Dobó Andor

A rendszerek hatékonyságával kapcsolatos matematikai vizsgálatok

A rendszerek hatékonyságával kapcsolatos irodalmat tanulmányozva megállapíthatjuk, hogy ezen a területen sem alakult ki napjainkig egységes terminológia, ami részben abból is fakad, hogy gyakran kölcsönösen ellentmondó feladatok mellett kell valamilyen hatékonyságot kifejező számszerű jellemzőt választani. Előfordul az is, hogy egy és ugyanazon szakkifejezésnek (pl. efficiencia) a különböző munkákban különböző értelmet tulajdonítanak; más esetben egy és ugyanazon fogalmat különböző szavakkal fejeznek ki. De megtörténik az is, hogy egyazon cikkben a „hatékonyság" kifejezés jelentése a szöveg folyamán változik. Mindebben nincs semmi különös, ha meggondoljuk, hogy a gyakorlatilag fontos feladatok nagy változatossága a rendszereknek hol az egyik, hol a másik számszerű jellemzője vizsgálatát teszi szükségessé.

Előfordulhat az is, hogy néha hasznos kiszámítani a rendszer valamennyi hatékonyságot jellemző mutatóját. Más esetben a rendszer optimális hatékonyságát kell értelmezni, elérni és tartósan biztosítani. Ilyen eset fordul elő, amikor például egy termelő berendezést T ideig akarunk igénybe venni, használni úgy, hogy ennél az időközben keletkezett zavarokat, hibákat elhárítjuk, kijavítjuk. Jelöljük ξ_i-vel az i-edik hiba elhárításához szükséges ráfordítást. Azon túlmenően, hogy ξ_i véletlen ingadozást mutat, az értéke nyilván attól is függ, hogy a berendezés mennyi ideig működött már és e közben hányszor és hol, illetve milyen részegysége hibásodott meg. Tekintettel kell lennünk arra is, hogy minden hiba előfordulása a rendszernek a termelésből való kiesése miatt veszteséget, kárt okoz. Legyen η_i az i-edik hiba miatt keletkezett veszteség. Ekkor a T idő alatti hibaelhárítás, valamint a termeléskiesésből eredő kár összes költségének átlagos értéke

$$C(T) = M\left\{\sum_{k=1}^{\nu(T)} (\xi_k + \eta_k)\right\}$$

lesz, ahol $\nu(T)$ a T idő alatt előforduló hibák számát jelenti. Nem egy esetben optimálisnak mondhatjuk a hatékonyságot, ha például $C(T)$ minimális. E példa kapcsán is érzékelhető, hogy a hatékonyság vizsgálata gyakran *a megbízhatóságelmélet körébe* vágó kérdések megválaszolását igényli. Ez főleg akkor fordul elő, ha *a hatékonyság a rendszer hibamentességével, tartósságával, javíthatóságával függ össze*, és például optimalizálni (növelni) akarjuk a rendszer hibamentes működésének átlagos időtartamát, vagy a hibátlan munka valószínűségét stb.

Napjainkban a gazdasági folyamatok szabályozása szükség esetén a beavatkozások mértékének a megválasztását, komplex hatékonyságot elősegítő mutatórendszerek kialakítását követeli meg. (Lásd például az OT-nak és az OMFB-nek a Tervgazdasági Értesítő 1978. április 6. számában közzétett közös útmutatóját a termelési szerkezet átalakításának műszaki-gazdasági kritérium rendszeréről).

Sajnos azonban ma még nem lehetünk kellő biztonságban afelől, hogy az egyik-másik választott mutató valóban híven ki is fejezi azt, amit reprezentálnia kellene. E helyen nem bocsátkozunk a mutatók gyakorlati alkalmazásakor előforduló problémák elemzésébe. Hogy a feldolgozás során nem egy esetben tényleges nehézségek, gondok, problémák vannak, azt jól érzékelteti például JÁNOSI FERENC [8] cikke is és a reagálások reá, melyek részben a jelenleg alkalmazott termelékenységi mutatók alkalmazhatóságával vagy tarthatatlanságával függenek össze. Egy másik hatékonysági mutató kritikai feldolgozását adja a [9]-ben POLÁK MIKLÓS és SUBICZ PÉTER, akik azt vizsgálták, hogy mennyire alkalmas az e célra használt mutató a KGM vállalatok bizonyos termékcsoportjainak elbírálására a népgazdasági hatékonyság szempontjából. (A cikk szerint kb. 880 termékcsoportra meghatározzák e mutató értékét és nagyság szerinti sorba rendezésük alapján döntik el, melyik termékcsoport termelése a gazdaságosabb). A szerzők kimutatták, hogy „. . . a jelenleg használt mutatószám alapvetően hibás, mivel egyrészt nem méri pontosan a ráfordításokat, az alapvető erőforrások közül csak a munkaráfordításokat értékeli, másrészt a vállalatok közötti differenciálás során hatása rossz irányú, mivel az alacsonyabb technikai felszereltséggel termelő vállalatok tevékenységét részesíti előnyben."

Úgy vélem az itt közöltek is jól érzékeltetik, hogy az újabb irányú kutatások mellett számos eddig alkalmazott mutatót, mérőszámot, matematikai kifejezést stb. mélyrehatóbb elemzés tárgyává kell tenni a célravezetőbb és hatékonyabb alkalmazás elősegítése érdekében. Szükség van erre azért is, mert a társadalmi termelés hatékonyságának a növelése megköveteli, hogy a minőségi mutatók rendszere sok gazdasági kérdést más formában tükrözzön és oldjon meg mint eddig.

Ebből kifolyólag e sorok írója úgy véli, hogy a gazdasági irányítási célokat jobban szolgáló komplexebb mutató rendszereknek a behatóbb tanulmányozása, vizsgálata előbb-utóbb a *„hatékonyságelmélet"* tudományosabb megalapozásához fog vezetni, mely sajátos e célra kialakított módszereket és eljárásokat is magába foglal, maga után von; s az egzaktabb megalapozás pedig a matematikai eszközök még számottevőbb igénybevételén, felhasználásán fog alapulni. *A jelen dolgozat* ezt a törekvést igyekszik szolgálni; s *a matematika elvontabb eszközeivel próbálja a hatékonyság témakörébe vágó kérdéseket megfogalmazni, modellezni, megválaszolni, hogy azután az elvont meggondolásokat minél szélesebb körű konkrét gyakorlati alkalmazásoknál lehessen ténylegesen hasznosítani.*

A rendszer jellemző tulajdonságát valószínűségi változóként kezeli, s a kívánt mutatókat várható értékként származtatja. Általában alapkövetelménynek tekinti, hogy a választott mutató várható értéke létezzék, továbbá, hogy ehhez képest a mutató szórása gyakorlatilag elhanyagolhatóan kicsiny legyen.

A dolgozat egyébként *a hatékonyság fogalmát igen általánosan értelmezi.* Ebből kifolyólag *nem törekszik azt egyértelműen definiálni*, inkább úgy tekinti, mint ahogyan a valószínűségszámításban szokás például a szóródás fogalmát tekinteni. Miként a szóródásnak (ingadozásnak) is számos számszerű jellemzője lehet (pl. szórás, várható eltérés, interkvartilis félterjedelem stb.), ugyanúgy a hatékonyságot is számos jellemző mérheti. *Esetektől függően kell eldönteni, hogy* *mikor, milyen számszerű jellemzőt célszerű a hatékonyság mértékének választani.*

Természetesen nemcsak valamely rendszernek, hanem a beruházásoknak, beruházási ráfordításoknak, gazdasági döntéseknek, technológiai változatoknak, erőforrás elosztásoknak a hatékonyságát is vizsgálhatjuk, s mindez a hatékonyság mérésének más aspektusból való megközelítését igényli. A megközelítési, illetve mérési módokat illetően lásd még [21]-t.

Az olvasó minden bizonnyal észre veszi, hogy a dolgozat felépítése szerkezetileg nem eléggé egységes képet mutat. Úgy véltem, a hatékonyságelmélet önálló tudományággá válásának feltétele a sajátos problémáknak sajátos eszközökkel való vizsgálata, s hogy ez a gyakorlatban megvalósulhasson, számos szakterület kutatóinak, művelőinek összefogását, együttgondolkodását igényli. Éppen ezért, a megoldásra váró problémák minél kiterjedtebb, szerteágazóbb felvázolásával, érzékeltetésével, a megoldástechnika lehetséges útjainak, módjainak bemutatásával is igyekeztem a matematikusok, közgazdászok, mérnökök, felhasználók figyelmét felkelteni, felhívni, s a további tennivalókhoz közreműködésüket, segítségüket kérni. Csak ilyen összefogás mellett látszik lehetségesnek a kutatási-fejlesztési munkák során jelentkező és számos területet különböző mélységben érintő szakmai problémák, nehézségek leküzdése, áthidalása.

Végezetül szeretnék hálás köszönetet mondani a lektoroknak értékes és hasznos tanácsaikért, s azért az ösztönzésért és bátorításért, amelyek munkám teljesebbé tétele irányában hatottak.

1. Az alapproblémák és egy alapmodell

Legyen $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ egy *Kolmogorov* valószínűségi mező. (Ez azt jelenti, hogy Ω tetszőleges absztrakt halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája és P egy valószínűségi mérték $\mathcal{A}$-n, azaz nem negatív, σ-additív halmaz-függvény, amelyre $P(\Omega) = 1$).

Tekintsük az Ω-n értelmezett és az $\mathcal{A}$ σ-algebrára nézve mérhető t paramétertől is függő $\xi(t, \omega)$ $(\omega \in \Omega;\ 0 \leq t < \infty)$ valós függvényt, amit definíció szerint valószínűségi változónak nevezünk. (A $\xi(t, \omega)$ függvény akkor mérhető, ha az $\{\omega\colon \omega \in \Omega,\ \xi(t, \omega) < c\}$ ún. nívóhalmazok minden valós c-re $\mathcal{A}$-ba tartoznak).

Tételezzük fel, hogy $\xi(t, \omega)$ egy rendszer valamilyen tulajdonságát, viselkedését jellemzi, írja le.

Legyen $g(x)$ az x valós változónak egy tetszés szerinti (mérhető) függvénye. A valószínűségelméletből ismeretes, ha a t paramétertől függő $\xi(t, \omega)$ ω-ra nézve valószínűségi változó, akkor az $\eta = g[\xi(t, \omega)]$ is ω-ra nézve valószínűségi változó, amennyiben $g(x)$-re igen általános feltételek (pl. Borel-mérhetőség) teljesülnek.

Abban az esetben, ha létezik az $\eta = g(\xi)$ valószínűségi változó $M\{\eta\}$ várható értéke, akkor azt — mint látni fogjuk — a vizsgált rendszer egy ilyen általános jellemzőjének tekinthetjük. (Talán nem érdektelen emlékeztetni arra, hogy sztochasztikus folyamatnak nevezzük a $\xi(t, \omega)$ valószínűségi változók bármely összességét, ahol a t valós paraméter egy véges vagy végtelen intervallumban fekvő összes számon fut végig. Gyakran előfordul, hogy a t és ω-ban kétváltozós $\xi(t, \omega)$ függvény egy rendszer állapotát jellemzi a t időpontban. Rögzített ω esetén, ha t végigfut az értelmezési tartományán, akkor az így kapott valós függvényt a sztochasztikus folyamat realizációjának nevezzük.)

A várható érték definíciója szerint egyébként

$$(1) \qquad M\{\eta(t)\} = M\{g[\xi(t,\omega)]\} = \int_{\Omega} g[\xi(t,\omega)]dP(\omega).$$

Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk, rámutatunk, hogy (1) valóban igen általánosnak tekinthető, mivel abból speciális esetekként származtatható a sztochasztikus folyamat *eloszlás függvénye, megbízhatóság függvénye* stb.

Így például, ha $\mathcal{A}_{x,t} = \{\omega: \omega \in \Omega,\ \xi(t,\omega) < x\}$

és
$$g[\xi(t,\omega)] = \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \in \mathcal{A}_{x,t} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$
akkor

$$(2) \qquad \int_{\Omega} g[\xi(t,\omega)]dP(\omega) = \int_{\mathcal{A}_{x,t}} g[\xi(t,\omega)]dP(\omega) + \int_{\Omega-\mathcal{A}_{x,t}} g[\xi(t,\omega)]dP(\omega) =$$
$$= \int_{\mathcal{A}_{x,t}} dP(\omega) = P\{\mathcal{A}_{x,t}\} = P\{\xi(t,\omega) < x\},$$

ami nem más, mint a folyamat eloszlás függvénye.

Az $\bar{\mathcal{A}}_{x,t} = \{\omega: \omega \in \Omega,\ \xi(t,\omega) \geq x\}$ választással hasonló módon a folyamat megbízhatóság függvényét kapjuk. (Lásd még [2]).

A továbbiakban, ha nem okoz félreértést a $\xi(t,\omega)$ jelölés helyett az egyszerűbb $\xi(t)$ jelölést használjuk a sztochasztikus folyamat leírása, jellemzése céljából. Ha pedig a valószínűségi változó t-től független, akkor a $\xi(\omega)$ helyett a ξ jelölést használjuk.

Gyakorlati szempontból különösen érdekes az az eset, amikor $\eta(t)$ a rendszerre nézve bizonyos kedvezőnek vélt állapotok hosszának összegét jelenti a $(0, T)$ intervallumban.

Egy ilyen esetet foglal magában az alábbi modell.

Modell: Tekintsük a $\{\xi(t),\ 0 \leq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamatot, ahol a $\xi(t)$ valószínűségi változó érték készletét az Ω állapottér elemei alkotják. Legyen $\Omega = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, ahol $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ diszjunkt (közös pont nélküli) halmazok. Ha a rendszer például számítógépet reprezentál, akkor $\mathcal{A}$ jelentheti azt, hogy működési, $\mathcal{B}$ pedig, hogy valamilyen oknál fogva (javítás, karbantartás, munkaerőhiány, munkával való ellátás hiánya stb.) állási (nem működési) állapotban van. Tegyük fel, hogy $\xi(0) \in \mathcal{A}$ és hogy $\xi(t)$ folyamat növekvő t értékekre váltakozva $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ állapotot vesz fel. (Itt most a rendszer váltakozva $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... állapotba kerül).

Jelölje az egymás utáni $\mathcal{A}$ állapotban való tartózkodási időtartamokat rendre $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ és a $\mathcal{B}$ állapotban való tartózkodási időtartamokat pedig $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ valószínűségi változó, s tételezzük fel, hogy ezek pozitívak továbbá, hogy teljesen függetlenek és azonos eloszlásúak, méghozzá:

$$(3) \qquad P(\xi_n < x) = A(x); \quad P(\zeta_n < x) = B(x) \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Tételezzük fel, hogy az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ állapotban való tartózkodást még külön is az alábbiak jellemzik.

Az első $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ véletlen időpontban mindig $\mathcal{A}$ típusú állapot kezdődött el és a $\delta_n = \tau_1$ időpontban az $\mathcal{A}$ állapotban való tartózkodás befejeződött ($n = 1, 2, \ldots;\ \delta_0 = 0 < \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_n$).

A $\delta_{i+1} - \delta_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ különbségekről feltesszük, hogy teljesen független azonos eloszlású valószínűségi változók, vagyis hogy:

$$P(\delta_{i+1} - \delta_i < x) = A^*(x) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

továbbá, hogy a $\delta_k = u_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ esetén $\varrho(u_k)$ valószínűséggel következik be $\mathcal{A}$ típusú állapot és $1 - \varrho(u_k)$ valószínűséggel $\mathcal{B}$ típusú állapot. Itt $\varrho(t)$ a $0 \leq t < \infty$ intervallumon értelmezett függvény, melyre nézve $0 \leq \varrho(t) \leq 1$. (A $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_i \ldots$ sorozatban az „n" index $\varrho(t)$ megválasztásától függ!)

A τ_1 időpontban befejeződött $\mathcal{A}$ típusú állapot után $\mathcal{B}$ típusú állapot kezdődik el az előzőekhez hasonlóan, csak most itt az időkülönbségeket $\gamma_{i+1} - \gamma_i$ jelöli. Tegyük fel, hogy $\gamma_{i+1} - \gamma_i$ $(\gamma_0 = 0; i = 0, 1, 2, \ldots)$ pozitív valószínűségi változók teljesen függetlenek, továbbá teljesen függetlenek a $\delta_{i+1} - \delta_i$ valószínűségi változóktól is.

Tételezzük fel még azt is, hogy

$$P(\gamma_{i+1} - \gamma_i < x) = B^*(x) \tag{5}$$

és hogy a $\gamma_k = s_k$ $(k = 1, 2 \ldots)$ esetén $\sigma(s_k)$ valószínűséggel következik be $\mathcal{B}$ típusú állapot és $1 - \sigma(s_k)$ valószínűséggel $\mathcal{A}$ típusú állapot. Itt $\sigma(s)$ a $0 \leq s < \infty$ intervallumon értelmezett függvény, melyre nézve:

$$0 \leq \sigma(s) \leq 1.$$

A $\tau_2 = \gamma_l$ $(l = 1, 2 \ldots)$ időpontban befejeződött $\mathcal{B}$ állapot után a τ_3 időpontig ismét $\mathcal{A}$ típusú állapot következik a leírt módon, és így tovább. (Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ típusú állapotokban előforduló egymást követő véletlen pontok különbségei mindig teljesen független valószínűségi változók, s függetlenek az előző állapotokban hasonlóan értelmezett valószínűségi változoktól is).

A továbbiakban feltételezzük, hogy $A^*(x)$, illetve $B^*(x)$ valamely $[0, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \infty$ intervallumon folytonos; a $\varrho(t)$ és $\sigma(s)$ függvényekben pedig a t, illetve s argumentum mindig az újabb $\mathcal{A}$, illetve $\mathcal{B}$ típusú állapotok kezdési időpontjából számítandó.

2. A rendszer hatékonyságának egy jellemzése

A célunknak megfelelően jelentse $\eta_A(T)$ a bizonyos szempontokból kedvezőnek vélt $\mathcal{A}$ állapotok hosszának összegét a $(0, T)$ intervallumban, ahol az utolsó „$\mathcal{A}$ szakasz" esetleg csonka. (Hasonló módon értelmezzük az $\eta_B(T)$ véletlen mennyiséget).

Ekkor $\eta_A(T)$ várható értéke, vagyis az $M\{\eta_A(T)\}$ mennyiség egy fontos jellemzője lehet a rendszer hatékony működésének, mivel az többnyire a $(0, T)$ intervallumban a rendszer működési, termelési állapota összidejének várható értékét adja meg. Ha most az új $\{\chi(t), 0 \leq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamatot úgy definiáljuk, hogy:

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \xi(t) \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{ha} \quad \xi(t) \in \mathcal{B}, \end{cases}$$

akkor, ha

$$g(T) = \int_0^T \chi(u)\, du,$$

úgy nyilvánvalóan $\eta_A(T) = g(T)$.

Ennek alapján:

$$(6)\quad M\{\eta_A(T)\} = M\{g(T)\} = M\{\int_0^T \chi(u)\,du\} = \int_0^T M\{\chi(u)\}\,du = \int_0^T P\{\xi(u)\in\mathcal{A}\}du,$$

s *az így nyert kifejezést a rendszer hatékonyságának egy fontos jellemzőjeként vehetjük figyelembe.*

Ahhoz, hogy a modell feltételei mellett a (6) alatti várható értéket konkrétan is meghatározhassuk, hátra van még a $P_A(t) = P\{\xi(t)\in\mathcal{A}\}$ valószínűség kiszámítása, ami a gyakorlatban egy tetszés szerinti t időpontban az $\mathcal{A}$ állapotban való tartózkodás valószínűségét adja. (Ha $P_B(t) = P\{\xi(t)\in\mathcal{B}\}$, akkor nyilvánvalóan $P_A(t) + P_B(t) = 1$ minden t-re).

A $P_A(t)$ előállítására vonatkozik az alábbi tétel.

1. *tétel:*

$$(7)\qquad P_A(t) = \int_0^t [1 - A(t-y)]dH(y),$$

ahol

$$(8)\qquad A(x) = \int_0^x [1 - \varrho(u)]dQ(u)$$

$$(9)\qquad B(x) = \int_0^x [1 - \sigma(u)]\,dT(u),$$

itt

$$(10)\qquad Q_n(x) = \int_0^x A^*(x-u)\varrho(u)dQ_{n-1}(u) \quad (n = 2, 3, \ldots;\ Q_1(x) = A^*(x))$$

$$(11)\qquad T_n(x) = \int_0^x B^*(x-u)\sigma(u)dT_{n-1}(u) \quad (n = 2, 3, \ldots;\ T_1(x) = B^*(x))$$

és

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x);\quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x),$$

továbbá

$$(12)\qquad F(x) = \int_0^x A(x-y)dB(y+0),$$

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-u)dF(u) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 1, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$$

$$(13)\qquad H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x).$$

Bizonyítás

Dobó Andor és Szajcz Sándor [3]-ban található 1. Lemmája éppen a $P(\xi_n < x) = A(x)$-re és $P(\zeta_n < x) = B(x)$-re fennálló (8)—(11) alatti összefüggéseket mondja ki és igazolja. Ezek ismeretében viszont a tétel hátra levő része már könnyen bizonyítható a TAKÁCS LAJOS [4] dolgozatában található 3. tétel közbeeső lépéseinek igazolásánál alkalmazott gondolatmenettel.

Példa:

Abban az esetben, ha

(14) $$A^*(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

(15) $$B^*(x) = 1 - e^{-\mu x} \qquad (0 \le x < \infty;\ \lambda, \mu > 0)$$

és $$\varrho(x) \equiv \varrho = \text{állandó} < 1; \ \sigma(x) \equiv \sigma = \text{állandó} < 1,$$

akkor egyszerű számolással kapjuk, hogy:

(16) $$A(x) = 1 - e^{-\lambda(1-\varrho)x}$$

(17) $$B(x) = 1 - e^{-\mu(1-\sigma)x}$$

(18) $$P_A(t) = \frac{\mu(1-\sigma)}{\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)} + \frac{\lambda(1-\varrho)}{\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)} e^{-[\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)]t}$$

(19) $$P_B(t) = \frac{\lambda(1-\varrho)}{\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)} \{1 - e^{-[\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)]t}\} \qquad (0 \le t < \infty).$$

Itt $1/\lambda(1-\varrho)$ illetve $1/\mu(1-\sigma)$ az $\mathcal{A}$ illetve $\mathcal{B}$ típusú állapotban tartózkodás idejének várható értékét adja, illetve jelenti. A (16)—(19) összefüggések $\varrho = \sigma = 0$ esetén tovább egyszerűsödnek, s ezáltal az irodalomban is jól ismert kifejezésekhez jutunk. (Lásd például a [4] 186. o.).

A vizsgált speciális esetben egyébként:

(20) $$M\{\eta_A(T)\} = \int_0^T P_A(u)\,du = \frac{\mu(1-\sigma)}{\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)} T + \frac{\lambda(1-\varrho)}{[\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)]^2} \{1 - e^{-[\lambda(1-\varrho)+\mu(1-\sigma)]T}\}.$$

Megemlítjük, hogy az 1. tételben szereplő $P_A(t)$ kifejezést a megbízhatóságelméletben (lásd például [5] 130—132. o.) *készenléti tényezőnek* vagy *rendelkezésre állás értékének* is szokás nevezni. Ezt az összefüggést azonban bonyolultságánál fogva a gyakorlatban alig alkalmazzák. Helyette rendszerint a $\lim_{t\to\infty} P_A(t)$ értékkel számolnak, feltéve, hogy a határérték létezik.

Ilyen esetben a készenléti tényező az a hányad, amelyet a rendszer a teljes időből átlagosan működési állapotban tölt. Ez a megállapítás egyébként heurisztikus meggondolásokkal is belátható. (Lásd [5] 131—132. o.).

3. A rendszer efficienciája

Mint tudjuk, a rendszer fogalmának is sokféle meghatározása létezik. Az értelmezéstől függően egy másik nagyon fontos jellemző lehet a rendszer efficiencája (hatékonysága, hatásossága, hathatóssága, hatásfoka, eredményessége stb.), melyet BARLOW és HUNTER [6] dolgozatukban a következőképpen definiáltak.

Ha a rendszer működőképességének az ellátására, illetve a meghibásodására a környezeti körülmények véletlenszerű változásai $K(x)$ eloszlás szerint hatnak, akkor *definíciószerűen a rendszer efficienciája:*

$$f_K = \int_{-\infty}^{+\infty} M\{g(x)\}\, dK(x), \tag{21}$$

ahol $g(x)$ a rendszer állapotát jellemző $\xi(t)$ valószínűségi változó (Borel mérhető) függvénye, M pedig a várható érték képzésre utaló operátor.

A gyakorlatban sajnos akkor is, ha kevésbé teljesül, nem egy esetben kényszerülünk azzal a feltételezéssel élni, hogy a környezetváltozás rendszerre gyakorolt hatása egyenletes eloszlású az $(0, T)$ intervallumban.

Ekkor:

$$f_K = f_T = \frac{1}{T} \int_0^T M\{g(x)\}\, dx. \tag{22}$$

A készenléti vagy rendelkezésre állási értéket, illetve: az

$$f = \lim_{T\to\infty} f_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T M\{g(x)\}\, dx \tag{23}$$

határértéket esetenként a *rendszer állapotsűrűségének* is szokás nevezni, mivel (23) sok esetben *kifejezi azt, hogy egy időegység alatt a rendszer átlagosan mennyi ideig van a vizsgált állapotban,* ami igen gyakran a rendszernek az időegység alatti átlagos működési időtartam hosszát jelenti. Értelmezésektől függően (23)-t más elnevezéssel is szokás illetni. Megemlítjük, hogy RÉNYI ALFRÉD például az üzemek energiafogyasztásának ingadozásaival kapcsolatos vizsgálatai során (23-t) a *gép kihasználási fokának* nevezte el, minthogy az általa tárgyalt modellben szereplő határérték arra ad választ, hogy átlagban a munkaidő hányad részében működik a vizsgált gép. (Lásd a [7]-t az 547—550. o.).

Hogy teljes joggal nevezhessük az f számot — és általában a választott számot — a rendszer egy jellemzőjének, ahhoz gyakran az kell, hogy az f szám 1-hez tetszőleges közeli valószínűséggel tetszőleges pontossággal megadja, hogy a rendszer egy T hosszúságú időtartam hányad részében működik, ha csak T elég nagy. Hogy az adott esetben teljesül-e ez, úgy győződhetünk meg róla, hogy megvizsgáljuk $\eta_A(T)/T$ szórását. Ha kimutatjuk, hogy ez 0-hoz tart, ha $T \to \infty$, akkor a Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazásával már a kívánt eredményekhez juthatunk.

A továbbiakban elsődleges célunk a bemutatott modell alapul választása mellett $\lim_{T\to\infty} f_T$ értékének a meghatározása. Erre vonatkozik az alábbi tétel.

2. tétel:

Ha

$$\alpha = \int_0^\infty [1 - A(x)]\, dx, \quad \beta = \int_0^\infty [1 - B(x)]\, dx$$

és $\alpha + \beta < \infty$, akkor

$$f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_A(u)\, du = \lim_{T\to\infty} \frac{M\{\eta_A(T)\}}{T} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \tag{24}$$

Ha pedig a (12) alatti $F(x)$ nem rácsos eloszlású, akkor

$$\lim_{t\to\infty} P_A(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}. \tag{25}$$

Bizonyítás

A (7)—(13) ismeretében a tétel állítása ugyan azzal a gondolatmenettel igaezolható, mint amelyet Takács Lajos alkalmazott a [4]-ben szereplő 3. tétele igazolásánál. Erre való tekintettel a részletezést mellőzzük.

Megjegyzések:

a) A közölt modell és a benne szereplő feltételek mellett belátható, hogy $T \to \infty$ esetében

$$D\{\eta_A(T)/T\} \to 0,$$

s így valóban jogos a (24) alatti f számot a rendszer egy jellemzőjének tekinteni.

b) Az is belátható, hogy $\frac{1}{\alpha+\beta}$ az időegység alatti $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ állapotoknak mint periódusoknak átlagos számát jelenti, s hogy T elég nagy értékére a (O, T) intervallumban eső $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ állapotok átlagos számát $\frac{T}{\alpha+\beta}$ fejezi ki. Pontosabban:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{H(T)}{T} = \frac{1}{\alpha+\beta}, \tag{26}$$

ahol $H(T)$ a (13) alatti összefüggés által van értelmezve.

c) A (24) alatti kifejezés igen sokféle feladat, probléma mértéke lehet. A [13] például egy ilyen jellegű kifejezést struktúramutatónak használ.

Általában, ha a rendszer lehetséges állapotainak a száma 1, 2, ..., m *és az* i*-edik állapotban tartózkodás várható értéke* α_i, *akkor az* $\alpha = \alpha_i$ *és a*

$$\beta = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} \alpha_i$$

választás mellett a rendszer i*-edik állapotban tartózkodásának a hatásfoka*

$$f_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_i+\ldots+\alpha_m} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{24'}$$

A példa bemutatásánál alkalmazott speciális választások esetén egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy

$$\alpha = \frac{1}{\lambda(1-\varrho)}; \quad \beta = \frac{1}{\mu(1-\sigma)},$$

s így f értékét (24) alapján már nem nehéz felírni. Nyilván ugyan ezen értékhez jutunk, ha (20)-ban a T-vel való osztás után elvégezzük a határátmenetet. A (25) pedig (18)-nál közvetlenül adódik, ha $T \to \infty$. Megjegyzendő, hogy a 2. tétel lényegét tekintve felfogható úgy is, mint Takács Lajos [4]-ben található 3. tételének az általánosítása.

4. A munkaszervezettség, hatékonyság és teljesítmény kapcsolatáról

Láttuk azt, hogy egy rendszer hatékonyságát stacioner esetben a (24) alatti kifejezéssel jellemezhetjük. Mielőtt vizsgálatainkat tovább folytatnánk, rá kívánunk mutatni arra, hogy a hatékonyság relatív fogalom, s mindig valamihez viszonyítva, valamilyen értelemben beszélhetünk csak hatékonyságról. (Részletesebben lásd még a [20]-t).

Ha a rendszer például számítógép, akkor *különbséget kell tennünk* többek között *a kihasználás és a felhasználás hatékonysága között.* Lehet, hogy például a számítógép a munkarend szerint teljesíthető üzemórákra vetítve hatékonyan működik, a felhasználás jellege és köre szempontjából azonban már közel sem olyan hatékony, mivel a gépre adaptált feladatok típusa, jellege erőteljesen befolyásolhatja a gép felhasználásából eredő gazdasági eredményeket.[1] Itt már a hatékonyságnak például az időegységre eső nyereségnövelő hatása kerülhet előtérbe, illetve játszhat döntő szerepet.

Ha például az egyfolytában átlag α ideig működő rendszer a feladat jellegétől és gyakorlati jelentőségétől függően időegységenként eltérő hasznot eredményez, s ezt a tényt egy a feladattól függő, c súllyal ki tudjuk fejezni, akkor indokolt lehet a hatékonyságot a

$$h = \frac{c\alpha}{c\alpha + \beta} \tag{27}$$

kifejezéssel jellemezni. Itt, ha a rendszer működőképes, de áll, a súly értéke egységnyi. Ilyenkor például a különböző c_i értékek (vagy a hozzájuk tartozó h_i értékek) monoton növekvő sorba rendezése szolgálhat alapul a feladatok gépre tételének a rangsorolásában.

Általában ilyen esetben úgy is mondhatjuk, hogy különbséget kell tennünk a rendszer *kihasználási* (f) és *felhasználási* (h) hatékonysága között. Sok esetben ez utóbbi megválaszolása igen összetett problémákat takar, s számos összefüggés figyelembevételét és elemzését teszi szükségessé, miközben nem hagyható figyelmen kívül az sem, hogy a rendszert milyen társadalmilag szükséges munkára használják. Persze előfordulhat, hogy a kihasználás és felhasználás hatékonysága között gyakorlatilag nincs különbség. Ilyen helyzet áll elő, amikor a rendszer felhasználásának hatékonyságát a működésben töltött időtartam egyértelműen és jól jellemzi, vagyis amikor $c = 1$.

Tény az is, hogy akármilyen aspektusból is nézzük egy rendszer hatékonyságát, a rendszer kihasználásával, terhelésével kapcsolatban gyakran felmerül a munkaszervezettség színvonalának mérése, illetve az ezt kifejező mérték megválasztásának problémája, igénye. *Nem egyszer* ugyanis *a rendszer gazdaságos kihasználását a munkával való ellátottság, a gépre szervezés hiánya akadályozza.* A továbbiakban a megfelelő terhelést biztosító munkaszervezettség színvonala mértékének a megválasztási problémájával foglalkozunk, amely lényegében „ember — gép" kapcsolatot fejez ki. Továbbra is kiindulási, illetve hivatkozási alapul tekintjük az előzőekben ismertetett modellt.

[1] Lényeges rámutatni arra is, hogy a felhasznált gépidő, mint hatékonysági mutató sajnos nem egy esetben egyike azon mutatóknak, amelyek tekintetében a vállalati és népgazdasági érdekek ellentéte jelentkezik; pontosabban: a szolgáltató jelleggel működő számítóközpontok esetében a feladatok minél rövidebb idő alatti megoldása gyakorlatilag ellentétben áll a vállalat pénzügyi (árbevétel) érdekével.

Vizsgálunk tehát egy olyan gépi rendszert, amely valamilyen értelemben termel. Rendszer alatt érthetünk például valamilyen alkatrészt megmunkáló gépet (forgácsoló, maró, fúró stb. gépet), de az éppenséggel lehet készterméket előállító automata gépsor vagy egy számítógép is.

Jelölje $\mathcal{A}$ azt az állapotot, amikor a rendszer munkával terhelve van és így működik, $\mathcal{B}$ pedig azt az állapotot, amikor bár a rendszer működőképes, de a rossz munka-, illetve terhelés-szervezés miatt áll.

Az $\mathcal{A}$ állapotban való tartozkodás idején jelölje $\delta_{i+1} - \delta_i = \varphi_i$ ($i = 0, 1, \ldots$; $\delta_0 = 0$) a rendszernek az i-edik feladat elvégzéséhez szükséges időigényét. A φ_i eloszlás függvénye $A^*(x)$. (Ha a rendszer számítógépet reprezentál, akkor egy-egy feladatot job (dzsob)-nak nevezett munkaegységben is megadhatunk. A job általában tartalmazza az egy feladat elvégzéséhez tartozó összes programot — így például a szerkesztő, fordító, összefűző, file-előkészítő stb. programot — és az operációs rendszer számára adott kezelési utasításokat is).

Tételezzük fel, hogy a rendszer $\mathcal{A}$ állapotban való tartózkodási ideje elsősorban attól függ, hogy mennyire tudjuk azt feladatokkal ellátni, kiszolgálni, s hogy a rendszer addig marad $\mathcal{A}$ állapotban, amíg feladatot tudunk adni neki.

Jelölje ν azt, hogy összesen hány feladatot, illetve munkaegységet tudunk folyamatosan a rendszer számára biztosítani. Nyilvánvaló ν is valószínűségi változó, és hogy az $\mathcal{A}$ állapotban való tartózkodás idejének hossza:

$$\sum_{i=0}^{\nu} \varphi_i .$$

Ha a φ_i várható értéke $M\{\varphi_i\} = z$, ν várható értéke $M\{\nu\} = n$, akkor — az alapmodell feltételei mellett — Wald tétele értelmében az $\mathcal{A}$ állapotban való (folyamatos) tartózkodási idő várható értéke:

$$\alpha = M\left\{\sum_{i=0}^{\nu} \varphi_i\right\} = M\{\varphi_i\} M\{\nu\} = z \cdot n. \tag{28}$$

Itt n felfogható úgy is, mint a rendszer kiszolgálásával kapcsolatos munka szervezettségének egyfajta mérőszáma. Minthogy azonban $1 \leq n < \infty$, ezért főleg összehasonlításoknál a számértékek alakulásának jobb „érzékelése" végett célszerűbb az $n = 1/(1 - \varrho)$ kifejezésből származtatható ϱ értéket tekinteni a munka szervezettségi színvonalát kifejező mérőszámnak.

Ekkor

$$\varrho = 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{z}{\alpha}. \tag{29}$$

és $0 \leq \varrho < 1$. A gyakorlatban az alkalmazás jellegétől és értelmezésétől függően *esetenként ϱ felfogható úgy is, mint egy $\mathcal{A}$ állapotban tartás valószínűsége.* (Lásd: bemutatott példa). *Ilyenkor a munkaszervezés arra irányul, hogy minél nagyobb legyen a kedvező állapotban tartás valószínűsége.* Általában gyakran jó közelítéssel azt találjuk, hogy:

$$P(\nu = k) = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{1-\varrho}\right)^k e^{-\frac{1}{1-\varrho}} \quad (1 - \varrho > 0;\ k = 0, 1, \ldots), \tag{30}$$

vagy

$$(31) \qquad P(\nu = k) = \frac{w^k}{k!} \frac{1}{e^w - 1} \qquad (w > 0;\ k = 1, 2, \ldots)$$

eloszlású. Az előbbi esetben (Poisson-eloszlás) $M\{\nu\} = \dfrac{1}{1-\varrho}$.

Az utóbbinál (csonkított Poisson-eloszlás)

$$M\{\nu\} = \frac{w}{1 - e^{-w}}.$$

Ha ember-gép kapcsolat esetén a szervezettség színvonalának mértékét a haszon, a hatékonyság, a működési és állásidő függvényében keressük, akkor a (27) és (28) felhasználásával egy ilyen összefüggéshez jutunk. Nevezetesen ekkor:

$$(29') \qquad \varrho = 1 - \frac{cz}{\beta}\left[\frac{1}{h} - 1\right].$$

A gyakorlatban egyszerűbbé (és nem egyszer pontosabbá) válik a szervezettség színvonala mértékének a meghatározása, ha az összefüggések keresése során, például a feladat gépretételéből származó haszon kifejezése, illetve érvényre juttatása mellőzhető. A (29') kifejezésben ez a $c = 1$ választásnak felel meg.

Abban az esetben, ha visszamenőleg rendelkezésre állnak már bizonyos adatok, így például az egyes feladatok gépi úton való elvégzésének időigénye, $z_1^*, z_2^*, \ldots z_l^*$, a folyamatos terhelés következtében a rendszer egyfolytában működő időszakaszainak a hossza; $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_j^*$, a rendszer működőképes állapota esetén az állási időszakaszok hossza, $\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_k^*$, akkor ezeknek a tapasztalati adatoknak a számtani átlagával becsülhető z, α, β értéke továbbá ezek ismeretében f, ϱ értéke.

A $c = 1 + a$ jelölés mellett könnyen belátható, hogy h és f között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$(27') \qquad h = f + (1 - f)\frac{a\alpha}{(1+a)\alpha + \beta} = h(a) \qquad (-1 < a)$$

vagyis, h az 1 és $\dfrac{a\alpha}{(1+a)\alpha + \beta}$ kifejezésnek f-vel és $1 - f$-vel súlyozott középértéke.

A (27') alapján nyilvánvaló, hogy $h(0) = f$;

$$h \leq f, \quad \text{ha} \quad -1 < a \leq 0$$

$$h > f, \quad \text{ha} \quad a > 0;$$

továbbá, hogy $\lim\limits_{a\to\infty} h(a) = 1$; illetve ha $f \to 1$, akkor $h \to 1$. *Az $a \to \infty$ esetén $h(a) \to 1$ kifejezi azt a nyilvánvaló tényt, hogy a rendszer hatékonysága annál jobb, minél fontosabb és hasznosabb feladatot oldunk meg a segítségével, illetve, hogy a változatlan kihasználás mellett a hatékonyságot a megoldandó feladat megválasztásán keresztül jelentősen növelni tudjuk.*

A gyakorlatban felmerül az a kérdés, hogy két vagy több rendszer esetén milyen kritérium alapján ítéljük meg a rendszer kiszolgálásával kapcsolatos munkaszervezettség színvonalát. Ha a rendszer számítógép, akkor előfordulhat, hogy például az egyik gépen sok feladat rövid ideig, a másikon pedig kevés feladat hosszú ideig fut. Ilyen esetben nyilván nem lenne helyes a (29) alapján kiszámított $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ értékek monoton sorba rendezése szerint dönteni.

A munkaszervezettség színvonalát reálisabban ítélhetjük meg, ha például a közel azonos sebességgel egyfolytában átlagosan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ideig működő rendszerek számszerű értékeit vesszük alapul úgy, hogy az $\alpha_1 = z_1 n_1 \leq \alpha_2 = z_2 n_2$ esetén annál a rendszernél tekintjük jobbnak a munkaszervezettség színvonalát, amelyhez az α_2 érték tartozik. Itt z_i az i-edik rendszernél egy feladat, rendszer segítségével történő megoldási idejének átlagos hossza. A (28) alapján n_i értelmezése ugyancsak nyilvánvaló. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az $\alpha_1 \leq \alpha_2$ alapján való döntés ekvivalens az

$$1 - \frac{z_2}{z_1}(1 - \varrho_1) \leq \varrho_2 \tag{32}$$

teljesülésére alapozott döntéssel, illetve minősítéssel, míg $\varrho_1 \leq \varrho_2$ alapján való minősítés megfelel az $n_1 \leq n_2$ szerinti döntésnek, ami nyilván nem mindig ad reális alapot a munkaszervezettség színvonalának megítéléséhez.

Amennyiben a gépek működési sebessége között jelentős eltérés mutatkozik ezt az összehasonlításnál szintúgy figyelembe kell venni. Ha a (24) alatti f a rendelkezésre állás értékét fejezi ki, akkor ennek a komplementerét, vagyis az

$$1 - f = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \tag{33}$$

kifejezést a $\mathfrak{B}$ állapot értelmezésétől is függően, a *rendszer üzemképtelenségének* is szokás nevezni.

A (27') alapján nyilvánvalóan

$$\lim_{a \to \infty} [h(a) - f] = 1 - f. \tag{34}$$

Az eddigi ismereteink felhasználásával a továbbiakban az állandósult állapot bekövetkezése esetén a *rendszer teljesítményének* egy jellemzését adjuk. Evégett jelentse most η a rendszer időegységre eső teljesítményét egy tetszőleges időpontban. Teljesítmény alatt itt most érthetjük például az időegység alatti energiafogyasztás mennyiségét, a működésből származó termelési értéket, árbevételt, a géppel legyártott termék darabszámát stb. η olyan valószínűségi változó, amelynek értéke vagy 0 (ha a rendszer áll), vagy pedig τ (ha a rendszer működik). Könnyen belátható, hogy a közölt feltételek mellett η várható értéke:

$$M\{\eta\} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\tau = f\tau = W. \tag{35}$$

A szórása:

$$D\{\eta\} = \tau\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta} = \tau\sqrt{f(1 - f)} = W\sqrt{\frac{1 - f}{f}} = D. \tag{36}$$

Ha pl. a rendszer bérmunkát végző számítógép és τ egy gépóra forintban kifejezett értékét jelenti, akkor W *megadja* azt, *hogy a számítógépnek egy óra alatt átlag mennyi az „árbevételi teljesítménye"*, *vagyis* az szolgáltatási jellegű működéséből kifolyólag *egy óra alatt átlag mennyi árbevételt hoz*. (A számítógépek teljesítményét illetően lásd még a [11]-t).

Ha az i-edik napon a rendszer időegységre eső teljesítménye η_i, és

$$\bar{\eta} = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m}{m},$$

akkor bizonyos feltételek teljesülése mellett jó közelítéssel állítható, hogy az $\left(\bar{\eta} - \lambda \frac{D}{\sqrt{m}}, \bar{\eta} + \lambda \frac{D}{\sqrt{m}}\right)$ véletlentől függő helyzetű intervallum $2\Phi(\lambda) - 1$ valószínűséggel fedi le az ismeretlen W állandót, s itt

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Az

$$f = \frac{z}{z + (1 - \varrho)\beta}$$

figyelembevételével

$$W = \frac{z}{z + (1 - \varrho)\beta}\, \tau, \tag{35'}$$

illetve

$$\varrho = 1 - \frac{z}{\beta}\left[\frac{\tau}{W} - 1\right]. \tag{29''}$$

A gyakorlatban τ *értéke* még ha az várható értéket is jelent, *nem mindig állandó*; a feladat jellegétől, a rendszer funkciójától, a működtetés, kiszolgálás feltételétől függően értéke változhat.

Az Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központja például (lásd a [10]-t) a feladatok költségeinek a számlázásánál E Ft/sec számol, ha a program I/0 berendezéseken és mágneslemezeken kívül legfeljebb 2 db mágnesszalagot használ és 1, 2^{i-2} E Ft/sec költséggel számol, ha a program $i > 2$ mágnesszalagot használ, s itt E jelenti a másodpercenkénti egységárat.

Azt, hogy konkrét esetben mennyi mágnesszalagot kell igénybe vennünk, nyilván a feladat típusa, jellege befolyásolja. Ennél fogva a gépóra ára a feladat, a feldolgozás jellegétől (adatfeldolgozás, tudományos-műszaki számítás stb.), valamint a szolgáltatás „összetételétől" is függ.

Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk, megemlítjük, hogy a feladat típusától, jellegétől, fontosságától, gyakorlati hasznától, kihatásától függő τ értékének az ismeretét felhasználhatjuk például a (27')-ben szereplő a-val jelölt súlyértékek megválasztására.

Ha például az imént említett példánál i jelenti a k-adik $(k = 1, 2, \ldots)$ feladat gépi megoldásnál igénybe veendő mágnesszalagok számát és

$$\tau^k_{(i)} = \begin{cases} E \text{ Ft/sec}, & \text{ha } 1 \leq i \leq 2 \\ r^{i-2} E \text{ Ft/sec}, & \text{ha } i > 2,\ (r > 1), \end{cases} \tag{37}$$

akkor a súlyokat többek között az

$$a_k = \frac{\tau_k^{(i)} - \tau_0}{\dfrac{\tau_0 + \tau_k^{(i)}}{2}} \qquad (\tau_0 = E)$$

alapján is meghatározhatjuk. (Az eljárást finomíthatjuk, ha a feladatok összgépóra igényét becsülni tudjuk!).

Ekkor a számítógép hatékony felhasználása érdekében *a $h(a_k)$ monoton növekvő sorrendje által meghatározott indexrendszernek megfelelően célszerű a munkát gépre szervezni.*

Mivel azonban $h(a)$ a-nak monoton növekvő függvénye, ezért — a számolási munkák elkerülése végett — *célszerűbb a feladatok gépre tételének sorrendjét az a_k értékeinek monoton növekvő sorrendje által determinált indexrendszernek megfelelően elvégezni.*

Természetesen *a számítógépek hatékonyságát* számos *más szempontból is az elemzés tárgyává tehetjük.* Így például vizsgálhatjuk az általa nyújtott információk alkalmazásának gazdaságosságát, hatékonyságát. *Ekkor azonban számolnunk kell azzal, hogy egyrészt nehéz meghatározni mi az értéke annak, ha meggyorsítjuk a döntésre jogosult személynek szóló szükséges információ létrehozását és továbbítását, másrészt, hogy nehezen alakíthatók ki olyan kritériumok, amelyek alapján megállapíthatnánk, milyen értéke van annak az újabb információnak, melyet a számítógépes információs rendszer jóvoltából a döntésre jogosult személy megkap.*

E helyen is felhívjuk a figyelmet arra, hogy általában *a teljesítményt és a teljesítőképességet nem tekintjük minden esetben azonos fogalmaknak,* vagyis közöttük esetenként különbséget teszünk. Az első fogalom és értelmezés általában arra vonatkozik, ahogy a rendszer működik, a második pedig ahogyan működhetne. Persze ez a megkülönböztetés sem fedi mindig a valóságot. Ha például a rendszer *számítógép,* akkor ennek *teljesítőképességét* — első közelítésként — *többnyire a*

$$T(M) = AmM \tag{39}$$

kifejezéssel szokás jellemezni (lásd a [12]-t), ahol:

m — átlagos műveletszám/sec;

M — a központi memória (tárkapacitás) nagysága Kbyte-egységben ($K = 2^{10} = 1024$);

A — különböző konstrukciós, műszaki, technológiai, kiépítettségi stb. paramétereket figyelembe vevő konstans a megfelelő mértékegységben kifejezve. Főleg kis számítógépek esetén az $A =$ (szóhossz $- 7$) választással szokás élni (lásd BIKI, 1977. január), ahol a szóhossz bitben van kifejezve, s értéke általában 8 és 24 között van.

A (39)-t többek között a különböző géptípusok fajlagos árának képzésénél, majd összehasonlításánál szokták figyelembe venni. *A fajlagos árat* egyébként *úgy nyerjük, hogy a számítógép árát elosztjuk a teljesítőképességgel.* Mennél kisebb ez az érték, annál jobbnak tekintjük az ár és teljesítőképesség struktúrát, ami a beszerzésnél, illetve gépkiválasztásnál lényeges szempont lehet.

5. A munkaráfordításról

Az eddigiek során láttuk azt, hogy igen általános feltételek mellett a (24) alatti kifejezés a rendszer hatásfokát mérheti, jellemezheti. Ebben akár α, akár β értékének $\Delta\alpha$ illetve $\Delta\beta$ értékkel való változása f értékét módosítani fogja.

Ha azt akarjuk, hogy f értéke növekedjék, s ezáltal 1-hez közelebb essék, akkor valamilyen munkaráfordítással α vagy β értékén változtatni kell. Ezt általában könnyebben érjük el β értékének csökkentésével, mint α értékének növelésével. Ha ugyanis $\beta \leq \alpha$ és α értékét $\Delta\alpha > 0$ értékkel növeljük, akkor az így kapott

$$\frac{\alpha + \Delta\alpha}{\alpha + \Delta\alpha + \beta}$$

érték mindig kisebb lesz az

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta - \Delta\alpha}$$

értékénél, ami tehát α növelése helyett β értékének ugyanazon értékkel való csökkenése mellett áll elő.

Az is könnyen belátható, ha $f^* \geq 1/2$ és α értékét $\Delta\alpha > 0$ értékkel növeljük, β értékét viszont $\Delta\beta > 0$ értékkel csökkentjük, méghozzá úgy, hogy

$$f^* = \frac{\alpha + \Delta\alpha}{\alpha + \Delta\alpha + \beta} \quad \text{és} \quad f^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta - \Delta\beta}$$

legyen, akkor $\Delta\beta \leq \Delta\alpha$, ahol $\Delta\beta < \beta$.

Ekkor ugyanis egyrészt

$$\Delta\alpha = \frac{(\alpha + \beta)(f^* - f)}{1 - f^*}, \tag{40}$$

másrészt

$$\Delta\beta = \frac{(\alpha + \beta)(f^* - f)}{f^*}, \tag{41}$$

s ezek alapján pedig — a közölt feltételek mellett — állításunk már egyszerűen adódik.

Amennyiben a munkaráfordítást a kedvező állapotban tartás idejének növelésénél jó közelítéssel ugyanolyan kifejezés jellemzi, mint a kedvezőtlen állapotban maradás idejének csökkentése esetén, akkor az imént kapott eredmények a gyakorlatban a következőket jelentik.

Hogyha a rendszer hatásfokát növelni akarjuk, akkor kisebb (vagy egyenlő) *lesz a munkaráfordítás, ha feladatunknak nem a kedvező állapotban tartás ideje növelése elősegítését, hanem a kedvezőtlen állapotban maradás idejének csökkentését tekintjük.*

Úgy is fogalmazhatunk, hogy esetünkben a pozitív hatások, ösztönzők növelése helyett a negatív hatások, ösztönzők csökkentésére kell a súlyt helyezni. (A problémakört részletesebben lásd (14) és [15] alapján).

Az 1. tétel alkalmazására felhozott példában láttuk azt, hogy egy rendszerre nézve a kedvező állapotban tartózkodás átlagos idejét az

$$\alpha = \frac{1}{\lambda(1-\varrho)},$$

a kedvezőtlen állapotban tartózkodás idejét pedig átlagosan a

$$\beta = \frac{1}{\mu(1-\sigma)}$$

kifejezés szolgáltatta. Az elmondottak alapján, ha a rendszer hatásfokát növelni akarjuk, akkor tehát elsősorban β értékét célszerű csökkentenünk.

Ezt az alábbiak szerint érhetjük el:

1) csökkentjük $\frac{1}{\mu}$ értékét, vagyis az állási, javítási, kiszolgálási, munkával való ellátási stb. idő várható értékét megpróbáljuk mérsékelni;
2) csökkentjük σ értékét, vagyis megpróbáljuk növelni a kedvezőtlen állapotból a kedvező állapotba hozás valószínűségét;
3) az 1) és a 2)-ben közölteknek egyidejűleg igyekszünk eleget tenni.

Mint láttuk, a hatásfok növelésénél fontos szerepet játszik a munkaráfordítás valamilyen módon való kifejezése, mérése. Ezzel a problémával itt behatóbban nem foglalkozunk, csupán megemlítjük, hogy a ráfordítás függvény egyfajta értelmezése található például a [16]-ban, s az itt közöltek további kiindulási alapul szolgálhatnak a behatóbb vizsgálatok megtételénél.

Ezzel a kérdéssel azért is fontos foglalkozni, mert a rendszer hatékonyságának növelése embereket érintő munkavégzéssel, munkairányítással, szervezéssel stb. jár, s nem mindegy az, hogy a dolgozókat miben és hogyan tesszük érdekeltté akkor, ha például a cél a rendszer hatásfokának a növelése.

Különben is *az anyagi ösztönzésnek* (bér, prémium, jutalom) *korlátai vannak, ami* ugyancsak *indokolttá teszi azt, hogy időnként egy célt a pozitív ösztönzők növelése helyett a negatív ösztönzők csökkentésével igyekezzünk elérni.* Persze nem kis nehézséget jelent, okoz esetenként az, hogy feltárjuk, megmondjuk mit tekintsünk pozitív és mit negatív ösztönzőnek. Hogy ilyen irányú vizsgálatok megtétele mennyire időszerű lehet, azt az alábbiakkal igyekszünk még érzékeltetni.

Egy olyan bonyolult rendszer kiszolgálása, mint például a számítógép, igen jóképességű szakemberek együttes, szervezett, összehangolt munkáját igényli. Ha ezeket a dolgozókat a rendszer hatásfoka növelése céljából befolyásolni, ösztönözni akarjuk a minőségileg jobb és nagyobb teljesítményre, akkor bizonyos körülmények mellett már a bér, illetve pénzbeli juttatásoknak objektív korlátai lehetnek.

Itt emlékeztetni szeretnénk arra, hogy már Daniel Bernoulli a XVIII. században igen általánosnak mondható feltételek mellett eljutott arra a következtetésre [vö. [17] 240. o.), hogy *ha valakinek a jövedelme p valószínűséggel x-ről y-ra emelkedik, akkor ennek a kilátásnak az egyénre gyakorolt hatását a* $\log\left(\frac{y}{x}\right)^p$ *kifejezés jellemzi.* Ezt figyelembe véve, ha például *valakinek x Ft a* *havi fizetése és azt növelik Δx értékkel, akkor ha azt akarjuk, hogy az y Ft $(x < y)$ havi fizetést kereső egyénnél ugyan olyan hatást váltson ki a Δy értékű fizetésemelés, mint amilyen az volt az előző személynél, úgy annak értékét a*

$$\Delta y = (x + \Delta x)\frac{y}{x} - y = \Delta x \frac{y}{x} \tag{42}$$

alapján kell megválasztani.

Ha például egy dolgozónak a havi fizetése $x = 2000$ Ft és ha ez $\Delta x = 300$ Ft fizetésemelést kap, akkor az $y = 5000$ Ft havi fizetésű dolgozónál $\Delta y = 750$ Ft fizetésnövelést kellene eszközölni ahhoz, hogy a hatás a két esetben megegyezzék. A legtöbb munkahelyen ilyen növekedést egy személynek nem igen lehet biztosítani.

Az igen költséges és drága berendezések hatékony felhasználása ekkor tehát már nem minden esetben a pozitív ösztönzők növelésével érhető el. Ilyenkor kell számba venni a veszteségek keletkezésének (ellen ösztönzőknek) kihatásait, főleg akkor, ha az ellen ösztönzők megszüntetése vagy mérséklése nem ütközik nagy nehézségekbe. Ebben a folyamatban jelentős szerepet kaphat a munkahelyi légkör, a vezetői magatartás, a munkatársak közötti érintkezési, kapcsolattartási forma, a munkahelyi demokrácia, a felelősségérzet, a munkaszervezés, a munkavégzés és irányítás rendszere, s nem utolsó sorban a jövedelmezési és érdekeltségi rendszer célszerű, hatékony megválasztása.

Végezetül rá kívánunk mutatni arra a lényeges tényre, miszerint *a Daniel Bernoulli által alkalmazott megfontolások is vezethetnek olyan összefüggésekhez, amilyenek az előző részben találhatók.*

Így például, ha Q összeget fel akarunk osztani különböző személyek vagy szervezeti egységek között, méghozzá úgy, hogy minden személy vagy szervezeti egységnél a jövedelemtöbblet közelítően azonos hatást váltson ki, akkor, ha y_i jelenti az i-edik $(i = 1, 2, \ldots m)$ személy vagy szervezeti egység átlag keresetét (jövedelmét), Δy_i pedig az i-edik személy vagy szervezeti egységre eső növekményt, úgy (42)-re való tekintettel könnyen belátható, hogy a

$$\Delta y_i = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^{m} y_i} Q \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{43}$$

választással kell élni, ami „alakilag" emlékeztet bennünket például (35)-re. Értelmezést illetően lásd még a (24′) alatti kifejezéssel kapcsolatban mondottakat.

Természetesen az itt közöltekkel koránt sem tekintjük a bér- és jövedelem gazdálkodással kapcsolatban felmerülő kérdéseket megoldottnak. Részben azért sem, mert a fizetésnek vagy egyéb juttatásnak nem csupán az ösztönzés az egyetlen társadalmi funkciója, másrészt mert sok esetben a dolgozók a fizetésemelést nem annyira a saját alapfizetésükhoz, hanem inkább a többi dolgozóéhoz viszonyítják.

6. Az eredmények felhasználásának elősegítése

Ahhoz, hogy a gyakorlatban az eddigiek során megismert, illetve közölt kifejezéseket jól hasznosítani tudjuk, nem egy esetben további alapösszefüggések figyelembevételére van szükség. Az alábbiakban ilyen összefüggéseket ismertetünk, előre bocsátva, hogy azok számítógép rendszerre vonatkoznak.

Ahhoz, hogy például a (35) alatti kifejezést használni tudjuk, szükségünk van τ értékének az ismeretére. Amennyiben τ gépóra-költséget jelent, akkor erre nézve belátható (vö: [19]), hogy jó közelítéssel

$$\tau = \lambda \frac{Q \cdot 100}{N \cdot r \cdot p \cdot m} \cdot \frac{\text{Ft}}{\text{óra}}, \tag{44}$$

ahol:

$Q =$ a számítógép vételára (millió Ft).
$p =$ a számítógépnek, mint berendezésnek a működéséből származó nyeresége %-ban (általában: $15 \leq p \leq 30$).
$m =$ a számítógép nullára-írási (elavulási, selejtezési ideje évben). Általában: $5 \leq m \leq 9$; jelenleg $m = 7$.
$N =$ 1 évben a tényleges munkanapok száma (nap/év; általában $280 \leq N \leq 305$).
$r =$ 1 munkanapra esően a gép által végzendő munkaóra (óra/nap; általában: $8 \leq r \leq 24$).
$\lambda =$ gépóra költségtