamma_q = 0$;

és

$$K^\gamma_v = W_v^{-1} \cdot \left(\sum_{s=v+1}^{v+h-1} D^s_v K^\gamma_s + B^{v+h}_v F^\gamma_{v+h} \right), \quad (3)$$

ha $\gamma \geq h$,

ahol $F^\gamma_{v+h} = W^\gamma_{v+h}$, ha $\gamma - v = h$ és

$$F^\gamma_{v+h} = K^\gamma_{v+h}, \quad \text{ha} \quad \gamma - v > h.$$

$(v = t + z$ és $t = 0, 1, \ldots, m-1;\ z = 0, 1, \ldots, m-1;\ \gamma = v+1, \ldots, m)$

1. táblázat

A dinamikus ÁKM (1) egyenlete, több éves késleltetéssel ($t = 1, \dots, m$)

$$
\begin{bmatrix}
E - A_0 + B_0^1 \; -(B_0^1 - B_0^2) - \dots - (B_0^{h-1} - B_0^h) \qquad - B_0^h & & & & \\
& E - A_1 + B_1^2 - B_1^2 - B_1^3 - \dots - B_1^h - B_1^{h+1} \qquad - B_1^{h+1} & & & \\
& \ddots & & & \\
& & E - A_{m-h} + B_{m-h}^{m-h+1} - (B_{m-h}^{m-h+1} - B_{m-h}^{m-h+2}) - \dots - (B_{m-h}^{m-1} - B_{m-h}^{m}) - B_{m-h}^{m} & & \\
& & E - A_{m-h+1} + B_{m-h+1}^{m-h+2} - (B_{m-h+1}^{m-h+2} - B_{m-h+1}^{m-h+2}) - \dots - (B_{m-h+1}^{m} - B_{m-h+1}^{m+1}) & & \\
& & \ddots & & \\
& & & E - A_{m-1} + B_{m-1}^{m} \qquad - (B_{m-1}^{m} - B_{m-1}^{m+1}) & \\
& & & & E - A_m + B_m^{m+1}
\end{bmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{m-h} \\ x_{m-h+1} \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-h} \\ y^*_{m-h+1} \\ \vdots \\ y^*_{m-1} \\ y^*_m \end{bmatrix} \qquad (1')
$$

2. *táblázat*

A dinamikus ÁKM (1) *egyenletének megoldása, dinamikus inverz több éves késleltetéssel*

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{m-h} \\ x_{m-h+1} \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_0^{-1} & K_0^1 & K_0^2 & & & \dots & K_0^{m-1} & K_0^m \\ & W_1^{-1} & K_1^2 & & & \dots & K_1^{m-1} & K_1^m \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & W_{m-h}^{-1} & K_{m-h}^{m-h+1} & K_{m-h}^{m-h+2} \dots & K_{m-h}^{m-1} & K_{m-h}^m \\ & & & & W_{m-h+1}^{-1} & K_{m-h+1}^{m-h+2} \dots & K_{m-h+1}^{m-1} & K_{m-h+1}^m \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & W_{m-1}^{-1} & K_{m-1}^m \\ & & & & & & & W_m^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-h} \\ y^*_{m-h+1} \\ \vdots \\ y^*_{m-1} \\ y^*_m \end{bmatrix} \qquad (2')$$

Az 1. táblázatban szereplő dinamikus inverz a K_v^γ mátrixot egy speciális esetben mutatja be, amikor is $z = 0$ következésképpen $v = t$.

A K_t^γ meghatározása $(t = 0, 1, \ldots, m-1)$; $(\gamma = t+1, \ldots, m)$ – *a* (3) összefüggés szerint a következő:

$$K_t^\gamma = W_t^{-1} \cdot \left(\sum_{q=t+1}^{\gamma-1} D_t^q K_q^\gamma + D_t^\gamma W_\gamma^{-1} \right),$$

ha $\gamma - t < h$,

ahol $\gamma - t = 1$ esetében érvényes, hogy $D_t^q K_q^\gamma = 0$;

$$K_t^\gamma = W_t^{-1} \cdot \left(\sum_{s=t+1}^{t+h-1} D_t^s K_s^\gamma + B_t^{t+h} F_{t+h}^\gamma \right), \tag{4}$$

ha $\gamma - t \geq h$,

ahol $F_{t+h}^\gamma = W_{t+h}^\gamma$, ha $\gamma - t = h$ és

$F_{t+h}^\gamma = W_{t+h}^\gamma$, ha $\gamma - t > h$.

A K_t^γ mátrix meghatározását a $\gamma - t > h$ feltétel mellett mutatjuk be. (Egyéb esetekben az eljárás hasonló módon értelmezhető.) Az áttekinthetőség érdekében a K_t^γ mátrixok explicit meghatározását a 3. sz. táblázatba foglaltuk össze.

Ahogyan ebből a táblázatból kitűnik, a K_{t+1}^γ; K_{t+2}^γ; ... ; K_{t+h}^γ mátrixok felhasználásával állítjuk elő a K_{t+h+1}^γ; K_{t+h+2}^γ; ... ; K_{t+2h}^γ mátrixokat.

Ha $\gamma - (t + 2h) = 1$, akkor a (3) összefüggés alapján fennáll:

$$K_{t+2h} = W_{t+2h}^{-1} D_{t+2h}^{t+2h+1} W_{t+2h+1}^{-1} . \tag{5}$$

Az (5) egyenlet alapján elő lehet állítani a K_{t+2h-1}^γ mátrixot stb., és így a K_{t+2h}^γ; K_{t+2h-1}^γ; ... ; K_{t+h+2}^γ; K_{t+h+1}^γ; K_{t+h}^γ; ... ; K_{t+2}^γ; K_{t+1}^γ mátrixok meghatározása révén (a dinamikus ÁKM induló adatai alapján) a K_t^γ mátrixhoz jutunk.

Ha $\gamma - (t + 2h) \neq 1$, akkor a K_{t+2h+1}^γ mátrixot explicite fel kell írni és meg kell vizsgálni, hogy a $\gamma - (t + 2h + 1) = 1$ feltétel teljesül-e.

Ha a feltétel nem teljesül, akkor a K_{t+2h+2}^γ mátrixot stb. kell explicite felírni, mindaddig, amíg a $\gamma - (t + 2h + k) = 1$ feltétel teljesül $k = 1$, $2, \ldots, m - 1 - (t + 2h)$ mellett. Mivel γ maximális értéke m és $t \geq 0$, valamint $h > 0$, létezik egy olyan k érték, amely mellett $\gamma - (t + 2h + k) = 1$ fennáll. Ily módon a K_{t+2h+k}^γ mátrix a dinamikus ÁKM kiinduló adatai alapján meghatározható és a K_t^γ mátrix előállítható.

Néhány eredmény

8. A néhány nem-anyagi ágazattal kiegészített dinamikus ÁKM-mel kísérleti számítássorozatot végeztünk. A dinamikus ÁKM kiinduló adatai az NDK népgazdaságát 7 szektoros bontásban tartalmazzák az 1961–1975 időszakra. A vizsgálatba bevont ágazatok:

Ipar
Építőipar
Mezőgazdaság és erdőgazdálkodás
Közlekedés és hírközlés
Belkereskedelem
Oktatásügy
Építésügy

3. táblázat

A K_t^γ koefficiensmatrixok meghatározásához

$$K_t^\gamma = W_t^{-1}(D_t^{t+1}K_{t+1}^\gamma + D_t^{t+2}K_{t+2}^\gamma + \ldots + D_t^{t+h-1}K_{t+h-1}^\gamma + B_t^{t+h}K_{t+h}^\gamma) \qquad \text{(Vö. [4])}$$

A (5) összefüggés alapján a K_v^γ mátrixokat ($v = t+1, \ldots, t+h$) a következőképpen határozzuk meg:

$$K_{t+1}^\gamma = W_{t+1}^{-1}(D_{t+1}^{t+2}K_{t+2}^\gamma + D_{t+1}^{t+3}K_{t+3}^\gamma + \ldots D_{t+1}^{t+h}K_{t+h}^\gamma + B_{t+1}^{t+h+1}K_{t+h+1}^\gamma)$$

$$K_{t+2}^\gamma = W_{t-2}^{-1}(D_{t+2}^{t+3}K_{t+3}^\gamma + D_{t+2}^{t+4}K_{t+4}^\gamma + \ldots + D_{t+2}^{t+h+1}K_{t+h+1}^\gamma + B_{t+2}^{t+h+2}K_{t+h+2}^\gamma)$$

$$\vdots$$

$$K_{t+h-1}^\gamma = W_{t+h-1}^{-1}(D_{t+h-1}^{t+h}K_{t+h}^\gamma + D_{t+h-1}^{t+h+1}K_{t+h+1}^\gamma + \ldots + D_{t+h-1}^{t+2h-2}K_{t+2h-2}^\gamma + K_{t+h-1}^{t+2h-1}K_{t+2h-1}^\gamma)$$

$$K_{t+h}^\gamma = W_{t+h}^{-1}(D_{t+h}^{t+h+1}K_{t+h+1}^\gamma + D_{t+h}^{t+h+2}K_{t+h+2}^\gamma + \ldots + D_{t+h}^{t+2h-1}K_{t+2h-1}^\gamma + B_{t+h}^{t+2h}K_{t+2h}^\gamma)$$

9. A kiinduló adatok összeállításánál különös problémát jelentett a beruházási késleltetések ágazatonkénti meghatározása. Az ipar, az építőipar és az oktatásügy vonatkozásában vettünk figyelembe több éves késleltetést. A beruházási ráfordítások késleltetését statisztikai felmérések, szakértői becslések és a nemzetközi szakirodalom felhasználásával becsültük. Az adatbecslés bázisát az állóeszközök aktiválási folyamatának a 70-es évekre összeállított statisztikai felmérése képezte:

A beruházási eredetű állóeszköz-növekmény aktiválási folyamata az 1970-es évek elején

Szektor	Melyik évből származik a t-edik évben megvalósulásra kerülő beruházási eredetű állóeszköz-növekmény (%-ban, a t-edik évben aktivált beruházási eredetű állóeszköz-növekmény összesen = 100)			
	$t-3$	$t-2$	$t-1$	t
Ipar	5	20	35	40
Építőipar	—	5	55	40
Mezőgazdaság	—	—	45	55
Közlekedés	—	5	35	60
Belkereskedelem	—	—	20	80
Oktatásügy	—	—	20	80
Egészségügy	—	10	30	60

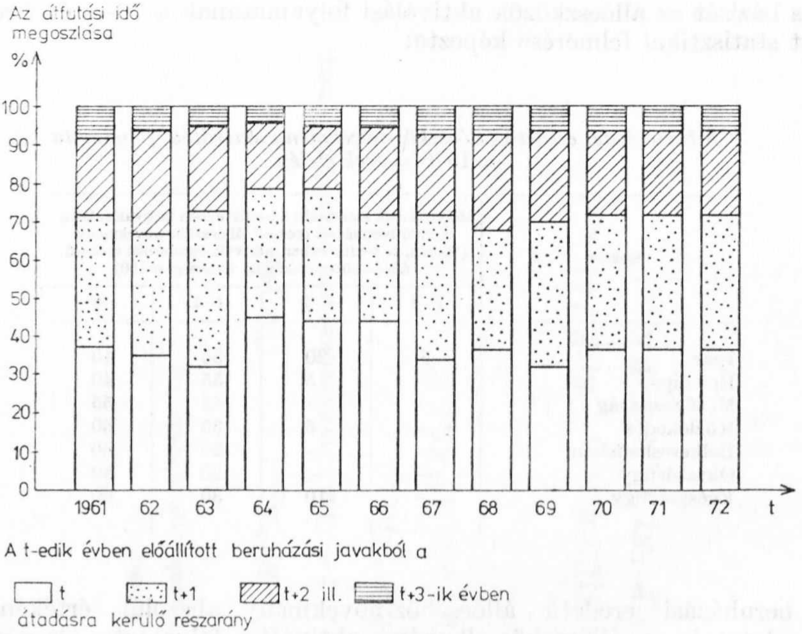
A beruházási eredetű állóeszköz-növekmény abszolút értékének becsült adatai és az állóeszköz-állomány aktiválási folyamata alapján határoztuk meg a dinamikus ÁKM céljára, az időben előre vetítve, a beruházási késleltetéseket. (A beruházási késleltetések részletes meghatározását ld. [6]-ban.)

Az iparban megvalósított beruházások átfutási idejének megoszlását a 2. sz. ábra szemlélteti.

Az NDK-ban előírt 10 osztályos kötelező oktatás figyelembe vételével, csak a 10 osztályon felüli szakképzést tekintettük alternatívnak, és így az oktatási ráfordítások leghosszabb késleltetését átlagosan 4 évben állapítottuk meg. Az oktatási ráfordításoknak azt a részét vettük egy évnél hosszabb késleltetéssel figyelembe, amelyeket a tárgyévet követő időszakban végző hallgatók képzésére fordítottak.

10. A 4. sz. táblázat a dinamikus inverz egy oszlopát mutatja be. Ahogyan a táblázatból látható, *az oktatási ráfordítások az 1975. évi ipari teljes ráfordítások jelentős hányadát* képviselték. A dinamikus inverz az 1961–1971 időszakot tekintve (az építőipar 1971-es értékelését kivéve) konvergál, azaz a ráfordítások az időszakban visszafelé haladva egyre kisebbek lesznek. A több éves késleltetésű dinamikus inverz konvergenciája — Leontief tapasztalataival megegyezően, vö. [5] — mindenekelőtt arra vezethető vissza, hogy a több éves késleltetésű ráfordítási koefficiensek nem mutattak fel jelentősebb ingadozásokat. Az utolsó négy év értékeléseinek a hol növekvű, hol csökkenő tendenciája ill. a negatív értékek fellépése azzal magyarázható, hogy a dina-

mikus ÁKM-et egy csonkított végtelen mátrix segítségével oldottuk meg (vö. a 6. pontban foglaltakkal). Mivel a számítás-sorozatban 4 éves maximális késleltetést vettünk figyelembe, és a mátrix csonkítását a végső felhasználás vektorának (y_t) megfelelő korrekciója révén a vizsgált időszak végén



2. ábra A t-edik évben előállított beruházási javak átfutási idejének megoszlása az iparban (1961–1972) (Teljes átfutási időtartam = 100%)

végeztük el, az utolsó négyéves periódus közgazdasági értelmezése lényegesen eltér az előző évek értelmezésétől. Az ebben a szakaszban fellépő negativitás illetve az ingadozások elsősorban a vizsgált időszak végességére illetve megszakítására vezethetők vissza.

A 4. sz. táblázatban az 1975. évi ipari végső felhasználásra eső teljes ráfordításokat foglaltuk össze az egyes ágazatok vonatkozásában. Az oktatásügy negatív ráfordításai az említett „csonkítás" hatásán kívül még azzal is magyarázhatók, hogy az NDK-ban 1961 és 1975 között az oktatásügynek az egy éven belül aktiválásra kerülő ráfordításai és az egyéves időtartamon túl aktivált ráfordításai között az arány erősen eltolódott:

Oktatásügyi ráfordítások az ipar számára
(Oktatásügyi ráfordítások összesen = 100)

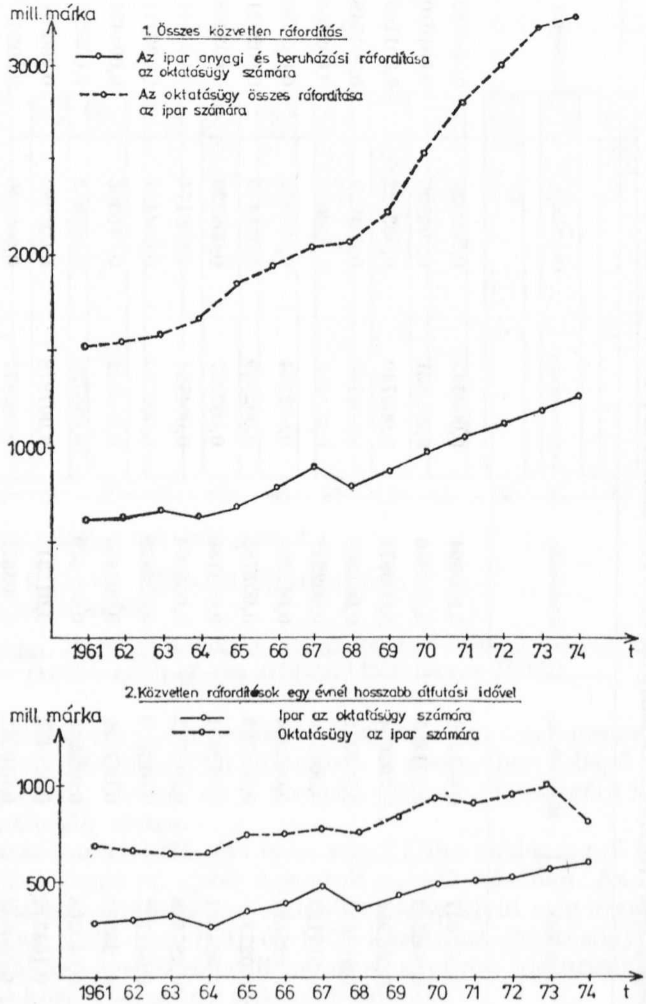
	Egy éven belül	Egy éven túl
	aktiválásra kerülő ráfordítások	
1961	55	45
1965	60	40
1970	63	37
1975	76	24

4. *táblázat*

1975. évi egységnyi ipari végsőfelhasználásra eső teljes ráfordítások az NDK népgazdaságában 1961–1975

Év	Ipar	Építőipar	Mezőgazdaság	Közlekedés	Belkereskedelem	Oktatásügy	Egészségügy	A dinamikus inverz megjelölt mátrixának első oszlopa (ipar)
1961	0,017231	0,005647	0,001589	0,000694	0,000545	0,002835	0,000882	K^{75}_{61}
1962	0,020159	0,006543	0,001825	0,000806	0,000631	0,003296	0,001010	K^{75}_{62}
1963	0,023264	0,007954	0,002084	0,000972	0,000740	0,003822	0,001169	K^{75}_{63}
1964	0,035118	0,011232	0,003312	0,001509	0,001160	0,004959	0,001549	K^{75}_{64}
1965	0,047596	0,017122	0,004728	0,002222	0,001681	0,006068	0,002104	K^{75}_{65}
1966	0,060785	0,023626	0,005944	0,002904	0,002154	0,006971	0,002580	K^{75}_{66}
1967	0,076799	0,027330	0,008392	0,003782	0,002889	0,008410	0,002981	K^{75}_{67}
1968	0,112848	0,028381	0,012651	0,004786	0,003957	0,008330	0,003668	K^{75}_{68}
1969	0,129291	0,037529	0,014743	0,005994	0,004751	0,009174	0,004141	K^{75}_{69}
1970	0,112600	0,044167	0,013003	0,005832	0,004398	0,004404	0,003711	K^{75}_{70}
1971	0,147059	0,028313	0,017120	0,005804	0,005042	0,010986	0,004431	K^{75}_{71}
1972	0,198077	0,040268	0,023218	0,007670	0,006720	0,005382	0,005348	K^{75}_{72}
1973	0,179893	0,103372	0,021476	0,011311	0,007878	–0,001980	0,006080	K^{75}_{73}
1974	0,087705	0,050006	0,010553	0,005572	0,003877	0,000890	0,003093	K^{75}_{74}
1975	0,979427	–0,289003	0,118198	0,021166	0,020480	–0,004641	0,013560	W^{-1}_{75}

A többéves késleltetésű dinamikus inverz felhasználása a közgazdasági elemzésben szorosan összefügg a végtelen mátrix csonkításának a problémájával. További vizsgálódás tárgyát képezi, hogy amennyiben a végső felhasználás vektorainak a korrekcióját a vizsgált időszak kezdetén végezzük el,

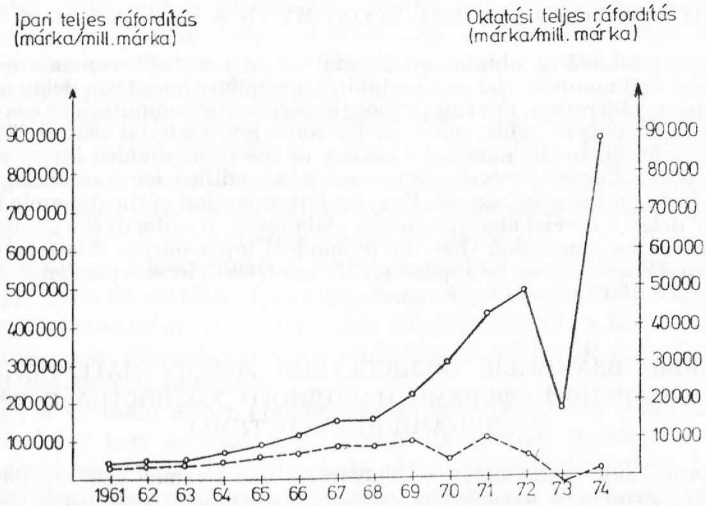


3. *ábra Az ipar és az oktatásügy közvetlen ráfordításainak kölcsönhatása* (1961—1974)

milyen hatása lesz ennek a módszernek a közgazdasági értelmezhetőségre. A kutatás jelenlegi stádiumában további kísérleti számításokat végzünk a vizsgált periódus „előretolásával". Négyéves maximális késleltetés mellett az 1961—1976-os időszakot meghosszabbítjuk — jórészt becsült adatokkal — négy évvel előre, 1980-ig. Így várható, hogy a dinamikus inverz 1976-ig közgazdaságilag jól értelmezhető adatokat szolgáltat. A becsült adatok bizonytalansága viszont veszélyeztetheti a dinamikus rendszer stabilitását. Mind-ezek a próbálkozások természetesen nem számolják fel magát a csonkítást (a vizsgált időszak végessége változatlanul fennáll). A kutatásnak itt körvonalazott további menete a több éves késleltetésű dinamikus inverz megalapozottabb felhasználásához kíván hozzájárulni a közgazdasági elemzés és a tervezés területén.

A közgazdasági interpretálhatóság ezen és egyéb problémái mellett mégis úgy véljük, hogy ebben az első megközelítésben a dinamikus inverz jól érzékelteti az anyagi és nem-anyagi ágazatok kölcsönhatásait és a nem-anyagi ágazatok hatásának dinamikus jellegét.

11. Az anyagi és nem-anyagi ágazatok kölcsönhatásainak *strukturális* befolyását érzékelteti a 3. és 4. sz. ábra. Ahogyan az ábrákból kitűnik, az évi közvetlen ráfordításokat tekintve az ipar ráfordításai az oktatásügy számára



4. ábra Kölcsönhatások az ipar és az oktatásügy között a dinamikus ÁKM teljes ráfordításai alapján

jóval az oktatásügy iparra eszközölt ráfordításai alatt maradtak. A dinamikus tovagyűrűződő hatások figyelembevételével, a dinamikus inverz alapján, az ipar oktatásra fordított teljes ráfordításai jóval meghaladják az oktatás teljes ráfordításait az ipar számára, vagyis éppen *ellenkezőjére fordul a reláció*. (A teljes ráfordítások 1973-as évi csökkenése az egy évnél hosszabb késleltetésű oktatási ráfordítások részarányának visszaesésére vezethető vissza.)

Ez a tény arra utal, hogy a dinamikus szemléletben nemcsak *a nem-anyagi ágazatok súlya* jelentkezik erősebben, hanem a nem-anyagi ágazatok egyéb ágazatokkal szemben támasztott *teljes ráfordításai igényei is*. A lekötött népgazdasági teljes ráfordítás nagy súlya így még inkább aláhúzza a nem-anyagi ágazatok hatékony népgazdasági felhasználásának szükségességét.

(Beérkezett: 1978. nov. 9-én)

IRODALOM

1. Blümel, H.—Kigyóssy-Schmidt, É.—Schilar, H.—Schwarz, K.—Walter, D.: *Zur Darstellung Ökonomischer Zusammenhänge zwischen materiellen und einigen nichtmateriellen Bereichen der DDR mit Hilfe der volkswirtschaftlichen Verflechtungsbilanz.* Wirtschaftswissenschaft, 11/1975.
2. Bródy, A.: *Átlagos késleltetés a gazdaságban.* Szigma, 3. évf. 1970. 109—113. o.
3. Kigyóssy-Schmidt, É.: *Az anyagi és nem-anyagi szféra kölcsönhatásainak kimunkálása a dinamikus ÁKM felhasználása alapján.* Az NDK Közgazdaságtudományi Intézetének tanulmánya. Berlin, 1976. (németül)
4. Koósné, Balsay Éva: *Az Ágazati Kapcsolatok Mérlegének dinamikus modellje.* Kísérlet a mérleg dinamizálására 1959—1965. évi adatok alapján. KSH Kiadvány, 1969.
5. Leontief, W. W.: *The dynamic inverse.* Carter—Bródy (ed.): Contributions to Input-Output-Analysis. Amsterdam, 1970. North-Holland Publ. Co.
6. Kigyóssy-Schmidt, É.: *A késleltetés problematikájához egy dinamikus ÁKM-ben.* Berlin, 1977. konferenciai előadás (németül)

SECTORAL INTERRELATIONS BETWEEN MATERIAL AND NON-MATERIAL SPHERES OF THE NATIONAL ECONOMY IN A DYNAMICAL SYSTEM

The analysis is aimed at obtaining information on national economic interrelations among material and non-material sectors taking the mainly long-term delay of non-material inputs into consideration. For this purpose experimental computations were made with a dynamical input-output table, enlarged by some non-material sectors. The series of computations referred to the national economy of the GDR divided into 7 sectors for a period of 15 years. Leontief's dynamic inverse was modified for considering the several years of delay of non-material sectors. For the determination of the dynamic inverse with several years' delay a special algorhithm was elaborated. Results of the analysis obtained up to now allow the conclusion that the dynamical input-output relations enlarged by some non-material sectors can be applied for the analysis of interdependence among material and non-material sectors of the economy.

ОТРАСЛЕВЫЕ ВЗАИМНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ МАТЕРИАЛЬНОЙ И НЕМАТЕРИАЛЬНОЙ СФЕРАМИ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА В РАМКАХ ДИНАМИЧНОЙ СИСТЕМЫ

Цель обследования заключается в получении информации относительно народнохозяйственного взаимного воздействия материальной и нематериальной сфер, с учетом чаще всего продолжительного запаздывания нематериальных затрат. В интересах этого экспериментальные расчеты проводились с использованием динамичного баланса межотраслевых связей, дополненного несколькими нематериальными отраслями. Проводимая серия расчетов охватывала период, равный 15 годам и при этом народное хозяйство ГДР было подразделено на семь секторов. Для принятия во внимание многолетнего запаздывания нематериальных отраслей была модифицирована динамичная инверсия Леонтьева. Для составления динамичной инверсии многолетнего запаздывания нами был разработан специальный алгоритм. Полученные результаты анализа позволяют сделать такой вывод, что динамичный баланс межотраслевых связей, дополненный некоторыми нематериальными отраслями может быть использован для анализа народнохозяйственного взаимного воздействия материальных и нематериальных отраслей.

Simonovits András

Normák, várakozások és stabilitás egy lineáris modellben

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban a normák, a várakozások (kilátások) és a stabilitás kapcsolatát vizsgálom. Kiinduló pontként *Kornai–Simonovits* modellje [8] szolgál, amelyben egy többszektoros készletjelzéses gazdaság decentralizált szabályozási problémáit vizsgáltuk. Modellünk egyik hiányosságát abban jelöltük meg, hogy nem magyarázzuk meg a normális pálya keletkezését, hanem adottnak vettük a pályát. (Egyébként ez a „rövidre-zárás" majdnem minden szabályozási modellben jelen van.)

Lovell [10] elkerülte ezt a leegyszerűsítést. Leontief-típusú modelljében a várakozásokkal helyettesítette a normális pályákat. Furcsa módon Lovell dolgozata két paradoxont tartalmazott. Míg Lovell büszkén vállalta a paradoxonokat, engem rávezettek Lovell egyik feltevésének abszurditására. Ez vezetett Lovell modelljének felülvizsgálatára.

Részletesebben a következőről van szó. Lovell szabályozási modelljének a magva egy nyílt és statikus (pontosabban: stagnáló, de a készletkötést figyelembe vevő) Leontief-modell. A modell *állapot*változói: a késztermékkészletek (és burkoltan: az anyagkészletek); *szabályozási* változói: a termelési (és burkoltan: a beszerzési) döntések.

Mindegyik termelő adott eladási várakozása (kilátása) mellett olyan késztermékkészletet tart *normális*nak, amely az eladási várakozásával arányos. *Teljes reakció* esetén mindegyik eladó olyan termelési döntést hoz, amely a várakozás teljesülése mellett a normatív készlethez vezet. Azonban a várakozás teljesülése mellett a normatív készlethez vezet. Azonban a várakozások teljesülése nulla valószínűségű esemény, és pontatlan várakozás esetén messzebb kerülhetünk a tényleges eladással arányos készlettől, mint voltunk. Ezért a döntéshozók *részleges reakció* szerint termelnek: olyan *tervezett* készletet céloznak meg, amelyek eltérése a ténylegestől arányos a normatív készlet és a tényleges készlet eltérésével. Az arányossági szorzó: a *reakció-együttható*, amely feltevés szerint 0 és 1 között van.

Az egyes anyagkészletek pontosan megegyeznek a *technikailag* szükséges minimummal, következésképpen *minden időszakban a beszerzések megegyeznek a következő időszak ráfordításaival.*

Lovell háromféle eladási várakozást vizsgál:

(i) a statikus várakozást, amely időben változatlan;

(ii) a tökéletes előrelátást;

(iii) a naiv várakozást, amely az előző időszak tényadatával azonos. (Meg kell jegyeznünk, hogy Lovell érthetetlen módon a naiv várakozást időnként statikusnak is nevezi, főleg a dolgozat közepén pl. a 282, és 284. o. Ugyanakkor a dolgozat elején pl. a 273. o. és végén, pl. a 288. o. az általunk használt elnevezéseket használja. Mikor Lovellt idézem, mindig egyértelműen használom az elnevezéseket, bár ezzel helyenként betű szerint eltérek Lovell állításaitól!)

Lovell eredményeit a következőképp foglalhatjuk össze:

1. *Statikus* várakozás esetén a szabályozás *stabil*.
2. *Tökéletes előrelátás* esetén a szabályozás *instabil*.
3. *Naiv várakozás* esetén a szabályozás stabil, ha a reakció gyenge; teljes reakció esetén a stabilitás ekvivalens azzal, hogy a rendszer bizonyos értelemben ,,gyengén összefüggő''.

Lovell 1. és 2. állítása meglepő — ezt a tényt Lovell is aláhúzza. Véleményem szerint e paradoxonokat Lovell már említett feltevése okozza: ti. hogy minden időszakban a beszerzések a következő időszak ráfordításaival azonosak. Természetesen egyetértek Lovellel abban, hogy a ,,készlet-feladat lényege részben abban rejlik, hogy a termelés időt követel'', (i.m. 274—5 o. 8. lábj.) tehát a beszerzés időben megelőzi a ráfordítást. Ugyanakkor az okság elve alapján szabályozási modellben semmilyen döntés nem függhet *explicite* későbbi döntésektől!

Ebben a dolgozatban Lovell gondolatmenetét e visszás feltevés nélkül folytatom. Ehhez szükségünk lesz a *Kornai—Simonovits* [6; 8] modellben bevezetett megkülönböztetésre. Az anyagkészleteket két részre osztjuk: a technikailag szükséges minimális készletre és az *ütköző anyagkészletre*. (Ez utóbbi készlet hasonló szerepet játszik, mint a késztermékkészlet — hiszen az eladáshoz technikailag szükséges minimális készletektől mindvégig eltekintünk.)

Lovell gondolatmenetét a termelőkről kiterjesztjük az *anyagbeszerzőkre:* Föltesszük, hogy adott szektor adott anyagbeszerzőjének normatív ütköző — ill. teljes anyagkészlete arányos a szektor várható termelésével. A tervezett anyagkészlet a normális és az előző időszak tényleges anyagkészlete között helyezkedik el, az anyagbeszerző reakció-együtthatójával arányosan.

Bármely adott készletnorma rendszerhez pontosan egy Neumann-pályához tartozik, s a rendszer stabilitását ehhez a pályához viszonyítjuk. Bevezetjük még a *kritikus* reakció-együtthatót, mint a Neumann-pálya egyöntetű növekedési ütemének és növekedési együtthatójának a hányadosát. Ez a mennyiség meglehetősen kicsiny: éves időszakok esetén néhány százalék, negyedéves időszakok esetén pedig egy százalék körül van.

A rövidség kedvéért rendre *erős, kritikus* ill. *gyenge* reakcióról beszélünk, ha mindegyik reakció-együttható nagyobb, egyenlő ill. kisebb mint a kritikus érték. (A *vegyes* reakciók esetével nem tudunk foglalkozni.)

Saját eredményeimet a következőkben foglalom össze:

1. *Statikus várakozásnál* a szabályozás *instabil*, de *Ljapunov-stabil* erős vagy kritikus reakció esetén.
2. *Tökéletes előrelátás* általánosan csak gyenge vagy kritikus reakciónál *értelmezhető*, ekkor a szabályozás *stabil*.
3. *Naiv várakozásnál* a szabályozás gyenge reakció esetén *stabil*, kritikus reakció esetén *instabil*, de *Ljapunov-stabil* és erős reakció esetén *Ljapunov-instabil*.

Hasonlítsuk össze a két tétel-rendszert egymással. A *statikus várakozásnál* Lovell paradoxonja teljesen eltűnik: a helyesbített modellben a rendszer nem szabadul meg hibáitól, mivel nem tanul belőlük. Szerencse, hogy a rendszer egyáltalán megél ,,vakon''. A *tökéletes előrelátásnál* az értelmezhetőség okoz nehézséget. Érvényes marad Lovell állításának az a része, hogy az optimálisnak tűnő *teljes* reakció általában (de nem mindig!) instabilitást okoz (ha egyáltalán értelmezhető!) A legfontosabb típusnál, a *naiv várakozásnál* eredményeink lényegében megegyeznek: mivel a várakozások pontatlanok, óvatosan kell reagálni jelzéseikre.

A pontosság kedvéért megemlítem, hogy a két modell nemcsak a beszerzési szabályban tér el egymástól (bár ez a lényeges eltérés), hanem két formai feltevésben is: Modellemben a gazdaság *zárt* és *növekvő*. Ezekre a feltevésekre formai okok miatt volt szükség és nem jelentenek tartalmi eltérést Lovell feltevéseitől.

Nem érdektelen, hogy a *készlet*-modell helyett egy meglehetősen *általános* szabályozási modellt vizsgálhatunk, amilyenhez hasonlóval *Mc Fadden* [11] foglalkozott, ő azonban figyelmen kívül hagyta a várakozásokat. A készletmodell általánosítása az eredmények érvényességi körének kiterjesztésén túl jelentősen áttekinthetőbbé teszi az eredményeket és a bizonyításokat.

Figyelmeztetés: Bár a dolgozatban sokszor hivatkozunk Lovell [10] és Kornai–Simonovits [6; 8] dolgozatokra, a dolgozat megértéséhez nem szükséges a hivatkozott művek ismerete.

Köszönetnyilvánítás: Dolgozatom szorosan kapcsolódik Kornai Jánossal közösen írt fenti dolgozatainkhoz. Itt köszönöm meg Kornai Jánosnak a kutatás során nyújtott segítséget. Külön megemlítem Akar László segítségét Lovell modelljének elemzésében. A dolgozat korábbi változatát többen elolvasták. Hasznos észrevételeikért köszönetet mondok Bródy Andrásnak, Kapitány Zsuzsának, Martos Bélának és Tarján Tamásnak.

2. A készletszabályozási modell

Ebben a fejezetben matematikai formába öntöm a Bevezetésben körvonalazott készletszabályozási modellt, és kimutatom Lovell modelljének hibás voltát.

A reálszféra

Diszkrét idejű modellt vizsgálunk, az idő jele $t = 0, 1, 2, \ldots$ Szabályozáselméleti kifejezéssel élve a rendszer *állapotváltozói:* a w késztermékkészlet vektor és a V anyagkészlet mátrix elemei; a rendszer *szabályozási változói:* az r termelési vektor és az X beszerzési mátrix elemei. Bevezetve a Leontief-féle folyó ráfordítási mátrixot, A-t, a rendszer *mozgásegyenletét* az alábbi készletváltozási egyenletek adják:

$$w(t+1) = w(t) + r(t) - Y(t)\,1 \tag{2.1}$$

és

$$V(t+1) = V(t) + Y(t) - A\langle r(t)\rangle, \tag{2.2}$$

ahol 1 az n-dimenziós oszlop-összegzővektor. (Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy e dolgozatban a készlet-*nyitó*készlet ellentétben Lovellel, aki *záró*készletekben gondolkozik!)

Kornai–Simonovits [6] 1. Megállapításában láttuk, hogy minden $\langle g\rangle$ késztermékkészlet per termelés és $\bar{B}$ anyagkészlet per termelés normamátrixhoz tartozik pontosan egy olyan pálya, amelynek arányai és növekedési együtthatója (λ_0) időben változatlanok: a *Neumann-pálya.*

$$w_0(t) = w_0\lambda_0^t,\ V_0(t) = V_0\lambda_0^t,\ r_0(t) = r_0\lambda_0^t,\ Y_0(t) = Y_0\lambda_0^t, \tag{2.3}$$

ahol

$$w_0 = \langle g\rangle r_0 \text{ és } V_0 = \bar{B}\langle r_0\rangle. \tag{2.4}$$

Ebben a dolgozatban formai okok miatt a késztermékkészletnormákat más alakban írjuk föl:

$$w_0 = \langle p\rangle Y_0 1 \tag{2.5}$$

tehát $\langle p\rangle$ a késztermékkészlet per eladás norma. (2.4) és (2.5) összehasonlításából kiderül, hogy tetszőleges $\langle p\rangle$ és $\bar{B}$ norma-mátrixokhoz pontosan egy Neumann-pálya tartozik.

Magatartási szabályok

Röviden megismételjük a Bevezetésben érintett *normális* készletek definícióját. *Kornai–Simonovits* [6] C.1 feltevésével szemben most nem tesszük föl, hogy a normális pályát (esetünkben a Neumann-pályát) ismerik a döntéshozók. Lovellt követve a normális készleteket a várakozásokhoz viszonyítjuk. Mivel a $t + 1$-edik időszak normális nyitókészleteit a t-edik időszak elején kell ismernünk, a t-edik időszak várható eladásához ill. termeléséhez kell arányítani. (2.3) és (2.5) értelmében azonban figyelembe kell vennünk a növekedési együtthatót is, amelyet *ismertnek* tekintünk.

$$\tilde{w}(t+1) = \langle p\rangle\lambda_0\tilde{Y}(t)\, 1 \tag{2.6}$$

és

$$\tilde{V}(t+1) = \bar{B}\otimes\lambda_0\tilde{\mathfrak{R}}(t), \tag{2.7}$$

ahol a hullám a döntési változó becsült, várt értékét jelöli az állapotváltozónak pedig a normális értékét, $\otimes$ pedig két mátrix elemenkénti szorzatát jelöli. Értelemszerűen $\tilde{Y}(t)1$ a termelők becsült eladását jelöli, $\tilde{\mathfrak{R}}(t)$ pedig a beszerzők becslését szektoruk termeléséről: pontosabban $\tilde{r}_i^j(t)$ a j-edik szektor i-edik anyagbeszerzőjének becslése saját szektora $r_j(t)$ termeléséről a t-edik időszak elején.

Mivel azonban a normatív készleteket megcélzó termelési- és beszerzési döntések pontatlan becslésektől függnek, célszerű lehet a normatív és az előző időszak tényleges készletét az ismert λ_0 normális növekedési együtthatóval beszorozva kapott *feltételes* készlete közötti *tervezett* készleteket megcélozni:

$$\bar{w}(r+1) = \langle q\rangle\, \tilde{w}(t+1) + [\mathrm{I} - \langle q\rangle]\lambda_0 w(t) \tag{2.8}$$

és

$$\bar{V}(t+1) = Q\otimes\tilde{V}(t+1) + [11' - Q]\otimes\lambda_0 V(t), \tag{2.9}$$

(a *tervezett* készletek) ahol $11'$ az az $n\times n$-es mátrix, amelynek minden eleme egységnyi; $\langle q\rangle$ és Q mátrixok a termelők és a beszerzők *reakció-együtthatóinak* mátrixát jelöli. Például a j-edik termelő-együtthatójával, q_j-vel, arányos a tervezett késztermékkészlet eltérése a feltételes készlettől; $\overline{w}_j(t+1) - \lambda_0 w_j(t)$; ahol az arányosítás alapja a normatív készlet és a feltételes készlet eltérése: $\tilde{w}_j(t+1) - \lambda_0 w_j(t)$. Ha a j-edik termelő *óvatos*, akkor q_j alig nagyobb nullánál ha *merész*, akkor 1 közelében van.

Az előbb azt mondtuk, hogy a döntéshozók a tervezett készleteket célozzák meg. Ez közelebbről azt jelenti, hogy várakozásaikat pontosnak tekintik, és olyan termelési ill. beszerzési döntést hoznak, amelyek a várakozások teljesülése (tökéletes előrelátás) esetén a tervezett készleteket alakítja ki. Képletben: (vö. (2.1—2))

$$r(t) = \overline{w}(t+1) - w(t) + \tilde{Y}(t)\,1 \tag{2.10}$$

és

$$Y(t) = \overline{V}(t+1) - V(t) + A \otimes \tilde{\mathfrak{R}}(t). \tag{2.11}$$

Vegyük észre, hogy adott eladási- és termelési várakozások mellett (2.1—2) és (2.6—11) egyenletek valóban megadják a rendszer szabályozását. Hiszen adott tényleges készletek esetén (2.6—7) segítségével adódnak a következő időszak normatív készletei, ahonnan (2.8—9) segítségével meghatározhatók a tervezett készletek. A következő lépésben (2. 10—11) segítségével meghatározzuk az adott időszak döntéseit, majd a (2.1—2) egyenletből leolvasható a „végeredmény": a következő időszak tényleges készletei. És az eljárás „elölről" kezdődik.

Kiemeljük, hogy adott várakozások mellett szabályozásunk *teljesen decentralizált*: a j-edik szektor termelője saját w_j késztermékkészlete és $\Sigma_{k=1}^{n} \tilde{y}_{jk}$ eladási becslése alapján dönt r_j termeléséről: a j-edik szektor i-edik anyagbeszerzője saját v_{ij} anyagkészlete és $\tilde{r}_i^j$ beszerzési becslése alapján dönt beszerzéséről. Ez a vonás hasonlít *McFadden* [11] és *Kornai—Simonovits* [8] megfelelő feltevéseihez.

Mielőtt rátérnénk Lovell modelljének közelebbi vizsgálatára, röviden megismételjük az ütköző anyagkészlet *Kornai—Simonovits* [6]-féle definícióját. Képzeljük azt, hogy a dinamikus Leontief-modell B mátrixa a *technikailag szükséges eszközlekötéseket* adja a termelés függvényében: a technikailag szükséges készletek mátrixa $B\langle r(t)\rangle$. Ugyanakkor az anyagkészletek nagyobbak (kivételes esetben egyenlők) a technikai minimumnál és a többletet *ütköző anyagkészletnek* nevezzük:

$$S(t) = V(t) - B\langle r(t)\rangle. \tag{2.12}$$

Az ütköző anyagkészlet szerepe ugyanaz a beszerzéseknél, mint a késztermékkészleté az eladásoknál: képessé teszi a rendszert bizonyos ingadozások elviselésére.

A rendszer *működőképességét* a következő változók nem-negativitásával definiáljuk:

$$w(t) \geqq 0, \ S(t) \geqq 0, \ r(t) \geqq 0, \ Y(t) \geqq 0. \tag{2.13}$$

(2.12) és (2.13) egybevetéséből következik $V(t) \geqq 0$ is. (2.4), (2.5), (2.12) és (2.13) szerint a Neumann-pálya működőképes, ha $\overline{B} \geqq B$.

3*

Lovell modellje

Rátérünk Lovell modelljének közelebbi bemutatására. Mint a Bevezetőben említettük, formai okokból Lovell nyílt és stagnáló gazdasága helyett zárt és növekvő gazdasággal foglalkozunk. A nyílt és a zárt modell közti különbség formai, mint az *Lovell* is hangsúlyozza (i.m. 276. o.) A növekvő gazdaság nyilván valósághűbb feltevés, mint a stagnáló; de ez utóbbit Lovell is csak egyszerűsítő formai feltevésnek tekinti és nélkülözhető (i.m. 278. o. 11. l. j.) Az sem lényeges igazán, hogy Lovell minden szektor minden felhasználásának lekötési idejét azonosnak tekinti, amelyet még a szabályozási időközzel is azonosít: $A = B$.

Egyetlen egy feltevését kell kiemelnünk; nevezetesen azt, hogy *eltekint az ütköző anyagkészletek létezésétől:* (274. o.)

$$S(t) = 0 \text{ vagyis } V(t) = B\langle r(t)\rangle. \tag{2.14}$$

(2.14)-ből és (2.11)-ből már következik, hogy *minden időszak beszerzése függ a következő időszak technikailag szükséges készletétől* (Lovellnél egyszerűen azonos a ráfordításokkal; i.m.274. o.)

$$Y(t) = B\langle r(t+1)\rangle - B\langle r(t)\rangle + A\langle r(t)\rangle \left(= A\langle r(t+1)\rangle\right). \tag{2.15}$$

Szabályozási modelleknél megengedhetetlen, hogy bármely időszak bármely szabályozási változója későbbi időszak szabályozási változóitól explicite függjön; márpedig (2.15)-nél ez a helyzet.

Mivel a (2.15) feltevést teszem felelőssé Lovell paradox állításaiért, hasznosnak tűnik részletezni, hogy az ,,idő megfordítása'' (2.15)-ban *tényleges*. (Összehasonlításul: (2.10—11)-ben is — *látszólag* — megfordul az idő, hiszen minden időszak döntése a következő időszak tervezett állapotától függ, azonban (2.6—7) és (2.8—9) értelmében a tervezett állapot az előző időszak elején meghatározható!)

Helyettesítsük be (2.10)-be (2.1), (2.6) és (2.8) összefüggéseket:

$$\begin{aligned} r(t+1) &= \overline{w}(t+2) - w(t+1) + \tilde{Y}(t+1)\,1 = \\ &= \langle q\rangle\langle q\rangle\tilde{Y}(t+1)\,1 + [(I-\langle q\rangle)\lambda_0 - I]\,w(t+1) + \tilde{Y}(t+1)\,1 = \\ &= (I + \langle q\rangle\langle p\rangle)\,\tilde{Y}(t+1)\,1 + [(I-\langle q\rangle)\lambda_0 - I][w(t) + r(t) - Y(t)1]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

(2.15) és (2.16) összevetéséből következik, a j-edik szektor i-edik beszerzőjének $y_{ij}(t)$ beszerzése függ a j-edik szektor $t+1$-edik időszaki eladási várakozásától: $\Sigma_{k=1}^{n}\tilde{y}_{jk}(t+1)$-től, ami a tökéletes előrelátás szokásos egy időszakra vonatkozó előrelátása (lásd később (2.18)) helyett két-időszakra vonatkozó előrelátást feltételez! Ugyanakkor Lovell alternatív várakozási feltevései (a naiv és a statikus várakozás) még egy időszakra vonatkozó tökéletes előrelátást sem engedhek meg, ami ellentétes Lovell előző, bár burkolt, nem alternatív feltevésével, (2.15)-tel.

Külön zavart okoz, hogy az $y_{ij}(t)$ beszerzés függ más szektorok egyidejű $\Sigma_{k=1}^{n} y_{jk}(t)$ beszerzésétől, ami *teljesen centralizált* szabályozást jelent. Viszont teljesen centralizált szabályozás esetén milyen szerepük marad a ,,döntéshozók'' várakozásainak?

Összefoglalva: Lovell beszerzési feltevése kibékíthetetlen ellentétben áll Lovell termelési szabályával. A megoldást már megelőlegeztük (2.7), (2.9) és (2.11)-ben: a beszerzési szabályt a termelési szabályhoz hasonlóan kell kialakítani.

Várakozási típusok

Lovell modelljétől visszatérve modellemhez, adós vagyok még a várakozások keletkezésének magyarázatával. A formai módosításoktól eltekintve Lovellt követem: három várakozási típust vizsgálok: (i) a statikusat, (ii) a tökéleteset és (iii) a naivat.

(i) *Statikus várakozásnál* az eladási- és a termelési várakozások arányai időben változatlanok, szintjük a Neumann-pálya növekedési együtthatója szerint növekszik:

$$\tilde{Y}(t)\,1 = \tilde{Y}(t-1)\,1\,\lambda_0 \quad \text{és} \quad \tilde{\mathfrak{R}}(t) = \tilde{\mathfrak{R}}(t-1)\,\lambda_0, \qquad t = 1, 2, \ldots \tag{2.17}$$

ahol $\tilde{Y}(0)\,1$ és $\tilde{\mathfrak{R}}(0)$ adott.

(ii) *Tökéletes előrelátásnál* az eladási és a termelési várakozások egybeesnek a tényleges eladási és termelési döntésekkel:

$$\tilde{Y}(t)1 = Y(t)1 \quad \text{és} \quad \tilde{\mathfrak{R}}(t) = 1r(t)', \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.18}$$

(iii) *Naiv várakozásnál* az eladási- és a termelési várakozások megegyeznek az *előző* időszak tényeinek a Neumann-pálya növekedési ütemével szorzott értékeivel:

$$\tilde{Y}(t)1 = Y(t-1)\,1\,\lambda_0 \quad \text{és} \quad \tilde{\mathfrak{R}}(t) = 1r(t-1)'\lambda_0, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{2.19}$$

ahol $\tilde{Y}(0)\,1$ és $\tilde{\mathfrak{R}}(0)$ adott.

Kiemeljük, hogy mind a statikus, mind a naiv várakozás összhangban van a *teljes decentralizálás* elvével. Például naiv várakozásnál az előrebecslések kizárólag olyan megfigyeléseken alapulnak, amelyeket az illető döntéshozók egymástól teljesen függetlenül, közlések nélkül elvégezhetnek. Mindegyik termelő bármely időszak elején előző termelése és mostani készletváltozása különbségeként meghatározhatja az előző időszak eladásait. Mindegyik beszerző az előző beszerzés és a mostani készletváltozás különbségeként meghatározhatja saját szektora anyagfelhasználását (ill. termelését).

3. Az általános modell

A reálszféra

Az előző fejezet alapján nem nehéz kialakítani általános modellünket. (Vö. McFadden (1969) és Simonovits (1978)). A szabályozáselmélet alapfogalmait felhasználva bevezetjük a *dinamikus rendszer* $x(t)$ *állapot*vektorát és $u(t)$ *szabályozási* vektorát. A rendszer állapot változása nem függ az állapottól, kizárólag a szabályozástól függ; az egyszerűség kedvéért *lineáris mozgásegyenletű* rendszereket vizsgálunk:

$$x(t+1) = x(t) + Ru(t) \quad t = 0, 1, 2; \; x(0) \text{ adott.} \tag{3.1}$$

(Ne tévesszük össze a termelési várakozások $\mathfrak{R}$ mátrixát a reálstruktúra R mátrixával)

Ebben a dolgozatban mindvégig föltesszük, hogy az állapot- és a szabályozási vektor dimenziója *azonos* (jele: N), tehát az R mátrix $N \times N$-es kvadratikus mátrix. Föltesszük továbbá, hogy a rendszer *skalár* állapot- és szabályozási változói kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. Megfelelő indexelés mellett x_ν állapotváltozónak u_ν szabályozási változó felel meg. Szemléletesen azt is mondhatjuk, hogy a ν-edik *döntéshozó* állapotát x_ν, döntését u_ν jelöli. (Konkrét készletszabályozási modellünkben e fogalmak és feltevések jelentése nyilvánvaló.)

Föltesszük, hogy bármely skalár állapot változtatására a *saját* döntés „pozitívan" (növelően) hat, az *idegen* döntések pedig „negatívan" (csökkentően) vagy pedig sehogyan sem hatnak. Képletben:

$$r_{\nu\nu} > 0 \qquad 1 \leq \nu \leq N \tag{3.2}$$

és

$$r_{\nu'\nu} \leq 0 \qquad 1 = \nu' \neq \nu = N. \tag{3.3}$$

(3.2—3) feltevést a közgazdaságtanban először *Metzler* (1945) használta; s az ő tiszteletére e feltevésnek eleget tevő rendszereket Metzler-rendszereknek nevezik. (Ugyanakkor egyik feltétel sem teljesül *Kornai—Simonovits* (1975b) rendelésjelzéses modelljében!)

(3.2) feltevés folytán a szabályozási változók mértékegységének alkalmas megválasztásával elérhető, hogy

$$r_{\nu\nu} = 1 \qquad 1 \leq \nu \leq N. \tag{3.4}$$

Vezessük be az *idegen hatások együttható mátrixát*:

$$M = I - R. \tag{3.5}$$

(3.3), (3.4) és (3.5) szerint

$$M \geq 0 \tag{3.6}$$

és

$$m_{\nu\nu} = 0 \qquad 1 \leq \nu \leq N. \tag{3.7}$$

Triviális eseteket kizárandó, föltesszük, hogy a rendszer *összefüggő*, vagyis az M mátrix *irreducibilis*. (Belátható, hogy e feltevés a készletjelzéses modellben az A mátrix irreducibilitását követeli meg.) Vezessük be az *idegen hatások (összegezett) vektorát:*

$$z(t) = Mu(t). \tag{3.8}$$

Ugyanis (3.1)-be behelyettesítve (3.8)-at

$$x(t+1) = x(t) + u(t) - z(t) \tag{3.9}$$

egyenlethez jutunk, amely egyszerűen azt mondja ki, hogy az állapotváltozás egyenlő a saját döntés és az *idegen hatások összege* közötti különbséggel.

Általánosítva a statikus és nyílt Leontief-modell produktivitási definícióját és feltételét, a következőt mondjuk:

A gazdaság *produktív*, ha minden állapot-növekedés pozitív döntéssel megvalósítható. (Természetesen a működőképesség mellékfeltételei általában felülről korlátozzák a döntéseket, vagyis az állapotnövekedéseket és az állapotváltozásokat, azonban nem korlátozzák az állapotnövekedési *arányokat*, és valójában erről van szó!)

Ismert összefüggés (pl. *Gale* [3]) szerint a gazdaság pontosan akkor produktív, ha az (nem-negatív irreducibilis M) mátrix spektrál-sugara kisebb mint 1.

$$\varrho(M) < 1. \tag{3.10}$$

Mivel a $\varrho(M)$ növekvő függvénye az M mátrix bármelyik elemének (*Varga* [15] Theorem 2.1 (3)), $\varrho(M)$ a rendszer *összefüggőségének erősségét* méri: értéke 0 és 1 között van. Természetesen minél nagyobb $\varrho(M)$, annál erősebb az összefüggőség.

Célszerű produktivitási feltevésünket a következő ekvivalens alakban is megfogalmazni:

$$I'M \leq I', \tag{3.11}$$

amely feltételt *Simonovits* [14]-ben az *uralkodó saját hatás* jelzővel illettük. Ez az ekvivalens alak megkönnyíti a készletjelzéses gazdaság produktivitásának igazolását. (A (3.2–4) feltételek teljesülését közvetlenül ellenőrizhetjük.) Ugyanis a $\varrho(A)<1$ Leontief-féle produktivitási feltevés (*Kornai–Simonovits* [8] R. 4) értelmében az állapotváltozóknak van olyan mértékegységrendszerük, amelynél teljesül $I'A < I$. Ekkor viszont (2.1–2) szerint a w_j-oszlopösszeg éppen $\Sigma_{i=1}^{n} a_{ij}$, amely kisebb mint 1, és v_{ij}-oszlopösszeg pedig pontosan 1.

McFadden [11] számpéldája szintén kielégíti a produktivitási és a Metzler-feltételt.

Neumann-pálya

Időben változatlan struktúrájú rendszerekben kitüntetett szerepet játszanak az állandó arányú és növekedési együtthatójú pályák, amelyeket a működőképességi feltételek teljesülése esetén *Neumann-pályák*nak nevezünk:

$$x_0(t) = x_0\lambda_0^t \quad \text{és} \quad u_0(t) = u_0\lambda_0^t, \ \lambda_0 > 1. \tag{3.12}$$

Vezessük be a saját állapot és az összegezett idegen hatások hányadosát, mint a döntéshozó *normáját:*

$$c_v = \frac{x_v^0}{z_v^0} \quad 1 \leq v \leq N \quad \text{azaz} \quad x_0 = \langle c\rangle z_0. \tag{3.13}$$

Szorozzuk be (3.9)-et M-mel és a kapott egyenletbe helyettesítsük be (3.8)-at és (3.12–13)-at, és rendezzük az egyenletet:

$$(\lambda_0 - 1)M\langle c\rangle z_0 = (I - M)z_0, \quad \text{ahol} \quad z_0 > 0 \quad \text{és} \quad \lambda_0 > 1.$$

Felhasználva, hogy (3.10) ekvivalens $(I-M)^{-1} > 0$ egyenlőtlenséggel, új egyenletünket $(I-M)^{-1}$-gyel beszorozva és $\lambda_0 - 1$-gyel elosztva

$$\frac{1}{\lambda_0 - 1} z_0 = (I-M)^{-1} M\langle c\rangle z_0, \quad \text{ahol } z_0 > 0 \text{ és } \lambda_0 > 1$$

sajátérték-sajátvektor feladathoz jutunk. Mivel $(I-M)^{-1}M > 0$, Perron-tétele értelmében *egyetlen* megoldása *létezik* a feladatnak.

A későbbiek miatt célszerű utolsó előtti egyenletünket némileg átrendezni:

$$z_0 = M[I + (\lambda_0 - 1)\langle c\rangle]z_0, \quad \text{ahol } z_0 > 0,\ \lambda_0 > 1. \tag{3.14}$$

Ezzel bebizonyítottuk a következő segédtételt:

Segédtétel. A Neumann-pálya létezése és egyértelműsége.

Bármely negatív idegen hatású és produktív rendszerben tetszőleges norma esetén pontosan egy Neumann-pálya létezik.

A továbbiakban fölteszem, hogy a λ_0 növekedési együtthatót minden döntéshozó ismeri, ismeretlen viszont a Neumann-arányok vektora, z_0. Ez a feltevés matematikailag következetlen, hiszen λ_0 a (3.14) feladat sajátértéke, és z_0 a (3.14) feladat sajátvektora. Közgazdaságilag viszont óriási különbség, hogy csak egy állandó technikájú gazdaság hosszútávú növekedési ütemének ismeretét tesszük fel, ami egy *aggregált* egyszektoros növekedési modellből is meghatározható — vagy pedig egy sok ismeretlenes egyenletrendszer teljes centralizációt követelő megoldásának ismeretét tesszük föl. Egyébként erre a feltevésre még visszatérünk a fejezet végén.

Magatartási szabályok

Rátérünk a magatartási szabályokra.

(2.6—7) általánosításaként a *normatív állapotot* az előző időszak idegen döntéseinek összegére vonatkozó várakozással arányosan határozzuk meg, ahol az arányossági mátrix (3.13)-mal összhangban $\langle c\rangle\lambda_0$:

$$\tilde{x}(t+1) = \lambda_0\langle c\rangle\,\tilde{z}(t). \tag{3.15}$$

(2.8—9) általánosításaként a *tervezett állapotot* úgy határozzuk meg a *0* és *1* közötti d reakció együttható vektorral, hogy a tervezett állapot eltérése a *feltételezett* $\lambda_0 x(t)$ állapottól $\langle d\rangle$-szerese legyen a normatív állapotnak a feltételezett állapottól való eltérésének:

$$\bar{x}(t+1) = \langle d\rangle\,\tilde{x}(t+1) + (I - \langle d\rangle)\,\lambda_0 x(t) \quad 0 < d \leq 1. \tag{3.16}$$

(2.10—11) általánosításaként a döntéshozók olyan döntéseket hoznak, hogy az idegen hatások összegére vonatkozó előrebecslés teljesülése esetén a tervezett állapot valósuljon meg. (Ez összhangban van a tervezett állapot intuitív fogalmával!)

$$u(t) = \bar{x}(t+1) - x(t) + \tilde{z}(t). \tag{3.17}$$

Általában is igaz, amit a készletszabályozásról elmondtunk: (3.15), (3.16), (3.17) és (3.8—9) meghatározza a rendszer dinamikáját — adott várakozások mellett.

Az érdekesség kedvéért megemlítjük, hogy a *normatív* döntés

$$\tilde{u}(t) = \tilde{x}(t+1) - x(t) + \tilde{z}(t) \tag{3.18}$$

bevezetésével visszatérhetünk a norma szerinti szabályozás gondolatkörébe. Vonjuk ki (3.17)-ből (3.18)-at: és vegyük figyelembe (3.16)-ot:

$$u(t) - \tilde{u}(t) = [I - \langle d \rangle][\lambda_0 x(t) - \tilde{x}(t+1)]. \tag{3.19}$$

Furcsa módon nincs összhang (3.19) és például a negatív visszacsatolás *Kornai–Simonovits* [8] C. 7. feltevése között, pedig a közgazdasági rokonság kézenfekvő. Mégis elmondható, hogy sikerült beváltani azt az ígéretet, hogy a normatív pálya képzése is bevonható az elemzésbe.

Várakozási feltevéseink

Röviden megismételjük – igaz, hogy általánosan – az előző fejezetben elmondottakat:

Statikus várakozásnál a döntéshozók ragaszkodnak kezdeti várakozásukhoz, csak minden időszakban beszorozzák λ_0 növekedési együtthatóval előző becslésüket:

$$\tilde{z}(t) = \lambda_0 \tilde{z}(t-1) \quad t = 1, 2, \ldots, \tilde{z}(0) \text{ adott.} \tag{3.20}$$

Tökéletes előrelátásnál a döntéshozók várakozásai teljesülnek:

$$\tilde{z}(t) = z(t) \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.21}$$

Naiv várakozásnál a döntéshozók az előző időszak megfelelő tényadatait beszorozzák a λ_0 növekedési együtthatóval:

$$\tilde{z}(t) = \lambda_0 z(t-1) \quad t = 1, 2, \ldots, \tilde{z}(0) \text{ adott.} \tag{3.22}$$

Nyilvánvaló, hogy a statikus várakozás és a tökéletes előrelátás szélsőséges feltevések, kizárólag elméletileg érdekesek.

A vizsgálat kérdései

Vizsgálatunk során két kérdésre keresünk választ: (i) stabil-e a szabályozás és (ii) működőképes-e a szabályozás?

(i) *Stabilitáson* (pontosabban: *relatív stabilitáson*) azt értjük, hogy a pálya aszimptotikusan tart a Neumann-pályához. Pontosabban:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x_\nu(t)}{x_\nu^0(t)} = 1 \quad 1 \leq \nu \leq N \tag{3.23}$$

és

$$\lim_{t \to \infty} \frac{u_\nu(t)}{u_\nu^0(t)} = 1 \quad 1 \leq \nu \leq N. \tag{3.24}$$

Megjegyezzük, hogy *McFadden* [11] és a gazdaság *vegetatív működésével* foglalkozó dolgozatok – *Kornai–Martos* [4; 5], *Dancs–Hunyadi–Sivák* [2], *Kornai–Simonovits* [6; 7; 8] stb. mindig stabilitást kerestek és találtak. Ez „erős" feltevéseikből (késleltetés hiánya, centralizált szabályozás ill. adott normatív pálya) következett, de gazdaságilag a relatív stabilitás a fontos. A közönséges stabilitás természetesen gyorsabb igazodást jelez, mint a relatív stabilitás.

Bevezethetnénk a *normatív pálya* fogalmát, amikor a várakozások teljesülnek és a tényleges állapot megegyezik a normálissal. Bár *részleges reakció* ($0 < d < 1$) esetén a normatív pálya azonos a Neumann-pályával, *teljes reakciónál* ($d = 1$) egész sereg normatív pályához tartozik egyetlen egy Neumann-pálya.

(ii) *Működőképességen* a változók pozitivitását (és bizonyos „$V(t) \geq B\langle r(t)\rangle$" típusú-általános egyenlőtlenségek teljesülését) értjük: $x(t) \geq 0$, $u(t) \geq 0$ és $x(t) \geq \langle c^{(m)}\rangle u(t)$.

Általában a szabályozás stabilitását bizonyítjuk vagy cáfoljuk és ebből következtetünk a szabályozás működőképességére ill. működőképtelenségére. Mivel a lineáris rendszereknél a Ljapunov-féle stabilitás ekvivalens a *lokális* működőképességgel, a működőképességet külön csak a *globális* esetben említjük meg.

Szokás szerint a stabil szabályozást előnyösebbnek tartjuk az instabil szabályozásnál, s ez utóbbi osztályon belül a Ljapunov-stabil szabályozást a Ljapunov-instabil szabályozásnál. Ugyanis a stabil szabályozás „célravezet", míg az instabil nem. Továbbá a stabil ill. Ljapunov-stabil szabályozás lokális működőképességet biztosít, míg a Ljapunov-instabilitás kizárja azt — legalábbis hosszútávon.

Ugyanakkor utalunk e hagyomány visszásságaira: egy Ljapunov-stabil, de instabil szabályozás működőképes indulási állapotainak tartománya bővebb is lehet, mint egy stabilé. Hasonlóan: egy Ljapunov-instabil szabályozás releváns időszakra vonatkozó működőképes indulási állapotainak tartománya bővebb lehet mint egy Ljapunov-stabil szabályozásé. (Erre a visszásságra egy beszélgetés során Kornai János hívta föl a figyelmemet.)

Lovell dolgozatát követve három várakozási típust vizsgálunk stabilitási szempontból. Külön kitérünk a *reakció-együtthatók* szerepére.

Reakció-együttható és várakozások

Tökéletes előrelátás esetén (3.9) és (3.17) szerint a tényleges és a tervezett állapot azonos:

$$\bar{x}(t+1) = x(t+1). \tag{3.26}$$

(3.16) szerint ekkor célszerűnek látszik *teljes reakciót* alkalmazni:

$$d = 1; \tag{3.27}$$

ugyanis ekkor a normatív és a tervezett állapot is megegyezik:

$$\tilde{x}(t+1) = \bar{x}(t+1). \tag{3.28}$$

Később látni fogjuk, hogy ez a sejtésünk általában hamis. Érdemes a részleges reakciót alkalmazni, már csak egy olyan ok miatt is, amit nem modellezünk: a termelés nagyfokú ingadozása drágább mint a készletek ingadozása. Mindenesetre tökéletlen előrelátásnál előfordulhat, hogy a teljes reakció jobban eltéríti a rendszert a Neumann-pályától, mintha egyáltalán nem reagálnának a döntéshozók. Az utóbbi esetben a rendszert *magára hagyják:*

$$d = 0, \tag{3.29}$$

és (3.16) szerint a tervezett állapot a feltételezett állapottal esik egybe:

$$\bar{x}(t+1) = \lambda_0 x(t).$$

A felesleges változók kiküszöbölése

Belátjuk, hogy a modell leírásán kívül nincs szükség a normatív, a tervezett és a feltételes állapot-változókra: kiküszöbölhetők. Helyettesítsük be (3.15)-öt (3.16)-ba:

$$\bar{x}(t+1) = \lambda_0 \langle d \rangle \langle c \rangle \tilde{z}(t) + [I - \langle d \rangle d]\, \lambda_0 x(t),$$

amelyet behelyettesítve (3.17)-be a döntés az állapot és a várakozás függvényében kifejezhető:

$$u(t) = [\lambda_0 \langle d \rangle \langle c \rangle + I]\, \tilde{z}(t) + [(\lambda_0 - 1) I - \lambda_0 \langle d \rangle]\, x(t). \tag{3.30}$$

Érdemes a következő rövidítéseket bevezeni:

$$\langle k \rangle = I + \lambda_0 \langle d \rangle \langle c \rangle \tag{3.31}$$

és

$$\langle h \rangle = -\lambda_0 I + I + \lambda_0 \langle d \rangle. \tag{3.32}$$

(3.31–3.32) segítségével (3.30) tömörebben fölírható:

$$u(t) = \langle k \rangle\, \tilde{z}(t) - \langle h \rangle\, x(t). \tag{3.33}$$

Helyettesítsük be (3.33)-at (3.8)-ba:

$$z(t) = M \langle k \rangle\, \tilde{z}(t) - M \langle h \rangle\, x(t). \tag{3.34}$$

Behelyettesítve (3.33)-at és (3.34)-et (3.9)-be, rendezés után az új állapot a régi állapot és a várakozás lineáris függvényeként kifejezhető:

$$x(t+1) = [I - (I - M) \langle h \rangle]\, x(t) + (I - M) \langle k \rangle\, \tilde{z}(t). \tag{3.35}$$

Szükségünk lesz még egy összefüggésre, amely (3.34) és (3.35) összeadásával adódik:

$$z(t) + x(t+1) = \langle k \rangle\, \tilde{z}(t) + [I - \langle h \rangle]\, x(t) \tag{3.36}$$

A kritikus, a gyenge és az erős reakció

A következő fejezetben fontos szerepet játszik a következő kérdés: Adott várakozás esetén nagyobb állapot-vektorhoz mikor tartozik mindig nagyobb döntés-vektor? (3.33) szerint akkor és csak akkor, ha

$$h \leq 0. \tag{3.37}$$

(3.32) szerint (3.37) ekvivalens a

$$(0<)\,d \leq \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}\,1 \tag{3.38}$$

feltétellel. Mivel (3.38) feltételre még gyakran hivatkozunk, célszerű lesz röviden *gyenge reakcióról* beszélni ilyenkor.

Hasonlóan fontos szerephez jut az az eset, amikor nagyobb állapot-vektorhoz mindig kisebb döntés-vektor tartozik. (3.33) szerint ez

$$(1 \geq)\, h \geq 0 \tag{3.39}$$

ill.

$$\frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}\,1 \leq d (\leq 1) \tag{3.40}$$

feltétellel ekvivalens, amikor *erős reakcióról* beszélünk. (3.38)-ban ill. (3.40)-ben egyes egységekre egyenlőség állhat, míg másoknál továbbra is egyenlőtlenség.

Külön említjük azt az esetet, amikor a döntés explicite független az állapottól (implicite, a várakozáson keresztül függhet). Ismét (3.32—33) szerint ez

$$h = 0 \tag{3.41}$$

és

$$d = \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}\,1 \qquad \text{(kritikus reakció)} \tag{3.42}$$

feltétellel ekvivalens.

Osztályozásunkból kimaradt a *vegyes* reakciók esete, amikor egyes reakciók erősek, mások pedig gyengék. Ezt az esetet általában nem tudjuk vizsgálni, akárcsak Lovell.

Honnan ismerik a döntéshozók a Neumann-féle növekedési együtthatót?

A magatartási szabályok ismertetése előtt már mentegetőztem amiatt, hogy a döntéshozókról föltételeztem a Neumann-féle növekedési együttható pontos ismeretét. Ebben a pontban röviden kitérnék arra, hogy miképpen lehet*ne* megszabadulni ettől a feltevéstől.

A gyakorlatilag legérdekesebb naiv várakozásokra szorítkozunk. Tegyük fel, hogy kezdetben minden döntéshozó rendelkezett valamilyen $\tilde{\lambda}_\nu(0)$ növekedési tényezőbecsléssel. A t-edik időszak elején ($t \geq 1$) saját állapotának ill. az őt érő idegen hatások eredőjének növekedési tényezőjét a naiv várakozás szabályai szerint az előző időszak saját tényleges növekedési együtthatójával becsli:

$$\tilde{\lambda}_{x\nu}(t) = \frac{x_\nu(t)}{x_\nu(t-1)} \quad \text{és} \quad \tilde{\lambda}_{z\nu}(t) = \frac{z_\nu(t-1)}{z_\nu(t-2)}.$$

A normális állapot (3.15)-ös képletébe $\tilde{\lambda}_{z\nu}(t)$-t, a tervezett állapot (3.16) képletébe $\tilde{\lambda}_{x\nu}(t)$-t és a naiv várakozást definiáló (3.22)-es képletébe megint $\tilde{\lambda}_{z\nu}(t)$-t helyettesítve, minden olyan előzetes információtól is megszabadultunk, amely csak központilag számítható ki.

E módosított modell elvileg jobban alkalmas a valóság tükrözésére mint elődje. Nem tudjuk azonban, hogy vizsgálata mennyiben erősíti meg ill. mennyiben cáfolja meg az egyszerűbb modellről szóló ismereteinket. Mivel a módosított rendszer nem lineáris, vizsgálata jóval nehezebb az eredetinél, és egyelőre nem tudjuk elemezni.

4. Reakció-sebességí várakozás és stabilitás

Ebben a fejezetben rátérek állításaim kimondására és bizonyítására. Lovell súlyozásától eltérve a statikus és a tökéletes várakozást nemcsak érintem, hanem részletesen is elemzem. Ezt a súlypontváltoztatást két dolog indokolja: 1) Eredményeink különbözősége épp a statikus és a tökéletes várakozás esetén lényeges és 2) a naiv várakozás elemzését jól megalapozza a fenti két várakozás elemzése.

(i) *Statikus várakozás*

Helyettesítsük be (3.20)-at (3.35)-be, és osszuk el az így kapott egyenlet mindkét oldalát λ_0^{t+1}-gyel:

$$\frac{x(t+1)}{\lambda_0^{t+1}} = \frac{I-(I-M)\langle h\rangle}{\lambda_0}\,\frac{x(t)}{\lambda_0^t} + \frac{(I-M)\langle k\rangle}{\lambda_0}\,z(0). \tag{4.1}$$

Az inhomogén differencia-egyenletrendszerek elméletéből jól ismert, hogy (4.1) egyenlet $x(t)/\lambda_0^t$ változói akkor és csak akkor konvergálnak (valamilyen $z(0)$-tól függő értékhez), ha a homogén rendszer (relatíve) stabil, vagyis az $[I-(I-M)\langle h\rangle]/\lambda_0$ mátrix spektrálsugara kisebb mint 1:

$$\varrho[I-(I-M)\langle h\rangle] < \lambda_0. \tag{4.2}$$

Vegyük észre, hogy (4.2) nem teljesül minden reakciósebességvektorra. Például a magára hagyott rendszernél $d=0$ — (3.32)-t figyelembe véve — a szóban forgó mátrix $I+(I-M)(\lambda_0-1)=\lambda_0 I-(\lambda_0-1)M$. Márpedig az M mátrixnak van negatív valósrészű sajátértéke, tehát a fenti mátrixnak van λ_0-nál nagyobb abszolút értékű sajátértéke, vagyis (4.2) valóban nem teljesül.

[Az M mátrix sajátértékeiről azt tudjuk, hogy a nulla körüli $\varrho(M)$ sugarú körben fekszenek és összegük nulla (lévén az M mátrix diagonális elemeinek összege nulla). Mivel Frobenius-tétele szerint van pozitív sajátérték, kell lennie negatív valósrészű sajátértéknek is.]

Nem törekszünk teljességre, egyszerűen föltesszük, hogy a reakció *kritikus* vagy *erős*.

(3.40)-ben egyelőre kizárva az egyenlőségeket, (3.39)-ben is határozott egyenlőtlenségeket kapunk: $0<h(\leq 1)$. Így a szóban forgó mátrix, $I-\langle h\rangle+$ $+M\langle h\rangle>0$ és irreducibilis. Fölhasználva, hogy e mátrix Leontief-inverze, $[I-I+\langle h\rangle-M\langle h\rangle]^{-1}=\langle h\rangle^{-1}(I-M)^{-1}$ létezik és pozitív, már említett összefüggésünk szerint a szóban forgó mátrix spektrálsugara kisebb mint 1.

Folytonossági megfontolások szerint (3.40) eddig kizárt eseteire ill. (3.42)-re a spektrálsugár legfeljebb 1 lehet.

Mindkét esetben teljesül tehát (4.2).

(4.1) és (4.2) folytán a növekedési együtthatóval normált állapot-változók konvergens sorozatot alkotnak, $\varkappa$ határértékkel:

$$(4.3) \qquad \varkappa = \left[I - \frac{I - I - M\langle h \rangle}{\lambda_0} \right]^{-1} (I - M)\langle k \rangle \tilde{z}(0).$$

Láthatjuk, a kezdeti $\tilde{z}(0)$ várakozástól függ, hogy az állapotarányok hová tartanak. A (4.3)-ban szereplő mátrixok regularitása miatt $\varkappa$ és $\tilde{z}(0)$ között kölcsönösen egyértelmű megfelelés van. Tehát a Neumann-pályához akkor és csak akkor konvergál a rendszer, ha a kezdeti várakozás Neumann-féle volt. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

I. Tétel: Statikus várakozás és erős reakció mellett az állapot-arányok konvergálnak, ahol a határérték független az induló állapottól, viszont függ a kezdeti várakozástól. A rendszer hosszútávú növekedési üteme azonos a Neumann-pályáéval. A szabályozás (aszimptotikusan) instabil, de Ljapunov-értelemben stabil. Túl gyenge reakció esetén a szabályozás Ljapunov-instabil.

Megjegyzés Az I. Tétel magától értetődő: ha egy rendszer nem tanul saját hibáiból, akkor nem tud megszabadulni tőlük. Az I. Tétel kimondásának egyetlen célja: megcáfolni Lovell megfelelő (VI.) tételének mondanivalóját; amely szerint a statikus várakozás stabilizálja a rendszert, tehát a ,,vakság'' kifejezetten előnyös a készletszabályozásnál. (Figyelmeztetjük az Olvasót, hogy Lovell VI. Tétele, akárcsak a többi tétele, matematikailag hibátlan. Abszurd mondanivalójáért a sokszor idézett feltevését hibáztatom.)

(ii) *A tökéletes előrelátás*

Rátérünk a statikus várakozás ellentétének, a tökéletes előrelátásnak a vizsgálatára. Ezt a típusú várakozást a szabályozáselméletben nem kedvelik, amire a 2. pontban, Lovell modelljének bírálatánál már utaltam. Ezzel Lovell is tisztában van és védelmére a következőket írja:

,,Az eljárást megvédhetjük azzal az észrevétellel, hogy szükséges a tökéletes előrelátás következményeit elemezni, hogy megmutassuk, az instabilitás nem egyszerűen az előrebecslési hiba következménye.'' (i.m. 288. o. 26. lábjegyzet).

Mint a Bevezetésben említettem, a legnagyobb nehézséget a tökéletes előrelátás értelmezhetetlensége okozza.

Mikor értelmezhető egyáltalán a tökéletes előrelátás?

Vizsgáljuk meg közelebbről a tökéletes előrelátás kérdését! Helyettesítsük be (3.21)-et (3.34)-be és rendezzük az így kapott egyenletet:

$$(4.4) \qquad [I - M\langle k \rangle] z(t) = M\langle -h \rangle x(t)$$

(4.4)-ból látható, hogy a $z(t)$ előrebecslési vektor (ami megvalósítja önmagát) az $x(t)$ állapot vektortól függ—burkolt formában. A többismeretlenes lineáris egyenletrendszerek elméletéből ismert, hogy (4.4)-nak akkor és csak akkor van adott $x(t)$-re $z(t)$ megoldása, ha az $M\langle h \rangle x(t)$ vektor az $I - M\langle k \rangle$ mátrix képterében fekszik.

Azonban az $x(0)$ kezdeti állapot vektor tetszőleges — esetleg az $x_0(0)$ Neumann-kezdő állapot valamilyen környezetében fekvő-vektor, amelyre a tökéletes előrelátás $z(0)$ vektora akkor és csak akkor létezik, ha az $M\langle h\rangle$ mátrix képtere az $I - M\langle k\rangle$ mátrix képterében fekszik.

Kezdjük a vizsgálatot a legegyszerűbb esettel, a kritikus reakcióval: (3.42). Ekkor (3.31) szerint $\langle k\rangle = I + (\lambda_0 - 1)\langle c\rangle$, következésképpen

(4.5) $$I - M\langle k\rangle = I - M[I + (\lambda_0 - 1)\langle c\rangle].$$

(3.14) értelmében $I - M\langle k\rangle$ *elfajult* mátrix. Szerencsére $\langle h\rangle = 0$ folytán (4.4) a

(4.6) $$z(t) = M[I + (\lambda_0 - 1)\langle c\rangle]z(t)$$

fixpontfeladatra egyszerűsödik (v.ö. (4.5)), amelynek egyedül a Neumann-arányok tesznek eleget. Bár $z(t)$ *szintje* matematikailag határozatlan, közgazdaságilag kézen fekvő $z(t)$ szintjét az előző $z(t-1)$ szintjének λ_0-szorosaként meghatározni. Ekkor több is igaz:

(4.7) $z(t) = \lambda_0 z(t-1)$, $z(0)$ tetszőleges szintű megoldása (4.6)-nek.

Mivel a várakozások struktúrája időben változatlan, *statikus* várakozásnak is felfogható esetünk, amelynél a gazdaság az I. Tétel értelmében a Neumann-pályához konvergál, vagyis stabil.

A továbbiakban nemcsak a most tárgyalt kritikus reakciótól tekintünk el, hanem minden olyan reakció-együttható vektortól, amelynek valamelyik összetevője kritikus. (A figyelmen kívül hagyott esetek hasonlóan tárgyalhatók mint a tárgyalandó esetek). Ezért a $\langle h\rangle$ mátrix reguláris, vagyis $M\langle h\rangle$ képtere az egész tér. Előző megállapításunk szerint tehát ugyanezt kell megkövetelni az $I - M\langle k\rangle$ mátrixtól is, vagyis, az $M\langle k\rangle$ mátrixnak nem lehet fixpontja.

Ez a feltétel általánosan (azaz az M ill. $\langle c\rangle$ mátrixra vonatkozó megszorítások nélkül) csak *gyenge* reakciókra áll. Ugyanakkor ez a feltétel a stabilitást is biztosítja.

Gyenge reakció stabilizál

Tegyük fel, hogy (3.38) teljesül. Ekkor (3.31), (3.14) és a spektrál-sugárra vonatkozó Frobenius-tétel szerint

(4.8) $$\varrho[M\langle k\rangle] < 1.$$

Mivel $M\langle k\rangle > 0$, (4.8) értelmében

(4.9) $$[I - M\langle k\rangle]^{-1} > 0,$$

tehát (4.4) nemcsak hogy minden c norma-vektornál egyértelműen megoldható, hanem pozitív állapothoz pozitív előrebecslést rendel. Sőt, (3.33) és (3.37) értelmében minden pozitív állapothoz pozitív döntést rendel.

Helyettesítsük be (3.21)-et (3.36)-ba: a

(4.10) $$x(t+1) = Px(t)$$

jelöléssel élve a

(4.11) $$P = I + \{I + (\langle k\rangle - I)[I - M\langle k\rangle]^{-1}M\langle -h\rangle\}$$

összefüggést kapjuk. (3.31) szerint $k > 1$, (3.37) és (4.9) szerint $P > 0$, tehát minden pozitív állapot pozitív állapotba megy át.

Ha a működőképesség mellékfeltételeitől eltekintünk, akkor minden pozitív kezdőállapot *működőképes.*

Mivel a Neumann-pálya kielégíti a (4.10—11) egyenletrendszert, a P mátrixnak a λ_0 sajátértéke, az x_0 pedig sajátvektora. Ismét Perron tétele szerint a P mátrix többi sajátértéke abszolút értékben kisebb mint λ_0. Ezzel a tökéletes előrelátáson alapuló szabályozás stabilitását igazoltuk gyenge reakciók esetén.

A két-szereplős gazdaság

Nem tudjuk, hogy mi a helyzet, ha elejtjük a (3.38) feltevést. Bár az $N = 2$ eset bizonyos szempontból speciális, mégis alkalmas arra, hogy részleges választ adjunk a jelzett kérdésre.

Vegyük észre, hogy $N = 2$ esetén $M\langle k\rangle$ spektrál sugara (3.7) miatt egyszerűen fölírható:

$$\varrho[M\langle k\rangle] = m_{12}m_{21}k_1k_2. \tag{4.12}$$

Figyelembe véve (3.31)-et és (4.12)-t a $\varrho[M\langle k\rangle] = 1$ feltétel a

$$m_{12}m_{21}(1 + \lambda_0 d_1 c_1)(1 + \lambda_0 d_2 c_2) = 1 \tag{4.13}$$

összefüggésre egyszerűsödik. Könnyen belátható, hogy adott c_1, c_2 normákra (4.13) a (d_1, d_2) síkban egy olyan hiperbolaívet határoz meg, amely átmegy a kritikus reakció-együttható párt képviselő ponton és a vegyes reakció-együttható párok tartományában halad. Ha a normákat tetszőlegesen változtatjuk, a (4.13) hiberbola-ívek az egész ,,vegyes-tartományt'' kitöltik.

Nem meglepő, hogy adott (c_1, c_2) normapárhoz tartozó hiperbola-ív környezetében a rendszer *gyengén meghatározott,* tehát a gazdaság (Ljapunov)-*instabil,* vagyis működésképtelen.

Erős reakciónál nemcsak az igaz, hogy a tökéletes előrelátás értelmezhető, hanem az is, hogy stabilitást biztosít. Ugyanis felírva $[I - M\langle k\rangle]^{-1}$ explicit alakját

$$[I-M\langle k\rangle]^{-1} = \frac{1}{1 - m_{12}m_{21}k_1k_2}\begin{bmatrix} 1 & m_{12}k_2 \\ m_{21}k_1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

látható, hogy

$$[I - M\langle k\rangle]^{-1} < 0. \tag{4.15}$$

Figyelembe véve (3.39)-et és (4.11)-t, $P > 0$, vagyis a gazdaság ugyanúgy stabil, mint a gyenge reakciónál.

Mindjárt belátjuk, hogy a gyenge és az erős reakció hasonlósága $N \geq 4$-re már nem érvényes; $N = 3$ esetén pedig nem ismerjük, hogy mi a helyzet. Lényegében arról van szó, hogy $N < 4$-re nem lehet M-nek két pozitív sajátértéke, mivel M sajátértékeinek összege nulla és $\varrho(M)$ domináns sajátérték.

Egyöntetű normák és reakciók

Lovellt követve (i.m. 285. o.) bevezetjük a *normák és a reakció-együtthatók egyöntetűségének* feltevését:

$$c = \gamma \mathbf{1} \tag{4.16}$$

és

(4.17) $$d = \delta 1.$$

Ez a feltevéspár életidegen; de megkönnyíti a vizsgálatot. Ugyanis (4.11)-be behelyettesítve (4.16—17)-et, a P mátrix az M racionális törtfüggvényévé válik. Ismeretes, hogy az előbbinek a sajátértékei (a λ-k) ugyanilyen függvényei az utóbbi mátrix sajátértékeinek: (a μ-knek)

(4.18) $$k = \varkappa 1$$

ill.

(4.19) $$\varkappa = 1 + \lambda_0 \gamma \delta$$

és

(4.20) $$h = \chi 1$$

ill.

(4.21) $$\chi = -\lambda_0 + 1 + \lambda_0 \delta$$

jelölésekkel (v.ö. (3.31—32))

(4.22) $$\lambda = 1 - \{1 - (\varkappa - 1)(1 - \mu\varkappa)^{-1}\mu\}\chi,$$

ahol μ az M mátrix tetszőleges sajátértéke. (4.18—21) behelyettesítésével (4.22) a következő alakra hozható:

(4.23) $$\lambda = \lambda_0 \frac{1 - \delta - \mu[1 + (\gamma - 1)\delta]}{1 - \mu[1 + \lambda_0 \gamma \delta]},$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

(4.24) $$\sigma = \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

és

(4.25) $$\alpha = 1 - \delta$$

és

(4.26) $$\beta = 1 + (\gamma - 1)\delta.$$

Ekkor (4.23—26) értelmében

(4.27) $$\sigma = \frac{\alpha - \mu\beta}{1 - \mu\varkappa};$$

A stabilitás szükséges és elégséges feltétele:

(4.28) $$|\sigma| < 1, \quad \mu \neq \mu_0, \; |\mu| \leq \mu_0.$$

Mivel nem törekszünk teljességre, föltehetjük, hogy az *M mátrix összes sajátértéke valós*! (Például az M mátrix szimmetrikus). Ekkor föltehetjük, hogy a sajátértékeket nem-növekvő sorrendben számoztuk meg: ($\mu_0 = \varrho(M)$ egyszeres sajátérték!)

(4.29) $$\mu_0 > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_{N-1} (\geq -\mu_0).$$

(4.23) — és vele együtt a tökéletes előrelátás — akkor és csak akkor értelmezhetetlen, ha

$$1 = \mu_\nu(1 + \lambda_0\gamma\delta) \quad \text{legalább egy } \nu\text{-re;} \tag{4.30}$$

$\nu = 0$ esetén (4.30)-ban $<$ áll; negatív μ_ν-re (ilyen pedig biztos van) ellenkezőleg, $>$ áll. (4.30) kizárását tehát a $0 < \delta \leq 1$ reakció-sebesség tartományában (v.ö. (3.14))

$$1 > \mu_1(1 + \lambda_0\gamma\delta) = \mu_1(2 - \mu_0 + \gamma) \tag{4.31}$$

feltétellel biztosíthatjuk. Ha μ_1 pozitív, akkor (4.31) a

$$\gamma_0 = \frac{1}{\mu_1} + \mu_0 - 2 > 0$$

*kritikus normá*nál kisebb normákra teljesül, egyébként nem.

Ha $\varrho(M)$-en kívül az M mátrix többi sajátértéke negatív: vagy nulla:

$$\mu_1 \leq 0, \tag{4.32}$$

akkor (4.31) minden normára teljesül. A (4.32) feltétel teljesülése jó példa a *teljesen szimmetrikus* rendszer:

$$m_{\nu'\nu} = \omega > 0 \quad 1 \leq \nu' \neq \nu \leq N. \tag{4.33}$$

A (4.33)-ban definiált mátrix saját értékei

$$\mu_0 = (N-1)\omega \quad \text{és} \quad \mu_1 = \ldots = \mu_{N-1} = -\omega. \tag{4.34}$$

Mellesleg a ,,saját hatás az uralkodó'' feltevése (3.10)] folytán

$$(0 <)\, \omega < \frac{1}{N-1}. \tag{4.35}$$

Összefoglalva a (ii) pontban mondottakat:

II. Tétel: A tökéletes előrelátás a normától függetlenül általánosan csak gyenge reakcióknál értelmezhető. Ekkor a gazdaság globálisan stabil és (globálisan) működőképes (ha eltekintünk a működőképesség mellék-feltételeitől). Vegyes vagy erős reakcióknál a tökéletes erőrelátás általánosan nem értelmezhető, és amikor értelmezhető, általában instabilitást okoz. Speciális esetben azonban az erős reakció is stabilizál.

Megjegyzés: A II. Tétel szövevényessége miatt nehéz megmondani, hogy Lovell megfelelő V. Tétele mennyiben van összhangban vele. Ha az általános (borúlátó) részt tekintjük, és figyelembe vesszük még, hogy Lovell modelljében nincs növekedés, akkor Lovellel összhangban elérkezünk a tökéletes előrelátás teljes instabilitásához. Azonban már itt is különbséget jelent, hogy Lovellnél a tökéletes előrelátás mindig értelmezve van és instabilitása szükségszerű; nálam viszont a tökéletes előrelátás általában nincs értelmezve, és ez okozza az instabilitás lehetőségét.

Szélesedik a két eredmény-csoport között az eltérés, ha figyelembe vesszük, hogy Lovell tétele növekedés esetén is érvényes; hiszen a megjelenő gyenge reakció nálam stabilitást nyújt, nála instabilitást, legalább is (4.16—17) mellett.

Kiáltóvá válik az ellentét a teljesen szimmetrikus rendszer egyöntetű szabályozása esetén, amikor Lovell teljes instabilitásával teljes stabilitást szögezek szembe.

(iii) *Naiv várakozás*

Már a Bevezetésben is említettük, hogy az eddig tárgyalt két várakozási típus (a statikus és a tökéletes) csupán elméleti szélsőség. Sokkal gyakorlatiasabbnak tűnik a naiv várakozás vizsgálata, amikor a döntéshozók legújabb tapasztalatuk alapján becsülik előre a következő idegen hatásokat.

A tárgyalás sorrendje azonos a tökéletes előrelátáséval. Először a kritikus reakciót vizsgáljuk.

A (ii) pont (4.6) képletéhez hasonlóan; (3.32—34)-be behelyettesítve (3.21)-et és (3.42)-t a

$$z(t+1) = \lambda_0 M[I + (\lambda_0 - 1)\langle c\rangle]z(t), \; [z(0) \text{ tetszőleges}], \tag{4.36}$$

képletet kapjuk. (3.14) értelmében $z(t)/\lambda_0^t$ akkor és csak akkor konvergál a Neumann-arányokhoz, ha az M mátrix *aciklikus*, vagyis *nem* írható (sorok és oszlopok egyidejű fölcserélésével) a következő alakba:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & M_1 & & \dots & 0 \\ & & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & M_{q-1} \\ M_q & 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (q > 1), \tag{4.37}$$

ahol M_1 oszlop-száma megegyezik M_2 sor-számával, M_2 oszlop-száma M_3 sor-számával. . . . és M_q oszlop-száma M_1 sor-számával.

Mindenesetre a készlet-modell M mátrixa (2.1—2) értelmében ciklikus; eleve (4.37) alakban van fölírva: $q = 2$, M_1 $n \times |\bar{J}|$-os, M_2 pedig $|\bar{J}| \times n$-es mátrix, ahol $\bar{J}$ azon (i, j) indexpárok halmaza, amelyekre a j-edik szektor vásárol az i-ediktől: $a_{ij} > 0$; $|\bar{J}|$ pedig a $\bar{J}$ halmaz *elemszámát* jelöli.

A ciklikus mátrix esete hasonlít a statikus várakozáséhoz: a szabályozás instabil, de Ljapunov-értelemben stabil, tehát működőképes.

Jó hasznát vesszük a tökéletes várakozásnál megtanult összefüggéseknek, ha az *alapmegoldásokra* szorítkozunk:

$$x(t) = x\lambda^t \quad \text{és} \quad z(t) = z\lambda^t. \tag{4.38}$$

Ekkor (3.21) és (3.22) között az egyetlen különbség az, hogy az egyikben λ_0 a szorzó, a másikban pedig λ. Ezért (3.36)-ban k helyére $k\lambda_0$) kerül és (4.11) megfelelője

$$P_\lambda = I + \left\{ I + \left[\frac{\lambda_0}{\lambda}\langle k\rangle - I\right]\left[I - M\frac{\lambda_0}{\lambda}\langle k\rangle\right]^{-1} M \right\}\langle -h\rangle, \tag{4.39}$$

ahol P_λ indexe a λ sajátértéktől való függésre utal.

A gyenge reakció ismét stabilizál

Másodszor szintén a (3.38) feltevéshez folyamodunk: bebizonyítjuk, hogy ekkor a $P_\lambda x = \lambda x$ sajátértékfeladat domináns megoldása a Neumann-féle növekedési együttható: λ_0. Képletben:

$$\varrho(P_\lambda) < |\lambda|, \quad \text{ha} \quad \lambda \geq \lambda_0 \quad \text{és} \quad \lambda \neq \lambda_0. \tag{4.40}$$

Csoportosítsuk át (4.39) tagjait a következőképp:

$$P_\lambda = [I - \langle h\rangle] + \left[\frac{\lambda_0}{\lambda}\langle k\rangle - I\right]\left[I - M\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\langle k\rangle\right)\right]^{-1} M\langle -h\rangle. \tag{4.41}$$

Az első tag (3.39) szerint pozitív diagonális mátrix, a második tag első tényezőjeként szereplő diagonális mátrix ν-edik elemének abszolút értékére pedig az

$$\left|\frac{\lambda_0}{\lambda}k_\nu - 1\right| < k_\nu - 1, \quad \text{ha} \quad |\lambda| \geq \lambda_0 \quad \text{és} \quad \lambda \neq \lambda_0 \tag{4.42}$$

egyenlőtlenség teljesül. A második tényező $|\lambda| \geq \lambda_0$ és (4.8) értelmében invertálható és hatványsorba fejthető:

$$\left[I - M\frac{\lambda_0}{\lambda}\langle k\rangle\right]^{-1} = \sum_{t=0}^{\infty}\left[M\frac{\lambda_0}{\lambda}\langle k\rangle\right]^t. \tag{4.43}$$

Ismét $|\lambda| \geq \lambda_0$ folytán (4.43) bármely elemének abszolút értéke nem lehet nagyobb mint a

$$\sum_{t=0}^{\infty}[M\langle k\rangle]^t = [I - M\langle k\rangle]^{-1} \tag{4.44}$$

mátrix megfelelő eleme. (4.41) — (4.42) figyelembe vételével ugyanez igaz P_λ-ra és P_{λ_0}-ra is.

Jól ismert elemi segédtétel szerint ekkor

$$\varrho(P_\lambda) < \varrho(P_{\lambda_0}) \quad \text{ha} \quad |\lambda| \neq \lambda_0, \quad \text{és} \quad \lambda \neq \lambda_0, \tag{4.45}$$

ahonnan $\varrho(P_{\lambda_0}) = \lambda_0$ értelmében (4.40) következik.

A tökéletes előrelátással szemben a naiv várakozás mindig értelmezhető, legfeljebb működőképtelen gazdaságot ír le a negatív elemet tartalmazó döntési- vagy állapotvektor.

Erős reakciónál a készletszabályozás Ljapunov-instabil

A kritikus reakció csak Ljapunov-stabilitást biztosít ciklikus rendszereknél. Nem meglepő, hogy az erős reakcióknál a ciklikus rendszerek (legalábbis a párosak) Ljapunov-instabilak, tehát működésképtelenek.

(3.22)-t és (4.38)-ot behelyettesítve (3.36)-ba, némi rendezéssel:

$$x = [(\lambda - 1)I + \langle h\rangle]^{-1}\left[\frac{\lambda_0\langle k\rangle}{\lambda} - I\right]z.$$

(Megjegyezzük, hogy képletünk nincs értelmezve a $\lambda_\nu = 1 - h_\nu (\nu = 1, \ldots, N)$ 0 és 1 közötti számokra, azonban instabilitásnál ez nem érdekes!)

Képletünket visszahelyettesítve (3.34)-be – ismét felhasználva (3.32)-t és (4.38)-ot

$$(4.46)\qquad z = M\langle k\rangle \frac{\lambda_0}{\lambda} z - M\langle h\rangle[(\lambda-1)I + \langle h\rangle]^{-1}\left[\langle k\rangle \frac{\lambda_0}{\lambda} - I\right] z$$

fixpont-feladathoz jutunk. Bevezetve a

$$(4.47)\qquad \langle\psi(\lambda)\rangle = \langle k\rangle \frac{\lambda_0}{\lambda} - \langle h\rangle[(\lambda-1)I + \langle h\rangle]^{-1}\left[\langle k\rangle \frac{\lambda_0}{\lambda} - I\right]$$

jelölést, (4.46) tömörebben is fölírható:

$$(4.48)\qquad z = M\langle\psi(\lambda)\rangle z.$$

A Neumann-pálya (4.48)-at is kielégíti és (3.14)-gyel összhangban

$$(4.49)\qquad \langle\psi(\lambda_0)\rangle = I + (\lambda_0 - 1)\langle c\rangle.$$

(4.47) alapján – (3.31–32) felhasználásával

$$(4.50)\qquad \langle\psi(-\lambda_0)\rangle = -\langle k\rangle + \langle h\rangle[-2\lambda_0 I + \lambda_0\langle d\rangle]^{-1}[\langle k\rangle + I].$$

(4.3–4); (4.49), (4.50) és $k \geq I + (\lambda_0 - 1)\langle c\rangle$ (mert $d \geq d_0$) folytán

$$(4.51)\qquad -\langle\psi(-\lambda_0)\rangle > \langle\psi(\lambda_0)\rangle.$$

(4.51) és az említett lemma értelmében

$$(4.52)\qquad \varrho\{-M\langle\psi(-\lambda_0)\rangle\} > \varrho\{M\langle\psi(\lambda_0)\rangle\}.$$

Mivel föltevésünk szerint M mátrix *párosan ciklikus*, s ezt a tuajdonságot egy reguláris diagonális mátrixszal való beszorzás változatlanul hagyja (v.ö. (4.37)), a $-M\langle\psi(-\lambda_0)\rangle$-nak spektrálsugara mellett a spektrálsugár ellentettje is sajátértéke. (Varga [15] Theorem 2.3) Mivel (4.52) jobboldalán álló mennyiség (3.14) értelmében 1-gyel egyenlő, az előbbi sajátérték – 1-nél kisebb.

Másrészt $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} M\langle\psi(\lambda)\rangle = 0$, tehát van olyan $\lambda\in(-\infty, -\lambda_0)$, melyre $-M\langle\psi(\lambda)\rangle$ spektrálsugara 1, vagyis a szóban forgó mátrixnak van fixpontja a λ_0 sugarú körön kívüli λ paraméterre is, tehát a rendszer Ljapunov-instabil.

Egyelőre vizsgálatlan, hogy mi a helyzet *páratlan ciklusú M* mátrixok esetén, de minden bizonnyal hasonló eredményt kapunk: instabilitást.

Példa: Erős reakciók stabilizálják a szabályozást

A tökéletes előrelátásnál tapasztaltuk, hogy speciális feltételek esetén az „általánossal" ellentétes eredményeket kaphatunk.

A *ciklikus* rendszerek a kritikus reakciónál még stabilak, tehát folytonossági megfontolások szerint bizonyos erős reakciókra is fönnáll a stabilitás. Fölvetődik azonban a kérdés: Van-e olyan rendszer, amely minden (0 és 1 közti) reakció-együtthatónál stabil? A válasz: igen.

Akárcsak a tökéletes előrelátásnál, most is az *egyöntetű normákra és reakciósebességekre*-szorítkozunk. (4.16–17) esetén a $\langle\psi(\lambda)\rangle$ diagonális mátrix összes átlós eleme azonossá válik. A továbbiakban ezt a közös értéket jelöljük $\psi(\lambda)$-

val és a $\langle\,\rangle$ elhagyásával ezúttal nem vektort, hanem skalárt jelölünk. Ezért (4.47) (4.18–21) segítségével a következő alakra hozható:

$$\psi(\lambda) = \frac{(\varkappa\lambda_0 + 1)\lambda - \varkappa\lambda_0}{(\lambda - 1 + \chi)\lambda}, \tag{4.53}$$

A stabilitás szükséges és elégséges feltétele

$$\psi(\lambda)\mu \neq 1 \quad \text{ha} \quad |\lambda| \geq \lambda_0 \quad \text{és} \quad \lambda \neq \lambda_0, \; (|\mu| \leq \mu_0). \tag{4.54}$$

Nem akarunk belemerülni a részletekbe! Elegendő meghatározni $\max\limits_{\lambda \geq \lambda_0} \psi(\lambda)$-t és $\min\limits_{\lambda \leq -\lambda_0} \psi(\lambda)$-t, hogy reciprokukat véve pozitív felső ill. negatív alsó határt kapjunk az M mátrix ,,maradék'' sajátértékeire — ismét föltéve, hogy valósak. Némi számolással belátható, hogy mind a maximum, mind a minimum fölvétetik (az utóbbi mindig — λ_0-nál!) Sőt végigfuttatva a δ reakció-együtthatót az erős reakciók $(\delta_0, 1)$ intervallumán, a fenti szélsőértékek szélsőértékét véve — reakció-együtthatótól független — de a normáktól függő — korlátokat kapunk a ,,maradék'' sajátértékre. Sejtésünk szerint a szélsőértékek szélsőértéke mindkét esetben a teljes reakciónál valósul meg.

Teljesen szimmetrikus rendszerekre szorítkozva a ,,maradék'' sajátértékek negatívak, amelyek λ_0 rögzítése mellett a döntéshozók számának növelésével tetszőlegesen kicsiny abszolút-értékűvé tehetők (v.ö. (4.34)) — tehát (4.54) stabilitási feltétel kielégíthető.

A (iii) rész összefoglalásaként kimondjuk az alábbi tételt:

III. Tétel: A naiv várakozásnál a szabályozás stabil, ha a reakció gyenge. Ha a rendszer ciklikus, pl. a készletjelzéses rendszer, akkor a kritikus reakciónál a szabályozás instabillá válik (bár Ljapunov értelemben stabil marad); ha párosan ciklikus (pl. a készletjelzéses rendszer); akkor erős reakciónál (Ljapunov-értelemben is) instabil. Vegyes reakciónál a rendszer lehet stabil is, instabil is.

Aciklikus rendszerek esetén is általában a szabályozás előbb-utóbb instabillá válik, azonban speciális esetben még a teljes reakció is stabilitást biztosít.

Megjegyzés: A III. Tétel nagyjából összhangban van Lovell megfelelő I–IV. Tételeivel: naiv várakozás esetén az óvatosság biztosítja a stabilitást. Mindkét eredményben közös, hogy képtelen a ,,vegyes'' reakciókat kezelni.

Elméletileg fontos eltérést jelent, hogy Lovellnél a készletszabályozás teljes reakciónál is stabil, feltéve, hogy a rendszer *gyengén összefüggő;* ami $\varrho(M) = \sqrt{\varrho(A)}$-ra nézve jelent egy bizonyos felső korlátot: Lovell I. Tétele szerint $\varrho(A) < 1/(3 + 2 \max p_i)$-t. Viszont dolgozatom III. Tétele szerint a készletszabályozás teljes reakciónál feltétlenül instabil.

Gyakorlatilag azonban az eltérés nem túl jelentős. Egyrészt Lovell is kiemeli, hogy tényadatok szerint $\varrho(A) > 1/2$. Másrészt, ha zárt modellre térünk át, akkor $\varrho(A)$ méginkább felülmúlja a teljes reakció stabilitását biztosító 1/3 felső határt. Érdekes, hogy Lovell IV. Tétele — zárt modell tényadataira szintén 0,05 körüli kritikus reakciót szolgáltat $\varrho(A) = 0{,}85$ és $\lambda_0 = 1{,}05$ esetén.

5. Összefoglalás

A dolgozat végére érve nemcsak tételenként, hanem összességében is összehasonlíthatjuk a fenti eredményeket Lovell eredményeivel. Lovell szerint mennél pontatlanabb az előrelátás, annál jobb a szabályozás: a legjobb a statikus („vak"), a legrosszabb a tökéletes, végül közbülső a naiv („tanuló"). Ez a sorrend nyilvánvalóan ellentétes a józan ész sugallta sorrenddel: mennél pontosabb az előrelátás, annál jobb a szabályozás: a legjobb a tökéletes előrelátás, a legrosszabb a statikus, és középen helyezkedik el a naiv.

E dolgozat szerint a helyzet bonyolultabb. A józan ésszel összhangban a statikus várakozás nem *célravezető*, ugyanakkor Lovellel összhangban nem is vezet el teljesen a céltól; feltéve, hogy a döntéshozók *merészek* (vagyis némileg komolyan veszik „komolytalan" előrebecslésüket).

Figyelemreméltó, hogy mind a tökéletes előrelátás, mind a naiv várakozás általában véve akkor és csak akkor *célravezető*, ha a döntéshozók *óvatosak* vagyis alig veszik komolyan „komoly" előrebecslésüket). Tehát a mindentudás és a tanulás lehet előnyösebb mint a tudatlanság (cáfolva Lovellt) és lehet hátrányosabb (igazolva Lovellt). Ugyanakkor a tanulás nem előnyösebb, de nem is hátrányosabb mint a mindentudás (egyaránt cáfolva Lovellt és a józan észt).

(Beérkezett: 1978. máj. 27-én)

IRODALOM

1. AKAR, L.: *Késleltetéseken alapuló gazdaságszabályozási modellek,* szakdolgozat 1977
2. DANCS, I.—HUNYADI, L.—SIVÁK, J.: *Készletjelzésen alapuló szabályozás Leontief-típusú gazdaságban.* Szigma 1973, *6*, 185—208.
3. GALE, D.: *The theory of linear economic models,* New York, 1960. Mc Graw Hill
4. KORNAI, J.—MARTOS, B.: *Gazdasági rendszerek vegetatív működése,* Szigma 1971, *4*, 34—50.
5. KORNAI, J.—MARTOS, B.: *Autonomous functioning of the economic system.* Econometrica, 1973, *41*, 509—528.
6. KORNAI, J.—SIMONOVITS, A.: *Szabályozási problémák Neumann-gazdaságokban,* Szigma 1975, *8*, 81—99.
7. KORNAI, J.—SIMONOVITS, A.: *Rendelés-jelzésen alapuló szabályozás egy Neumann-gazdaságban,* Szigma, 1975, *8*, 281—289.
8. KORNAI, J.—SIMONOVITS, A.: *Decentralized control problems in Neumann-economies.* Journal of Economic Theory, 1977, *14*, 44—67.
9. LOVELL, M. C.: *Manufacturers' inventories, sales expectations and the acceleration principle. Econometrica,* 1961, *29*.
10. LOVELL, M. C.: *Buffer stocks, sales expectations, and stability: A multi-sector analysis of the inventory cycle. Econometrica,* 1962, *30*, 267—296.
11. MC FADDEN, D.: *On the controllability of decentralized macroeconomic systems: the assignment problem* a Mathematical Systems Theory and Economics *I* c. kötetben (szerk.: H. W. Kuhn és G. Szegő) 221—234. Berlin—Heidelberg—New York, 1969, Springer Verlag
12. METZLER, L. A.: *The nature and stability of the inventory cycles.* Review of Economic Studies 23, 1941, 113—129.
13. METZLER, L. A.: *Stability of multiple markets: the Hicks conditions,* Econometrica, 1945, *13*, 113—129.
14. SIMONOVITS, A.: *Decentralizált rendszerek destabilizálása,* kézirat, Budapest, 1978, KTI
15. VARGA, R. S.: *Matrix iterative analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Yersey, 1962.

NORMS, EXPECTATIONS AND STABILITY IN A LINEAR ECONOMY

Lovell (1962) examined in a multisectoral stock-control model three kinds of sales expectations: (i) *static*, (ii) *perfect* and (iii) *naive* expectations (the latter being equal to actual sales of the previous period).

Lovell's conclusions are summarized in the following:

1. In case of *static expectations* the control is *stable*.

2. In case of *perfect foresight* the control is *unstable*.

3. In case of *naive expectation* the control may be either stable or unstable, but it is always unstable with a ,,weak'' reaction.

I am going to show in my paper that Lovell's paradoxical statements — 1. and 2. — are based on a paradoxical assumption. With an adequate modification of this assumption the following results are obtained:

1′. In case of *static expectation* the control is *unstable;* but with a ,,strong'' reaction it is *Ljapunov-stable*.

2′. *Perfect foresight* can be interpreted usually only in the case of ,,weak'' reactions, then the control is stable.

3′. In case of *naive expectations* the control is *stable* only with a ,,weak'' reaction.

НОРМЫ, ОЖИДАНИЕ И СТАБИЛЬНОСТЬ В ЛИНЕЙНОЙ ЭКОНОМИКЕ

В рамках многосекторной модели регулирования запасов Ловелл (1962 г.) изучал три вида ожиданий при продаже: (i) *статическое*, (ii) *идеальное предвидение* и (iii) *наивное* (оно рaьно реализации предшествующего периода).

Выводы Ловелла могут быть сформулированы следующим образом:

1) В случае *статического ожидания* регулирование является *стабильным.*

2) В случае *идеального предвидения* регулирование является *нестабильным.*

3) В случае *наивного ожидания* регулирование может быть стабильным или же нестабильным, однако при «слабой» реакции оно всегда стабильное.

В данной работе указывается, что положения парадокса Лавелла — 1 и 2;— базируются на одной парадоксальной предпосылке. Если соответствующим образом изменим эту предпосылку, то можно получить следующие результаты:

1′) При *статическом ожидании* регулирование *нестабильное;* в случае «сильной» реакции однако — по Ляпунову — стабильное.

2′) *Оптимальное предвидение* чаще всего может *толковаться* лишь при «слабой» реакции и тогда регулирование стабильное.

3′) *При наивном ожидании* регулирование *стабильно* только в случае «слабой» реакции.

Fényes Tamás—Sári József

Gazdasági folyamatok idősorainak elemzése és előrebecslése

Az idősorok elemzésére számos módszer ismeretes a statisztika ill. a matematikai statisztika területén. Ezek közé tartoznak többek között a bázis- és láncviszonyszámok, a különböző típusú trendek, a szezonindexek, a regressziós függvények, az inter- és extrapoláció. A jelenleg alkalmazott eljárások közül kiemelkedő helyet foglal el Box-Jenkins [1] előrebecslési módszere, akik valamely sztochasztikus folyamatot egy autoregresszív és egy mozgóátlagos trend értékeinek összegeként értelmeznek. A jelen cikk keretében az idősorok elemzésének és előrebecslésének egy általunk kialakított sajátos módszerét ismertetjük, ami bizonyos mértékig rokon az [1] szerzőinek elgondolásával. Az itt ismertetésre kerülő eljárás azonban lényegében a szerzők „Periodikusan változó közgazdasági folyamatok" című cikkében megadott feltételekből indul ki [2], amit ezúttal továbbfejlesztettünk és általánosabb megoldást adunk a közgazdaságilag megfogalmazott problémára.

1. A feladat közgazdasági megfogalmazása

A gazdasági folyamatok időben lejátszódó eseménysorozatok eredményei, amelyek számszerűen forgalmi adatok formájában jelennek meg, s a közgazdasági kategóriákat mennyiségileg jellemzik a statisztikai számbavétel osztályozási rendszere szerint. A folyamatok mennyiségben vagy értékben kifejezett nagysága időszakról-időszakra változik, de alapjában véve valamilyen irányba halad, szezonszerűen ingadozik és a véletlenek által befolyásolt kisebb-nagyobb mértékben eltér „szabályos" pályájától. Feladatunk a tendencia fő irányvonalának meghatározása a szezonszerű eltérések és véletlenek „zavaró" hatásának feltárása és az eltérések hipotézisének vizsgálata matematikai-statisztikai módszerekkel.

A gyakorlati tapasztalatok, a közgazdasági elemző munkában rendszeresen alkalmazott számítások általában igazolják azt az egyébként is logikusnak látszó feltevést, hogy egy meghatározott periódushossz elteltével nagyjából azonos ütemű változás következik be, ill. várható. Feltételezhető tehát, hogy a vizsgált kategória egy-egy azonos időtartam alatt megközelítőleg ugyanolyan ütemben nő vagy csökken. Ezért felírható a szerzők fentebb hivatkozott cikkében közölt összefüggés:

$$\frac{F(t)}{F(t-1)} = \alpha(t)\frac{F(t-j)}{F(t-j-1)}, \tag{1}$$

ahol: F = a forgalom nagysága
t = az idő általában ($t = 0, 1, 2. \ldots\ldots$)
j = a periódus hossza, ahol a szezonszerűség ismétlődik (j = pozitív egész)
α = az ütemváltozást befolyásoló együttható ($\alpha = 1$ körül ingadozó érték).

A fenti (1) összefüggés írja le azt a közgazdasági feltételezést, hogy valamely t időszakban lejátszódó gazdasági folyamat nem csupán egy előző, a szezonalitásra jellemző periódus-hosszal van szorosabb kapcsolatban, hanem meghatározója lehet az azt megelőző vagy követő más időszakokból képzett összefüggés is. Ezért a fenti (1) egyenlőségnél általánosabbat írunk fel, és numerikus számításokat végzünk annak megállapítására, hogy a feltételezések érvényesülnek-e a valóságban. A közgazdaságilag felvetett problémát az alábbi egyenlőséggel jellemezzük:

$$F(t) = \left[F(t-1) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \frac{F(t-j)}{F(t-j-1)} \right] v(t), \tag{2}$$

ahol: n = az időeltolással képzett láncviszonyszámok száma $0 \leq \alpha_j \leq 1$, $j = 1, 2, \ldots n$
v = valószínűségi változó, a véletlen nagyságát kifejező tényező, $v(t) \cong 1$.

A tulajdonképpeni feladat az α_j értékek kiszámítása és gyakorlati alkalmazása. Közgazdaságilag elfogadhatónak látszik az a feltételezés, hogy a $(t - j)$ időszakok fejlődését kifejező láncindex-számokból képzett sorban azok határozzák meg legerősebben az $F(t)$ értékét, amelyek között viszonylag legszorosabb a kapcsolat. Statisztikai fogalmak szerint ez azt jelenti, hogy mennél kisebb a $(t - j)$ láncindex-számokból képzett különböző intervallumok között elhelyezkedő adatok szóródása, az összefüggés annál megbízhatóbban fejezi ki az egyes t időszakokra érvényes tényezők tényleges nagyságát, ill. várható értékét.

Az elmondottakból következik az a meggondolás, hogy az α_j értékek sorában ott legyen nagyobb az együttható, vagyis erőteljesebben befolyásoló a súly, ahol a viszonylag legkisebb eltérések mutatkoznak a láncindex-számok nagyságában. Ezt számszerűen oly módon határozhatjuk meg, hogy a szórás, ill. a szórásnégyzet reciprok értékeit állítjuk nagyságrendi sorrendbe. Ily módon egy nullához tartó pozitív számsort kapunk ($j \to n$; $\alpha_n \to 0$) és ha ezek értékeiből megoszlási viszonyszámot számítunk, akkor kielégítjük a fenti feltételt, vagyis az α_j együtthatók összege *1* lesz.

A gyakorlati számításokban természetesen nem szükséges a megoszlási viszonyszámok kialakításánál valamennyi időintervallum-különbözetre vonatkozó szórás reciprok értékét figyelembe venni, hanem csak azokat, amelyek érdemlegesen befolyásolják a numerikus számítások eredményeit. A tapasztalati adatokból végzett számítások szerint ugyanis nem az α_j értékek számossága, hanem az $\dfrac{F(t-j)}{F(t-j-1)}$ viszonyszámok közötti kapcsolat szorossága a meghatározó. Abban az esetben ti., ha az egyes α_j értékek rendkívül kicsik, elhanyagolható tagokat eredményeznek az egyenlőségben. Azt, hogy az elemzés vagy a becslés során mekkora pontosság indokolt, esetenként kell eldöntenie a feladatot végző szakértőnek. Általában igaz az, hogy előrebecslés esetén sokszor a rendkívüli finomságra való törekvés sem hozza meg azt az eredményjavító többletet, amely arányban állna a számítási műveletek időigényének növekedésével. Ilyen esetekben a gazdaságpolitikai dötések (szervezeti-szerkezeti- és árváltozások) valamint a véletlenek (konjunktúra, időjárás) gyakran erőteljesebben befolyásolják a folyamatok nagyságát, mint az egyes idősorokból kialakított tényezők α_j együtthatóinak zérushoz közelítő értékei.

Az idősorok komponensei additív vagy multiplikatív módon tevődnek össze. Esetünkben a sorok adatairól feltételezzük — amit a gazdasági folyamatok vizsgálatának tapasztalatai is alátámasztanak, — hogy az összetevők szorzótényezőkből állnak. Ezt fejezzük ki az (1) és a (2) egyenlőségekben is. A felírt (2) összefüggés tartalmilag jellemzi az adott idősor alapirányzatát (trend) és — az év meghatározott egyenlő hosszúságú részidőtartamairól lévén szó, — periódikus (szezonjellegű) ingadozását, valamint a véletlen szerepét. A (2) összefüggés a véletlen hatások figyelmen kívül hagyásával (ex-post értelemben) hasonlóság, amit csak a $v(t)$ tényezővel alakíthatunk át egyenlőséggé.

Az egyenlőségektől elvárjuk, fejezzék ki az idősor valamennyi összetevőjét. Ezzel kiterjesztjük elemzésünket, keresve azt a megoldást az $\frac{F(t)}{F(t-j)}$ viszonyszámok között fennálló lehetséges összes kapcsolatból, amely a legkisebb $v(t)$ véletlen komponenst adja. (Vagyis $v(t) \cong 1$.) Ezt az egyenlőséget a következőképpen fogalmazzuk meg:

$$F(t) = \left[F(t-m) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \frac{F(t-j)}{F(t-j-m)} \right] v(t), \tag{3}$$

ahol m = az idősorban szereplő tag t-től választott távolsága ($m = 1, 2, \ldots$ és $m < n$).

Az elemzett forgalmi folyamatok idősorai között fennálló szoros kapcsolat jó kiindulási pontot képezhet az előrebecslésekhez. Ebben az esetben is általában elfogadható eredményt ad a felírt (3) egyenlőség, ahol a véletlen várható értékét 1-nek tekintjük ($M[v(t)] = 1$). Más a helyzet azonban akkor, ha előreláthatólag nagyobb hatósági árváltozásra, vállalati átszervezésre vagy külföldi konjunkturális ingadozásra lehet számítani. Ebben az esetben érthetően nem jellemezhetik függvényszerűen a múltbeli folyamatok a jövő alakulását. Ezért a becslés pontosságának növelése érdekében — pl. árváltozás esetén — egy $Ip(t)$ index-szel megszorozzuk a (3) egyenlőség jobb oldalát. Valójában tehát $Ip(t)$ lép a $v(t)$ tényező helyébe. A jövő megítélésénél is lehet szerepe azonban $v(t)$-nek, ha pl. a konjunktúra ingadozását megközelítően számszerűsíteni tudjuk, ha a várható hatásokra elfogadható pontosságú, megbízható információkkal rendelkezünk. Ekkor a véletlen hibát tudatosan helyettesítjük be, s „kvázi-tényleges" eltérésnek tekintjük. A véletlen várható értéke ilyenkor nem egyenlő 1-gyel.

Az elmondottakkal — úgy véljük — kellően bemutattuk a közgazdasági folyamatok általunk felvetett elemzési lehetőségeit, egyben utaltunk arra is, hogy a jövő becslése nem egyszerűen az idősor előretolása, extrapolálása, hanem elmélyült közgazdasági munka, szakértői mérlegelés eredménye.

2. A probléma matematikai kifejtése és megoldása

Feladatunknak azt tekintjük, hogy az 1. pontban felírt és közgazdasági oldalról megfogalmazott (3) egyenletet általánosan megoldjuk. Ezt követően vizsgálat tárgyává tesszük $F(t)$ végtelenben való viselkedését, stabilitását.

a) *A feladat általános megoldása*

Tekintsük a (3) sz. egyenlőséget az alábbi $n+m$-ed rendű nemlineáris differencia-egyenletnek:

$$(3)\qquad F(t)=F(t-m)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\frac{F(t-j)}{F(t-j-m)}\qquad 0\leq\alpha_j\leq 1;\ \alpha_n\neq 0$$

$$m,\ n \text{ pozitív egészek, } t=0,1,2,\ldots .$$

Kikötjük, hogy

$$(4)\qquad \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1$$

teljesüljön. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált folyamat t-re vonatkozó láncviszonyszámát, az azt megelőző n időszak láncviszonyszámainak az adott α_j-kel való súlyozott átlagaként állítjuk elő. Az α_j együtthatók a valóságban időfüggők. E dolgozat matematikai részében azt az idealizált esetet tárgyaljuk, amikor az α_j együtthatók az időtől független állandók. Az így kapott eredmények önmagukban is érdekesek lehetnek, emellett jól közelíthetik a valóságos folyamatot, ha az α_j értékek a középértékeik körül kismértékben ingadoznak. Lásd [2]. Abban az esetben, ha (4) teljesül, a $v(t)$ véletlen tényező értéke *1*. Ezért a továbbiakban eltekintünk szerepétől.

Ha (3) mindkét oldalát $F(t-m)$-mel elosztjuk, és bevezetjük az $X(t)$ függvényt az

$$(5)\qquad X(t)=\frac{F(t)}{F(t-m)}$$

definícióval, akkor (3) helyett az alábbi állandó együtthatós, lineáris, homogén, n-ed rendű egyenletet nyerjük.

$$(6)\qquad X(t)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j X(t-j)=0.$$

Amennyiben (6)-ból az $X(t)$ függvényt meghatároztuk, úgy $F(t)$ kiszámítására, (5) alapján az

$$(7)\qquad F(t)=X(t)\ F(t-m)$$

egyenlet szolgál. Mivel nyilvánvalóan $X(t)>0$, (7) mindkét oldalának logaritmusát véve és az $Y(t)=\log F(t)$ függvényt bevezetve (7) helyett az alábbi egyszerűbb állandó együtthatós, lineáris inhomogén m-ed rendű egyenletre jutunk:

$$(8)\qquad Y(t)-Y(t-m)=\log X(t).$$

Az eredeti feladatot tehát két lineáris állandó együtthatós egyenletre vezettük vissza, amelyeket operátorszámítással fogunk megoldani. (Lásd [3].) Oldjuk meg a (6) egyenletet.

Vezessük be az $X(t)$ függvény diszkrét operátorát

$$\{X(t)\} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{X(\varkappa)}{(1+q)^{\varkappa}}, \tag{9}$$

ahol a konvergencia operátoros értelemben veendő, és triviálisan teljesül bármely $X(t)$ függvényre; q az ún. differenciaoperátor és $\frac{1}{1+q}$ az eltolási operátor. Amennyiben (6)-ot operátoros alakban írjuk fel, akkor adódik, hogy

$$X - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left[\frac{1}{(1+q)^j} X + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{X(i-j)}{(1+q)^i} \right] = 0. \tag{10}$$

Ezt X-re megoldva

$$X = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=0}^{j-1} X(i-j)(1+q)^{n-i}}{(1+q)^n - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (1+q)^{n-j}}. \tag{11}$$

Ezzel előttünk áll X operátora, mint a q differencia-operátor függvénye. A (11) természetesen tartalmazza az $X(-\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ kezdeti értékeket. Ezek azonban már meghatározottak, ha előírjuk a (3)-hoz tartozó $F(-\varrho)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, n+m)$ kezdeti értékeket, mivel

$$X(-\nu) = \frac{F(-\nu)}{F(-\nu-m)} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Ha (11)-et parciális törtekre bontjuk, könnyen felírhatjuk X-et mint a t-idő függvényét is. A (11)-hez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\xi^n - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi^{n-j} = 0. \tag{13}$$

Mivel $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, $\xi' = 1$ gyöke (13)-nak, következésképp (13) a

$$(\xi - 1)[\xi^{n-1} + (1-\alpha_1)\xi^{n-2} + (1-\alpha_1-\alpha_2)\xi^{n-3} + \ldots + \\ + (1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{n-1})] = 0 \tag{14}$$

alakban is átírható, és látjuk, hogy $\xi' = 1$ egyszeres gyök. A (14) többi különböző gyökeit ξ_k-val, multiplicitásaikat σ_k-val jelölve ($k = 1, 2, \ldots M$; $M \leq n-1$), felírhatjuk a (11) parciális törtekre bontott alakját az

$$X = \gamma \frac{(1+q)}{q+1-\xi'} + (1+q) \sum_{k=1}^{M} \sum_{p=1}^{\sigma_k} \frac{\gamma_{kp}}{(q+1-\xi_k)^p} \tag{15}$$

formában, ahol a γ, γ_{kp} együtthatók ismert elemi módszerekkel határozhatók meg. Az operátorok elméletének elemeiből ismeretes, hogy

$$\frac{1+q}{(q+1-\xi)^p} = \left\{ \xi^{t-p+1} \binom{t}{p-1} \right\}.$$

(Lásd [3].)

Ennek alapján (15)-re kapjuk, hogy

$$X(t) = \gamma \xi'^t + \sum_{k=1}^{M} \sum_{p=1}^{\sigma_k} \gamma_{kp} \xi_k^{t-p+1} \binom{t}{p-1}, \tag{16}$$

amely egyszeres gyökök esetén átmegy az alábbi formulába:

$$X(t) = \gamma \xi'^t + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \xi_k^t .$$

Látni fogjuk, hogy egy fontos speciális esetben a folyamat stabilitását a γ értéke dönti el. A (11) parciális törtekre bontásából a γ-ra az alábbi — a ξ_k karakterisztikus gyököktől független — egyszerű formulát nyerjük:

$$\gamma = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} X(-j) \left(1 - \sum\limits_{k=1}^{j-1} \alpha_k\right)}{n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} (n-j)\, \alpha_j}. \tag{17}$$

Vegyük észre, hogy $\gamma > 0$. Ezzel a (6)-ot megoldottuk. Térjünk rá (7), (8) megoldására. Felírva (8)-at

$$Y(t) - Y(t-m) = \log X(t).$$

Vezessük be az $Y(t)$ függvény diszkrét operátorát

$$\{Y(t)\} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{Y(\varkappa)}{(1+q)^{\varkappa}}. \tag{18}$$

Amennyiben (8)-at operátoros alakban írjuk fel, akkor adódik, hogy

$$Y - \frac{1}{(1+q)^m} Y - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{Y(i-m)}{(1+q)^i} = \log X, \tag{19}$$

amit Y-ra megoldva

$$Y = \frac{(1+q)^m}{(1+q)^m - 1} \log X + \frac{\sum\limits_{i=0}^{m-1} Y(i-m)(1+q)^{m-i}}{(1+q)^m - 1}. \tag{20}$$

A (20) természetesen tartalmazza az előírt $Y(-\nu) = \log F(-\nu)$; $(\nu = = 1, 2, \ldots m)$ kezdeti értékeket, így előttünk áll Y operátora, mint a q differenciaoperátor függvénye. Szeretnénk azonban az Y függvényt is, mint a t idő függvényét meghatározni. Ehhez az alábbi módon jutunk el. Vegyünk figyelembe, hogy

$$\frac{(1+q)^m}{(1+q)^m - 1} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{(1+q)^m}} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{1}{(1+q)^{\varkappa m}} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \delta_{m\varkappa}(t) \tag{21}$$

érvényes az operátoros konvergencia értelmében, ahol $\delta_{m\varkappa}$ a jól ismert Kronecker szimbólumot jelöli. Így a (21) függvényre bevezetve az $\{f_m(t)\}$ jelölést, annak komponenseire fennáll, hogy

$$f_m(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t = \varkappa m, \quad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \tag{22}$$

Figyelembe véve (20)-at, (21)-et és (22)-t, az $\frac{1}{(1+q)^i}$ operátor eltolási tulajdonságát, továbbá azt, hogy az operátortestben a függvények szorzását az ún. Cauchy-szorzás jelenti (amelyet $*$-gal jelölünk), kapjuk, hogy

$$Y(t) = \log X(t) * f_m(t) + \sum_{i=0}^{m-1} Y(i-m) f_m(t-i), \tag{23}$$

ahol

$$f_m(t-i) = 0, \quad \text{ha } t < i. \tag{24}$$

Ezzel meghatároztuk az $Y(t)$ függvényt, amellyel most már a végső megoldást jelentő $F(t)$ függvény is adódik közvetlenül. Mivel $Y(t) = \log F(t)$, tehát

$$F(t) = \exp\left[\log X(t) * f_m(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \log F(i-m) f_m(t-i)\right]. \tag{25}$$

Ily módon a (3)-at megoldottuk.

Most egyszerűbb alakra hozzuk a (25) formulát a benne szereplő „exp" és „log" jelek eltüntetésével. (25)-ben a t időt felírjuk az alábbi módon

$$t = [t]\, m + T; \quad 0 \le T < m; \quad [t] = 0, 1, 2, \ldots .$$

Így kapjuk, hogy

$$\log X(t) * f_m(t) = \sum_{k=0}^{t} \log X(t-k) f_m(k) = \sum_{k} \log X(t-k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{[t]} \log X(t-mj) = \sum_{j=0}^{[t]} \log X\left[([t]-j)m + T\right] = \sum_{i=0}^{[t]} \log X(mi+T)$$

$$k = 0, m, 2m, \ldots, [t]\, m.$$

Ebből lesz, hogy

$$\exp[\log X(t) * f_m(t)] = \exp\left[\sum_{i=0}^{[t]} \log X(mi+T)\right] = \prod_{i=0}^{[t]} X(mi+T). \tag{26}$$

Másrészt pedig

$$\begin{aligned} \exp\left[\sum_{i=0}^{m-1} \log F(i-m) f_m(t-i)\right] &= \prod_{i=0}^{m-1} \exp\left[\log F(i-m) f_m(t-i)\right] = \\ &= \prod_{i=0}^{m-1} g_{i,m}(t), \end{aligned} \tag{27}$$

ahol könnyen belátható, hogy

$$(28)\qquad g_{i,m}(t)=\begin{cases}F(i-m), & \text{ha } t=i+Nm;\ N=0,1,2,\ldots,\\ 1, & \text{különben.}\end{cases}$$

A (25)-ből, (26)-ból, (27)-ből és (28)-ból kapjuk, hogy

$$(29)\qquad F(t)=\prod_{i=0}^{m-1} g_{i,m}(t)\prod_{j=0}^{[t]} X(mj+T).$$

A fontos $m=1$ speciális esetre pedig – mivel ekkor $T=0$ és $[t]=t$, adódik, hogy

$$(30)\qquad F(t)=F(-1)\prod_{j=0}^{t} X(j).$$

Megjegyzés. Az olvasó számára nem okozhat zavart a (13) karakterisztikus egyenlet esetleges konjugált komplex gyökeinek fellépése. Az egyszerűség kedvéért az egyszeres gyökök esetére szorítkozva, ha ξ_k és $\xi_{k+1}=\bar{\xi}_k$ jelöl egy konjugált komplex gyökpárt és

$$\xi_k=|\xi_k|\,e^{i\varphi_k},\ \xi_{k+1}=|\xi_k|\,e^{-i\varphi_k},\ \gamma_{k+1}=\bar{\gamma}_k,$$

akkor azt kapjuk, hogy a (16)-ban

$$(31)\qquad \begin{aligned}\gamma_k\xi_k^t+\gamma_{k+1}\xi_{k+1}^t&=\gamma_k\xi_k^t+\bar{\gamma}_k\bar{\xi}_k^t=\gamma_k|\xi_k|^t e^{i\varphi_k t}+\bar{\gamma}_k|\xi_k|^t e^{-i\varphi_k t}=\\&=2Re[\gamma_k|\xi_k|^t e^{i\varphi_k t}]=2(Re\,\gamma_k)|\xi_k|^t\cos\varphi_k t-2(Im\,\gamma_k)|\xi_k|^t\sin\varphi_k t.\end{aligned}$$

Ebből látható, hogy a (26) valós (pozitív) kifejezést állít elő. Épp a konjugált komplex gyökpárok fellépése esetén szerepelnek trigonometrikus függvények a megoldásban.

b) *A megoldások végtelenben való viselkedése, stabilitás*

Vizsgáljuk meg ezek után a (29) végtelenben való viselkedését abban az esetben, amikor a (3)-ban egyetlen α_j együttható sem tűnik el. Az irodalomból ismeretes, hogy a (14) együtthatóinak szigorúan monoton csökkenése miatt annak valamennyi gyöke az egységkör belsejébe esik, kivéve a $\xi'=1$ gyököt. (Lásd pl. [4].) A (16)-ból és a (29)-ből kapjuk, hogy

$$(32)\qquad \begin{aligned}F(t)&=\prod_{i=0}^{m-1} g_{i,m}(t)\prod_{\nu=0}^{[t]}\left[\gamma+\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\gamma_{k,p}\,\xi_k^{m\nu+T-p+1}\binom{t}{p-1}\right]=\\&=\prod_{i=0}^{m-1} g_{i,m}(t)\prod_{\nu=0}^{[t]}\gamma\left[1+\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\zeta_{k,p}\,\xi_k^{m\nu+T-p+1}\binom{t}{p-1}\right]=\\&=\prod_{i=0}^{m-1} g_{i,m}(t)\,\gamma^{[t]+1}\prod_{\nu=0}^{[t]}\left[1+\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\zeta_{k,p}\,\xi_k^{m\nu+T-p+1}\binom{t}{p-1}\right],\end{aligned}$$

ahol

$$\zeta_{k,p}=\frac{\gamma_{k,p}}{\gamma}.$$

Ha $t \to \infty$, akkor a (32) végtelenben való viselkedését a $\gamma^{[t]}$ dönti el, hiszen $\prod_{i=0}^{m} g_{i,m}(t)$ periódikus, a

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}\left[1+\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\zeta_{k,p}\,\xi_k^{m\nu+T-p+1}\binom{t}{p-1}\right]$$

végtelen szorzat pedig abszolút konvergens minden egyes T-re a $|\xi_k|<1$ miatt, mivel

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\zeta_{k,p}\,\xi_k^{m\nu+T-p+1}\binom{t}{p-1}\right|\leq\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\binom{t}{p-1}|\zeta_{k,p}|\,|\xi_k|^{m\nu-p}<\infty.$$

Ebből következik, hogy

$$\prod_{\nu=0}^{[t]}\left[1+\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\zeta_{k,p}\,\xi_k^{m\nu+T-p+1}\binom{t}{p-1}\right].$$

korlátos $0\leq t<\infty$-ben.

Látjuk tehát, hogy ha $\gamma<1$, akkor az $F(t)\to 0$, ha $\gamma>1$, akkor az $F(t)\to\infty$. A $\gamma=1$ határhelyzetben az $F(t)$ korlátos (nem feltétlen tart egy véges pozitív határértékhez).

Foglalkozzunk most a megoldások stabilitásának kérdésével. Az $F(t)$ megoldást akkor nevezzük stabilisnak, ha az $F(-i)$, $(i=1,2,\ldots,m+n)$ kezdeti értékek kicsiny változásához az $F(t)$ kicsiny változása tartozik a t változó $[0,\infty]$ tartományában, Pontosabban megfogalmazva: tekintsük az $F(-i)$ (pozitív) kezdeti értékek azon halmazát, amelyre a $\gamma<1$ teljesül. Legyenek továbbá $\varepsilon>0$, $\eta_i>0$ tetszőlegesen kicsinyek. Akkor a fenti halmazba eső tetszőleges $F^*(-i)$; $(i=1,2,\ldots,m+n)$ kezdeti értékkészlethez és a hozzátartozó $F^*(t)$ megoldáshoz létezik egy a fenti halmazba eső $F^{**}(-i)$ kezdeti értékkészlet és a hozzátartozó $F^{**}(t)$ megoldás úgy, hogy

$$|F^*(t)-F^{**}(t)|<\varepsilon,\qquad\text{ha}\quad 0\leq t<\infty$$

hacsak

$$|F^*(-i)-F^{**}(-i)|<\eta_i,\qquad i=1,2,\ldots,m+n.$$

Egyszerűen kimutatható, hogy az $F(t)$ megoldás (az általunk vizsgált esetekben) éppen akkor stabilis, ha $\gamma<1$. Látható, hogy ha $\gamma\geq 1$, akkor a megoldás instabilis, hiszen a kezdeti értékek tetszőlegesen kicsiny változása az $F(t)$ megoldás tetszőlegesen nagy változását is maga után vonhatja. A stabilitás feltétele tehát az, hogy $\gamma<1$ teljesüljön. Ekkor azt mondjuk, hogy a (3) egyenlet is stabil a kezdeti értékeknek abban a tartományában, amelyben $\gamma<1$. Ezt *feltételes stabilitásnak* nevezik az irodalomban, amely a nemlineáris egyenletek egyik jellemző tulajdonsága.

Fennáll tehát az alábbi stabilitási tétel.

Tétel. Tekintsük a (3)-mal és a (4)-gyel megadott nemlineáris differenciaegyenletet. Amennyiben az α_j együtthatók egyike sem nulla, akkor a pozitív kezdeti értékeket kielégítő megoldások stabilitását a

$$\gamma=\frac{\sum_{j=1}^{n}X(-j)\left(1-\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k\right)}{n-\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\,\alpha_j}$$

kritérium dönti el. A stabilitás feltétele: $\gamma < 1$. Ekkor a megoldások a végtelenben eltűnnek. $\gamma = 1$-re a megoldások korlátosak, míg $\gamma > 1$-re a végtelenhez tartanak.

Megjegyzés. A γ kritériumból egyszerűen következik, hogy a rendszer éppen akkor stabil, ha az $X(-j) = \dfrac{F(-j)}{F(-j-m)}$ kezdeti értékek elegendő kicsinyek. Ha az összes $X(-j)$ értékek egyenlőek, $X(-j) = X_0$ minden j-re, akkor a fenti kritériumból adódik, hogy

$$\gamma = X_0$$

és akkor a stabilitás feltétele ekvivalens az $X_0 < 1$ feltétellel.

Látható, hogy $\gamma > 1$*-re egy növekedési modellt kapunk, mivel minden megoldás a végtelenhez tart.* Közgazdaságilag általában ennek a feltételnek kell teljesülnie. A $\gamma = 1$ esetben a megoldások korlátosak. Ennek a határesetnek azonban közgazdaságilag kevés a realitása, mert a kezdeti értékek, vagy akár az α_j együtthatók *tetszőlegesen* kicsiny változásai végtelenhez tartó megoldásokat eredményezhetnek.

Befejezésül szeretnénk újból utalni arra, hogy a stabilitási kritérium arra az esetre vonatkozik, ha az α_j együtthatók egyike sem tűnik el. Amennyiben ilyenek lennének, így a (14) karakterisztikus egyenlet gyökeire már nem áll, hogy azok mind az egységkör belsejébe esnek, ami a stabilitási viszonyok megváltozását vonja maga után. Az $m = 1$ esetre vonatkozóan láttuk [2]-ben, hogy ha $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$, akkor a megoldások végtelenben való viselkedését és a stabilitást az $\dfrac{F(-1)}{F(-n-1)}$ arány dönti el, ellentétben az ebben a dolgozatban a kritériumból fenti együtthatók nulla volta esetén adódó

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{F(-i)}{F(-i-1)}}{n}$$

mennyiséggel.

A stabilitási viszonyok tárgyalása eltűnő α_j együtthatók esetén egy esetleges későbbi dolgozat tárgyát képezhetné. Tervbe vettük továbbá, hogy a konstans α_j együtthatókat további vizsgálataink során periódikus $\alpha_j(t)$ függvényekkel helyettesítjük, így a valóságot jobban közelítő olyan modellt lehetne kidolgozni, amelynek matematikai diszkussziójában a korszerű operátoros módszerek igen jól alkalmazhatóak.

3. A módszer gyakorlati alkalmazása

A forgalmi folyamatok kategóriái közül sokféle lehetőség adódik az elemzésre kerülő minta kiválasztására. Ez vonatkozik mind az idősorok tartalmára, mind pedig a népgazdaság mikro, -mezo, -vagy makro szintjére. Tárgyunk szempontjából egy olyan gazdasági aggregátum nettó árbevételének elemzését végeztük el, amely terjedelmében és az idősor alakulása tekintetében meglehetősen jól jellemzi a magyar gazdaságot: ez a gépipari ágazat nettó árbevétele. Kiválasztásánál egyik fő szempont az volt, hogy ez a legjelentősebb magyar iparág mind volumenben, mind pedig fejlődési ütemében egyaránt.

Amellett, hogy hosszabb időszakot tekintve a gépipar egyike a legdinamikusabban fejlődő ágazatoknak, meglehetősen jól mutatkozik meg az árbevétel adataiban a szezonszerűség is. A nettó árbevétel folyóáron számított adataiban az árváltozások 1975 év kivételével átlagos színvonalon alakulnak, és így nem zavarják különösebben az időbeli összehasonlítást.

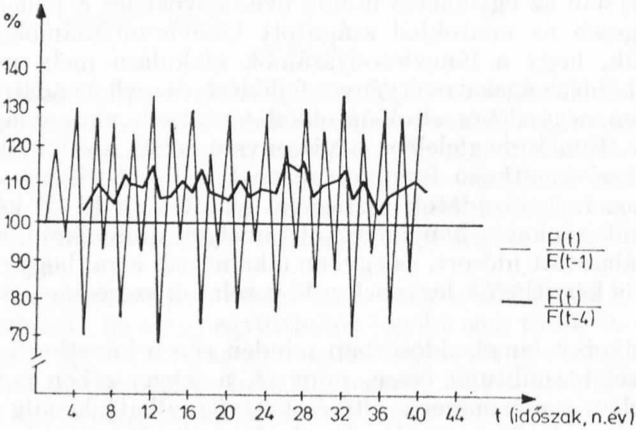
Az adatok 1968. január 1-től 1977. december 31-ig állnak rendelkezésre. A 10 éves adatsor negyedéves ütemezésben mutatja be az ágazat fejlődését, amelyre nagyjából az egyenletes ütemű éves növekedés a jellemző. Az elemzésre elsődlegesen az adatokból számított láncviszonyszámokat használtuk fel. Megnéztük, hogy a láncviszonyszámok alakulása mely negyedévekben jellemzi leginkább az ágazatra érvényes fejlődést, és ezek az adatok ill. viszonyszámok milyen negyedéves eltolódásokkal mutatnak viszonylag állandó fejlődési ütemet. Ennek megfelelően a viszonyszámokat a számlálóban szereplő t-edik időszakra vonatkozó forgalmi adatnak a $t-1$-től a $t-20$-ig terjedő időeltolódáshoz tartozó adatok osztásával alakítottuk ki. E két szélső adat között kerestük azokat a hányadosokat, amelyek dinamikájukban leginkább jellemzik a választott idősort, és egyben alkalmasak arra, hogy segítségükkel előrejelzések is készíthetők legyenek a kapcsolatok szorosságának figyelembevételével.

Akkor, amikor valamely idősorban minden soron következő adatot a közvetlen előzővel hasonlítunk össze, mint pl. a jelen esetben a negyedéveket, akkor elsősorban a szezonszerű eltéréseket vizsgálhatjuk, míg a $t-4$ időeltolással egy év, a $t-20$ negyedévek adatával történő összehasonlítás öt év távlatában jellemzi az időbeli változást, az ágazat fejlődését. A két szélső határon belül természetesen számos lehetőség adódik az idősorokban rejlő törvényszerűségek feltárására, amelyek között különösen nevezetesnek találtuk azt az összefüggést, amikor valamely t-edik időszakra vonatkozó adatot 4 negyedévvel vagy annak többszörösével eltolt adattal hasonlítjuk össze.

A számítások végeredményben arra a következtetésre vezettek, hogy — a lényegében az egész magyar ipart, sőt népgazdaságot jellemző ágazat adataiban — jól látható a termelés ill. a kibocsátás szakaszossága, a negyedéves periodicitás. Ugyanakkor éppen a negyedévekben rejlő szezonszerűség eredményezi azt, hogy az előző évvel, ill. az előző évek azonos negyedéveivel történő összehasonlítás meglehetősen kiegyenlített képet, évről-évre hasonló növekedési ütemet mutat. A vizsgált időtartam alatt a kritériumnak azt a feltételét elégíti ki a folyamat változási iránya tehát, amely megfelel a $\gamma > 1$ összefüggésnek, vagyis a szocialista termelési módra jellemző fejlődő gazdaságnak. A jelenséget az alábbi 1. ábrán mutatjuk be az $\frac{F(t)}{F(t-1)}$ és az $\frac{F(t)}{F(t-4)}$ adatokból képzett visonyszámokkal.

Az év azonos negyedéveinek összehasonlításából egyértelműen következik a szoros meghatározottság és a viszonylag hosszabb távon (10 év) érvényesülő törvényszerűség. Ezért elemzéseink középpontjába azt a kérdést állítottuk, milyen időeltolódással képzett viszonyszámok között található többé kevésbé szoros kapcsolat. Ezt a feladatot ezúttal a szóródásszámítás segítségével végeztük el, hiszen itt egynemű, azonos tartalmú adatok idősoráról van szó. Esetünkben az autokorreláció kap kitüntetett szerepet, s nem valamely más jellemzővel, kategóriával való kapcsolat szorossága. Feltételeztük, hogy az egyes időeltolódásokkal képzett viszonyszámok idősorában akkor a legnagyobb az autokorreláció foka, ha minél kisebb a szóródás nagysága.

A 10 év 40 negyedévre vonatkozó adat felhasználásával érdekes, de az idősorok tulajdonságai figyelembevételével egyáltalán nem meglepő eredményre jutottunk. Számításaink szerint a szóródás nagysága legkisebb a 4 negyedév ill. annak többszöröseivel eltolt viszonyszámok között, majd ezt követi a 2 negyedévvel eltolt dinamikus viszonyszámok sora. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a gépipari ágazatban, de joggal állíthatjuk, hogy az

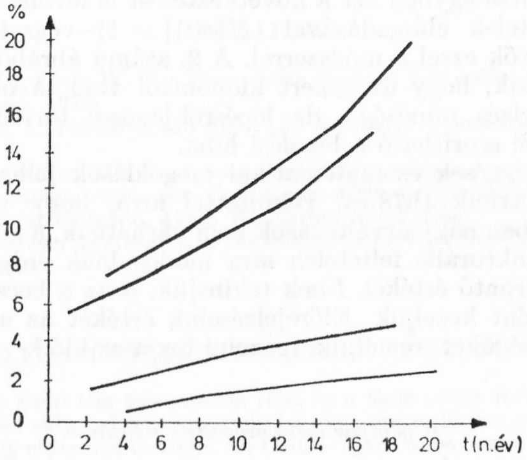


1. ábra A gépipar nettó árbevételének szezonszerű ingadozásai

egész magyar iparban, az éves és a féléves periodicitások nagyjában-egészében ismétlődnek és viszonylag kiegyenlített képet mutatnak. Ugyanakkor az egynegyedévvel és a háromnegyedévvel eltolt adatokból képzett hasonló viszonyszámok szóródása az előbbi kettőnél jóval nagyobb. Emellett jellemző a gépipar viszonyszámaira az is, hogy az éves és a féléves periodicitások szórásnégyzetei logaritmikus (vagyis csökkenő növekedést mutató) függvénnyel, míg az 1/4 és a 3/4 évvel eltolt viszonyszámok szóródása exponenciálisan növekvő görbével ábrázolhatók. (L. 2. ábrát.)

Ebből a feltételből következik az is, hogy előrebecslések esetén elsősorban azok az időeltolódással számított értékek használhatók leginkább, amelyek éves periodicitáson alapulnak. Ezt egyébként az ex-post becslések is alátámasztották. Az elemzések és az előrebecslések kiinduló képlete a cikkben közölt (3) egyenlőség. Ebben az összefüggésben ismertnek tételezhetők fel a múltra vonatkozó forgalmi adatok. A feladat ezért az α_j együtthatók értékének kiszámítása. A 2. számú ábra magától kínálja azt a megoldást, hogy az elemzéseknél ill. a becsléseknél szereplő α_j együtthatók olyan súlyozást tegyenek lehetővé, ahol azok az összefüggések kapnak meghatározó szerepet, amelyek szoros autokorrelációt mutatnak; vagyis azok, ahol a dinamikus viszonyszámok viszonylag legkisebb szóródása tapasztalható. Ezért tehát az α_j-k nagyságának megállapításánál azt választottuk, hogy értékük legyen az egyes viszonyszámsorok szórásnégyzetének reciprok értékéből adódó megoszlási viszonyszám. Ebben az esetben ugyanis mindenkor biztosítható az a követelmény, hogy az α_j együtthatók összege *1*, és ugyanakkor a legkisebb szórást mutató viszonyszám-sorhoz kapcsolódik a legnagyobb súlyt szolgáltató α_j érték.

A gyakorlati számítások[1] arra az eredményre vezettek, hogy hosszabb idősor ismeretében az elemzés vagy a becslés minőségét nem a felhasznált viszonyszámok számossága, hanem a bennük rejlő kapcsolat szorossága határozza meg. Ebből az adottságból, de a számítások egyszerűsítése érdekében is felvetődik az a gondolat, hogy nem szükséges valamennyi lehetséges α_j alkalmazása, hanem azok tudatos kiválasztásával, szelektálásával kell felírni a



2. ábra A szórásnégyzetek alakulása (m = 1, 2, 3, 4 esetén)

megadott (3) számú egyenlőséget. Ez annál inkább indokolt, mert a láncviszonyszámok tulajdonságaiban rejlő autokorreláció miatt az α_j-k számának bővítése nem javítaná az eredményt, hanem éppen ellenkezőleg eltéríti azt a törvényszerűen mutatkozó fejlődés vonalától, és ily módon megbízhatatlanná válhatnak a becslések. Így pl. a 4 negyedéves eltolással az 1977. IV. n. évére készített ex-post becsléseink szerint, amikor az α_j-k közül a legszorosabb kapcsolatot mutató 4 negyedévvel eltolt éves periodicitást vettük figyelembe ($j = 1, 2, \ldots 5$), az eltérés csupán 0,5%. Ha az éves periodicitást a viszonylag legkisebb szórást mutató féléves periodicitás 2 adatával kiegészítjük, a számítás 0,8%-kal különbözik a tényszámtól. Amikor az α_j-k számát 10-re növeltük, vagyis az éves és a féléves periodicitást is teljesen számításba vettük, akkor a becslési hiba 1,2%. Ezek a számok egyértelműen arra hívják fel a figyelmet, hogy ha az α_j-k száma eltér az optimálisan szükségestől, akkor már nem javítható az előrejelzések minősége.

A fenti 2. ábra egyben azt is jelzi, hogy az α_j-k elmondottak szerinti meghatározása a legutolsó év azonos negyedévéhez viszonyított fejlődési mutatójának ad előnyt, s ettől távolodva mind kisebb lesz az együtthatók nagysága. Ily módon az időben közelebb álló adatok erősebben determinálják a becslés eredményét, mert nagyobb súlyt kapnak a mérlegelésnél. A gépipari ágazat példájában a 4 negyedéves időeltoláshoz tartozó szórásnégyzetek reciprok

[1] A számításokat *Fehér* Kálmán matematikus, a MNB főelőadója végezte a Bank Honeywell 66/20 elektronikus gépén. Munkájáért ezúton mondunk köszönetet.

értékeiből számított megoszlási viszonyszámok, vagyis az α_j értékek a következők: $\alpha_1 = 0{,}4848$; $\alpha_2 = 0{,}1994$;; $\alpha_3 = 0{,}1258$; $\alpha_4 = 0{,}0991$; $\alpha_5 = 0{,}0909$. Amíg tehát az egy évvel előbbi fejlődés csaknem 50%-ban meghatározó, a két évvel előbbi már csak 1/5-del, a 4 évvel megelőző 1/10-del. Úgy véljük, a változó és időben távolodva csökkenő súlyokra épülő számítási módszer hasznos eszköze lehet a gazdasági előrejelzéseknek.

Az éves periodicitás és a gépipari ágazatra, de általában a magyar iparra jellemző szezonalitás egyben azt a következtetést is levonatja velünk, hogy a változatlan feltételek elfogadásával ($M[v(t)] = 1$) végzett becslések több évre is elkészíthetők ezzel a módszerrel. A 2. számú ábrából tudniillik egyértelműen következik, hogy az ismert időponttól való távolság miatt romlik ugyan az előrejelzés minősége, de lépésről-lépésre történő helyettesítéssel szűk határok közé szorítható a becslési hiba.

A felírt összefüggések és matematikai megoldások felhasználásával előrejelzéseket készítettünk 1978-ra. Tekintettel arra, hogy 1978-ban 1977-hez képest különösebben nagy árváltozások nem várhatóak, a gépipari termékekre vonatkozó konjunkturális feltételek sem módosulnak érdemlegesen, ezért a véletlen hatás várható értékét *1*-nek tekintjük, azaz a becsléseket nem befolyásoló tényezőként kezeljük. Előrejelzéseink értékét az alábbi táblázatban közöljük. Helyességüket, reméljük, igazolni fogja az idő.[2]

A gépipar nettó árbevétele folyóáron

Mrd Ft

Időszak	1977		1978
	Tényszám	Ex-post becsült	Ex-ante becsült
I. n. év	42,6	42,2	45,9
II. n. év	54,7	53,8	60,6
III. n. év	48,4	48,5	53,5
IV. n. év	62,8	62,5	69,0

*

A vezetés állandó igénye, hogy operatív információkkal rendelkezzék a gazdasági folyamatokról. A korszerű gazdaságirányításnak nélkülözhetetlen eszköze az elmélyült elemzés, az összefüggések, törvényszerűségek feltárása és a jövőben várható értékek lehetőleg pontos előrebecslése. Ehhez kívántunk hozzájárulni a jelen cikk megírásával. Ha a javasolt eljárás — esetleg annak javított, továbbfejlesztett változata — beválik a gyakorlatban is, amit az ex-post becslési eredmények igazolni látszanak, akkor célszerű lehet hasonló módon végezni vizsgálatot az állapotidősorokra is, mint pl. a készletek állománya, a forgalomban levő pénz mennyisége. Az azonos kategóriák mozgását kifejező forgalmi folyamatok és pillanatnyi állapotát rögzítő állományadatok közötti híd a forgási sebesség mutatója. E mutatók időbeli alakulásának, vál-

[2] Az időközben ismertté vált tényadatok 1978. I.—III. nv. évi összege 158,9 mrd Ft (a becslés 160 mrd Ft), amelynek n. évenkénti megoszlása sorra: 44,8; 59,7; 54,4 mrd Ft.

tozásának eddigieknél mélyebb elemzése, előrebecslése nagyban hozzájárulhat a közgazdasági és üzemgazdasági folyamatok és jelenségek megismeréséhez, s ennek segítségével a vezetés és a végrehajtás munkája hatékonyságának növeléséhez.

(Beérkezett: 1978. június 18-án)

IRODALOM

1. BOX, G. E. P.—JENKINS, W. M.: *Time series analysis forecasting and control*. Holden Day. San Francisco, 1976.
2. FÉNYES, T.—SÁRI, J.: *Periódikusan változó közgazdasági folyamatok*. Szigma 1977/1—2. sz.
3. BUTZER, P. L.—SCHULTE, H.: *Ein Operatorenkalkül zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differenzengleichungssysteme von Funktionen diskreter Veränderlicher und seine Anwendungen*. Köln und Opladen, 1965. Westdeutscher Verlag.
4. JURY, E. I.: *Theory and application of the transform method*. New York—London, 1964. John Wiley — Sons

ANALYSIS AND FORECAST OF TIME SERIES OF ECONOMIC PROCESSES

The authors start from the assumption that in a time series formed by chain index numbers the expected value of a process will be more strongly determined by those data which are in relatively closer connection. And this is there to be found where the dispersion is minimum among the chain index numbers computed from the original data with various time interval shifts. The value of coefficients can be determined from the reciprocal of variances, since it is right to give more weight to the index number which shows the smallest dispersion, i.e. where autoregression is the highest.

The general solution of the economically formulated problem is obtained by operator calculus when the asymptotical behaviour of the solution, the condition of stability is analyzed. At the same time it is determined, too, under which conditions a growth model will be valid. Practical computations made with this method support that e.g. in the chosen branch of engineering, in a chain index system formed from a quarterly time series for 10 years, the closest autoregression can be observed with a time-lag of t–4 (one year) and t–2 (half a year), respectively. Although the dispersions increase as we move away from the moment chosen, this results in a decreasing (logarithmic) rate of growth. Considerably higher dispersion can be experienced in chain indices with a time-lag of 1 and 3 quarters, respectively. Ex-post and ex-ante forecasts made are promising, since deviations remained within acceptable margin of error.

АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТРЕНДОВ ВРЕМЕНИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Авторы исходят из той предпосылки, что в тренде времени, образованному из характеризующих развитие цепных индексов, предполалаемое значение какого-либо процесса в болшеймере определяют те, между которыми связь является относительно более тесной. Это налицо там, где наименьшим является рассматривание между числами цепного индекса, расчитанного с неодинаковой разницей различных интервалов времени первоначальных членов. Значение коэффициентов может устанавливаться на основании обратных значений квадратов рассеивания, так-как в ходе расчетов — обоснованно — больший вес должен приобретать тот индекс, который дает наименьшее рассеивание, т. е. в отношении которого авторегрессия наибольшая.

Общее решение этого экономически сформулированного задания происходит посредством операторных расчетов и при этом предметом изучения являются поведение получаемого результата в бесконечности, предпосылки стабильности. Вместе с тем определяет-

ся то, что при каких условиях будет сnраведливой какая-либо модель роста. Практические расчеты, выполняемые с помощью этого метода подтверждают, что по выбранным отраслям машиностроения, например, в системе увязанных отсительных значений, образованных из квартальных трендов за десять лет наиболее тесная авторегрессия сказывается со сдвигом времени по t-4 (год) и t-2 (полугодие), когда при удалении от выделенного времени увеличивается величина рассеивания, однако это приводит к (логаритмическому) уменьшению роста. В то же бремя при сдвиге времени на один и три квартала в отношении относительных увязываемых значений рассеивание является значительно большим. Прогнозы, выполняемы на прошедшее время или же на будущее являются обнаруживающими, т. к. расхождения находятся в пределах приемлемых погрешностей.

KISS RÓBERT—TÖRÖK TAMÁS

Modell és eljárás komplex rendszerek vizsgálatára műszaki-gazdasági kritériumok alapján

Tanulmányunkban komplex rendszerek összemérésére alkalmas modellt és eljárást ismertetünk. A modell a hazai szakirodalomban ismert egyéb, hasonló célú modellektől [10] abban tér el, hogy a bizonytalanságot explicit módon kezelni képes. Alkalmas egyidejűleg több, kvantitatív és kvalitatív értékelési tényező alapján a komplex rendszerek (objektumok) probabilisztikus rangsorának meghatározására, a felhasznált adatokénál nem nagyobb bizonytalansággal.

Az eljárásban az arányskálán mérhető kvantitatív információkon kívül „szubjektív" szakértői becsléseket is felhasználunk. A bizonytalanság forrásai nyílt döntési helyzetekben a számszerű adatok esetleges pontatlanságai, a különböző értékelők véleményeinek eltérése, az eljárási szabályok nem egységes értelmezése. Az eljárás heurisztikus elemeket tartalmaz, ezért jelentősek a szakértői becslésekkel, a számszerű és nem számszerű információk összegzésével és egységes számszerű megfogalmazásával kapcsolatos problémák. Az eljárásban az objektumok jóságát a szakértők hármaspont becsléssel jellemzik, megadva a becslési intervallum alsó és felső határát, valamint a legvalószínűbb értéket. A legvalószínűbb érték elhelyezkedése a becslési intervallumon belül befolyásolja az objektumok egymáshoz való viszonyát, a döntési helyzetet jellemző bizonytalanság megítélését, ezért tényleges döntési helyzetben kapott szakértői becslések statisztikai elemzésével vizsgáltuk a valószínűségi változónak tekintett legvalószínűbb érték eloszlását a becslési intervallumon belül.

Számítógépes programot dolgoztunk ki az objektumok sorrendjének meghatározására és a legvalószínűbb érték eloszlásának vizsgálatára. A bizonytalanság explicit kezelésére vonatkozó megfontolások [8] miatt, több jelentős eltérés ellenére is KAHNE-féle szimulációs döntéselőkészítő modellnek nevezzük.

A vezetői gyakorlatban a döntéselőkészítés igen gyakran komplex rendszerek (üzemek, technológiák, fejlesztési elképzelések, stb.) összemérését jelenti, a rendszereket jellemző műszaki-gazdasági kritériumok valamilyen halmaza szerint.

Az összemérés alapjául szolgáló jellemzők általában összetett tulajdonságok, így a különböző rendszerek összemérése egy-egy értékelési tényező szerint is bonyolult feladat, amelyben számszerű és nem- számszerűsíthető információkat egyaránt figyelembe kell venni. Az adatok is rendszerint hiányosak, és nem teljesen pontosak. Az előzőekből következik, hogy az értékelő ítéletei bizonytalanok.

A bizonytalanság az említett objektív tényezőkön kívül az értékelők szubjektumából is fakadhat. Egyéni sajátosságaik szerint különböző mértékben képesek és hajlandók határozott számszerű ítéletet alkotni bonyolult értékelési helyzetben.

A döntéselőkészítési modellek az értékelők bizonytalanságát hosszú időn keresztül figyelmen kívül hagyták, vagy egy utólagos lépés beiktatásával a modellek által szolgáltatott eredmények értelmezésénél vették figyelembe intuitív módon. Az utóbbi években rohamosan terjedő szimulációs modellek lehetővé tették, hogy a bizonytalanságot a modellekbe beépítve — az értékelési tényezők súlyozásánál és az értékelésre kerülő objektumok megítélésében egyaránt — figyelembe vehessük.

Az értékelési helyzet sajátosságait és az értékelők pszichikumát figyelembe vevő eljárásokban igen kevés gyakorlati tapasztalattal rendelkezünk. A szimulációs döntéselőkészítési modellek még szélesebb körű alkalmazását ez a tény gátolja, s egyben indokolja az értékelők viselkedésének tanulmányozását komplex rendszerek megítélésében.

A modell leírása

Az ismertetendő szimulációs döntéselőkészítő modell hat részből áll:

I. A cél meghatározása
II. Az értékelési tényezők kiválasztása
III. Az értékelési tényezők súlyozása
IV. Az összehasonlítás tárgyát képező objektumok meghatározása
V. Az objektumok értékelése
VI. A sorrend meghatározása

Vizsgáljuk meg az egyes lépéseket részletesebben.

I. Az első lépésben azt kell tisztázni, hogy a döntéshozó a kérdéses fejlesztéssel mit kíván elérni. Ilyen cél lehet pl. az életszínvonal növelése, termékszerkezet-felújítás, vagy még többezer más cél különböző döntési szinteken. Tételezzük fel, hogy a módszer alkalmazásának célja már meghatározott. Az értékelő személyek száma legyen m.

II. A döntéseknek valamilyen kritériumokon kell alapulnia, melyek kielégítése fontos a cél sikeres elérése szempontjából.

Ezeket a kritériumokat értékelési tényezőknek nevezzük és $E_j (j = 1, \ldots, n)$-vel jelöljük.

A különböző cselekvési változatokat aszerint bíráljuk el, hogy mennyire elégítik ki az egyes kritériumokat, amelyek lehetnek kvalitatív és kvantitatív jellegűek.

III. Az értékelési tényezők azonban nem egyforma fontosságúak. Súlyozásuk kétféleképpen történhet:

1. közvetett
2. közvetlen (direkt) módon

1. Az értékelési tényezők relatív fontosságához eljuthatunk pl. a *páros összehasonlítás* módszere segítségével. A módszer alapja, hogy két-két értékelési tényezőt párbaállítva a szakértők a kettő közül az egyiket fontosabbnak ítélik, mint a másikat. Az elemi ítéletek összegzésével az értékelési tényezők egymáshoz viszonyított fontossága (súlya) meghatározható.

Preferencia-reláció: olyan megelőzési reláció, ahol a megelőzés megállapítása az ún. előnyben részesítés, azaz preferálás alapján történik.

Jele: $\prec$; $a \prec b$, ha az értékelő előnyben részesíti a-t b-vel szemben.

Tulajdonságai:

a) $a \nless a$ (irreflexív)
b) $a \prec b \Rightarrow b \nless a$ (antiszimmetria)
c) $a \prec b$ és $b \prec c \Rightarrow a \prec c$ (tranzitív)
d) $a \nsim b$ (nem indifferens) $\Rightarrow a \prec b$ vagy $b \prec a$

A páros összehasonlítás során az értékelő hibát követ el, ha a fenti követelmények valamelyikét nem teljesíti. Mivel esetünkben csak különböző értékelési tényezők kerülhetnek egy párba, és a sorrendtől eltekintünk, ezért a *c)* és *d)* szabálynak kell eleget tennie az értékeléseknek.

A párok elrendezésében kívánatos, hogy egyrészt elkerüljük a szabályszerű ismétlődéseket, másrészt pedig, hogy a lehető legnagyobb távolságra helyezzük el egymástól az azonos tagokat tartalmazó párokat.

Az ilyen követelményeknek eleget tevő párelrendezés történhet egyenletes eloszlású véletlenszám-generátor alkalmazásával. Ebben az esetben ügyelnünk kell arra, hogy minden elem azonos gyakorisággal szerepeljen.

Pl. $n = 10$ értékelési tényező esetén $\binom{10}{2} = 45$ pár lehetséges, így az 1—10-ig terjedő egész számok mindegyikének 9-szer kell szerepelnie. A párok optimális elrendezése legalkalmasabb az ún. Ross-féle eljárás. A Ross-táblázatban az azonos elemet tartalmazó bármelyik párt páratlan elemszám esetén $\max \frac{m-1}{2}$ és $\min \frac{m-3}{2}$ pár választ el egymástól, míg páros elemszám esetén $\max \frac{m-2}{2}$ és $\min \frac{m-4}{2}$.

A párok valamely módszer szerinti elrendezése után megkezdődhet az értékelés.

Az egyedi kérdőívek feldolgozásához igen hasznos az alábbi preferencia-mátrixnak nevezett táblázat.

	E_1	...	E_n	a	a^2	n	u	d_n	$\binom{n}{2}$
E_1						1	0	0	0
$\vdots$									
E_n									

Ezt a táblázatot oly módon töltjük ki, hogy a preferált értékelési tényezők feleljenek meg a preferencia-mátrix sorainak, az adott párban hátrányban részesített tényezők pedig az oszlopoknak.

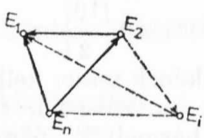
Az a oszlopban található számok mutatják, hogy egy adott sornak megfelelő tényező hányszor volt preferálva a többihez viszonyítva.

A preferencia-mátrix segédtáblázata a számítások megkönnyítését szolgáló adatokat tartalmazza: n az értékelési tényezők száma, u a körhármasok, azaz a tranzitivitás szabályának eleget nem tevő hármasok tényleges számának meghatározásához szükséges küszöbszám; d_n a körhármasok maximális száma és $\binom{n}{2}$ a párok száma.

A páros összehasonlítást az alábbi gráffal (1. ábra) is jellemezhetjük ahol $E_i \rightarrow E_j$ $E_i \prec E_j$-t jelenti.

A $d = \frac{u - \Sigma a^2}{2}$ képlet segítségével meghatározzuk a körhármasok tényleges számát, majd d viszonyát a maximális körhármasok számával $\frac{d}{d_n}$. Ennek segítségével az értékelő következetességi mutatója %-ban kifejezve: $K = \left(1 - \frac{d}{d_n}\right) \cdot 100$. Valamely értékelő személy következetességi mutatójának esetleges kisértéke arra utal, hogy:

— a döntéshozó valójában nem érdekelt a szóban forgó problémában,
— a döntéshozó következetességi képessége fogyatékos,
— nincs kialakult értékrendje a szóban forgó értékelési tényezőkkel kapcsolatban.



1. ábra

A páros összehasonlítás során egy adott értékelési tényező súlyát preferencia-gyakorisága reprezentálja.

Az értékelési tényezők súlymátrixa az m értékelő személy alapján:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ s_{m1} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix},$$

ahol s_{ij} a j. értékelési tényező súlyértéke (preferencia gyakorisága) az i. értékelő szerint.

Így értékelési tényezőnként rendelkezésünkre áll egy m elemű minta azok súlyaira vonatkozóan. Képezzük ezen minták várható értékét ill. szórását:

$$m_j = M(s_j) = \frac{\sum_i s_{ij}}{m}; \; d_j = D(S_j) = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\sum_i (s_i - M(s_j))^2\right)}.$$

Adjunk meg a várható értékek közül egy-egy szimmetrikus intervallumot a következő módon:

$$W_i := (m_i - 3d_i,\ m_i + 3d_i) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Így az értékelési tényezők $W = (W_1, \ldots, W_n)$ súlyintervallum vektorához jutunk.

2/a Közvetlen módon súlyozhatjuk az értékelési tényezőket úgy, hogy a kiosztható összes preferencia-gyakoriságot egyidejűleg osztjuk szét az értékelési tényezők között. Az összes preferencia-gyakoriság n értékelési tényező esetén: $\frac{n(n-1)}{2}$.

A W vektorhoz a fentiekhez hasonlóan juthatunk.

2/b Általános súlyozásnál megadunk egy $[a, b]$ értékelő intervallumot, mely hosszúságának $(b-a)$ és beosztásának megválasztásakor figyelembe kell vennünk a konkrét értékelési helyzet sajátosságait.

Minden értékelési tényezőhöz egy adathármast rendelünk az $[a, b]$-n belül. Ez a három adat: a *becslési intervallum* két végpontja és azon belül a legvalószínűbb érték. Válasszunk ki most egy értékelési tényezőt és vizsgáljuk meg a hozzá tartozó értékelő adathármas elhelyezkedését [a, b]-ben

A *becslési intervallum* bal végpontján ξ_1-el, jobb végpontját ξ_2-vel; a legvalószínűbb értéket η-val jelöljük. A statisztikai vizsgálathoz tehát rendelkezésünkre áll mindhárom valószínűségi változóra egy m elemű minta:

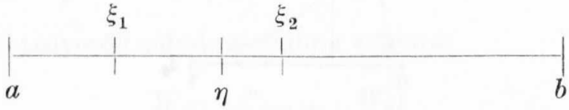
$$\xi_{11}, \ldots, \xi_{1m}$$

$$\xi_{21}, \ldots, \xi_{2m}$$

$$\eta_1, \ldots, \eta_m.$$

Összesen 3 m számú adat a kiválasztott értékelési tényezőre.

Jogos az az elvárás, hogy az értékelők betartsák az $\eta_i \in [\xi_{1i}, \xi_{2i}]$ követelményt, vagyis a legvalószínűbb értéket minden esetben a hozzá tartozó becslési intervallumon belül helyezzék el:



A vizsgálat során a helytelenül megadott adathármasokat figyelmen kívül hagyjuk.

A bizonytalanság mértékére jellemző, a becslési intervallumok $[\xi_{1i}, \xi_{2i}]$ hosszúsága a lehetséges értékek $[a, b]$ intervallumához viszonyítva.

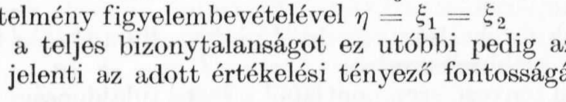
A $\xi_3 = \dfrac{\xi_2 - \xi_1}{b - a}$ valószínűségi változót *határozottsági tényezőnek* nevezzük.

Ha $\xi_3 = 1$, akkor $\xi_2 - \xi_1 = b - a$, vagyis a becslési intervallum az összes lehetséges érték intervallumával azonos; ha $\xi_3 = 0$, akkor $\xi_1 = \xi_2$ és az $\eta \in [\xi_1, \xi_2]$ követelmény figyelembevételével $\eta = \xi_1 = \xi_2$

Míg a $\xi_3 = 1$ a teljes bizonytalanságot ez utóbbi pedig az értékelő teljes határozottságát jelenti az adott értékelési tényező fontosságának megítélésében.

Az értelmezésből következik, hogy az értékelő határozottsága annál nagyobb minél kisebb ξ_3 értéke.

Az eddigiek nem adnak felvilágosítást a legvalószínűbb érték elhelyezkedésére a becslési intervallumon belül. Vegyünk egy általános értékelést:



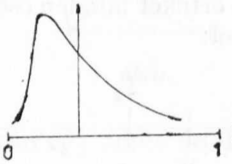
Bevezetjük, és eltolódási hányadosnak nevezzük a ξ_4 valószínűségi változót, mely azt mutatja, hogy az értékelő a becslési intervallum valamely végpontjához mennyire „érzi" közel a legvalószínűbb értéket.

$$\xi_4 = \begin{cases} \dfrac{\min(\eta - \xi_1, \xi_2 - \eta)}{\max(\eta - \xi_1, \xi_2 - \eta)}, & \text{ha } \xi_1 \neq \xi_2 \\ 1, & \text{ha } \xi_1 = \xi_2. \end{cases}$$

Ez az érték annál nagyobb, minél közelebb van a legvalószínűbb érték a becslési intervallum közepéhez. Ha

$$\xi_4 = 1, \text{ akkor } \eta = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \text{ vagy } \xi_3 = 0.$$

A döntéselőkészítés szempontjából azon értékelési tényezők megítélése nevezhető megbízhatónak, ahol az értékelők a tényleges értékek és a bizonytalanság megítélésében egyaránt nagy egyetértést mutatnak. Ez statisztikailag úgy interpretálható, hogy a legvalószínűbb értékek normális eloszlást követnek, viszonylag kis szórással, a hozzájuk tartozó határozottsági tényezők várható értéke kicsi, eloszlás-függvényük pedig lognormális (2. ábra).



2. ábra

Az ábra mutatja, hogy a határozottsági tényezők gyakorisága a várható értéktől balra nagyobb, ez azért kedvező, mert a határozottsági tényező akkor kicsi, ha az értékelők biztosak az értékelési tényező megítélésében. Ezen típusú súlyozási módszer (hármas pontbecslés) esetén az értékelési tényezők W súlyintervallum vektorának meghatározásához a becslési intervallumokat használjuk, vagy csak a legvalószínűbb értékeket a 3b szabály segítségével.

IV–V. Adott döntési helyzetben az összemérendő objektumokat adottnak tekintjük.

Az objektumok értékelésére egy $[a, b]$ intervallum-skálán történik hármas pontbecsléssel az alábbiak szerint:

1. Az értékelési tényező szempontjából átlagos tulajdonságú rendszereket az értékhalmaz középső, vagy ahhoz közel eső értékeivel jellemezzék.
2. Az átlagosnál kedvezőbb tulajdonságú rendszereket az átlagosnál nagyobb, a gyengébbeket az átlagosnál alacsonyabb számértékekkel jellemezzék.
3. A teljes értékhalmaz olyan részhalmazát rendeljék egy rendszer adott tulajdonságához, hogy a rendelkezésre álló információk alapján az értékelők pszichikailag biztosak legyenek abban, hogy a kérdéses tulajdonság tényleges értéke eleme az általuk megadott részhalmaznak.
4. Válasszák ki a tulajdonsághoz rendelt részhalmaz azon elemét, melynek tényleges értékként való bekövetkezését a legnagyobb valószínűséggel várják.
5. A tulajdonsághoz rendelt értékhalmazok különbségei — az első és a második szabály egyidejű betartásával — tükrözzék a kérdéses tulajdonság szempontjából a rendszerek közötti különbségeket.

E hozzárendelési szabályok lehetővé teszik, hogy az értékelők a különböző okból fakadó bizonytalanságukat egységes elvek alapján számszerű formában megfogalmazhassák. A bizonytalanság mértékei a kiválasztott részhalmaz viszonya az összes lehetséges értékek halmazához. Határozottság (meggyőződés) esetén a kérdéses tulajdonságot adott rendszer esetében az értékelő egyetlen számértékkel jellemzi, teljes bizonytalanság esetén pedig az összes lehetséges érték halmazát rendeli a tulajdonsághoz.

Az értékelés ezen módjával az objektumok súly-intervallum mátrixához jutunk:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ r_{k1} & \dots & r_{kn} \end{bmatrix}$$

R elemeinek (intervallumainak) származtatása hasonló az értékelési tényezők direkt súlyozásánál elmondottakkal. Tehát r_{ij} $(i = 1, \dots, k;\ j = 1, \dots, n)$ az O_i objektum E_j értékelési tényező szerinti csoportvéleményt tükröző intervallum.

VI. *A sorrend meghatározása*

Az objektumok helyezési sorrendjének meghatározásához most már rendelkezésünkre áll:

1. Az értékelési tényezők súly-intervallum vektora:

$$W = (W_1, \dots, W_n)$$

2. Az objektumok súly-intervallum mátrixa:

$$\underset{(k \times n)}{R} = (r_{pq})$$

A sorrend meghatározásához a [0,1]-n egyenletes eloszlású véletlenszám generátort használunk. [8]. Nagyítsunk ki egyetlen szimulációs lépést!

Egymás után generálunk véletlen számokat, majd ezeket rendre a W vektor illetve az R mátrix elemeire (intervallumaira) transzformáljuk.

Ilyen módon kapunk egy véletlenszám vektort: $s = (s_1, \dots, s_n)$, ahol $s_i \in W_i$ $(i = 1, \dots, n)$, és egy $\underset{(k \times n)}{X} = (x_{ij})$ véletlenszám mátrixot, ahol $x_{ij} \in r_{ij}$ $(i = 1, \dots, k_{ij} = 1, \dots n)$. s_j az E_i-hez rendelt súlyértéket reprezentálja az adott lépésben, míg k_{ij} az O_i objektum E_j értékelési tényezőhöz tartozó aktuális súlyértéke.

Szemléletesen:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & s_1 & s_2 & & s_n \\
 & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
 & E_1 & E_2 & \dots & E_n \\
\hline
O_1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\
\vdots & & & & \\
O_k & x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kn}
\end{array}$$

Az értékelési tényezők százalékban kifejezett relatív fontosságát az

$$E_1 \to \frac{s_1}{\sum_j s_j} 100(\%),\ E_2 \to \frac{s_2}{\sum_j s_j} 100(\%),\ \ldots,\ E_n \to \frac{s_n}{\sum_j s_j} 100(\%)$$

hozzárendelések hordozzák.

Az O_i objektum E_j tényező szerinti relatív jóságát az

$$\frac{x_{ij}-a}{b-a} \text{ hányadosok fejezik ki } (j = 1, \ldots, n).$$

Egy adott szimulációs lépésben minden objektumot egyetlen számadattal szeretnénk jellemezni. Az

$$O_i \to p_i = \frac{s_1}{\sum_j s_j} \cdot 100 \frac{x_{i1}-a}{b-a} + \ldots + \frac{s_n}{\sum_j s_j} \cdot 100 \frac{x_{in}-a}{b-a} (\%)$$

hozzárendeléssel százalékban kapjuk meg az O_i objektum jóságát minden értékelési tényezőt figyelembe véve. A megfelelő összevonásokat és kiemeléseket elvégezve:

$$p_i = \frac{\sum_j s_j x_{ij} - a \sum_j s_j}{(b-a) \sum_j s_j} \cdot 100\ (\%)$$

súlyértékhez jutunk.

$$p_i = \big(\sum_j s_j x_{ij} - k_1\big) k_2, \quad \text{ahol} \quad k_1 = a \sum_j s_j,\ k_2 = \frac{100}{(b-a)\sum_j s_j}.$$

Ez a hozzárendelési szabály skálafüggetlen, hiszen az adott objektum relatív jósága nem változik. Ez a tulajdonság lehetővé teszi, hogy az $[a, b]$ értékelő skálát szabadon megválaszthassuk.

Ha O_i minden értékelési tényező szempontjából a legmagasabb értékelést kapja (az intervallum b végpontját), akkor a hozzárendelt súlyérték: $p_i = 100\%$. $p_i = 0\%$-os jóság akkor és csak akkor jöhet ki, ha a véletlenszámgenerátor minden tényező szempontjából az a végpontot választja.

Az alapcikkben [8] Kahne az $O_i \to p_i = \sum_j s_j x_{ij}$ hozzárendeléssel él, és a [0,10] értékelő skálát javasolja. Ez a hozzárendelési szabály azonban nem skálafüggetlen, de a [0,10] értékelő skálával reális képet ad.

Esetünkben a javasolt formula a következőképpen alakul:

$$O_i \to p_i = c \cdot \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij}, \quad \text{ahol} \quad c = \frac{10}{\sum_j s_j}; \quad \text{mivel} \quad a = 0,\ b = 10.$$

Így az objektumok közötti különbségek arányai ugyanazok mindkét esetben.

Ha az adott lépésben minden objektum esetében megtesszük a fenti hozzárendelést: $O_1 \to p_1, \ldots, O_k \to p_k$, akkor egy lépésben minden objektumot egyetlen számértékkel jellemeztünk.

Ha a $p = (p_1, \ldots, p_n)$ vektort sorba rendezzük, akkor megkapjuk az objektumok sorrendjét az adott lépésben. Legyen a sorba rendezett vektor

$p_s = (p_{i1}, \ldots, p_{in})$, ahol az i_j index arra utal, hogy az i objektum a j-edik a rangsorban az adott lépésben. Azonban nem egyetlen lépés alapján akarjuk eldönteni az objektumok tényleges rangsorát, hiszen eleve m számú értékelésből indultunk ki.

A fentiekben kinagyított egyetlen szimulációs lépést a bizonytalanságok mértékétől függően több százszor (akárhányszor) megismételjük.

Tételezzük fel, hogy M számú szimulációs lépés után megállunk. Az objektumok tényleges sorrendjének megállapításához összegezni kell az egyes lépésekben meghatározott $p^{(j)}$ vektorokat (a felső j index a szimulációs lépésre vonatkozik).

Legyen $z = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$, ahol $z_i = \sum_{j=1}^{M} p_i^{(j)}$

z-t (szigorúan) csökkenő sorrendbe rendezve:

$$z_s = (z_{i_1}, \ldots, z_{i_k});\ z_{i_1} \geq z_{i_2} \geq \ldots \geq z_{i_k}$$

Tehát a sorrend:

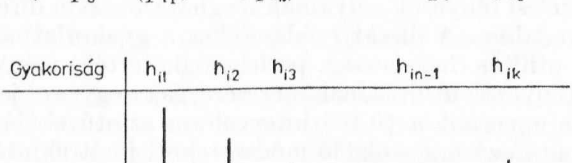
Helyezés	1	2	...	k
Objektum	i_1	i_2	...	i_k

Az objektumok helyezéseinek gyakoriság mátrixa:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1k} \\ h_{k1} & \ldots & h_{kk} \end{bmatrix},$$

ahol h_{ij} jelenti az M számú értékelés után az O_i objektum j-edik helyezésének gyakoriságát.

Ehhez a mátrixhoz úgy jutunk, hogy a lépésenként nyert rangsorhoz helyezéseket rendelünk; a $p_s = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_k})$ vektor alapján $p_{i_1} \to 1., \ldots, p_{i_k} \to k.$ helyezést.



3. ábra. Hisztogram (O_i)

Nyilván $\sum_{j=1}^{k} h_{ij} = M(i = 1, \ldots, k)$, hiszen minden objektum, minden szimulációs lépésben kap valamilyen helyezést.

Hasonlóan $\sum_{i=1}^{k} h_{ij} = M(j = 1, \ldots, k)$, hiszen minden lépésben létezik első, második, stb. helyezés.

Célszerű objektumonként hisztogramot készíteni a helyezések gyakoriságairól. (3. ábra)

Ezek a hisztogramok jól szemléltetik, hogy az egyes objektumoknál hányadik helyezés dominált a többi helyezéshez viszonyítva.
A sorrend megállapításának egy másik lehetséges módja, hogy az egyes helyezésekhez pontértékeket rendelünk

Helyezés	1	2	...	k
Pontérték	t_1	t_2	...	t_k

Ha a H mátrixot jobbról szorozzuk a $t = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$ pontozóvektorral:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{1k} \\ \vdots & \vdots \\ h_{k1} & h_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix},$$

akkor a $q = (q_1 \dots q_k)$ vektor sorba rendezésével juthatunk el az objektumok sorrendjéhez.

Ez utóbbi sorrendmegállapításnál problémát okoz a pontozó vektor meghatározása. Továbbá nem veszi figyelembe, hogy a lépésenkénti sorrendmegállapításnál mennyire voltak élesek a különbségek.

Fenti eljárással az objektumok probabilisztikus rangsorát kapjuk, amely a vezetői döntésekhez közvetlenül felhasználható.

Az utilitás mérésének néhány problémája

Az előzőekben vázolt eljárás során a páros összehasonlítás módszere mellett (helyett) az értékelési tényezők súlyainak meghatározására direkt módszereket is ajánl a szakirodalom. A direkt módszereket a gyakorlatban széles körben alkalmazzák, az utilitás (hasznosság, pszichológiai érték) mérésére. KAHNE az egyes értékelési tényezők utilitásának mérésére, és az egyes objektumok jóságának megítélésére egyaránt a [0,10] intervallum szintű skálát javasolja [8]. Az utilitás meghatározására szolgáló módszerekről jó áttekintést ad KINDLER [9].

A direkt módszerek elméleti alapjai a pszichofizikából származnak. TORGERSON [13] sok kiadást megért standard műnek számító skálaelméleti könyvének 4. fejezetében részletesen tárgyalja a direkt módszerek pszichológiai és matematikai kérdéseit. A direkt módszerek intervallumskálán mérik az utilitást, de nem felelnek meg a Neumann–Morgenstern-féle axiómáknak. KNEPPRETH és társainak beszámolója [12] szerint szoros korrelációt találtak a direkt módszerek és az axiomatikus szerencsejáték (gamble) módszerek között. Az operációkutatásban gyakran alkalmazzák CHURCHMAN–ACKOFF–ARNOFF módszerét [2; 3].

A direkt módszereknek két osztálya van: az egyikben két vonatkoztatási pontot használnak, a másikban egyet. A két vonatkoztatási pontú direkt módszerekben a két szélsőértéket, a 0 pontot és egy másikat rögzítenek (pl. °C hőmérsékleti skála), az egy vonatkoztatási pontúban csak egyet. Az előbbiről jó áttekintést ad ECKENRODE [5], valamint alkalmazási esettanulmánnyal együtt HUBER—SAHNEY—FORD [7], az utóbbiról EKMAN [6], valamint COOMBS és KOMORITA [4], alkalmazásairól KLAHR [11].

A felsoroltakon kívül még igen sok publikáció található a direkt módszerek elméleti és gyakorlati kérdéseiről, de az említettek alkalmasak arra, hogy e gyakorlatilag széles körben használt módszercsoport elméletéről és alkalmazásairól áttekintést kapjunk. A fentiek alapján az eljárásban általunk használt skála az értékelési szabályok alapján egy vonatkoztatási pontú, és ez a pont az átlag (5 skálaérték).

A skálaszint megválasztásán és a vonatkoztatási pont(ok) kijelölésén kívül további probléma az utilitás meghatározásánál a bizonytalanság kezelése. Kahne a bizonytalanság számszerű megfogalmazására javasolja, hogy bizonytalanság esetén a kérdéses objektumot a szakértők ne egyetlen értékkel, hanem intervallummal jellemezzék, az intervallum nagysága legyen arányos a bizonytalanság mértékével (fix érték biztos, teljes intervallum teljesen bizonytalan ítéletet jelent). Hasonló eljárást találunk a PERT hálótervezési módszerben, ahol optimista, legvalószínűbb és pesszimista időbecslést alkalmaznak. A gazdasági kockázattal kapcsolatban ún. ,,háromszögeloszlásokkal'' dolgoznak BÁCSKAI és szerzőtársai [1]. Az eljárásban az utilitás meghatározására hármaspont becslést alkalmaztunk, (alsó határ, legvalószínűbb érték, felső határ), nem tételeztük fel azonban a háromszögeloszlást.

Az ismertetett szimulációs modell szerkezetéből következik, hogy a véletlenszám generátor eloszlásának jellege befolyásolja az eredményt, az objektumok egymáshoz való viszonyát és a bizonytalanság megítélését. KAHNE [8] egyenletes eloszlású véletlenszám generátort javasol, bár megjegyzi, hogy az eloszlás függ a konkrét adatok jellegétől.

Az irodalomból ismert feltételezések alkalmazása mellett vizsgáltuk, hogy tényleges értékelési helyzetben kapott hármaspont becslések esetén a legvalószínűbb értékek milyen eloszlást követnek a becslési intervallumon belül.

Hármaspont becslések statisztikai vizsgálata

Vizsgálatunkban az összemérendő objektumok a Borsodi Szénbányák üzemei voltak. Az összemérés célja az üzemek preferencia sorrendjének meghatározása, az általános döntési szempont az üzemek fejleszthetőségének megítélése. Az objektumok értékelését a NIM Továbbképző Központ egyik tanfolyamának hallgatói végezték tíz értékelési tényező alapján.

Az értékelési helyzet valóságosnak tekinthető: a hallgatók bányászati szakemberek, a különböző üzemekhez tényleges műszaki-gazdasági információkat adtunk meg és megfelelő idő állt a hallgatók rendelkezésére becsléseik kialakításához.

Az értékelő skála [0,10] zárt intervallum, a tulajdonságok jellemzésére felhasználható összes lehetséges érték halmaza. A skála beosztása egyenlő körű, az osztáspontok távolsága egytized. Az előzőekben megadott hozzárendelési szabályok alapján egy-egy értékelési tényező szerint azok az objektumok kapták a magasabb értékeket, melyek az adott tulajdonság alapján fejlesztési szempontból kedvezőbbek. A becslési intervallumok az összes lehetséges érték halmazának részhalmazai.

Minden értékelő, minden objektumot minden értékelési tényező alapján jellemzett. Az értékelők száma $m = 26$, az objektumok száma $n = 8$, az értékelési tényezők száma $k = 10$. Ennek alapján a feldolgozott adatok száma 6240.

Az objektumok megítéléséhez az adatokat az értékelők táblázatos formában kapták üzemenként, esetenként aknák szerinti bontásban is. Valamennyi üzemre egy értékelési tényezőhöz minden értékelő azonos információval rendelkezett. Az értékelő adathármasok statisztikai vizsgálatát ezért az objektumok megkülönböztetése nélkül (azokat egy objektumnak tekintve) értékelési tényezőnként végezzük el. Az értékelés során az értékelők személye nem változott, ezért a határozottságot befolyásoló szubjektív hatások változásától az eredmények értelmezésénél eltekinthetünk. A számítások eredményeit táblázatban foglaltuk össze.

Értékelési tényező	Várható érték			Szórás			Eloszlás					
	ξ_1	η	ξ_2	ξ_1	η	ξ_2	norm η	log-norm ξ_3	Várh. érték ξ_3	szórás ξ_3	Várh. érték ξ_4	szórás ξ_4
E_1	4,16	5,12	5,92	2,21	2,16	2,21	98	99	0,18	0,10	0,61	0,35
E_2	4,05	4,82	5,73	2,21	2,20	2,15	90	99	0,17	0,10	0,54	0,37
E_3	4,48	5,45	6,24	1,76	1,68	1,69	99	99	0,18	0,10	0,63	0,37
E_4	4,38	5,36	6,20	2,06	2,10	2,14	98	99	0,18	0,11	0,62	0,38
E_5	4,43	5,27	5,92	2,15	2,04	2,08	90	nem	0,15	0,10	0,55	0,40
E_6	4,31	5,31	6,21	2,40	2,32	2,35	95	nem	0,19	0,19	0,55	0,38
E_7	4,21	5,20	6,14	2,74	2,52	2,61	95	nem	0,19	0,20	0,53	0,40
E_8	3,78	4,75	5,73	1,97	1,83	2,02	99	nem	0,19	0,18	0,57	0,39
E_9	4,02	5,15	6,33	1,98	1,62	1,78	95	99	0,23	0,22	0,60	0,36
E_{10}	3,41	4,36	5,49	1,92	1,84	2,09	99	nem	0,21	0,20	0,58	0,39

Az eredmények értelmezése

Az a tény, hogy vizsgálatunkhoz egyetlen értékelés eredményei állnak rendelkezésünkre, a következtetések levonásában óvatosságra int. Az elmondottak alapján a továbbiakban megkíséreljük a η várható értékének, a η és ξ_3 eloszlásának, a ξ_3 és ξ_4 várható értékeinek értelmezését az értékelési helyzettel összefüggésben.

1. A legvalószínűbb értékek (η) várható értéke

A táblázat adataiból látható, hogy a η várható értéke valamennyi értékelési tényező esetén a lehetséges értékek intervallumának középső vagy ahhoz igen közeleső értékeit tartalmazza. A becslési intervallumok transzformációja alapján ez azt jelenti, hogy az értékelők az első és második szabályt betartották. Ha az η várható értéke a lehetséges értékek intervallumának közepétől lényeges mértékben eltér, akkor az értékelések felvételtechnikai okok miatt nem megbízhatók, ezért az értékelést az értékelési szabályok újbóli értelmezése után meg kell ismételni.

2. A η és a ξ_3 eloszlása

Az értékelés során azt tapasztaltuk, hogy az értékelők zöme nem volt hajlandó az objektumokat egyetlen értékkel jellemezni, ha azonban a becslési intervallum meghatározásával bizonytalanságát kifejezhette, hajlandó és képes volt megadni a becslési intervallum legnagyobb gyakorisággal várt elemét, ami közvetve azt jelenti, hogy az objektumot egyetlen értékkel jellemezte.

A legvalószínűbb értékek eloszlása valamennyi értékelési tényezőre nagy valószínűséggel normális. Ez azt jelenti, hogy az értékelők az általuk megadott becslési intervallumon belül különbséget tudnak tenni, az egyes értékek bekövetkezését nem azonos valószínűséggel várják. Az előzőekben említettük, hogy a szimulációs döntéselőkészítési modellek a különböző értékek bekövetkezését egyenletes eloszlásúnak tekintik. Eredményeink alapján ez a feltételezés nem minden esetben felel meg az értékelők „valószínűség érzetének".

A határozottsági tényező az értékelési tényezők felénél igen nagy valószínűséggel logaritmikus normális, második felénél nem. A határozottsági tényező nagyságát és eloszlását nagyszámú objektív és szubjektív tényező befolyásolja, ezért a meglevő empirikus anyag alapján elemzésére nem vállalkozunk. Megjegyezzük azonban, hogy az értékelők viselkedésének tanulmányozásában a határozottsági tényező vizsgálatának kiemelkedő szerepe lehet.

3. A ξ_3 és ξ_4 várható értékei

A határozottsági tényező várható értékeinek részletes elemzésére az előző pontban előadott okok miatt nem vállalkozunk, az értékeléshez rendelkezésre álló adatokkal összefüggésben két megjegyzést teszünk:

— a határozottsági tényezők várható értékei közti különbségek kisebbek, mint azt a különböző értékelési tényezőkhöz tartozó adatok mennyiségének és minőségének különbözősége indokolja

— a legkisebb várható érték az E_5 (a termelt szén minősége) értékelési tényezőhöz tartozik, mely az adatok alapján a legegyértelműbb, a legnagyobb az E_9 (szociális körülmények) melynek megítélése a legösszetettebb.

Az eltolódási hányados értékei azt mutatják, hogy az értékelők nem a becslési intervallum középső értékét várják a legnagyobb valószínűséggel, vagyis nem minden esetben adnak szimmetrikus környezetet a legvalószínűbb érték körül.

(Beérkezett: 1978. szept. 7-én).

IRODALOM

1. BÁCSKAI—HUSZTI—MESZÉNA—MIKÓ—SZÉP: A gazdasági kockázat és mérésének módszerei. Budapest, 1976. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
2. CHURCHMAN, C. W.—ACKOFF, R. L.: *An approximate measure of value.* Operations Research, 2, pp. 172—187, 1954.
3. CHURCHMAN—ACKOFF—ARNOFF: *Introduction to operations research.* New York, 1957. Wiley
4. COOMBS, C. H.—KOMORITA, S. S.: *Measuring utility of money through decisions,* American Journal of Psychology, 71, pp. 383—389, 1958.
5. ECKENRODE, R.: *Weighting multiple criteria.* Management Science, 12, pp. 180—192, 1965.
6. EKMAN, G.: *Two generalized ratio scaling methods* Journal of Psychology, 45, pp. 287—295, 1958.
7. HUBER—SAHNEY—FORD: *A study of subjective evaluation models* Behavioral Sciences, 14, pp. 184—189, 1969.

8. Kahne, S.: *Procedure for optimizing development decisions.* Automatica, 11. k., pp. 261–269, 1975.
9. Kindler, J.: *A többtényezős döntések elmélete és gyakorlata* (BME Ipari Üzemgazdaságtani Tanszék, 1978. május)
10. Kindler J.—Papp O.: *Komplex rendszerek vizsgálata.* Műszaki Könyvkiadó, 1977.
11. Klahr, D.: *Decision making in complex environment: The use of similarity judments to predict preferences.* Management Science, 15, pp. 595–618, 1969.
12. Kneppreth, N. P. et al.: *Techniques for the assessment of worth.* Army Research Institute for the Behavioral Sciences, Arlington, VA., 1974.
13. Torgerson, W. S.: *Theory and methods of scaling.* New York, 1967. Wiley

MODEL AND PROCEDURE FOR THE STUDY OF COMPLEX SYSTEMS ON THE BASIS OF ENGINEERING-ECONOMIC CRITERIA

We present a model for the preparation of multifactor decisions. The model can manage uncertainty in an explicit form by means of evaluation rules and simulation techniques and gives a probabilistic order of projects to be compared.

For the weighting of evaluation factors the method of pairwise comparisons and the triple point estimation on a [0,10] interval scale is proposed. For the evaluation of projects by factors also the [0,10] interval scale is used as a utility-measuring scale with one reference point. The model is independent of scale, qualitative and quantitative factors can be managed equally well.

The location of the most probable value within the interval as well as the character of the distribution were examined by a statistical analysis of triple point estimations obtained in evaluation situation. It has been found that the most probable value follows normal distribution with great probability and does not always fall on the middle of the estimation interval.

МОДЕЛЬ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

В данной работе излагается модель подготовки принятия решений, пригодная для подготовки многофакторных решений. Данная модель в состоянии обрабатывать неопределенность в явной форме посредством правил по оценке и симуляционной техники и дает вероятностный порядок сравниваемых объектов.

Для определения веса факторов оценки рекомендуется метод парного сопоставления и метод тройственной оценки в интервале диапазону [0,10]; для оценки объектов по факторам оценки также используется интервал [0,10] как шкала измерения утилитарности относительно какой-либо точки. Модель в состоянии обрабатывать качественные и количественные факторы, независимые от шкалы.

Посредством статистического анализа оценки тройственной точки, полученной в результате оценки положения изучалось наиболее вероятное размещение данного значения в пределах интервала, а также и характер распределения. Можно было придти к такому выводу, что наиболее вероятное значение с большой вероятностью имеют нормальное распределение и не всегда располагается в центре оценочного интервала.

Dobó Andor

A rendszerek hatékonyságával kapcsolatos matematikai vizsgálatok

A rendszerek hatékonyságával kapcsolatos irodalmat tanulmányozva megállapíthatjuk, hogy ezen a területen sem alakult ki napjainkig egységes terminológia, ami részben abból is fakad, hogy gyakran kölcsönösen ellentmondó feladatok mellett kell valamilyen hatékonyságot kifejező számszerű jellemzőt választani. Előfordul az is, hogy egy és ugyanazon szakkifejezésnek (pl. efficiencia) a különböző munkákban különböző értelmet tulajdonítanak; más esetben egy és ugyanazon fogalmat különböző szavakkal fejeznek ki. De megtörténik az is, hogy egyazon cikkben a ,,hatékonyság'' kifejezés jelentése a szöveg folyamán változik. Mindebben nincs semmi különös, ha meggondoljuk, hogy a gyakorlatilag fontos feladatok nagy változatossága a rendszereknek hol az egyik, hol a másik számszerű jellemzője vizsgálatát teszi szükségessé.

Előfordulhat az is, hogy néha hasznos kiszámítani a rendszer valamennyi hatékonyságot jellemző mutatóját. Más esetben a rendszer optimális hatékonyságát kell értelmezni, elérni és tartósan biztosítani. Ilyen eset fordul elő, amikor például egy termelő berendezést T ideig akarunk igénybe venni, használni úgy, hogy ennél az időközben keletkezett zavarokat, hibákat elhárítjuk, kijavítjuk. Jelöljük ξ_i-vel az i-edik hiba elhárításához szükséges ráfordítást. Azon túlmenően, hogy ξ_i véletlen ingadozást mutat, az értéke nyilván attól is függ, hogy a berendezés mennyi ideig működött már és e közben hányszor és hol, illetve milyen részegysége hibásodott meg. Tekintettel kell lennünk arra is, hogy minden hiba előfordulása a rendszernek a termelésből való kiesése miatt veszteséget, kárt okoz. Legyen η_i az i-edik hiba miatt keletkezett veszteség. Ekkor a T idő alatti hibaelhárítás, valamint a termeléskiesésből eredő kár összes költségének átlagos értéke

$$C(T) = M\left\{\sum_{k=1}^{\nu(T)} (\xi_k + \eta_k)\right\}$$

lesz, ahol $\nu(T)$ a T idő alatt előforduló hibák számát jelenti. Nem egy esetben optimálisnak mondhatjuk a hatékonyságot, ha például $C(T)$ minimális. E példa kapcsán is érzékelhető, hogy a hatékonyság vizsgálata gyakran *a megbízhatóságelmélet körébe* vágó kérdések megválaszolását igényli. Ez főleg akkor fordul elő, ha *a hatékonyság a rendszer hibamentességével, tartósságával, javíthatóságával függ össze,* és például optimalizálni (növelni) akarjuk a rendszer hibamentes működésének átlagos időtartamát, vagy a hibátlan munka valószínűségét stb.

Napjainkban a gazdasági folyamatok szabályozása szükség esetén a beavatkozások mértékének a megválasztását, komplex hatékonyságot elősegítő mutatórendszerek kialakítását követeli meg. (Lásd például az OT-nak és az OMFB-nek a Tervgazdasági Értesítő 1978. április 6. számában közzétett közös útmutatóját a termelési szerkezet átalakításának műszaki-gazdasági kritérium rendszeréről).

Sajnos azonban ma még nem lehetünk kellő biztonságban afelől, hogy az egyik-másik választott mutató valóban híven ki is fejezi azt, amit reprezentálnia kellene. E helyen nem bocsátkozunk a mutatók gyakorlati alkalmazásakor előforduló problémák elemzésébe. Hogy a feldolgozás során nem egy esetben tényleges nehézségek, gondok, problémák vannak, azt jól érzékelteti például JÁNOSI FERENC [8] cikke is és a reagálások reá, melyek részben a jelenleg alkalmazott termelékenységi mutatók alkalmazhatóságával vagy tarthatatlanságával függenek össze. Egy másik hatékonysági mutató kritikai feldolgozását adja a [9]-ben POLÁK MIKLÓS és SUBICZ PÉTER, akik azt vizsgálták, hogy mennyire alkalmas az e célra használt mutató a KGM vállalatok bizonyos termékcsoportjainak elbírálására a népgazdasági hatékonyság szempontjából. (A cikk szerint kb. 880 termékcsoportra meghatározzák e mutató értékét és nagyság szerinti sorba rendezésük alapján döntik el, melyik termékcsoport termelése a gazdaságosabb). A szerzők kimutatták, hogy „. . . a jelenleg használt mutatószám alapvetően hibás, mivel egyrészt nem méri pontosan a ráfordításokat, az alapvető erőforrások közül csak a munkaráfordításokat értékeli, másrészt a vállalatok közötti differenciálás során hatása rossz irányú, mivel az alacsonyabb technikai felszereltséggel termelő vállalatok tevékenységét részesíti előnyben."

Úgy vélem az itt közöltek is jól érzékeltetik, hogy az újabb irányú kutatások mellett számos eddig alkalmazott mutatót, mérőszámot, matematikai kifejezést stb. mélyrehatóbb elemzés tárgyává kell tenni a célravezetőbb és hatékonyabb alkalmazás elősegítése érdekében. Szükség van erre azért is, mert a társadalmi termelés hatékonyságának a növelése megköveteli, hogy a minőségi mutatók rendszere sok gazdasági kérdést más formában tükrözzön és oldjon meg mint eddig.

Ebből kifolyólag e sorok írója úgy véli, hogy a gazdasági irányítási célokat jobban szolgáló komplexebb mutató rendszereknek a behatóbb tanulmányozása, vizsgálata előbb-utóbb a „*hatékonyságelmélet*" tudományosabb megalapozásához fog vezetni, mely sajátos e célra kialakított módszereket és eljárásokat is magába foglal, maga után von; s az egzaktabb megalapozás pedig a matematikai eszközök még számottevőbb igénybevételén, felhasználásán fog alapulni. *A jelen dolgozat* ezt a törekvést igyekszik szolgálni; s *a matematika elvontabb eszközeivel próbálja a hatékonyság témakörébe vágó kérdéseket megfogalmazni, modellezni, megválaszolni, hogy azután az elvont meggondolásokat minél szélesebb körű konkrét gyakorlati alkalmazásoknál lehessen ténylegesen hasznosítani.*

A rendszer jellemző tulajdonságát valószínűségi változóként kezeli, s a kívánt mutatókat várható értékként származtatja. Általában alapkövetelménynek tekinti, hogy a választott mutató várható értéke létezzék, továbbá, hogy ehhez képest a mutató szórása gyakorlatilag elhanyagolhatóan kicsiny legyen.

A dolgozat egyébként *a hatékonyság fogalmát igen általánosan értelmezi*. Ebből kifolyólag *nem törekszik azt egyértelműen definiálni*, inkább úgy tekinti, mint ahogyan a valószínűségszámításban szokás például a szóródás fogalmát tekinteni. Miként a szóródásnak (ingadozásnak) is számos számszerű jellemzője lehet (pl. szórás, várható eltérés, interkvartilis félterjedelem stb.), ugyanúgy a hatékonyságot is számos jellemző mérheti. *Esetektől függően kell eldönteni, hogy* *mikor, milyen számszerű jellemzőt célszerű a hatékonyság mértékének választani.*

Természetesen nemcsak valamely rendszernek, hanem a beruházásoknak, beruházási ráfordításoknak, gazdasági döntéseknek, technológiai változatoknak, erőforrás elosztásoknak a hatékonyságát is vizsgálhatjuk, s mindez a hatékonyság mérésének más aspektusból való megközelítését igényli. A megközelítési, illetve mérési módokat illetően lásd még [21]-t.

Az olvasó minden bizonnyal észre veszi, hogy a dolgozat felépítése szerkezetileg nem eléggé egységes képet mutat. Úgy véltem, a hatékonyságelmélet önálló tudományággá válásának feltétele a sajátos problémáknak sajátos eszközökkel való vizsgálata, s hogy ez a gyakorlatban megvalósulhasson, számos szakterület kutatóinak, művelőinek összefogását, együttgondolkodását igényli. Éppen ezért, a megoldásra váró problémák minél kiterjedtebb, szerteágazóbb felvázolásával, érzékeltetésével, a megoldástechnika lehetséges útjainak, módjainak bemutatásával is igyekeztem a matematikusok, közgazdászok, mérnökök, felhasználók figyelmét felkelteni, felhívni, s a további tennivalókhoz közreműködésüket, segítségüket kérni. Csak ilyen összefogás mellett látszik lehetségesnek a kutatási-fejlesztési munkák során jelentkező és számos területet különböző mélységben érintő szakmai problémák, nehézségek leküzdése, áthidalása.

Végezetül szeretnék hálás köszönetet mondani a lektoroknak értékes és hasznos tanácsaikért, s azért az ösztönzésért és bátorításért, amelyek munkám teljesebbé tétele irányában hatottak.

1. Az alapproblémák és egy alapmodell

Legyen $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ egy *Kolmogorov* valószínűségi mező. (Ez azt jelenti, hogy Ω tetszőleges absztrakt halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája és P egy valószínűségi mérték $\mathcal{A}$-n, azaz nem negatív, σ-additív halmaz-függvény, amelyre $P\ (\Omega) = 1$).

Tekintsük az Ω-n értelmezett és az $\mathcal{A}$ σ-algebrára nézve mérhető t paramétertől is függő $\xi(t, \omega)$ $(\omega \in \Omega;\ 0 \leq t < \infty)$ valós függvényt, amit definíció szerint valószínűségi változónak nevezünk. (A $\xi(t, \omega)$ függvény akkor mérhető, ha az $\{\omega\colon \omega \in \Omega,\ \xi(t, \omega) < c\}$ ún. nívóhalmazok minden valós c-re $\mathcal{A}$-ba tartoznak).

Tételezzük fel, hogy $\xi(t, \omega)$ egy rendszer valamilyen tulajdonságát, viselkedését jellemzi, írja le.

Legyen $g(x)$ az x valós változónak egy tetszés szerinti (mérhető) függvénye. A valószínűségelméletből ismeretes, ha a t paramétertől függő $\xi(t, \omega)$ ω-ra nézve valószínűségi változó, akkor az $\eta = g[\xi(t, \omega)]$ is ω-ra nézve valószínűségi változó, amennyiben $g(x)$-re igen általános feltételek (pl. Borel-mérhetőség) teljesülnek.

Abban az esetben, ha létezik az $\eta = g(\xi)$ valószínűségi változó $M\{\eta\}$ várható értéke, akkor azt — mint látni fogjuk — a vizsgált rendszer egy ilyen általános jellemzőjének tekinthetjük. (Talán nem érdektelen emlékeztetni arra, hogy sztochasztikus folyamatnak nevezzük a $\xi(t, \omega)$ valószínűségi változók bármely összességét, ahol a t valós paraméter egy véges vagy végtelen intervallumban fekvő összes számon fut végig. Gyakran előfordul, hogy a t és ω-ban kétváltozós $\xi(t, \omega)$ függvény egy rendszer állapotát jellemzi a t időpontban. Rögzített ω esetén, ha t végigfut az értelmezési tartományán, akkor az így kapott valós függvényt a sztochasztikus folyamat realizációjának nevezzük.)

A várható érték definíciója szerint egyébként

$$M\{\eta(t)\} = M\{g[\xi(t, \omega)]\} = \int_{\Omega} g[\xi(t, \omega)]dP(\omega). \tag{1}$$

Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk, rámutatunk, hogy (1) valóban igen általánosnak tekinthető, mivel abból speciális esetekként származtatható a sztochasztikus folyamat *eloszlás függvénye, megbízhatóság függvénye* stb.

Így például, ha $\mathcal{A}_{x,t} = \{\omega: \omega \in \Omega, \xi(t, \omega) < x\}$

és
$$g[\xi(t, \omega)] = \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \in \mathcal{A}_{x,t} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$
akkor

$$\int_{\Omega} g[\xi(t, \omega)]dP(\omega) = \int_{\mathcal{A}_{x,t}} g[\xi(t, \omega)]dP(\omega) + \int_{\Omega-\mathcal{A}_{x,t}} g[\xi(t, \omega)]dP(\omega) = \tag{2}$$

$$= \int_{\mathcal{A}_{x,t}} dP(\omega) = P\{\mathcal{A}_{x,t}\} = P\{\xi(t, \omega) < x\},$$

ami nem más, mint a folyamat eloszlás függvénye.

Az $\bar{\mathcal{A}}_{x,t} = \{\omega: \omega \in \Omega, \xi(t, \omega) \geq x\}$ választással hasonló módon a folyamat megbízhatóság függvényét kapjuk. (Lásd még [2]).

A továbbiakban, ha nem okoz félreértést a $\xi(t, \omega)$ jelölés helyett az egyszerűbb $\xi(t)$ jelölést használjuk a sztochasztikus folyamat leírása, jellemzése céljából. Ha pedig a valószínűségi változó t-től független, akkor a $\xi(\omega)$ helyett a ξ jelölést használjuk.

Gyakorlati szempontból különösen érdekes az az eset, amikor $\eta(t)$ a rendszerre nézve bizonyos kedvezőnek vélt állapotok hosszának összegét jelenti a $(0, T)$ intervallumban.

Egy ilyen esetet foglal magában az alábbi modell.

Modell: Tekintsük a $\{\xi(t), 0 \leq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamatot, ahol a $\xi(t)$ valószínűségi változó érték készletét az Ω állapottér elemei alkotják. Legyen $\Omega = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, ahol $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ diszjunkt (közös pont nélküli) halmazok. Ha a rendszer például számítógépet reprezentál, akkor $\mathcal{A}$ jelentheti azt, hogy működési, $\mathcal{B}$ pedig, hogy valamilyen oknál fogva (javítás, karbantartás, munkaerőhiány, munkával való ellátás hiánya stb.) állási (nem működési) állapotban van. Tegyük fel, hogy $\xi(0) \in \mathcal{A}$ és hogy $\xi(t)$ folyamat növekvő t értékekre váltakozva $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ állapotot vesz fel. (Itt most a rendszer váltakozva $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, . . . állapotba kerül).

Jelölje az egymás utáni $\mathcal{A}$ állapotban való tartózkodási időtartamokat rendre $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ és a $\mathcal{B}$ állapotban való tartózkodási időtartamokat pedig $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ valószínűségi változó, s tételezzük fel, hogy ezek pozitívak továbbá, hogy teljesen függetlenek és azonos eloszlásúak, méghozzá:

$$P(\xi_n < x) = A(x); \quad P(\zeta_n < x) = B(x) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{3}$$

Tételezzük fel, hogy az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ állapotban való tartózkodást még külön is az alábbiak jellemzik.

Az első $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ véletlen időpontban mindig $\mathcal{A}$ típusú állapot kezdődött el és a $\delta_n = \tau_1$ időpontban az $\mathcal{A}$ állapotban való tartózkodás befejeződött $(n = 1, 2, \ldots; \delta_0 = 0 < \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_n)$.

A $\delta_{i+1} - \delta_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ különbségekről feltesszük, hogy teljesen független azonos eloszlású valószínűségi változók, vagyis hogy:

$$P(\delta_{i+1} - \delta_i < x) = A^*(x) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

továbbá, hogy a $\delta_k = u_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ esetén $\varrho(u_k)$ valószínűséggel következik be $\mathcal{A}$ típusú állapot és $1 - \varrho(u_k)$ valószínűséggel $\mathcal{B}$ típusú állapot. Itt $\varrho(t)$ a $0 \leq t < \infty$ intervallumon értelmezett függvény, melyre nézve $0 \leq \varrho(t) \leq 1$. (A $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_i \ldots$ sorozatban az „n" index $\varrho(t)$ megválasztásától függ!)

A τ_1 időpontban befejeződött $\mathcal{A}$ típusú állapot után $\mathcal{B}$ típusú állapot kezdődik el az előzőekhez hasonlóan, csak most itt az időkülönbségeket $\gamma_{i+1} - \gamma_i$ jelöli. Tegyük fel, hogy $\gamma_{i+1} - \gamma_i$ $(\gamma_0 = 0;\ i = 0, 1, 2, \ldots)$ pozitív valószínűségi változók teljesen függetlenek, továbbá teljesen függetlenek a $\delta_{i+1} - \delta_i$ valószínűségi változóktól is.

Tételezzük fel még azt is, hogy

$$P(\gamma_{i+1} - \gamma_i < x) = B^*(x) \tag{5}$$

és hogy a $\gamma_k = s_k$ $(k = 1, 2 \ldots)$ esetén $\sigma(s_k)$ valószínűséggel következik be $\mathcal{B}$ típusú állapot és $1 - \sigma(s_k)$ valószínűséggel $\mathcal{A}$ típusú állapot. Itt $\sigma(s)$ a $0 \leq s < \infty$ intervallumon értelmezett függvény, melyre nézve:

$$0 \leq \sigma(s) \leq 1.$$

A $\tau_2 = \gamma_l$ $(l = 1, 2 \ldots)$ időpontban befejeződött $\mathcal{B}$ állapot után a τ_3 időpontig ismét $\mathcal{A}$ típusú állapot következik a leírt módon, és így tovább. (Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ típusú állapotokban előforduló egymást követő véletlen pontok különbségei mindig teljesen független valószínűségi változók, s függetlenek az előző állapotokban hasonlóan értelmezett valószínűségi változoktól is).

A továbbiakban feltételezzük, hogy $A^*(x)$, illetve $B^*(x)$ valamely $[0, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \infty$ intervallumon folytonos; a $\varrho(t)$ és $\sigma(s)$ függvényekben pedig a t, illetve s argumentum mindig az újabb $\mathcal{A}$, illetve $\mathcal{B}$ típusú állapotok kezdési időpontjából számítandó.

2. A rendszer hatékonyságának egy jellemzése

A célunknak megfelelően jelentse $\eta_A(T)$ a bizonyos szempontokból kedvezőnek vélt $\mathcal{A}$ állapotok hosszának összegét a $(0, T)$ intervallumban, ahol az utolsó „$\mathcal{A}$ szakasz" esetleg csonka. (Hasonló módon értelmezzük az $\eta_B(T)$ véletlen mennyiséget).

Ekkor $\eta_A(T)$ várható értéke, vagyis az $M\{\eta_A(T)\}$ mennyiség egy fontos jellemzője lehet a rendszer hatékony működésének, mivel az többnyire a $(0, T)$ intervallumban a rendszer működési, termelési állapota összidejének várható értékét adja meg. Ha most az új $\{\chi(t), 0 \leq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamatot úgy definiáljuk, hogy:

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \xi(t) \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{ha} \quad \xi(t) \in \mathcal{B}, \end{cases}$$

akkor, ha

$$g(T) = \int_0^T \chi(u)\, du,$$

úgy nyilvánvalóan $\eta_A(T) = g(T)$.

Ennek alapján:

$$(6)\quad M\{\eta_A(T)\} = M\{g(T)\} = M\{\int_0^T \chi(u)\,du\} = \int_0^T M\{\chi(u)\}\,du = \int_0^T P\{\xi(u) \in \mathcal{A}\}du,$$

s az így nyert kifejezést a rendszer hatékonyságának egy fontos jellemzőjeként vehetjük figyelembe.

Ahhoz, hogy a modell feltételei mellett a (6) alatti várható értéket konkrétan is meghatározhassuk, hátra van még a $P_A(t) = P\{\xi(t) \in \mathcal{A}\}$ valószínűség kiszámítása, ami a gyakorlatban egy tetszés szerinti t időpontban az $\mathcal{A}$ állapotban való tartózkodás valószínűségét adja. (Ha $P_B(t) = P\{\xi(t) \in \mathcal{B}\}$, akkor nyilvánvalóan $P_A(t) + P_B(t) = 1$ minden t-re).

A $P_A(t)$ előállítására vonatkozik az alábbi tétel.

1. *tétel:*

$$(7)\qquad P_A(t) = \int_0^t [1 - A(t-y)]dH(y),$$

ahol

$$(8)\qquad A(x) = \int_0^x [1 - \varrho(u)]\,dQ(u)$$

$$(9)\qquad B(x) = \int_0^x [1 - \sigma(u)]\,dT(u),$$

itt

$$(10)\qquad Q_n(x) = \int_0^x A^*(x-u)\varrho(u)dQ_{n-1}(u) \quad (n = 2, 3, \ldots;\ Q_1(x) = A^*(x))$$

$$(11)\qquad T_n(x) = \int_0^x B^*(x-u)\sigma(u)dT_{n-1}(u) \quad (n = 2, 3, \ldots;\ T_1(x) = B^*(x))$$

és

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x);\quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x),$$

továbbá

$$(12)\qquad F(x) = \int_0^x A(x-y)dB(y+0),$$

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-u)dF(u) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 1, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$$

$$(13)\qquad H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x).$$

Bizonyítás

Dobó Andor és Szajcz Sándor [3]-ban található 1. Lemmája éppen a $P(\xi_n < x) = A(x)$-re és $P(\zeta_n < x) = B(x)$-re fennálló (8)—(11) alatti összefüggéseket mondja ki és igazolja. Ezek ismeretében viszont a tétel hátra levő része már könnyen bizonyítható a TAKÁCS LAJOS [4] dolgozatában található 3. tétel közbeeső lépéseinek igazolásánál alkalmazott gondolatmenettel.

Példa:

Abban az esetben, ha

$$A^*(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \tag{14}$$

$$B^*(x) = 1 - e^{-\mu x} \qquad (0 \leq x < \infty;\ \lambda, \mu > 0) \tag{15}$$

és

$$\varrho(x) \equiv \varrho = \text{állandó} < 1;\ \sigma(x) \equiv \sigma = \text{állandó} < 1,$$

akkor egyszerű számolással kapjuk, hogy:

$$A(x) = 1 - e^{-\lambda(1-\varrho)x} \tag{16}$$

$$B(x) = 1 - e^{-\mu(1-\sigma)x} \tag{17}$$

$$P_A(t) = \frac{\mu(1-\sigma)}{\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)} + \frac{\lambda(1-\varrho)}{\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)}\, e^{-[\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)]t} \tag{18}$$

$$P_B(t) = \frac{\lambda(1-\varrho)}{\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)} \{1 - e^{-[\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)]t}\} \qquad (0 \leq t < \infty). \tag{19}$$

Itt $1/\lambda(1-\varrho)$ illetve $1/\mu(1-\sigma)$ az $\mathcal{A}$ illetve $\mathcal{B}$ típusú állapotban tartózkodás idejének várható értékét adja, illetve jelenti. A (16)—(19) összefüggések $\varrho = \sigma = 0$ esetén tovább egyszerűsödnek, s ezáltal az irodalomban is jól ismert kifejezésekhez jutunk. (Lásd például a [4] 186. o.).

A vizsgált speciális esetben egyébként:

$$M\{\eta_A(T)\} = \int_0^T P_A(u)\,du = \frac{\mu(1-\sigma)}{\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)}T + \frac{\lambda(1-\varrho)}{[\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)]^2}\{1 - e^{-[\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)]T}\}. \tag{20}$$

Megemlítjük, hogy az 1. tételben szereplő $P_A(t)$ kifejezést a megbízhatóságelméletben (lásd például [5] 130—132. o.) *készenléti tényezőnek* vagy *rendelkezésre állás értékének* is szokás nevezni. Ezt az összefüggést azonban bonyolultságánál fogva a gyakorlatban alig alkalmazzák. Helyette rendszerint a $\lim_{t\to\infty} P_A(t)$ értékkel számolnak, feltéve, hogy a határérték létezik.

Ilyen esetben a készenléti tényező az a hányad, amelyet a rendszer a teljes időből átlagosan működési állapotban tölt. Ez a megállapítás egyébként heurisztikus meggondolásokkal is belátható. (Lásd [5] 131—132. o.).

3. A rendszer efficienciája

Mint tudjuk, a rendszer fogalmának is sokféle meghatározása létezik. Az értelmezéstől függően egy másik nagyon fontos jellemző lehet a rendszer efficiencája (hatékonysága, hatásossága, hathatóssága, hatásfoka, eredményessége stb.), melyet BARLOW és HUNTER [6] dolgozatukban a következőképpen definiáltak.

Ha a rendszer működőképességének az ellátására, illetve a meghibásodására a környezeti körülmények véletlenszerű változásai $K(x)$ eloszlás szerint hatnak, akkor *definíciószerűen a rendszer efficienciája:*

$$f_K = \int_{-\infty}^{+\infty} M\{g(x)\}\, dK(x), \tag{21}$$

ahol $g(x)$ a rendszer állapotát jellemző $\xi(t)$ valószínűségi változó (Borel mérhető) függvénye, M pedig a várható érték képzésre utaló operátor.

A gyakorlatban sajnos akkor is, ha kevésbé teljesül, nem egy esetben kényszerülünk azzal a feltételezéssel élni, hogy a környezetváltozás rendszerre gyakorolt hatása egyenletes eloszlású az $(0, T)$ intervallumban.

Ekkor:

$$f_K = f_T = \frac{1}{T} \int_0^T M\{g(x)\}\, dx. \tag{22}$$

A készenléti vagy rendelkezésre állási értéket, illetve: az

$$f = \lim_{T\to\infty} f_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T M\{g(x)\}\, dx \tag{23}$$

határértéket esetenként a *rendszer állapotsűrűségének* is szokás nevezni, mivel (23) sok esetben *kifejezi azt, hogy egy időegység alatt a rendszer átlagosan mennyi ideig van a vizsgált állapotban,* ami igen gyakran a rendszernek az időegység alatti átlagos működési időtartam hosszát jelenti. Értelmezésektől függően (23)-t más elnevezéssel is szokás illetni. Megemlítjük, hogy RÉNYI ALFRÉD például az üzemek energiafogyasztásának ingadozásaival kapcsolatos vizsgálatai során (23-t) a *gép kihasználási fokának* nevezte el, minthogy az általa tárgyalt modellben szereplő határérték arra ad választ, hogy átlagban a munkaidő hányad részében működik a vizsgált gép. (Lásd a [7]-t az 547–550. o.).

Hogy teljes joggal nevezhessük az f számot — és általában a választott számot — a rendszer egy jellemzőjének, ahhoz gyakran az kell, hogy az f szám 1-hez tetszőleges közeli valószínűséggel tetszőleges pontossággal megadja, hogy a rendszer egy T hosszúságú időtartam hányad részében működik, ha csak T elég nagy. Hogy az adott esetben teljesül-e ez, úgy győződhetünk meg róla, hogy megvizsgáljuk $\eta_A(T)/T$ szórását. Ha kimutatjuk, hogy ez 0-hoz tart, ha $T \to \infty$, akkor a Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazásával már a kívánt eredményekhez juthatunk.

A továbbiakban elsődleges célunk a bemutatott modell alapul választása mellett $\lim\limits_{T\to\infty} f_T$ értékének a meghatározása. Erre vonatkozik az alábbi tétel.

2. tétel:

Ha
$$\alpha = \int_0^\infty [1 - A(x)]\, dx, \quad \beta = \int_0^\infty [1 - B(x)]\, dx$$

és $\alpha + \beta < \infty$, akkor

$$f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_A(u)\, du = \lim_{T\to\infty} \frac{M\{\eta_A(T)\}}{T} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \tag{24}$$

Ha pedig a (12) alatti $F(x)$ nem rácsos eloszlású, akkor

$$\lim_{t\to\infty} P_A(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}. \tag{25}$$

Bizonyítás

A (7)—(13) ismeretében a tétel állítása ugyan azzal a gondolatmenettel igaezolható, mint amelyet Takács Lajos alkalmazott a [4]-ben szereplő 3. tétele igazolásánál. Erre való tekintettel a részletezést mellőzzük.

Megjegyzések:

a) A közölt modell és a benne szereplő feltételek mellett belátható, hogy $T \to \infty$ esetében

$$D\{\eta_A(T)/T\} \to 0,$$

s így valóban jogos a (24) alatti f számot a rendszer egy jellemzőjének tekinteni.

b) Az is belátható, hogy $\dfrac{1}{\alpha+\beta}$ az időegység alatti $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ állapotoknak mint periódusoknak átlagos számát jelenti, s hogy T elég nagy értékére a (O, T) intervallumban eső $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ állapotok átlagos számát $\dfrac{T}{\alpha+\beta}$ fejezi ki. Pontosabban:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{H(T)}{T} = \frac{1}{\alpha+\beta}, \tag{26}$$

ahol $H(T)$ a (13) alatti összefüggés által van értelmezve.

c) A (24) alatti kifejezés igen sokféle feladat, probléma mértéke lehet. A [13] például egy ilyen jellegű kifejezést struktúramutatónak használ.

Általában, ha a rendszer lehetséges állapotainak a száma 1, 2, . . . , *m és az i-edik állapotban tartózkodás várható értéke* α_i, *akkor az* $\alpha = \alpha_i$ *és a*

$$\beta = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} \alpha_i$$

választás mellett a rendszer i-edik állapotban tartózkodásának a hatásfoka

$$f_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_m} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{24'}$$

A példa bemutatásánál alkalmazott speciális választások esetén egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy

$$\alpha = \frac{1}{\lambda(1-\varrho)}; \quad \beta = \frac{1}{\mu(1-\sigma)},$$

s így f értékét (24) alapján már nem nehéz felírni. Nyilván ugyan ezen értékhez jutunk, ha (20)-ban a T-vel való osztás után elvégezzük a határátmenetet. A (25) pedig (18)-nál közvetlenül adódik, ha $T \to \infty$. Megjegyzendő, hogy a 2. tétel lényegét tekintve felfogható úgy is, mint Takács Lajos [4]-ben található 3. tételének az általánosítása.

4. A munkaszervezettség, hatékonyság és teljesítmény kapcsolatáról

Láttuk azt, hogy egy rendszer hatékonyságát stacioner esetben a (24) alatti kifejezéssel jellemezhetjük. Mielőtt vizsgálatainkat tovább folytatnánk, rá kívánunk mutatni arra, hogy a hatékonyság relatív fogalom, s mindig valamihez viszonyítva, valamilyen értelemben beszélhetünk csak hatékonyságról. (Részletesebben lásd még a [20]-t).

Ha a rendszer például számítógép, akkor *különbséget kell tennünk* többek között *a kihasználás és a felhasználás hatékonysága között.* Lehet, hogy például a számítógép a munkarend szerint teljesíthető üzemórákra vetítve hatékonyan működik, a felhasználás jellege és köre szempontjából azonban már közel sem olyan hatékony, mivel a gépre adaptált feladatok típusa, jellege erőteljesen befolyásolhatja a gép felhasználásából eredő gazdasági eredményeket.[1] Itt már a hatékonyságnak például az időegységre eső nyereségnövelő hatása kerülhet előtérbe, illetve játszhat döntő szerepet.

Ha például az egyfolytában átlag α ideig működő rendszer a feladat jellegétől és gyakorlati jelentőségétől függően időegységenként eltérő hasznot eredményez, s ezt a tényt egy a feladattól függő, c súllyal ki tudjuk fejezni, akkor indokolt lehet a hatékonyságot a

$$(27) \qquad h = \frac{c\alpha}{c\alpha + \beta}$$

kifejezéssel jellemezni. Itt, ha a rendszer működőképes, de áll, a súly értéke egységnyi. Ilyenkor például a különböző c_i értékek (vagy a hozzájuk tartozó h_i értékek) monoton növekvő sorba rendezése szolgálhat alapul a feladatok gépre tételének a rangsorolásában.

Általában ilyen esetben úgy is mondhatjuk, hogy különbséget kell tennünk a rendszer *kihasználási* (f) és *felhasználási* (h) hatékonysága között. Sok esetben ez utóbbi megválaszolása igen összetett problémákat takar, s számos összefüggés figyelembevételét és elemzését teszi szükségessé, miközben nem hagyható figyelmen kívül az sem, hogy a rendszert milyen társadalmilag szükséges munkára használják. Persze előfordulhat, hogy a kihasználás és felhasználás hatékonysága között gyakorlatilag nincs különbség. Ilyen helyzet áll elő, amikor a rendszer felhasználásának hatékonyságát a működésben töltött időtartam egyértelműen és jól jellemzi, vagyis amikor $c = 1$.

Tény az is, hogy akármilyen aspektusból is nézzük egy rendszer hatékonyságát, a rendszer kihasználásával, terhelésével kapcsolatban gyakran felmerül a munkaszervezettség színvonalának mérése, illetve az ezt kifejező mérték megválasztásának problémája, igénye. *Nem egyszer* ugyanis *a rendszer gazdaságos kihasználását a munkával való ellátottság, a gépre szervezés hiánya akadályozza.* A továbbiakban a megfelelő terhelést biztosító munkaszervezettség színvonala mértékének a megválasztási problémájával foglalkozunk, amely lényegében „ember — gép" kapcsolatot fejez ki. Továbbra is kiindulási, illetve hivatkozási alapul tekintjük az előzőekben ismertetett modellt.

[1] Lényeges rámutatni arra is, hogy a felhasznált gépidő, mint hatékonysági mutató sajnos nem egy esetben egyike azon mutatóknak, amelyek tekintetében a vállalati és népgazdasági érdekek ellentéte jelentkezik; pontosabban: a szolgáltató jelleggel működő számítóközpontok esetében a feladatok minél rövidebb idő alatti megoldása gyakorlatilag ellentétben áll a vállalat pénzügyi (árbevétel) érdekével.

Vizsgálunk tehát egy olyan gépi rendszert, amely valamilyen értelemben termel. Rendszer alatt érthetünk például valamilyen alkatrészt megmunkáló gépet (forgácsoló, maró, fúró stb. gépet), de az éppenséggel lehet készterméket előállító automata gépsor vagy egy számítógép is.

Jelölje $\mathcal{A}$ azt az állapotot, amikor a rendszer munkával terhelve van és így működik, $\mathcal{B}$ pedig azt az állapotot, amikor bár a rendszer működőképes, de a rossz munka-, illetve terhelés-szervezés miatt áll.

Az $\mathcal{A}$ állapotban való tartozkodás idején jelölje $\delta_{i+1} - \delta_i = \varphi_i$ ($i = 0, 1, \ldots; \delta_0 = 0$) a rendszernek az i-edik feladat elvégzéséhez szükséges időigényét. A φ_i eloszlás függvénye $A^*(x)$. (Ha a rendszer számítógépet reprezentál, akkor egy-egy feladatot job (dzsob)-nak nevezett munkaegységben is megadhatunk. A job általában tartalmazza az egy feladat elvégzéséhez tartozó összes programot — így például a szerkesztő, fordító, összefűző, file-előkészítő stb. programot — és az operációs rendszer számára adott kezelési utasításokat is).

Tételezzük fel, hogy a rendszer $\mathcal{A}$ állapotban való tartózkodási ideje elsősorban attól függ, hogy mennyire tudjuk azt feladatokkal ellátni, kiszolgálni, s hogy a rendszer addig marad $\mathcal{A}$ állapotban, amíg feladatot tudunk adni neki.

Jelölje ν azt, hogy összesen hány feladatot, illetve munkaegységet tudunk folyamatosan a rendszer számára biztosítani. Nyilvánvaló ν is valószínűségi változó, és hogy az $\mathcal{A}$ állapotban való tartózkodás idejének hossza:

$$\sum_{i=0}^{\nu} \varphi_i .$$

Ha a φ_i várható értéke $M\{\varphi_i\} = z$, ν várható értéke $M\{\nu\} = n$, akkor — az alapmodell feltételei mellett — Wald tétele értelmében az $\mathcal{A}$ állapotban való (folyamatos) tartózkodási idő várható értéke:

$$\alpha = M\left\{\sum_{i=0}^{\nu} \varphi_i\right\} = M\{\varphi_i\} M\{\nu\} = z \cdot n. \tag{28}$$

Itt n felfogható úgy is, mint a rendszer kiszolgálásával kapcsolatos munka szervezettségének egyfajta mérőszáma. Minthogy azonban $1 \leq n < \infty$, ezért főleg összehasonlításoknál a számértékek alakulásának jobb „érzékelése" végett célszerűbb az $n = 1/(1 - \varrho)$ kifejezésből származtatható ϱ értéket tekinteni a munka szervezettségi színvonalát kifejező mérőszámnak.

Ekkor

$$\varrho = 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{z}{\alpha}. \tag{29}$$

és $0 \leq \varrho < 1$. A gyakorlatban az alkalmazás jellegétől és értelmezésétől függően *esetenként ϱ felfogható úgy is, mint egy $\mathcal{A}$ állapotban tartás valószínűsége.* (Lásd: bemutatott példa). *Ilyenkor a munkaszervezés arra irányul, hogy minél nagyobb legyen a kedvező állapotban tartás valószínűsége.* Általában gyakran jó közelítéssel azt találjuk, hogy:

$$P(\nu = k) = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{1-\varrho}\right)^k e^{-\frac{1}{1-\varrho}} \quad (1 - \varrho > 0;\ k = 0, 1, \ldots), \tag{30}$$

vagy

(31) $$P(\nu = k) = \frac{w^k}{k!}\,\frac{1}{e^w - 1} \qquad (w > 0;\ k = 1, 2, \ldots)$$

eloszlású. Az előbbi esetben (Poisson-eloszlás) $M\{\nu\} = \dfrac{1}{1-\varrho}$.

Az utóbbinál (csonkított Poisson-eloszlás)

$$M\{\nu\} = \frac{w}{1 - e^{-w}}.$$

Ha ember-gép kapcsolat esetén a szervezettség színvonalának mértékét a haszon, a hatékonyság, a működési és állásidő függvényében keressük, akkor a (27) és (28) felhasználásával egy ilyen összefüggéshez jutunk. Nevezetesen ekkor:

(29′) $$\varrho = 1 - \frac{cz}{\beta}\left[\frac{1}{h} - 1\right].$$

A gyakorlatban egyszerűbbé (és nem egyszer pontosabbá) válik a szervezettség színvonala mértékének a meghatározása, ha az összefüggések keresése során, például a feladat gépretételéből származó haszon kifejezése, illetve érvényre juttatása mellőzhető. A (29′) kifejezésben ez a $c = 1$ választásnak felel meg.

Abban az esetben, ha visszamenőleg rendelkezésre állnak már bizonyos adatok, így például az egyes feladatok gépi úton való elvégzésének időigénye, $z_1^*, z_2^*, \ldots z_i^*$, a folyamatos terhelés következtében a rendszer egyfolytában működő időszakaszainak a hossza; $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_j^*$, a rendszer működőképes állapota esetén az állási időszakaszok hossza, $\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_k^*$, akkor ezeknek a tapasztalati adatoknak a számtani átlagával becsülhető z, α, β értéke továbbá ezek ismeretében f, ϱ értéke.

A $c = 1 + a$ jelölés mellett könnyen belátható, hogy h és f között az alábbi összefüggés áll fenn:

(27′) $$h = f + (1 - f)\,\frac{a\alpha}{(1 + a)\,\alpha + \beta} = h(a) \qquad (-1 < a)$$

vagyis, h az 1 és $\dfrac{a\alpha}{(1+a)\,\alpha + \beta}$ kifejezésnek f-vel és $1 - f$-vel súlyozott középértéke.

A (27′) alapján nyilvánvaló, hogy $h(0) = f$;

$$h \le f, \quad \text{ha} \quad -1 < a \le 0$$

$$h > f, \quad \text{ha} \quad a > 0;$$

továbbá, hogy $\lim\limits_{a \to \infty} h(a) = 1$; illetve ha $f \to 1$, akkor $h \to 1$. *Az $a \to \infty$ esetén $h(a) \to 1$ kifejezi azt a nyilvánvaló tényt, hogy a rendszer hatékonysága annál jobb, minél fontosabb és hasznosabb feladatot oldunk meg a segítségével, illetve, hogy a változatlan kihasználás mellett a hatékonyságot a megoldandó feladat megválasztásán keresztül jelentősen növelni tudjuk.*

A gyakorlatban felmerül az a kérdés, hogy két vagy több rendszer esetén milyen kritérium alapján ítéljük meg a rendszer kiszolgálásával kapcsolatos munkaszervezettség színvonalát. Ha a rendszer számítógép, akkor előfordulhat, hogy például az egyik gépen sok feladat rövid ideig, a másikon pedig kevés feladat hosszú ideig fut. Ilyen esetben nyilván nem lenne helyes a (29) alapján kiszámított $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ értékek monoton sorba rendezése szerint dönteni.

A munkaszervezettség színvonalát reálisabban ítélhetjük meg, ha például a közel azonos sebességgel egyfolytában átlagosan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ideig működő rendszerek számszerű értékeit vesszük alapul úgy, hogy az $\alpha_1 = z_1 n_1 \leq \alpha_2 = z_2 n_2$ esetén annál a rendszernél tekintjük jobbnak a munkaszervezettség színvonalát, amelyhez az α_2 érték tartozik. Itt z_i az i-edik rendszernél egy feladat, rendszer segítségével történő megoldási idejének átlagos hossza. A (28) alapján n_i értelmezése ugyancsak nyilvánvaló. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az $\alpha_1 \leq \alpha_2$ alapján való döntés ekvivalens az

$$(32)\qquad 1 - \frac{z_2}{z_1}(1 - \varrho_1) \leq \varrho_2$$

teljesülésére alapozott döntéssel, illetve minősítéssel, míg $\varrho_1 \leq \varrho_2$ alapján való minősítés megfelel az $n_1 \leq n_2$ szerinti döntésnek, ami nyilván nem mindig ad reális alapot a munkaszervezettség színvonalának megítéléséhez.

Amennyiben a gépek működési sebessége között jelentős eltérés mutatkozik ezt az összehasonlításnál szintúgy figyelembe kell venni. Ha a (24) alatti f a rendelkezésre állás értékét fejezi ki, akkor ennek a komplementerét, vagyis az

$$(33)\qquad 1 - f = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

kifejezést a $\mathcal{B}$ állapot értelmezésétől is függően, a *rendszer üzemképtelenségének* is szokás nevezni.

A (27') alapján nyilvánvalóan

$$(34)\qquad \lim_{a \to \infty} [h(a) - f] = 1 - f.$$

Az eddigi ismereteink felhasználásával a továbbiakban az állandósult állapot bekövetkezése esetén a *rendszer teljesítményének* egy jellemzését adjuk. Evégett jelentse most η a rendszer időegységre eső teljesítményét egy tetszőleges időpontban. Teljesítmény alatt itt most érthetjük például az időegység alatti energiafogyasztás mennyiségét, a működésből származó termelési értéket, árbevételt, a géppel legyártott termék darabszámát stb. η olyan valószínűségi változó, amelynek értéke vagy 0 (ha a rendszer áll), vagy pedig τ (ha a rendszer működik). Könnyen belátható, hogy a közölt feltételek mellett η várható értéke:

$$(35)\qquad M\{\eta\} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\tau = f\tau = W.$$

A szórása:

$$(36)\qquad D\{\eta\} = \tau\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta} = \tau\sqrt{f(1 - f)} = W\sqrt{\frac{1 - f}{f}} = D.$$

Ha pl. a rendszer bérmunkát végző számítógép és τ egy gépóra forintban kifejezett értékét jelenti, akkor W *megadja* azt, *hogy a számítógépnek egy óra alatt átlag mennyi az „árbevételi teljesítménye"*, *vagyis* az szolgáltatási jellegű működéséből kifolyólag *egy óra alatt átlag mennyi árbevételt hoz.* (A számítógépek teljesítményét illetően lásd még a [11]-t).

Ha az i-edik napon a rendszer időegységre eső teljesítménye η_i, és

$$\bar{\eta} = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m}{m},$$

akkor bizonyos feltételek teljesülése mellett jó közelítéssel állítható, hogy az $\left(\bar{\eta} - \lambda \frac{D}{\sqrt{m}}, \bar{\eta} + \lambda \frac{D}{\sqrt{m}}\right)$ véletlentől függő helyzetű intervallum $2\Phi(\lambda) - 1$ valószínűséggel fedi le az ismeretlen W állandót, s itt

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Az

$$f = \frac{z}{z + (1 - \varrho)\beta}$$

figyelembevételével

$$W = \frac{z}{z + (1 - \varrho)\beta}\tau, \tag{35'}$$

illetve

$$\varrho = 1 - \frac{z}{\beta}\left[\frac{\tau}{W} - 1\right]. \tag{29''}$$

A gyakorlatban τ *értéke* még ha az várható értéket is jelent, *nem mindig állandó*; a feladat jellegétől, a rendszer funkciójától, a működtetés, kiszolgálás feltételétől függően értéke változhat.

Az Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központja például (lásd a [10]-t) a feladatok költségeinek a számlázásánál E Ft/sec számol, ha a program I/0 berendezéseken és mágneslemezeken kívül legfeljebb 2 db mágnesszalagot használ és 1, 2^{i-2} E Ft/sec költséggel számol, ha a program $i > 2$ mágnesszalagot használ, s itt E jelenti a másodpercenkénti egységárat.

Azt, hogy konkrét esetben mennyi mágnesszalagot kell igénybe vennünk, nyilván a feladat típusa, jellege befolyásolja. Ennél fogva a gépóra ára a feladat, a feldolgozás jellegétől (adatfeldolgozás, tudományos-műszaki számítás stb.), valamint a szolgáltatás „összetételétől" is függ.

Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk, megemlítjük, hogy a feladat típusától, jellegétől, fontosságától, gyakorlati hasznától, kihatásától függő τ értékének az ismeretét felhasználhatjuk például a (27')-ben szereplő a-val jelölt súlyértékek megválasztására.

Ha például az imént említett példánál i jelenti a k-adik ($k = 1, 2, \ldots$) feladat gépi megoldásnál igénybe veendő mágnesszalagok számát és

$$\tau_{(i)}^{k} = \begin{cases} E \text{ Ft/sec}, & \text{ha } 1 \leq i \leq 2 \\ r^{i-2} E \text{ Ft/sec}, & \text{ha } i > 2, \ (r > 1), \end{cases} \tag{37}$$

akkor a súlyokat többek között az

$$a_k = \frac{\tau_k^{(i)} - \tau_0}{\frac{\tau_0 + \tau_k^{(i)}}{2}} \qquad (\tau_0 = E)$$

alapján is meghatározhatjuk. (Az eljárást finomíthatjuk, ha a feladatok összgépóra igényét becsülni tudjuk!).

Ekkor a számítógép hatékony felhasználása érdekében *a $h(a_k)$ monoton növekvő sorrendje által meghatározott indexrendszernek megfelelően célszerű a munkát gépre szervezni.*

Mivel azonban $h(a)$ a-nak monoton növekvő függvénye, ezért — a számolási munkák elkerülése végett — *célszerűbb a feladatok gépre tételének sorrendjét az a_k értékeinek monoton növekvő sorrendje által determinált indexrendszernek megfelelően elvégezni.*

Természetesen *a számítógépek hatékonyságát* számos *más szempontból is az elemzés tárgyává tehetjük.* Így például vizsgálhatjuk az általa nyújtott információk alkalmazásának gazdaságosságát, hatékonyságát. *Ekkor azonban számolnunk kell azzal, hogy egyrészt nehéz meghatározni mi az értéke annak, ha meggyorsítjuk a döntésre jogosult személynek szóló szükséges információ létrehozását és továbbítását, másrészt, hogy nehezen alakíthatók ki olyan kritériumok, amelyek alapján megállapíthatnánk, milyen értéke van annak az újabb információnak, melyet a számítógépes információs rendszer jóvoltából a döntésre jogosult személy megkap.*

E helyen is felhívjuk a figyelmet arra, hogy általában *a teljesítményt és a teljesítőképességet nem tekintjük minden esetben azonos fogalmaknak,* vagyis közöttük esetenként különbséget teszünk. Az első fogalom és értelmezés általában arra vonatkozik, ahogy a rendszer működik, a második pedig ahogyan működhetne. Persze ez a megkülönböztetés sem fedi mindig a valóságot. Ha például a rendszer *számítógép,* akkor ennek *teljesítőképességét* — első közelítésként — *többnyire a*

$$T(M) = AmM \tag{39}$$

kifejezéssel szokás jellemezni (lásd a [12]-t), ahol:

m — átlagos műveletszám/sec;

M — a központi memória (tárkapacitás) nagysága Kbyte-egységben ($K = 2^{10} = 1024$);

A — különböző konstrukciós, műszaki, technológiai, kiépítettségi stb. paramétereket figyelembe vevő konstans a megfelelő mértékegységben kifejezve. Főleg kis számítógépek esetén az $A =$ (szóhossz -7) választással szokás élni (lásd BIKI, 1977. január), ahol a szóhossz bitben van kifejezve, s értéke általában 8 és 24 között van.

A (39)-t többek között a különböző géptípusok fajlagos árának képzésénél, majd összehasonlításánál szokták figyelembe venni. *A fajlagos árat* egyébként *úgy nyerjük, hogy a számítógép árát elosztjuk a teljesítőképességgel.* Mennél kisebb ez az érték, annál jobbnak tekintjük az ár és teljesítőképesség struktúrát, ami a beszerzésnél, illetve gépkiválasztásnál lényeges szempont lehet.

5. A munkaráfordításról

Az eddigiek során láttuk azt, hogy igen általános feltételek mellett a (24) alatti kifejezés a rendszer hatásfokát mérheti, jellemezheti. Ebben akár α, akár β értékének $\Delta\alpha$ illetve $\Delta\beta$ értékkel való változása f értékét módosítani fogja.

Ha azt akarjuk, hogy f értéke növekedjék, s ezáltal 1-hez közelebb essék, akkor valamilyen munkaráfordítással α vagy β értékén változtatni kell. Ezt általában könnyebben érjük el β értékének csökkentésével, mint α értékének növelésével. Ha ugyanis $\beta \leq \alpha$ és α értékét $\Delta\alpha > 0$ értékkel növeljük, akkor az így kapott

$$\frac{\alpha + \Delta\alpha}{\alpha + \Delta\alpha + \beta}$$

érték mindig kisebb lesz az

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta - \Delta\alpha}$$

értékénél, ami tehát α növelése helyett β értékének ugyanazon értékkel való csökkenése mellett áll elő.

Az is könnyen belátható, ha $f^* \geq 1/2$ és α értékét $\Delta\alpha > 0$ értékkel növeljük, β értékét viszont $\Delta\beta > 0$ értékkel csökkentjük, méghozzá úgy, hogy

$$f^* = \frac{\alpha + \Delta\alpha}{\alpha + \Delta\alpha + \beta} \quad \text{és} \quad f^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta - \Delta\beta}$$

legyen, akkor $\Delta\beta \leq \Delta\alpha$, ahol $\Delta\beta < \beta$.

Ekkor ugyanis egyrészt

$$\Delta\alpha = \frac{(\alpha + \beta)(f^* - f)}{1 - f^*}, \tag{40}$$

másrészt

$$\Delta\beta = \frac{(\alpha + \beta)(f^* - f)}{f^*}, \tag{41}$$

s ezek alapján pedig — a közölt feltételek mellett — állításunk már egyszerűen adódik.

Amennyiben a munkaráfordítást a kedvező állapotban tartás idejének növelésénél jó közelítéssel ugyanolyan kifejezés jellemzi, mint a kedvezőtlen állapotban maradás idejének csökkentése esetén, akkor az imént kapott eredmények a gyakorlatban a következőket jelentik.

Hogyha a rendszer hatásfokát növelni akarjuk, akkor kisebb (vagy egyenlő) *lesz a munkaráfordítás, ha feladatunknak nem a kedvező állapotban tartás ideje növelése elősegítését, hanem a kedvezőtlen állapotban maradás idejének csökkentését tekintjük.*

Úgy is fogalmazhatunk, hogy esetünkben a pozitív hatások, ösztönzők növelése helyett a negatív hatások, ösztönzők csökkentésére kell a súlyt helyezni. (A problémakört részletesebben lásd (14) és [15] alapján).

Az 1. tétel alkalmazására felhozott példában láttuk azt, hogy egy rendszerre nézve a kedvező állapotban tartózkodás átlagos idejét az

$$\alpha = \frac{1}{\lambda(1-\varrho)},$$

a kedvezőtlen állapotban tartózkodás idejét pedig átlagosan a

$$\beta = \frac{1}{\mu(1-\sigma)}$$

kifejezés szolgáltatta. Az elmondottak alapján, ha a rendszer hatásfokát növelni akarjuk, akkor tehát elsősorban β értékét célszerű csökkentenünk.

Ezt az alábbiak szerint érhetjük el:

1) csökkentjük $\frac{1}{\mu}$ értékét, vagyis az állási, javítási, kiszolgálási, munkával való ellátási stb. idő várható értékét megpróbáljuk mérsékelni;
2) csökkentjük σ értékét, vagyis megpróbáljuk növelni a kedvezőtlen állapotból a kedvező állapotba hozás valószínűségét;
3) az 1) és a 2)-ben közölteknek egyidejűleg igyekszünk eleget tenni.

Mint láttuk, a hatásfok növelésénél fontos szerepet játszik a munkaráfordítás valamilyen módon való kifejezése, mérése. Ezzel a problémával itt behatóbban nem foglalkozunk, csupán megemlítjük, hogy a ráfordítás függvény egyfajta értelmezése található például a [16]-ban, s az itt közöltek további kiindulási alapul szolgálhatnak a behatóbb vizsgálatok megtételénél.

Ezzel a kérdéssel azért is fontos foglalkozni, mert a rendszer hatékonyságának növelése embereket érintő munkavégzéssel, munkairányítással, szervezéssel stb. jár, s nem mindegy az, hogy a dolgozókat miben és hogyan tesszük érdekeltté akkor, ha például a cél a rendszer hatásfokának a növelése.

Különben is *az anyagi ösztönzésnek* (bér, prémium, jutalom) *korlátai vannak, ami* ugyancsak *indokolttá teszi azt, hogy időnként egy célt a pozitív ösztönzők növelése helyett a negatív ösztönzők csökkentésével igyekezzünk elérni.* Persze nem kis nehézséget jelent, okoz esetenként az, hogy feltárjuk, megmondjuk mit tekintsünk pozitív és mit negatív ösztönzőnek. Hogy ilyen irányú vizsgálatok megtétele mennyire időszerű lehet, azt az alábbiakkal igyekszünk még érzékeltetni.

Egy olyan bonyolult rendszer kiszolgálása, mint például a számítógép, igen jóképességű szakemberek együttes, szervezett, összehangolt munkáját igényli. Ha ezeket a dolgozókat a rendszer hatásfoka növelése céljából befolyásolni, ösztönözni akarjuk a minőségileg jobb és nagyobb teljesítményre, akkor bizonyos körülmények mellett már a bér, illetve pénzbeli juttatásoknak objektív korlátai lehetnek.

Itt emlékeztetni szeretnénk arra, hogy már Daniel Bernoulli a XVIII. században igen általánosnak mondható feltételek mellett eljutott arra a következtetésre [vö. [17] 240. o.), hogy *ha valakinek a jövedelme p valószínűséggel x-ről y-ra emelkedik, akkor ennek a kilátásnak az egyénre gyakorolt hatását a* $\log\left(\frac{y}{x}\right)^p$ *kifejezés jellemzi.* Ezt figyelembe véve, ha például *valakinek x Ft a* *havi fizetése és azt növelik Δx értékkel, akkor ha azt akarjuk, hogy az y Ft $(x < y)$ havi fizetést kereső egyénnél ugyan olyan hatást váltson ki a Δy értékű fizetésemelés, mint amilyen az volt az előző személynél, úgy annak értékét a*

$$\Delta y = (x + \Delta x)\frac{y}{x} - y = \Delta x \frac{y}{x} \tag{42}$$

alapján kell megválasztani.

Ha például egy dolgozónak a havi fizetése $x = 2000$ Ft és ha ez $\Delta x = 300$ Ft fizetésemelést kap, akkor az $y = 5000$ Ft havi fizetésű dolgozónál $\Delta y = 750$ Ft fizetésnövelést kellene eszközölni ahhoz, hogy a hatás a két esetben megegyezzék. A legtöbb munkahelyen ilyen növekedést egy személynek nem igen lehet biztosítani.

Az igen költséges és drága berendezések hatékony felhasználása ekkor tehát már nem minden esetben a pozitív ösztönzők növelésével érhető el. Ilyenkor kell számba venni a veszteségek keletkezésének (ellen ösztönzőknek) kihatásait, főleg akkor, ha az ellen ösztönzők megszüntetése vagy mérséklése nem ütközik nagy nehézségekbe. Ebben a folyamatban jelentős szerepet kaphat a munkahelyi légkör, a vezetői magatartás, a munkatársak közötti érintkezési, kapcsolattartási forma, a munkahelyi demokrácia, a felelősségérzet, a munkaszervezés, a munkavégzés és irányítás rendszere, s nem utolsó sorban a jövedelmezési és érdekeltségi rendszer célszerű, hatékony megválasztása.

Végezetül rá kívánunk mutatni arra a lényeges tényre, miszerint *a Daniel Bernoulli által alkalmazott megfontolások is vezethetnek olyan összefüggésekhez, amilyenek az előző részben találhatók.*

Így például, ha Q összeget fel akarunk osztani különböző személyek vagy szervezeti egységek között, méghozzá úgy, hogy minden személy vagy szervezeti egységnél a jövedelemtöbblet közelítően azonos hatást váltson ki, akkor, ha y_i jelenti az i-edik $(i = 1, 2, \ldots m)$ személy vagy szervezeti egység átlag keresetét (jövedelmét), Δy_i pedig az i-edik személy vagy szervezeti egységre eső növekményt, úgy (42)-re való tekintettel könnyen belátható, hogy a

$$\Delta y_i = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^{m} y_i} Q \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{43}$$

választással kell élni, ami „alakilag" emlékeztet bennünket például (35)-re. Értelmezést illetően lásd még a (24′) alatti kifejezéssel kapcsolatban mondottakat.

Természetesen az itt közöltekkel koránt sem tekintjük a bér- és jövedelem gazdálkodással kapcsolatban felmerülő kérdéseket megoldottnak. Részben azért sem, mert a fizetésnek vagy egyéb juttatásnak nem csupán az ösztönzés az egyetlen társadalmi funkciója, másrészt mert sok esetben a dolgozók a fizetésemelést nem annyira a saját alapfizetésükhoz, hanem inkább a többi dolgozóéhoz viszonyítják.

6. Az eredmények felhasználásának elősegítése

Ahhoz, hogy a gyakorlatban az eddigiek során megismert, illetve közölt kifejezéseket jól hasznosítani tudjuk, nem egy esetben további alapösszefüggések figyelembevételére van szükség. Az alábbiakban ilyen összefüggéseket ismertetünk, előre bocsátva, hogy azok számítógép rendszerre vonatkoznak.

Ahhoz, hogy például a (35) alatti kifejezést használni tudjuk, szükségünk van τ értékének az ismeretére. Amennyiben τ gépóra-költséget jelent, akkor erre nézve belátható (vö: [19]), hogy jó közelítéssel

$$\tau = \lambda \frac{Q \cdot 100}{N \cdot r \cdot p \cdot m} \cdot \frac{\text{Ft}}{\text{óra}}, \tag{44}$$

ahol:

$Q =$ a számítógép vételára (millió Ft).

$p =$ a számítógépnek, mint berendezésnek a működéséből származó nyeresége %-ban (általában: $15 \leq p \leq 30$).

$m =$ a számítógép nullára-írási (elavulási, selejtezési ideje évben). Általában: $5 \leq m \leq 9$; jelenleg $m = 7$.

$N =$ 1 évben a tényleges munkanapok száma (nap/év; általában $280 \leq N \leq 305$).

$r =$ 1 munkanapra esően a gép által végzendő munkaóra (óra/nap; általában: $8 \leq r \leq 24$).

$\lambda =$ gépóra költségtényező, ami a szolgáltatás jellegéből és egyéb járulékos tényezők alakulásától, az elavulás, leírás idejétől stb. függ. Jelenleg általában $0.75 \leq \lambda \leq 1,25$.

Fel kívánjuk hívni a figyelmet arra, hogy ha a számítógép modern szervezésű, nagyteljesítményű, multiprogramozású gép, akkor a (44) összefüggés többnyire módosításra szorul. Ekkor ugyanis *egy programnak a gépben tartózkodás idejét elsősorban az határozza meg, hogy milyen más programokkal együtt tartózkodott az az operatív memóriában egy adott időszak alatt. A költség-elszámolásnál ezt a tényt figyelembe kell venni.*

Napjainkban még nem alakították ki azt az egységes eljárási módot, amely ezt a kérdést megnyugtatóan rendezné. Ettől függetlenül ma már több helyen is alkalmazzák a szolgáltatásoknak olyan elszámolási rendszerét, amely a multiprogramozású gépek felhasználásakor biztosítja azt, hogy ugyanannak a feladatnak a költsége — bármilyen környezetben futott is a gépen — azonos legyen. Tájékoztatásul megemlítjük, hogy [10] szerint az Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központjában a feladatok F gépköltségét az alábbi képlet szerint számlázzák:

$$F = P \cdot D \text{ Ft}, \tag{45}$$

ahol:

$$P = \begin{cases} E \text{ Ft/mp, ha a program I/0 berendezéseken és mágneslemezeken kívül legfeljebb 2 db mágnesszalagot használ;} \\ 1{,}2^{k-2} E \text{ Ft/mp, ha a program } k > 2 \text{ számú mágneseszalagot használ;} \end{cases}$$

$$D = \{8 + \varepsilon[1 + M/400] + M \cdot \text{tr}/10000\} \text{ mp};$$

itt:

$E =$ jelenti a mp-kénti egységárat;

$\varepsilon =$ jelenti a központi egységnek a program feldolgozására fordított idejét mp-ben mérve;

$M =$ jelenti a program által lekötött memória területet 512 byte-os egységben mérve;

tr = jelenti a program által transzferált összes blokkok számát.

A [10] nem ismerteti azt az eljárást, melynek segítségével E értéke meghatározható. Éppen ezért jobb híján első közelítésül az $E = \tau/3600$ összefüggéssel (vagy ennek egy konstans szorosával) számolhatunk, ahol τ értékét a (44) alatti kifejezés determinálja.

Végezetül megemlítjük, hogy például a (44) alatti összefüggés képezheti az alapját további más olyan összefüggések felírásának is, melyeket különböző döntéseknél célszerű alapul venni.

A [18]-ban például láthatjuk ennek felhasználását számítógép vásárlás esetén. Bizonyos feltételek mellett ebben kimutattam, hogy *egy — korábban már számítástechnikai szolgáltatást igénybe vevő — iparvállalatnak általában olyan számítógépet indokolt beállítania, amelynek vételára a vállalati éves árbevétel 2,7 és 5,1%-a közé esik.*

Természetesen ezek az eredmények és az itt közöltek is a témakörnek ma még inkább csak kezdetleges eredményei, s a szakembereknek még nagyon sokat kell tenniük azért, hogy a hatékonyságelmélet mint önálló diszciplina kialakulhasson, s eredményei a gyakorlatban kellőképpen használhatók, alkalmazhatók legyenek.

(Beérkezett: 1978. okt. 5-én)

IRODALOM

1. Dobó, A.—Szajcz, S.: *Bevezetés a megbízhatóságelméletbe* I—II. rész KGM ISZSZI kiadványa, Budapest, 1968.
2. Dobó, A.—Szajcz, S.: *Bevezetés a rekurrens folyamatok elméletébe,* Minőség és megbízhatóság, 1975/4.
3. Dobó, A.—Szajcz, S.: *Valószínűségszámítási vizsgálatok véletlen sorozatokkal kapcsolatosan* (Kézirat), Budapest, 1978.
4. Takács, L.: *On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes.* Acta Math. Acad. Sci. Hung. 8. (1957)
5. Gnyegyenko, V. B.—Beljajev, J. K.—Szolovjev, A. D.: *A megbízhatóságelmélet matematikai módszerei,* Budapest, 1970. Műszaki Könyvkiadó
6. Barlow, R. E.—Hunter, L. C.: *System efficiency and reliability,* Technometrics 2 (1960): 1.
7. Rényi, A.: *Valószínűségszámítás,* Budapest, 1954. Tankönyvkiadó
8. Jánosi, F.: *A gazdaság kategóriájának tartalma a különböző termelési módokban.* Közgazdasági Szemle, 1976/11.
9. Polák, M.—Subicz, P.: *A gazdaságos termékszerkezet kialakításának problémái,* Vállalatvezetés, vállalatszervezés, 1976/4.
10. Tóth, I.: *Az Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központja,* OTSZK Közlemények, 1973/1.
11. Dobó, A.: *A számítógépek teljesítményeinek értékelése,* Automatizálás, 1976/12.
12. Dobó, A.: *A számítógép rendszerek létszámvonzatának alakulása a teljesítőképességük függvényében.* (Kézirat)
13. Majoros, P.: *Módszerek a struktúra változások mérésére,* Statisztikai Szemle, 1978/7.
14. Lange, O.: *Bevezetés a közgazdasági kibernetikába,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1967.
15. Dobó, A.: *Megjegyzések a szabályozási rendszerek stabilitásának vizsgálatához,* SZIGMA 1978/1—2.
16. Dobó, A.: *Számítástechnikai eszközök tulajdonságainak értékelése matematikai módszerekkel,* KGM ISZSZI kiadvány, Budapest, 1972.
17. Jordan, K.: *Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból,* Budapest, 1956. Akadémiai Kiadó
18. Dobó, A.: *A számítógépvásárlás egy kritériuma,* Vezetéstudomány, 1978/4.
19. Dobó A.—Szajcz S.: *Számítógépes szolgáltatások költségalakulásának becslése,* Könnyűipari Szervezési Tájékoztató, 1977/1.

20. FÜLÖP, G.: *Hatékonyság és az újratermelés arányai*, Budapest, 1978. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
21. LOPATNYIKOV, L. I.: *Közgazdasági matematikai kisszótár*, Kossuth Könyvkiadó (1975).

MATHEMATICAL ANALYSIS ON THE EFFICIENCY OF SYSTEMS

This paper deals with questions belonging to the sphere of efficiency theory, particularly with the mathematics thereof.

A basic model is presented under very general conditions and in connection with this the probability is determined that a system is in a state favourable from some viewpoint (Theorem 1).

The complicated relationships are examined in stationary state (Theorem 2), which can be conceived, after all, as a generalization in certain directions of the results belonging to the theory of recurrent processes.

Results obtained in this way are used for the mathematical description of problems connected with the efficiency and performance of the system, the organization of work, etc. Labour input problems, arising when numerical characteristics are kept at favourable value, are dealt with as well.

The presentation of further, approximatively valid relationships promote the application of the results to a case when the system is a computer.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, КАСАЮЩИЕСЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ

В данном материале рассматриваются вопросы, относящиеся к проблематике теории эффективности и являющиеся, в первую очередь, по своему характеру математическими.

Исходя из весьма общих предпосылок излагается основная модель и определяется вероятность нахождения системы в состоянии, благоприятном с какой-либо точки зрения (теорема 1.).

Рассматривается формирование сложных зависимостей в станционарном состоянии (теорема 2.) которые, в конечном счете, могут восприниматься в качестве некоторого обобщения результатов, относящихся к теории рекуррентных процессов.

Получаемые таким образом результаты используются для описания математическими средствами вопросов, связанных с эффективностью системы, результативностью, организацией труда и т. п. Изучаются проблемы трудовых затрат, имеющих место при поддержании цифровых характеристик на благоприятном уровне.

Посредством изложения приближенных взаимосвязей представляется возможным применить полученные результаты в таких случаях, когда система представляет собой вычислительную машину.

MOLNÁR ANDRÁS

Üzemtelepítési feladatok gyakorlati megoldása

A hozzárendelési feladatok egyik általános megfogalmazása a telepítés problémája. A telepítési feladatokban a rendelkezésre álló területen kell — a gyártási (technológiai) folyamatok figyelembevételével — az egyes üzemrészeket (gyártó berendezéseket) úgy elhelyezni, hogy az anyagmozgatási költség minimális legyen, azaz:

$$C(p) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} h(i, j) \cdot r_p(i, j) \to \min!, \tag{1}$$

ahol

n = a telepítési pontok (ill. üzemrészek) száma

$h(i, j)$ = az i. és j. telepítési pont ($i < j$) távolsága (méter, ... stb. mértékegységben)

$r_p(i, j)$ = az i. és j. pontra telepített üzemrészek között áramló összes anyagmennyiség távolságegységre eső szállítási költsége (Ft/m, ... stb. mértékegységben), az üzemrészek p-edik elrendezése (permutációja) esetén.

Az (1) kifejezésben $r_p(i, j)$ értékét az anyagmérleg adatai és a távolsággal egyenesen arányos változó fajlagos szállítási költség szorzataként szokásos meghatározni a következőképpen:

$$r_p(i, j) = k_p(i, j) \cdot m_p(i, j) + k_p(j, i) \cdot m_p(j, i) \tag{2}$$

ahol: $i < j$

$k_p(i, j)$ = az i. és j. pontra telepített üzemrészek között a fajlagos szállítási költség (Ft/kp/m, ... stb. mértékegységben) a p-edik permutáció esetén, ahol feltételezzük, hogy az üzemrészek között a fajlagos szállítási költség oda és vissza egyenlő $[k_p(i, j) = k_p(j, i)]$,

$m_p(i, j)$ = az i. pontra telepített üzemrészből a j. pontra telepített üzemrészbe áramló anyagmennyiség (kp, ... stb. mértékegységben) a p-edik permutáció esetén.

A $k_p(i, j) = k_p(j, i)$ egyenlőséget felhasználva

$$r_p(i, j) = k_p(i, j) \cdot [m_p(i, j) + m_p(j, i)] \tag{3}$$

Az $R_p = [r_p(i, j)]$ mátrixból (és hasonlóképpen a $K_p = [k_p(i, j)]$, $M_p = [m_p(i, j)]$ mátrixból) egy újabb, q permutációhoz tartozó $R_q(K_q, M_q)$ mátrixot a sorok és oszlopok megfelelő átrendezésével kaphatunk meg.

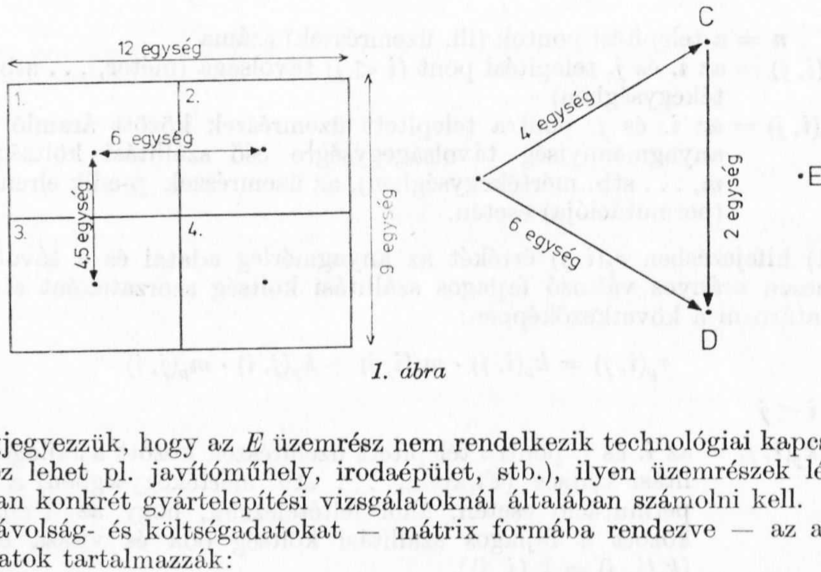
Mint ismeretes, a feladatnak $n!$ lehetséges megoldása van, amely miatt nagyobb méretű feladatok esetén a teljes leszámlálással való megoldás gyakorlatilag lehetetlen.

A továbbiakban nem a feladat megoldásának valamely új algoritmusát mutatjuk be, (számításainkban a feladat megoldására Gilmore algoritmusát alkalmaztuk), hanem a feladat feltételrendszerének kismértékű módosításával, valamint célszerű adatcsoportosítással a telepítési problémák megoldásában gyakorlatilag hasznosítható eredmények elérésére törekedtünk.

Annak érdekében, hogy érzékeltetni tudjuk megoldásaink lényegét, a feladat egy általános és szokásos megfogalmazásából indulunk ki.

Alapfeladat

Adva van egy 12.9 egység méretű telepítési terület 4 telepítési ponttal, valamint ugyancsak négy, B, C, D, E jelölésű üzemrész (munkahely), meghatározott anyag (költség) áramlási kapcsolatokkal. A telepítési területnek, valamint az üzemrészek kapcsolatának (vagyis az anyagáramlásnak a) sémáját az 1. ábra mutatja:



1. ábra

Megjegyezzük, hogy az E üzemrész nem rendelkezik technológiai kapcsolattal, (ez lehet pl. javítóműhely, irodaépület, stb.), ilyen üzemrészek létével azonban konkrét gyártelepítési vizsgálatoknál általában számolni kell.

A távolság- és költségadatokat — mátrix formába rendezve — az alábbi táblázatok tartalmazzák:

Távolságmátrix (H)

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	—	6,0	4,5	10,5
2		—	10,5	4,5
3			—	6,0
4				—

Költségmátrix (R')

$u \backslash v$	B	C	D	E
B	—	4	6	—
C	—	—	6	—
D	—	2	—	—
E	—	—	—	—

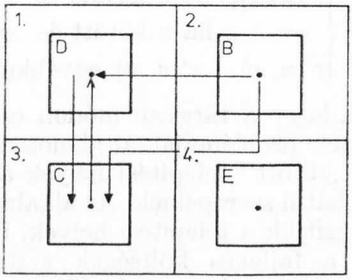
$r'(u, v) = k(u, v) \cdot m(u, v)$, ahol u, ill. v az egyes üzemrészeket jelentik, egy konkrét elrendezés esetén.

A költségmátrixból az általunk használt R_p mátrix a következőképpen áll elő:

$$r_p(i, j) = r'(u, v) + r'(v, u)$$

Az R' mátrix felírásából, illetve az R_p mátrix meghatározásából látszik, hogy az üzemrészek sorrendje indulásnál tetszőleges lehet.

A feladatot megoldva a minimális költségű elrendezést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Az elrendezés tanulmányozásából megállapítható, hogy több egyenértékű, minimális költségű megoldás is létezik, ez azonban későbbi megfontolásainkat nem befolyásolja.

Az optimális megoldás célfüggvényértéke:

$$C_{(\text{opt})} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} h(i, j) \cdot r_{\text{opt}}(i, j) = h(1, 2) \cdot r_{\text{opt}}(D, B) + h(1,3) \cdot r_{\text{opt}}(D, C) +$$

$$+ h(1,4) \cdot r_{\text{opt}}(D, E) + h(2,3) \cdot r_{\text{opt}}(B, C) + h(2,4) \cdot r_{\text{opt}}(B, E) + h(3,4) \cdot r_{\text{opt}}(C, E) =$$

$$= 6 \cdot 6 + 4{,}5 \cdot 8 + 10{,}5 \cdot 0 + 10{,}5 \cdot 4 + 4{,}5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 114.$$

1. *Kiegészítés*

Gyakorlati feladatok vizsgálata esetén általában nem lehet elkerülni, hogy egyes üzemrészek meghatározott telepítési helyhez legyenek rendelve, vagyis kötött helyű üzemrészek létezzenek. Ilyen lehet pl. a feldolgozandó anyag beérkezési pontjához rendelt „anyagfogadás", vagy a feldolgozott anyag kiszállítási pontjához rendelt „kiszállítás". A megoldás algoritmusának tehát biztosítania kell, hogy kötött telepítési pontok esetén a meg nem engedett elrendezések eleve kiessenek az optimális megoldáshoz vezető út közben.

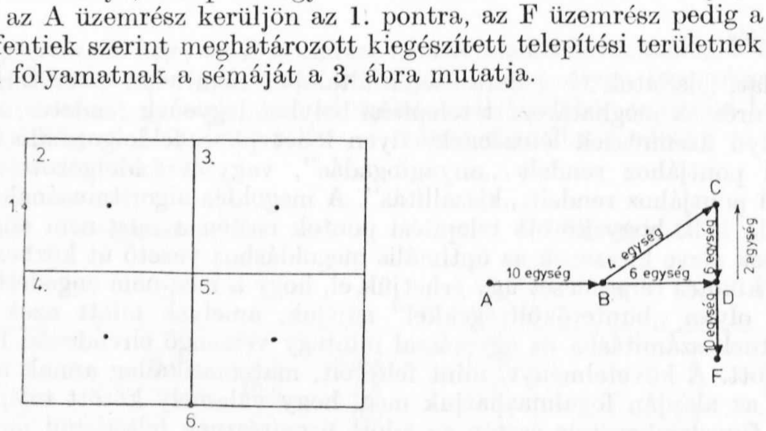
A fenti kikötés teljesülését úgy érhetjük el, hogy a meg nem engedett megoldásokat olyan „büntetőköltségekkel" sújtjuk, amelyek miatt azok eleve nem jöhetnek számításba az egymással mintegy versengő elrendezési lehetőségek között. A követelményt, mint feltételt, matematikailag annak a felismerésnek az alapján fogalmazhatjuk meg, hogy valamely kötött telephelyű üzemrész figyelembevétele esetén az adott üzemrésznek feltétlenül meg kell előznie a technológiai sorban utána következő valamennyi üzemrészt, vagy valamennyi, a technológiai sorban őt megelőző üzemrész után kell következnie. Ha tehát pl. az A üzemrésznek az 1. pontra kell kerülnie, akkor minden AB . . . , AC . . . , stb. elrendezés lehetséges, de a BA . . . , CBA . . . , elrendezések nem lehetségesek.

Ha az üzemrészeket a technológiai folyamat sorrendjében indexeljük az előbbiekben bemutatott költségmátrixban, és azokat a költségeket, amelyek a kötött telephelyű üzemrész után következő üzemrészekhez történő költség átadását mutatják, „végtelennek" vesszük, akkor az alábbi feltétel teljesítésével elérhetjük a sorrendek kívánt kiválogatását:

$$r_p(i,j) = \begin{cases} r'(u,v), & \text{ha } u \text{ kötött és } u < v \\ \infty\ , & \text{ha } u \text{ kötött és } u > v \\ r'(u,v) + r'(v,u) & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{4}$$

Meg kívánjuk jegyezni, hogy a tárgyalt módon csak akkor lehet a kötött telepítési helyű üzemrészek problémáját általánosan kezelni, ha a telepítési helyek átrendezésével a „kötött" telepítési helyek a telepítési helyek között sorrendben legelöl, ill. leghátul szerepelnek. Az alkalmazott eljárásnak ugyanis az az alapja, hogy ha rögzítjük a telepítési helyek, illetve az üzemrészek egy adott sorrendjét, akkor a fajlagos költségek mátrixát a tárgyalt módon asszimmetrikussá téve érhetjük el, hogy az i-edik üzemrész az i-edik telepítési pontra kerüljön (ha itt kívánjuk rögzíteni). „Mellékhatásként" azonban bármely, az i-nél kisebb sorszámú üzemrész csak az i-nél alacsonyabb sorszámú telephelyre kerülhet. Hasonló következmény érvényes természetesen a magasabb sorszámokra is. Ha tehát van az i-nél kisebb, illetve nagyobb sorszámú nem kötött üzemrész is, ezek lehetséges helyét a (4) felírásához figyelembevett sorrendek is befolyásolják, nemcsak a kötött helyek. Mivel azonban a feladat megfogalmazásánál (indulásnál) mind a telepítési helyek, mind az üzemrészek sorrendbe állítása (indexelése) tetszőleges lehet, az adatok megfelelő csoportosításával a kívánt hatást elérhetjük.

Egészítsük ki az előbbiekben ismertetett feladatunkat egy A-val jelölt anyagfogadással és egy F-fel jelölt termék kiszállítási „üzemmel". Számozzuk át telepítési pontjainkat oly módon, hogy az 1. pont legyen az anyag beérkezési helye, a 6. pont legyen a késztermék kiszállítási helye, és írjuk elő, hogy az A üzemrész kerüljön az 1. pontra, az F üzemrész pedig a 6. pontra. A fentiek szerint meghatározott kiegészített telepítési területnek és technológiai folyamatnak a sémáját a 3. ábra mutatja.



3. ábra

A nem megengedett megoldások kizárása érdekében az adatmegadást a következő táblázatok mutatják (a távolságmátrix csak az új telepítési pontok által meghatározott távolság viszonylatokkal bővült):

Távolságmátrix

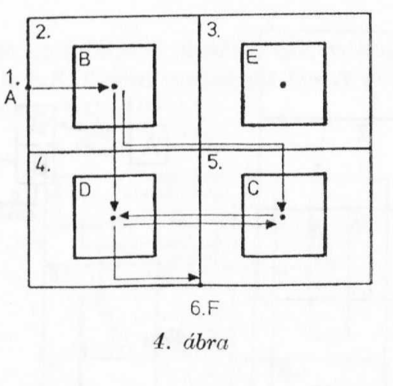
i \ j	1	2	3	4	5	6
1	—	3,75	9,75	8,25	14,25	13,50
2		—	6,00	4,50	10,50	9,75
3			—	10,50	4,50	9,75
4				—	6,00	5,25
5					—	5,25
6						—

Költségmátrix

u \ v	A	B	C	D	E	F
A	—	10	—	—	—	—
B	∞	—	4	6	—	—
C	∞	—	—	6	—	—
D	∞	—	2	—	—	10
E	∞	—	—	—	—	—
F	∞	∞	∞	∞	∞	—

(Gyakorlatilag a „végtelen” természetesen az alkalmazott számítógép adottságaitól függő igen nagy szám.)

A számítások elvégzése után az optimális megoldás a 4. ábrán látható. A célfüggvény értéke a (4) feltétel figyelembevételével: 207



4. ábra

Az elrendezésből megállapítható, hogy ehhez az alapfeladat alternatív optimumaiból semmilyen átrendezéssel sem érhettünk volna el, tehát az anyagfogadás és termékkiszállítás figyelembevétele megváltoztatta az optimális elrendezést.

2. *Kiegészítés*

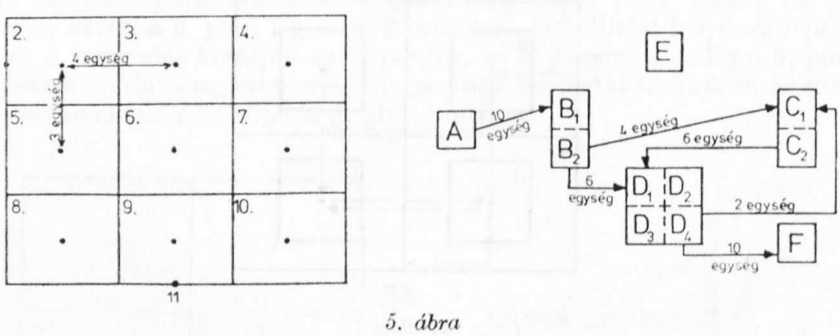
Az alapfeladat hallgatólagosan feltételezte, hogy az üzemrészek azonos méretűek. A valóságos telepítési problémákban az üzemrészek eltérő mérete gyakran nem hanyagolható el. Ekkor a feladat megoldására az az elvi megfontolás szolgálhat, hogy a probléma megoldható lenne akkor, ha biztosítani tudnánk, hogy egyes üzemrészek biztosan egymás mellé kerüljenek. Ebben az esetben ugyanis az eltérő méretű üzemrészeket „feldarabolva", és azonos méretű „kockákból" összerakva, a telepítési pontok számának növelése árán pusztán azáltal lehetne biztosítani az egyes üzemrészek eltérő méretének figyelembevételét, hogy gondoskodunk az egyes üzemrészeket jelentő „kockák" (részüzemek) egymás mellé kerüléséről.

A részüzemek egymás mellé kerülését viszont úgy lehetne biztosítani, hogy egy kellően nagy költség felvétele esetén — figyelembe véve, hogy a költség két üzemrész között a távolsággal szorozva kerül a célfüggvény értékbe — az egymáshoz legközelebb eső, vagyis az egymás mellett lévő pontokra telepített üzemrészek kerülnek az optimális elrendezésbe.

Megfontolásainkban tehát azt a lehetőséget használjuk ki, hogy két részüzemet feltétlenül egymás mellé „húzhatunk" annak révén, hogy közöttük egy meglehetősen nagy (és persze fiktív) költségátadást feltételezünk. Így a lehetséges megoldások közül (a távolsággal való szorzás következtében) az az elrendezés kerül az optimális megoldásba, amelyben ez a két részüzem egymáshoz a legközelebb, azaz egymás mellett van.

Tételezzük fel, hogy az előbbiekben tárgyalt üzemrészek közül B és C kétkét „egységterületű" (B1 és B2, ill. C1 és C2 jelöléssel), a D üzemrész négy egységterületű és D1, D2, D3, D4, jelölésű, Az A, E, F, üzemrészeket egységterületűeknek tekintjük. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ilyen feltételezések esetén már bizonyos kapcsolódások figyelembevételére is lehetőség nyílik, hiszen legalább azt feltételezhetjük, hogy az üzemrész eleje fogadja az anyagot és a vége adja tovább.

A fentiek szerint megváltoztatott telepítési területet és technológiai sémát az 5. ábra mutatja:



5. *ábra*

Az adatok megadásánál gondoskodnunk kell arról, hogy az összetartozó részüzemek majd egymás mellé kerüljenek. Ezt elérhetjük, ha a „feldarabolt" üzem részei között egy-két nagyságrenddel nagyobb fiktív költségátadást írunk, mint ami egyébként a költségmérlegben szerepel. (Ennek a fiktív költségnek — itt nem részletezett okok miatt — kisebbnek kell lennie, mint az előbbiekben felvett „végtelen" költségnek.)

A távolságmátrix és költségmátrix adatait az alábbi táblázatok tartalmazzák:

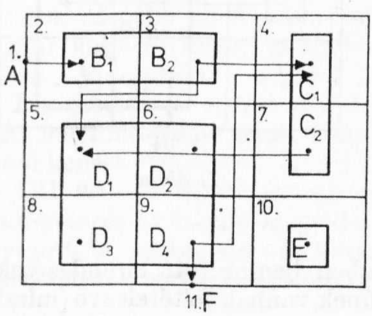
Távolságmátrix

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	—	2	6	10	5	9	13	8	12	16	13,5
2		—	4	8	3	7	11	6	10	14	11,5
3			—	4	7	3	7	10	6	10	7,5
4				—	11	7	3	14	10	6	11,5
5					—	4	8	3	7	11	8,5
6						—	4	7	3	7	4,5
7							—	11	7	3	8,5
8								—	4	8	5,5
9									—	4	1,5
10										—	5,5
11											—

Költségmátrix

u \ v	A	B1	B2	C1	C2	D1	D2	D3	D4	E	F
A	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—
B1	∞	—	1000	—	—	—	—	—	—	—	—
B2	∞	∞	—	4	—	6	—	—	—	—	—
C1	∞	—	—	—	1000	—	—	—	—	—	—
C2	∞	—	—	∞	—	6	—	—	—	—	—
D1	∞	—	—	—	—	—	1000	1000	—	—	—
D2	∞	—	—	—	—	∞	—	1000	1000	—	—
D3	∞	—	—	—	—	∞	∞	—	1000	—	—
D4	∞	—	—	2	—	∞	∞	∞	—	—	10
E	∞	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
F	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	—

Az optimális megoldást szemléltető elrendezést, valamint az optimális megoldás célfüggvény értékét a 6. ábrán mutatjuk be. A célfüggvény értéke: (a fiktív költségértékeket elhagyva): 161



6. ábra

3. *Kiegészítés*

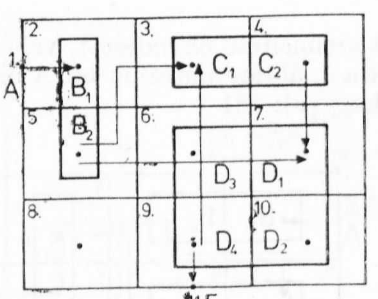
Az előző feladatban a megoldást azzal a feltétellel kerestük, hogy az egymás mellé „húzott" üzemrészek sorrendje megegyezzék az indexelési sorrenddel. Másszóval csak az a megoldás szerepelhetett a megoldások között, amelyben pl.: a D üzemrész esetében a D_1, D_2, ... D_4 részüzemek a telepítési pontok növekvő sorrendjéhez ugyancsak növekvő sorrenddel vannak rendelve. Általánosságban ez a kikötés nem szükséges, és ha egyébként technológiailag lehetséges, megengedhetjük a részüzemek „keverését". Ez a lehetőség következményeiben egyenértékű lehet az üzemrész elforgatásával.

A gyakorlati megoldásban ezt a lehetőséget azzal teremthetjük meg, hogy az oda-vissza áramlások mindkét irányát megengedjük, azaz nem zárjuk ki „végtelen költséggel" az áramlás egyik irányát, és egy megfelelően nagy költséggel a részüzemek egymás mellé kerülését mindkét irányban biztosítjuk. Az előző feladathoz képest módosított költségmátrix az alábbi (a távolságmátrix értelemszerűen nem változik):

Költségmátrix

u \ v	A	B1	B2	C1	C2	D1	D2	D3	D4	E	F
A	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—
B1	∞	—	1000	—	—	—	—	—	—	—	—
B2	∞	1000	—	4	—	6	—	—	—	—	—
C1	∞	—	—	—	1000	—	—	—	—	—	—
C2	∞	—	—	1000	—	6	—	—	—	—	—
D1	∞	—	—	—	—	—	1000	1000	—	—	—
D2	∞	—	—	—	—	1000	—	—	1000	—	—
D3	∞	—	—	—	—	1000	—	—	1000	—	—
D4	∞	—	—	2	—	—	1000	1000	—	—	10
E	∞	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
F	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	—

Az optimális megoldás ez esetben a 7. ábrán látható. A célfüggvény értéke (a fiktív költségeket elhagyva): 141.



7. ábra

4. *Kiegészítés*

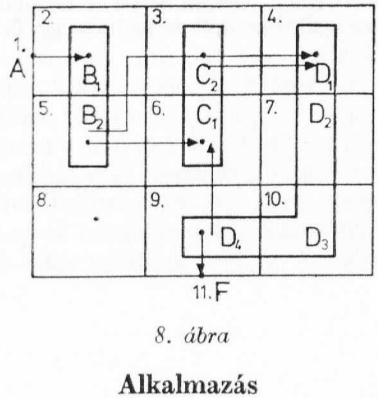
A 2. és 3. kiegészítésben bemutatott elrendezések a D üzemrész esetére, mondhatnánk tömbszerűnek vannak feltételezve (minden részüzem közvetlenül érintkezik minden más részüzemmel). A valóságos esetekben a részüzemek elhelyezkedése más alakú is lehet, történetesen a részüzemek ,,vonalasan'' is követhetik egymást, amikor nincs minden egyes részüzemnek közvetlen kapcsolata más részüzemekkel. Megfelelő adatelrendezéssel a vonalas elrendezést is biztosíthatjuk az optimális megoldásban.

Megengedve a részüzemek 3. feladat szerinti kötetlen sorrendjét, az adatmegadást az alábbi költségmátrix szemlélteti:

Költségmátrix

$u \backslash v$	A	B1	B2	C1	C2	D1	D2	D3	D4	E	F
A	—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—
B1	∞	—	1000	—	—	—	—	—	—	—	—
B2	∞	1000	—	4	—	6	—	—	—	—	—
C1	∞	—	—	—	1000	—	—	—	—	—	—
C2	∞	—	—	1000	—	6	—	—	—	—	—
D1	∞	—	—	—	—	—	1000	—	—	—	—
D2	∞	—	—	—	—	1000	—	1000	—	—	—
D3	∞	—	—	—	—	—	1000	—	1000	—	—
D4	∞	—	—	2	—	—	—	1000	—	—	10
E	∞	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
F	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	—

Az optimális megoldás a 8. ábrán látható A célfüggvény értéke (a fiktív költségek nélkül): 147.



8. ábra

Alkalmazás

A bemutatott megoldások alapján az Alumíniumipari Tervező és Kutató Intézetben egy timföldgyár konkrét telepítési problémáját vizsgáltuk, tőkés export tervezés keretében. A telepítési területet ill. az üzemrészeket 26 ,,egységre'' bontottuk. Tekintettel a feladat méretére, azt tűztük ki célul, hogy a szokásos műszaki megfontolások alapján kialakított telepítési megoldáshoz képest költségcsökkenést érjünk el. A számítóprogramot a Magyar Alumíniumipari Tröszt CII 90—40 típusú számítógépén futtattuk. Az első próbaszámítás szerinti elrendezés az induló megoldáshoz képest 22%-os költségcsökkenést eredményezett. A próbaszámítás elemzése alapján megállapítható, hogy a további alkalmazás során még kedvezőbb eredmények is elérhetők.

(Beérkezett: 1978. máj. 29-én)

PRACTICAL SOLUTION OF THE PLANT LOCATION PROBLEMS

The author deals with a general formulation of the assignment problem of operation research which is the problem of plant location. The paper does not present any new algorithm for the solution of the problem, but is aimed at obtaining results which can be practically utilized in the solution of location problems by insignificant modification of the system of conditions of the problem as well as by expedient data grouping. A procedure is submitted for the solution of such location problems where certain parts of the plant (working places) are assigned to determined location points (shops with fixed location) and problems are made solvable where shops with considerably deviating geometric dimensions and forms are involved, too. When presenting his procedure the author draws attention to the fact that actual connections among the shops might be taken into consideration as well. The solutions presented were applied for large-size real-life problems.

ПРАКТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО РАЗМЕЩЕНИЮ ПРЕДПРИЯТИЙ

Автор рассматривает общую формилиировку задач о размещении в теории исследования операций, т. к. проблему размещения предприятий. В данной работе не рассматривается какой-либо новый алгоритм решения этой задачи, а посредством незначительного изменения системы ограничений задачи, а также целесообразной перегруппировки данных автор стремится к получению практически используемых результатов решения проблемы размещения. В статье приводится такой метод решения задач по размещению, когда отдельные производственные подразделения (цеха) поставлены в соответствие к какой-либо определеннойточке (цеха с заведомо установленным местом размещения), а также когда могут решаться такие задачи, в рамках которых фигурируют производственные подразделения, различныепо геометрическим размерам и форме. В ходе изложения данного метода автор обращаетвнимание на то, что метод предоставляет возможность учитывания фактических связей подразделений предприятия. Предлагаемые решения использовались и на практике при решении задач больших размеров.

Maróti László, Mócsi Zoltánné, Stahl János

Egy nagyméretű LP-feladat megoldásáról (II. Mi is történt?)

Bevezetés

A SZIGMA egyik korábbi számában* jelent meg jelen esettanulmány első része. Ott írtuk le egy kötőelemeket gyártó nagyvállalat adott időszakra vonatkozó termelésprogramozási problémáját és annak egy LP-modelljét. Foglalkoztunk a nagyméretű modell megoldásával; ismertettük azokat az adottságokat, meggondolásokat, és — nem utolsó sorban — elvárásokat, amelyek a modell megoldásával és annak géprevitelével voltak kapcsolatosak. A célunk az volt, hogy ezeket egy későbbi időpontban szembeállítsuk mindazzal, ami valójában realizálódott. Ezzel kívánunk most foglalkozni, amihez az I. részben leírtak ismeretét adottnak vesszük.

Mindenekelőtt a futtatásokról számolunk be, arról, hogy a javasolt módszerek miképpen „viselkedtek". Mindenesetre könnyebb és kellemesebb lenne ezzel a résszel le is zárni a cikket, ugyanis a módszer kifejezetten nagy feladatok esetén is úgy, vagy jobban működött, mint ahogyan vártuk. Bár ezt talán az ilyenkor szokásosnál kevesebb táblázat demonstrálja, de ez a mi hibánk. Már a programok elkészítésekor gondolunk kellett volna pl. a jelen cikkre is és a megfelelő statisztikákat, táblázatokat a programrendszerrel elkészíttetni.

Foglalkoznunk kell azonban még azzal is, hogy mindez mit adott a megrendelőnek. Megfogalmazásunkból már érezhető, hogy itt a vártnál — és szükségesnél — több a negatívum. Lényegében egyetlen egyszer sem állt össze olyan feladat, melynek eredményeit a megrendelő közvetlenül, illetve könnyen fel tudta volna használni. A cikk második felében ennek néhány okát említjük meg.

Futtatások

A kidolgozott programrendszerrel négy nagyobb feladatot oldottunk meg. Az 1. táblázatban megadjuk a feladatok méreteit. Megjegyezzük, hogy a futtatott feladatok közül kettő (a II. és IV.) azonos volt.

Emlékeztetünk, hogy tulajdonképpen nem egy adott LP-feladat megoldásáról volt szó. Nevezetesen, kiinduláskor felírtunk egy LP-t, amely a vállalat termelésprogramozási problémáját modellezte. Az általunk javasolt dekompoziciós eljárással minden iterációs lépésben megkaptuk az eredeti feladat egy-egy valamilyen értelemben közelítő megoldását. Minden ilyen megoldás alapján fel lehetett írni egy LP-feladatot, melynek a szóbanforgó megoldás

*Stahl János: Egy nagyméretű LP-feladat megoldásáról (I. Mit és hogyan szeretnénk megoldani?) SZIGMA IX. évf. (1976) 133—147. old.

1. táblázat

Jellemzők \ Feladat	I.	II.	III.	IV.
Vertikumok száma*	6	41	11	41
Termékek száma	581	1270	707	1270
Terméktechnológiák száma	791	1813	1192	1813
Homogén gépcsoportok száma	109	340	121	340
A legtöbb homogén gépcsoportot tartalmazó vertikum méretei**	46×260	17×318	18×380	17×318
A legtöbb terméktechnológia által érintett vertikum méretei	32×550	14×427	11×404	14×427
Egy vertikumban előforduló műveletszám maximuma és átlaga	1395;557	1901;343	1528;567	1901;343

lehetséges programja. Az eljárástól azt vártuk, hogy néhány iterációs lépés végrehajtása után valamelyik így kapott feladat az eredeti feladathoz közel van, tehát ugyancsak jól leírja a termelésprogramozási problémát, valamint azt, hogy a kapott megoldáshoz tartozó célfüggvényérték jól közelíti ezen utóbbi feladat optimumértékét, tehát jó megoldása a — valójában az eljárás során — adódott feladatoknak.

A 2. táblázat azt mutatja, hogy pl. a III. feladatban az egyes iterációs lépések végén kapott megoldások célfüggvényértékei miképpen viszonyulnak az adódott feladatok optimumértékeire vonatkozó becslésekhez. (A feltüntetett számok első 6—7 jegye szignifikáns). A 3. táblázatban pedig azt foglaltuk össze, hogy a szóban forgó feladatok mennyire tekinthetők az eredeti LP-feladathoz közelinek. Ezt a felhasználó szempontjából (is) a homogén gépcsoportokon adódó túllépések fejezik ki. A feladat egyes vertikumai rendre 13, 15, 4, 14, 2, 8, 10, 7, 13, 17 és 18 homogén gépcsoportot tartalmaztak. Minden vertikumhoz egyetlen szám tartozik: a vertikum homogén gépcsoportjain jelentkező túllépések maximuma. A túllépést a megfelelő gépcsoport időalapjának százalékában fejeztük ki. A *-gal megjelölt pozíciókhoz tartozó értékek nem álltak rendelkezésre illetve már nem voltak reprodukálhatók.

2. táblázat

Iteráció sorszáma	Célfüggvény érték	Becslés az optimumra	A célfüggvényérték és a becslés %-os eltérése (a becsléshez viszonyítva)
1	294 203 136	318 746 240	7,69
2	270 421 504	302 002 176	10,45
3	262 272 560	282 844 169	7,27
4	261 185 152	284 889 864	8,32
5	258 232 496	276 369 216	6,56
6	257 974 304	278 592 400	7,40

* Az egyetlen homogén gépcsoportot tartalmazó vertikumokat nem tekintve (Vö. I.).
** A homogén gépcsoportok illetve a vertikumot érintő terméktechnológiák száma.

3. táblázat

Iteráció sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
	Az egyes vertikumok homogén gépcsoportjain jelentkező relatív túllépések maximuma										
1	61	235	37	116	19	57	307	170	129	232	235
2	17	117	23	119	0	56	86	29	117	129	207
3	5	*	*	87	*	*	*	*	131	140	182
4	0	*	*	121	*	*	*	*	126	117	161
5	6	*	*	77	*	*	*	*	84	63	75
6	0	22	0	42	0	0	0	0	37	19	61

Egyrészt más mérőszám is elképzelhető, másrészt pedig a megrendelő számára nagyon is érdekesek az egyes gépcsoportokon adódó túllépések. Egyébként a programrendszer lehetőséget biztosított bizonyos gépcsoportok túllépéseinek más gépcsoportokon fellépő túllépések terhére történő megkülönböztetett kezelésére. (Mindenesetre, a 4. táblázatban a túllépéseket gépcsoportbontásban adjuk meg.)

A 3. táblázat 4., 9., 10. és 11. oszlopában található számok minden iterációban nagyok. Ennek az volt az oka, hogy ezeket az általánosított szállítási feladat típusú vertikumfeladatokat a vártnál nagyobb méretük miatt nem tudtuk a rendelkezésünkre álló programmal megoldani. Az ezekben az oszlopokban feltüntetett számok annak alapján adódtak, hogy a központi feladat megoldásával meghatározott programot a szóban forgó vertikumokban egy egyszerű heurisztikus eljárás alapján lebontottuk a gépcsoportokon végrehajtandó műveletekre. A negyedik iterációtól kezdve ezeket a vertikumokat, pontosabban ezek módosított modelljét is megoldottuk szállítási feladatként — ezzel a programmal méret problémánk nem volt — és az így adódott feltételeket is beépítettük a központi feladatba.

Ugyancsak ,,kemény diónak'' bizonyult a 2. vertikum, pontosabban annak két gépcsoportja. Feltételezhető azonban, hogy az eljárás további egy-két iterációs lépése a hibásan megadott alapadatok ellenére ezeken a homogén gépcsoportokon is — az akceptálható — 10% alá szorította volna a túllépést. Mindenesetre, a már említett 4. táblázat a 3. táblázatnál meggyőzőbb. Ebben zárójelben külön feltüntettük a végig ,,pontosan'' kezelt vertikumok homogén gépcsoportjaira vonatkozó megfelelő számokat. Figyelembevéve azt, hogy a ,,nagy'' vertikumok pontos, az általánosított szállítási feladatot megoldó programmal történő kezelése nem is tűnik időigényesebbnek, mint a közelítő megoldásuké, a zárójelbe tett számok is a vertikumok pontos kezelése mellett szólnak.

Némi ráfordítással a további feladatok esetén is hasonló számok prezentálhatók. Nagyobb méretű általánosított szállítási feladatot megoldó programról, illetve a megfelelő vertikumokról is hasonló viselkedést feltételezve igazoltnak látszik a modellre, illetve az eljárás viselkedésére vonatkozó elképzelés helyessége. Az említett vertikumoktól eltekintve a túllépések a feladat negyedéves időhorizontjához képest az utolsó lépésekben elhanyagolhatók és a megoldásokhoz tartozó célfüggvényérték jól közelíti az optimumértékre kapott felső becslést. (Természetesen tudjuk, hogy néhány futás valójában semmit sem igazol, így a következőkben kerülni igyekszünk ezen kifejezés használatát.)

4. táblázat

Iteráció sorszáma \ Túllépések nagysága	5 % alatt	5 és 10% között	10 és 15% között	15% felett
1	21 (21)	12 (21)	22 (2)	56 (24)
2	29 (29)	10 (10)	32 (8)	50 (12)
3	*	*	*	*
4	*	*	*	*
5	*	*	*	*
6	57 (57)	10 (0)	20 (1)	34 (1)

Bár az eredmény használhatósága szempontjából az egyes gépcsoportokon adódott túllépések nagysága az érdekes, a dekompozíciós eljárás viselkedését, az egyes lépésekben generált új feltételek, azaz nagyjából az adott iterációban nem megoldható vertikumfeladatok (részfeladatok) számával is jellemezhetjük. (5. táblázat) A központi feladatban bevezetett z változók miatt ez így nem lenne egészen pontos, illetve éppen azért vezettük be a központi feladatban a z változókat, hogy a központi feladatnak legyen gyorsan adódó megoldása és mert az eredmény használhatósága még megengedi a vertikumfeladatok gépcsoportkapacitásainak bizonyos túllépését. A z változók főképpen a kötelezően legyártandó mennyiségek viszonylag kicsiny volta miatt, de még így is némileg várakozásainkon túl, minden iterációban igen gyorsan zérussá váltak. (Ugyanis $A_i \equiv 0$ esetén $x_{ij} \equiv 0$ nyilván megoldása a központi feladatnak. Vö. I. rész.)

Mindenesetre, érdekes az 5. táblázatot az egyes feladatok vertikumainak számával, illetve a központi feladat méreteire vonatkozó elvárásainkkal egybevetni: a központi feladat kezelhetőségéhez lényeges volt, hogy méretei legfeljebb egy várt mértékben növekedjenek. Az 5. táblázat mutatja, hogy ez az első három feladat esetén valóban elvárásainknak megfelelően történt. (A III. feladatnál a *-gal megjelölt helyeken beszámítottuk a „nagy" vertikumok közelítő megoldásával adódott feltételeket is.) A IV. feladatnál — minthogy ott valójában a programrendszer viselkedésének egy más számítógépen való vizsgálata volt a cél — nem határoztuk meg a központi feladat (közel) optimális megoldását minden lépésben, csak a kiinduló megoldást módosítottuk némileg. Ez magyarázza, hogy a végrehajtott lépésekben lényegében egyetlen vertikumfeladat sem vált megoldhatóvá.

5. táblázat

Iteráció \ Feladatok	I.	II.	III.	IV.
1	6	41	7	41
2	4	37	6	41
3	2	30	5	39
4	2	25	8*	
5	1		5*	
6			5*	

Magát a központi feladatot is Dantzig—Wolfe-dekompozícióval oldottuk meg, bár a cikk I. része alapján ezt csak az adott körülmény között tekinthettük a megoldás járható útjának. Az ugyancsak a III. feladatra vonatkozó 6. táblázat valamelyest mutatja, hogy hasonló feltételek mellett valóban megoldhatók így az egyébként általánosított felsőkorlátos technikával is kezelhető feladatok. (A hasonló feltételek kifejezést külön is szeretnénk hangsúlyozni. Ugyanis ezen munkával kapcsolatban az ún. általánosított szállítási feladat típusú vertikumfeladatok megoldásakor az általunk alkalmazott eljárás is az általános felsőkorlátos technikán, pontosabban annak duális változatán alapult. A megfelelő programnak, illetve az abba beépített különféle eszközök nek a viselkedésével egy külön publikáció foglalkozik.* Az ott közölt eredmények az általánosított felsőkorlátos technika hatékonyságát is demonstrálják.) Egyébként a 6. táblázatbeli lépésszámokból általában két lépés fordítódott a z-változók minimalizálására.)

6. táblázat

Iteráció sorszáma	A központi feladat megoldásakor végzett Dantzig—Wolfe-lépések száma	A célfüggvény értéke a Dantzig—Wolfe-eljárás befejezésekor	Becslés az optimum értékre	A célfüggvény érték és a becslés %-os eltérése (az utóbbihoz viszonyítva)
1	9	294 203 136	307 229 416	4,24
2	13	270 421 504	282 565 888	4,29
3	23	262 272 560	274 914 560	4,60
4	9	261 185 152	274 044 672	4,69
5	8	258 974 304	268 650 240	3,60
6	3	257 974 304	267 943 327	3,71

A futási időket illetően azt kaptuk, amit a cikk I. részében jeleztünk, hiszen azon rész megírásakor a programrendszer legtöbb része IBM 370-en már tesztelés alatt állt. Minthogy később a programrendszert más gépekre is áttelepítettük, a 7. táblázatba foglaltuk a futtatásoknál felhasznált gépeket és a különféle benttartózkodási időket.

Az első pillanatra hosszúnak tűnő — pedig a közben felfedezett hibák miatt szükséges ismétlések idejétől „megtisztított" — idők elfogadhatóbbak, ha figyelembe vesszük egyrészt azt, hogy negyedévenként egyszer felhasználandó rendszerről van szó, és a fenti időkben megjelenik rengeteg olyan kiíratás ideje, ami a futtatások próba jellegéből adódott, másrészt pedig azt, hogy ezek az idők még akceptálható ráfordítást jelentettek (volna) mindazért, amit a rendszer nyújt. Nem szerepeltettük az adatelőkészítés tetemes idejét, de ezt később még érintjük, viszont a rendszer kidolgozásakor volt egy olyan döntésünk, aminek következtében a gépidők legalábbis öt- vagy hatszorozódtak, (de lehet, hogy az egy túl mértékletes becslés). Nevezetesen a központi feladat MPS-sel történő megoldásáról van szó. Az MPS felhasználása kétségtelenül jelentős mértékben megkönnyítette a szükséges programozási munkákat, illetve lerövidítette a programok elkészítéséhez szükséges időt. Ma már

* Maros, I and Mrs. Z. Mócsi: „Investigation of the numerical behaviour of a dual type LP-algorithm", SZÁMKI Tanulmányok/2. 1978.

7. táblázat

Feladat	I.	II.	III.	IV.
Felhasznált számítógép	IBM360	IBM370/145	IBM370/145	R40
Központi feladat egy Dantzig–Wolfe-lépésére fordított idő	2′	3′	2,5′	3,5′
Egy szállítási feladat típusú vertikum megoldásához szükséges átlagidő	5′	4,5′	4,5′	4′
Egy általánosított szállítási feladat típusú vertikum megoldásához szükséges átlagidő	–*	2′	2′	2′
Központi feladatok megoldására fordított idő	67×2 = = 134′	82×3 = = 246′	65×25 = = 162′	14×3,5 = = 49′
Vertikum feladatok megvalósítására fordított idő	5×30 = = 150′	4×114 = = 456′	3×2,5 + + 3×45 = = 225′	3×108 = = 324′
Összes benttartózkodás	4,76 ó	11,7 ó	6,45 ó	6,21 ó

azonban jól látszik, hogy ennek döntő szempontként való figyelembevétele hiba volt. A rendszer egyrészt a szükséges ráfordítások alábecslése miatt, másrészt egyéb okok folytán jelen formájában sem készült el a tervezett időre. Ugyanakkor az MPS felhasználhatóságát adottnak véve is javíthatók a futási idők — elsősorban a központi feladat megoldását végző résznél — az adatok elhelyezésének illetve mozgatásuk jobb megszervezésével. Ezek egy részét realizáltuk is a programrendszernek R40-re illetve később R22-re telepítésekor. Figyelembevéve az IBM gépekre illetve az R-gépekre vonatkozó globális mutatókat, valamint a megoldott feladatok méreteit (1. táblázat), az utolsó táblázatban közölt értékek valamelyest ki is fejezik ezt.

Mit kapott a megrendelő?

Az eddigiekből — néhány zárójeles megjegyzést nem számítva — úgy tűnhet, hogy minden a legnagyobb rendben volt, illetve van. A modell illetve a megoldásra javasolt algoritmus — az MPS alkalmazásával kapcsolatban a cikk I. részében már említett és most újra elővett probléma ellenére is — olyan vagy jobb volt, mint vártuk, Tehát egyszersmind a modell kereteinek kialakításakor figyelembe vett megrendelői elvárásoknak is realizálódniok kellett volna. Sajnos, ez olyan mértékben nem volt így, hogy az egész munka közvetlen kimenetelét egyszerűen kudarcnak ítélhetjük.

Ennek több — egymástól nem is nagyon elválasztható — oka is volt, mi kettőt említünk.

Rendkívül nagy hiba volt, hogy lebecsültük az adatelőkészítő, adatkezelő rész szerepét. Alapjában véve az történt, hogy mi csak az optimalizálással kívántunk foglalkozni, az adatkezelő rész kidolgozásában legfeljebb programozókként működtünk közre. Azt képzeltük, hogy egy ekkora rendszernek adatokkal történő kiszolgálása nem igényel különösebb megfontolásokat, illetve nem láttuk azt, hogy az adatkezelés megfelelő megoldása valójában az optimalizálással egyenlő súlyú probléma, ha úgy tetszik, annak elválaszthatatlan

* A feladat valamennyi vertikuma szállítási feladat típusú volt.

része. (Hibát persze nemcsak tudatlanság miatt követ el valaki, de ennek a szerepét sem lehet és nem is kell tagadni.) Végül létrejött egy olyan adatrendszer és adatkezelő rendszer, mellyel az adatokat valójában sohasem lehetett naprakész állapotba hozni és mindez ráadásul több programozási és gépidő-ráfordítást igényelt, mint az optimalizálás. Nóha a feladat megoldásának úgy indultunk neki, hogy az eredményeket át kell adni a megrendelőnek, már előre tudott volt, hogy közvetlenül nem tudja majd felhasználni őket, mert addigra a kiinduló adatok már nem a valós helyzetet tükrözik. A megrendelőt kevéssé vigasztalta az, hogy a számítás a modell, illetve a megoldására javasolt eljárás tesztelésére így is alkalmas volt. Az adatkezelő rendszer kidolgozása, pontosabban az ilyen irányú igyekezet a megrendelőt reménytelenül leterhelte.

Egy ilyen nagy rendszer kialakításában egy külső vállalkozó csak közreműködhet. Nagyon közeli az a pont, ahonnan kezdve a megrendelő munkatársainak — esetleg a megrendelő saját eszközbázisával együtt — kell a főszerepet vagy kizárólagos szerepet játszaniok a rendszer további éltetésében. Ha a megrendelőnél ennek feltételei nem biztosítottak, a kidolgozott rendszer nem lesz hosszú életű, sőt igazából meg sem születik. Persze ez is olyan igazság, mely a legtöbb és legkülönfélébb idevágó kézikönyvben megtalálható, bár kis rendszerek esetén ez esetleg fel sem lépő vagy könnyen kezelhető probléma, nagy rendszerek kidolgozását pedig ma még talán nem is nagyon lehet kézikönyvekből tanulni. Ebben a vonatkozásban az általunk elkövetett hiba az volt, hogy egyrészt elég későn jöttünk csak rá az említett feltétel hiányára, másrészt pedig nem vontuk le a megfelelő következtetéseket.

Hogy miért követtünk el mégis ilyen hibákat? A már említett tudatlanságon túl ebben egyéb okok is közrejátszottak. Az egészben a fájdalmas az, hogy ismét a matematika illetve alkalmazása vallott kudarcot, holott azok semmiről sem tehetnek.

ON THE SOLUTION OF A LARGE-SCALE LP PROBLEM (II)

As sequence of Part I, published formerly, the article deals with the run of the program system on the one hand, and with the question what the customer has received at the end, on the other hand.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БОЛЬШОГО РАЗМЕРА (II.)

Данная статья является продолжением опубликованной ранее 1-ой части и подытоживает опыт по внедрению данной системы программ, а также рассматривает тот результат, который в конечном счете был передан заказчику.

KÖNYVEKRŐL

DENKINGER GÉZA: Valószínűségszámítás. Budapest, 1978. Tankönyvkiadó. 284 p.

A matematikai módszerek közgazdasági alkalmazásának terjedésével egyre inkább előtérbe kerülnek az ökonometriai módszerek, amikor a matematikai statisztika módszereinek egy önállósult körét használjuk fel gazdasági jelenségek és összefüggések elemzésére. E módszerekkel sztochasztikus modelleket képezünk, feltételezve, hogy e modellek megragadják az ugyancsak sztochasztikus jellegű összefüggések specifikus tulajdonságait és időbeli és térbeli alakulásukat. Ezek a modellek mindig egy feltételrendszert tartalmaznak, amelyen végül a modellből levont következtetések is alapulnak. E feltételek a modellek valószínűségi változóira, azok eloszlására és jellemzőire vonatkoznak. Ily módon a modellek matematikai alapját a valószínűségszámítás (és a kapcsolódó matematikai statisztika) képezi.

Az alkalmazásokban egyre több példát találunk sztochasztikus modellekre, de viszonylag elhanyagoljuk a modellek, az alkalmazott módszerek feltételrendszerének vizsgálatát, s ami ezzel meghatározóan összefügg, a levont következtetések, s így maga a modell jóságának, realitásának vizsgálatát.

E bevezetéssel arra kívántam utalni, hogy mennyire fontosnak és időszerűnek tartom a hazai matematikai-közgazdasági alkalmazások szempontjából a valószínűségszámítási ismeretek terjesztését. Ezt a célt véleményem szerint nagyon jól szolgálja Denkinger Géza: Valószínűségszámítás c. könyve, amelyet a Tankönyvkiadó adott ki 1978-ban. Bár elsősorban egyetemi tankönyv, igen jól használhatják kézikönyvként olyan nem matematikus, de a matematikai-közgazdasági módszerekkel foglalkozó kutatók is, akik igénylik (és ezt nem kerülhetik el) az alkalmazott módszerek elméleti alapjaival való ismerkedést. Erre a célra használható magyar nyelvű könyv alig található a szakirodalomban ezért is időszerű volt megjelentetése. Az említett felhasználást megkönnyíti a könyv világos és logikus felépítése és tárgyalásmódja. Ahogy a szerző az előszóban megállapítja, műve az ismeretek különböző szintjén, különösebb előtanulmányok nélkül is használható. A legszükségesebb bevezetést a könyv első két fejezete tartalmazza.

Az első fejezet a kombinatorikával foglalkozik. Annyit tárgyal a témából, amennyit a felhasznált fogalmak és tételek tárgyalása megkövetel. A második fejezet az eseményalgebra alapfogalmait, pontos definícióját és az események halmazán értelmezett műveleteket tartalmazza. Míg ez a fejezet a valószínűségszámítás klasszikusnak nevezett részének tárgyalásához elengedhetetlen, megismerkedhetnek vele azok az olvasók is, akik matematikai tanulmányaik során még egyáltalán nem, vagy alig foglalkoztak halmazalgebrával. A valószínűségszámítás szorosabb értelemben vett tárgyalása a harmadik fejezetben kezdődik. A véletlen tömegjelenségekben érvényesülő tapasztalati nagy számok törvényének ismertetése vezet el a valószínűség fogalmához. A valószínűségelmélet alapját a Kolmogorov-féle axiómák képezik. A valószínűség fogalmát logikai úton közelíti meg az ún. klasszikus képlet. Utána megismerkedhetünk a valószínűségszámítási tételekkel, a feltételes valószínűség fogalmával, a teljes valószínűség tételével és a Bayes tétellel. A valószínűségszámítás alkalmazását az eseménytéren értelmezett függvények, s e függvények vizsgálata teszi lehetővé. A negyedik fejezet definiálja a valószínűségi változót, majd a legfontosabb diszkrét eloszlások tárgyalásával elvezet az eloszlásfüggvény tárgyalásához. Miután megismerkedhetünk az eloszlások két legjellemzőbb momentumával, a várható értékkel és a szórással, a néhány leggyakrabban alkalmazott diszkrét és folytonos valószínűségeloszlás tulajdonságai következnek.

Az ötödik, elméleti jellegű fejezet a Csebisev egyenlőtlenséggel, a nagy számok törvényének Bernoulli-féle alakjával és a sztochasztikus konvergencia fogalmával foglalkozik.

A gazdasági jelenségek vizsgálatánál általában több jelenség együttes elemzése és ezek kapcsolatának vizsgálata szükséges. Ezért az alkalmazások szempontjából fontos a hatodik fejezet, a valószínűségi vektorváltozók és a többdimenziós eloszlások bevezetése, valamint a valószínűségi változók transzformáltjai és egyszerűbb függvényei eloszlásának tárgyalása. A valószínűségi változók függetlenségének definícióját követően a sztochasztikus kapcsolat szorosságát mérő korrelációs együtthatóval és kovarianciamátrixszal ismerkedhetünk meg.

Gyakran elfelejtkezünk arról, hogy az ökonometriai modellekkel származtatott prognózis-értékek feltételes várható értékek. Ezeknek a következetes értelmezéséhez ismernünk kell a feltételes valószínűségeloszlásokat és tulajdonságaikat, és a kapcsolódó elsőfajú és másodfajú regressziós függvényeket. Ez a témája a hetedik fejezetnek.

A nyolcadik, ismét elméleti rész, a generátorfüggvénnyel, a karakterisztikus függvénnyel foglalkozik, és a központi határeloszlási tétel bizonyítását adja. A befejező kilencedik fejezet ismét a gyakorlat szempontjait tartja szem előtt, amikor a matematikai statisztika néhány legfontosabb valószínűségeloszlását ismerteti. Szinte egyetlen lépést sem tehetünk sztochasztikus modellek alkalmazása terén úgy, hogy ne lenne szükségünk a becsült mutatók szignifikanciájáról tájékoztató F-, t-, χ^2-, stb. próbák alkalmazására. A regressziós programcsomagok felhasználása is elképzelhetetlen e próbák mutatóinak értelmezése nélkül. Ezért az ismertetett eloszlástípusok és a kötet végén közölt táblázatok nagyon jól használhatók segédanyagként.

Összegezve az elmondottakat, Denkinger Géza Valószínűségszámítás c. könyve tényleges hiányt pótol a magyar szakirodalomban, s egyetemi tankönyvként való felhasználásán túlmenően, ajánlható mindazon olvasóknak, akik sztochasztikus módszerekkel és modellekkel foglalkoznak. A könyv hatékony felhasználását segíti a szerző Valószínűségszámítási gyakorlatok c. könyve, amely szintén a Tankönyvkiadó gondozásában jelent meg 1977-ben.

Hulyák Katalin

Wölfling, M.: Az NDK népgazdaságának ökonometriai modellje. (Ein ökonometrisches Modell der Volkswirtschaft der DDR.) Berlin, 1977. Akademie-Verlag. 151 p.

A könyv a Német Demokratikus Köztársaság ökonometriai modelljét mutatja be. Bár nem ez az első népgazdasági ökonometriai modell a Német Demokratikus Köztársaságban (az elsőt, a DÖM-1 modellt 1971-ben készítették), a munka mégis úttörő jelentőségű: könnyen érthető és logikus sorrendben viszi végig az olvasót az ökonometriai modellezés egyes fázisain; mindig a legkorszerűbb eszközöket alkalmazva, sőt kifejezett didaktikai céllal. Szerzője, Manfred Wölfling, szerencsésen foglalta össze könyvében az NDK Tudományos Akadémiája Közgazdasági Intézetében folyó ökonometriai elemzések eddigi tapasztalatait. A könyv harmadik fejezetének egy részét (a nemzeti jövedelem felhasználásáról szóló részt) dr. Edith Biebler, a negyedik fejezetet (a modell paramétereinek becslésével foglalkozó kérdések) Karin Schiele, a Közgazdasági Intézet munkatársai írták. Művüket bizonyos értelemben hézagpótlónak is szánták, mert — mint az Előszóban kifejtik — a matematikai modellek illetve módszerek között az NDK-ban mindeddig viszonylag csekély szerep jutott az ökonometriai modelleknek.

A könyv hat fejezetet foglal magában. Az első az ökonometriai modell általános jellemvonásaival, a második a modell egyenleteivel és változóival foglalkozik. A harmadik fejezet lényegében a közgazdasági mondanivaló döntő súlyát hordozza (a népgazdasági újratermelési folyamat tükröződésének gazdasági és statisztikai problémái). A negyedik fejezet a modell paraméterbecslési módszereivel és tesztjeivel foglalkozik; az ötödik a modell gyakorlati alkalmazásaival (előrejelzés, szimuláció, tervezés). A rövid hatodik fejezet a modell továbbfejlesztési lehetőségeiről szól.

A modellezés célját a szerző a népgazdasági összefüggések, elsősorban az újratermelési folyamattal kapcsolatos jelenségek elemzésében, jobb megismerésében látja. Ezek a jelenségek rendkívül szerteágazóak: tisztán gazdasági kérdéseken túl (így például a fogyasztás-felhalmozás aránya, beruházások allokációja, termelékenység) demográfiai szempontok, tudományos-technikai haladás, ökológiai aspektusok is közrejátszanak, nem is szólva a külkereskedelmi egyenlegeken, illetve változókon keresztül beérkező világgazdasági hatásokról.

A modell az 1965—1973 időszak éves megfigyelési adataira épült (mindössze 9 megfigyelés), de a vizsgált jelenségek idősorai jelentősebb töréseket, kilengéseket nem mutatnak. Kevésbé mondható szerencsésnek a modell elnevezése: az ISI-1 (Iteratives Simulationsmodell) kifejezés könnyen félreértésre adhat alkalmat, mert az ISI elnevezés a Nemzetközi Statisztikai Intézetnek van fenntartva.

A modell szerkezete részben rekurzív,

részben interdependens vonásokat visel magán. A 207 egyenlet közül csak 48 képezi a modell magvát, amelyet szimultán módszerrel becsülnek, s amelynek egyenletei öt különálló blokkba sorolhatók. A többi 159 összefüggést szubmodellek határozzák meg, amelyeket a blokkokkal csak laza kapcsolatok fűznek össze. A blokkok és szubmodellek rendszere egyébként a következő:

1. blokk: munkaerő, munkatermelékenység, bérek (14 összefüggés)
2. blokk: bruttó népgazdasági termelés (3 összefüggés)
3. blokk: külkereskedelem (8 összefüggés)
4. blokk: nemzeti jövedelem felhasználása (14 összefüggés)
5. blokk: állóalapok újratermelése (9 összefüggés)

1. szubmodell: népesség
2. szubmodell: munkaerő megoszlása a termelő ágazatokban
3. szubmodell: bruttó népgazdasági termelés
4. szubmodell: import
5. szubmodell: export
6. szubmodell: a lakosság pénzkiadásai
7. szubmodell: átlagbérek
8. szubmodell: bruttó beruházások a termelő ágazatokban
9. szubmodell: állóalapok újratermelése
10. szubmodell: munkatermelékenység

A modell 207 összefüggése közül 146 sztochasztikus egyenlet és 61 identitás; a szimultán „központi" modell magvát képező 48 összefüggés közül 30 a sztochasztikus egyenletek száma. 116 sztochasztikus egyenletet tehát a szubmodellek tartalmaznak.

Az egyes egyenleteket és változókat a 2. fejezet mutatja be, míg a specifikáció gazdasági hátterét a 3. fejezet tárgyalja, a blokkok fenti sorrendjében haladva.

A munkaerő alakulásában a népességutánpótlás játszik nagy szerepet, de ez utóbbi ugyanakkor a fogyasztók létszámát is növeli. A modellben döntő fontossága van a munkatermelékenységnek; a nem-termelő szektor munkaerő-foglalkoztatottságát a termelő szektor termelékenysége határozza meg, bár a termelékenység emelkedését a foglalkoztatottság növekedése csak lassabban követi. A munkaerő népgazdasági ágak szerinti alakulását a megfelelő szubmodell egyenletei magyarázzák. Ugyancsak a termelékenységtől függ az átlagbérek alakulása is, bár a becsült eredmények szerint a bérek emelkedése a termelékenységhez képest eléggé rugalmatlan. Az első blokk határozza meg a nem-bérjellegű jövedelmek, a nyugdíjak és bruttó pénzbevételek alakulását is.

A bruttó terméket a modell a komponensek összegéből identitás segítségével határozza meg. A komponensek közül sztochasztikus összefüggés írja le az anyagfelhasználást és az amortizációt (ez utóbbinak magyarázó változója a termelő ágazatok átlagos állóeszközállománya, amelyet az 5. blokk fejt ki; így ez a változó biztosítja a visszakapcsolást a 2. blokk felé). A bruttó nemzeti termék harmadik komponensét, a megtermelt nemzeti jövedelmet adottnak, a modell szempontjából exogén változónak tekinti a modell. Ennek a szokatlan eljárásnak a magyarázata a termelékenységnek a modellben elfoglalt központi szerepével, illetve a népgazdasági egyensúlynak a modellben szánt szerepével függ össze. A termelékenységet (y_1) ugyanis mint a termelő erők jelenlegi fejlettsége mellett produkálható nemzeti jövedelem és a termelő ágazatok foglalkoztatottsági létszámának hányadosát tekinti. A többfokozatú becslés során azonban az interdependens kapcsolatok felhasználásával (az 5. és 2. blokk bekapcsolásával) iteratív módszerrel határozzák meg a nemzeti jövedelemnek azt a volumenét (2. blokk), amikor az 1. blokkban (az exogénnek vett nemzeti jövedelem alapján) számított munkatermelékenység megegyezik az 5. blokk alapján (a felszereltség függvényeként) számított munkatermelékenységgel; vagyis amikor a gazdaságban egyensúly áll fenn.

A külkereskedelmi blokk és a 2. blokk közötti interdependenciát elsősorban az biztosítja, hogy az export meghatározója a bruttó nemzeti termék. A külkereskedelmi blokk specifikációja érdekes eszmei konstrukció. A belföldi folyóáron értékelt export deviza-márkában kifejezett értéke határozza meg mind a szocialista, mind a nem-szocialista viszonylatú exportot; majd a szocialista importot a szocialista, a nem-szocialista importot a nem-szocialista országokba irányuló export határozza meg. Ebben az utóbbi egyenletben azonban az importárindex is szerepel magyarázó változóként. Ezen túlmenően a szerző azt a kérdést is vizsgálja: kielégíti-e az exporttal ekként fedezett import a belföldi szükségletet? Erre az import-szubmodell segítségével keres választ a következőképpen: a belföldi áron számított import nyersanyagimportból, a beruházási javak importjából és a fogyasztási cikkek importjából tevődik össze. Mindhárom komponenst más-más blokkba ill. szubmodellbe tartozó magyarázó változók függvényeként becsüli. Így összehasonlítási lehetőség kínálkozik a külkereskedelmi blokkban meghatározott, deviza-márkáról visszaszámított import és a leírt módon becsült import között, s a fenti kérdésre ez az összehasonlítás hivatott felelni.

Az export növekedését a modell a nemzetközi munkamegosztásban való fokozott részvételre és a nem-szocialista viszonylatú importárak emelkedésére vezeti vissza. Ez utóbbit csak az export fokozásával lehet kiegyenlíteni: ennek előfeltétele pedig az exportban döntő súllyal szereplő ágazatok bruttó termékének a növelése. Ez ismét a beruházások elosztásának a függvénye: ezeket az összefüggéseket a modell ,,bruttó termelés'' szubmodellje számszerűsíti, míg a kiemelt fontosságú, exportigényes ágazatok bruttó termelése és a népgazdaság exportja közötti összefüggést az export-szubmodell határozza meg.

A népgazdasági modellezés szempontjából további fontos kérdés a felhalmozás—fogyasztás-arány. A lakosság fogyasztását a modell elsősorban a korábbi időszakbeli fogyasztástól és a lakosság nettó pénzbevételeitől teszi függővé. (A megtakarításoknak mint további magyarázó változónak a bekapcsolása a nyilvánvaló multikollinearitás folytán inszignifikáns eredményekhez vezetett.) A felhalmozást identitás segítségével határozza meg a modell.

A kiskereskedelmi áruforgalmat tíz árucsoportra bontva vizsgálják a ,,lakosság pénzkiadása'' szubmodellben. Különféle (összesen hat) függvénytípussal kísérleteztek, és az eredmények azt mutatták, hogy az egyes árucsoportok összefüggései másmás típusú függvénnyel voltak jól közelíthetők. A vizsgálat kiterjedt az egy főre jutó pénzbevétel és az egy főre jutó fogyasztás összefüggéseire is.

Az állóalapok újratermelésének alapösszefüggése olyan identitás, amely szerint a folyóáron értékelt bruttó beruházások a termelő szektorban a nettó beruházások és az amortizáció összegével egyenlők. Ezt a két komponenst a modell 4. és 2. blokkja sztochasztikus egyenletek formájában már meghatározta. A modell egyébként az állóalap- és beruházási jelenségek elemzésében igen finom megkülönböztetéseket tesz. Így megkülönbözteti a befejezett beruházások fogalmát (a beruházási ráfordítások és az előző évi be nem fejezett beruházásoktól téve függővé ezeket); a működő (aktív) beruházásokat (,,Grundfondszugang'') valamint az állóalapnövekményeket (,,Grundfondszuwachs''). A gondolati konstrukció szerint a működő beruházások a befejezett beruházásoktól függnek; az állóalap-növekmény pedig a működő beruházások és a kiselejtezés különbsége (utóbbiak ismét sztochasztikusan függnek az előző évi átlagos állóeszközállománytól). Hogy a beruházások és állóalapok kérdéstömege milyen súlylyal szerepel a modellben, mutatja az, hogy a ,,bruttó beruházások elosztása'' szubmodell 15 összefüggést, az ,,állóalapok újratermelése'' szubmodell 52 összefüggést tartalmaz, amelyek szektor-szintű összefüggésekre világítanak rá. Ezzel kapcsolatban részletesen kitér a szerző az osztott késedelem (distributed lag) problémakörére és megoldásaira is.

A paraméterbecsléssel foglalkozó negyedik fejezet a kérdéskomplexum tömör, szabatos és áttekinthető összefoglalása. Minthogy a modell 1. blokkja nem-lineáris összefüggést is tartalmaz (termelékenység), iteratív becslés alkalmazására volt szükség. A fejezet kitér az alkalmazott tesztekre, az autokorreláció és a multikollinearitás problémájára. A kétfokozatú becslés során a szabadságfokok biztosítása érdekében főkomponenseket alkalmaztak. A szubmodellek paramétereit, amelyeknek a blokkokhoz való szorosabb kapcsolása még a jövő feladata, csak a legkisebb négyzetek klasszikus módszerével becsülték. Úgy találták egyébként, hogy a főkomponensekkel való becslés a klasszikus módszerrel végzett becslés eredményét átlagban 5 százalékkal javította.

A mű ötödik fejezete az előrejelzéssel foglalkozik, és bemutatja az 1974. évi ex post becslés eredményeit. Itt kerül sor a gazdasági egyensúly vizsgálatára is. Ehhez felhasználják a modellben kétféle módon számított termelékenységi mutatót. A nemzeti jövedelem/foglalkoztatottak aránya (y_1) a ténylegesen adott, a felszereltség függvényeként becsült termelékenység (y_2) a gazdaság potenciális termelékenységét becsüli. Egyensúly akkor áll fenn, ha $y_1 = y_2$. A továbbiakban a modellel végezhető szimulációs kísérletekkel, a modell tervezési célú felhasználásával és továbbfejlesztésével foglalkozik a szerző. A művet a szakirodalom alapos ismeretéről tanúskodó Irodalomjegyzék zárja.

NYÁRY ZSIGMOND

BERGSTROM, A. R., CATT, A. J. L., PESTON, M. H., SILVERSTONE, B. D. J. (szerk.): Stability and inflation. New York, 1978. John Wiley. 323 p.

A néhány évvel ezelőtt elhunyt *A. W. H. Phillips* tiszteletére írott tanulmányokat tartalmazza a kötet. Phillips munkásságát elsősorban az úgynevezett Phillips-görbe alapján ismerik a világ közgazdászai. E görbe azt fejezi ki, hogy a munkanélküliség mértéke és az infláció mértéke között függvényösszefüggés van, minél nagyobb a munkanélküliség, annál kisebb az infláció, és megfordítva. Ezt az összefüggést gyakran idézik gazdaságpolitikusok is, amikor az utóbbi években a tőkés országokban együttesen jelentkező meggyorsult infláció és megnövekedett munkanélküliség ellen próbálnak intézkedéseket hozni. Phillips gondolata a keynesi közgazdaságtanból fejlődött ki. Ma azonban a keynesi elmélet más elemeivel együtt sokan kétségbevonják érvényességét a tőkés országok jelenlegi körülményei között.

A tanulmányok első része a Phillips görbével foglalkozik. Igen sokan tanulmányozták a görbe konkrét alakját ökonometriai módszerekkel, mert — ha valóban létezik az összefüggés — annak megismerése nagy segítséget nyújthat a gazdaságpolitikusoknak. Számos tanulmány bírálja azonban ezt az elgondolást. *Lipsey* tanulmánya átfogóan ismerteti a Phillips-görbe helyét a makroökonómiai modellekben. *Baumol* igen érdekes tanulmányában kifejti, hogy egy olyan gazdaságban, ahol a kereslet meglehetősen kiszámíthatatlanul ingadozik, és ahol a bérek az emelkedés irányában sokkal nagyobb rugalmasságot mutatnak, mint a csökkenés irányában, a várt átlagos béremelkedési ütem összefügg a foglalkoztatás szintjével. Más szóval létezhet egy hosszútávú Phillips-görbe.

A második részben levő tanulmányok gazdaságpolitikai kérdésekkel foglalkoznak. Phillips annak idején kimutatta, hogy látszólag ésszerű gazdaságpolitikai intézkedések hogyan okozhatják a gazdasági rendszer stabilitásának felborítását, mert figyelmen kívül hagyták azoknak hosszútávú dinamikus hatásait. *Turnovsky* és *Pitchford* tanulmányai szemléltetik, menynyire sok szempontot kell a gazdaságpolitikák kidolgozásánál figyelembe venni, és ezért milyen könnyen előfordulhat, hogy azok nem-kívánt negatív hatásokat eredményeznek. A kötet utolsó része Phillips egy eddig kiadatlan tanulmányát tartalmazza.

A. R.

LAND, K. C.—SPILERMAN, S. szerk.: Social indicator models. New York, 1975. Russel Sage Foundation 411 p.

A kötet egy 1972-ben tartott konferencia tanulmányait tartalmazza. Témájuk: a társadalmi jelenségek modellezése a matematikai közgazdaságtani modellek mintájára.

A tanulmányok három csoportra oszthatóak. Néhány közülük a társadalmi jelzőszámok és a belőlük felépített modellek elvi és elméleti kérdéseivel foglalkozik. *Land* a társadalmi jelzőszámokat úgy definiálja, mint a társadalom valamely lényeges jellemzőjét leíró olyan statisztikai adatot, mutatót, amely szükség szerint dezaggregálható (például társadalmi csoportokra), amelyből idősorok állnak rendelkezésre (hogy a tendenciákat meg lehessen figyelni), és amely egy társadalmi modell alkotóeleme lehet. A modellekben szerepelnek a politika által befolyásolható instrumentális változók, egyéb exogén változók, továbbá eredmény vagy cél változók, amelyek vagy a társadalmi célok megközelítését, vagy a társadalmi folyamatok és politikák egyéb hatásait fejezik ki.

A második csoportba sorolhatjuk a különböző elméleti modellek és matematikai statisztikai módszerek bemutatásával foglalkozó tanulmányokat. Jól érzékeltetik, mennyire változatos módokon próbálják a szociológusok és demográfusok a társadalmi jelenségeket modellezni. Egyes szerzők sakktáblaszerű „átmeneti" modelleket használnak, amelyek kimutatják a népesség áramlását különböző kategóriák (például különböző típusú iskolák, vagy különböző társadalmi csoportok) között egy év alatt. Az átmeneti valószínűségek stabilitásának feltételezésével hipotetikus előrebecsléseket lehet készíteni, továbbá meg lehet vizsgálni bizonyos átmeneti valószínűségek változásának hatását a folyamatok végeredményére, illetve — megfordítva — a végeredményt képviselő vektor változásának (például a foglalkozási szerkezet változásának) hatását a kategóriák közötti mozgásra. Mások többváltozós regressziós egyenleteket és azoknak továbbfejlesztett változatát, az útmodelleket használják. Tartalmaz a kötet egy részletes leírást a loglineáris elemzés módszeréről, amely különösen alkalmas a megismételt adatfelvételek elemzésére, mert különválasztja az időnek, a szerkezeti változásoknak, stb. hatását a megfigyelt jelenségre.

Sok tanulmányban kifejeződik az a gondolat, hogy a társadalmi jelzőszámok számítására és a modellek felépítésére legalkalmasabb adatforrások az egy-egy jelenségre vonatkozó megismételt adatfelvételek. Ezeket leginkább a folyamatos lakossági adatfelvételi rendszer keretében hajtják végre. Bár a módszertani jellegű tanulmányok is tartalmaznak konkrét példákat, a kötetben négy olyan tanulmány is szerepel, amelynek fő célja egy-egy jelenség vizsgálata, és a módszertan csak ezt a célt szolgálja. Ezek a jelenségek: a nők kereső munkavállalásával kapcsolatos vélemények alakulása (egy 1956. és egy 1971. évi felvétel alapján), a nők foglalkozási összetételének változása, különös tekintettel a férfiakhoz viszonyított hátrányos helyzetre (négy népszámlálás alapján), a fehér-fekete kereseti különbségek alakulása (az 1960-as években végzett öt adatfelvétel alapján), és a társadalmi mobilitás változása (az 1962. és az 1973. évi felvétel alapján).

A. R.

CONTENTS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 30,— Ft
Előfizetés egy évre: 60,— Ft

INDEX: 26 793
ISSN 0039—8128

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST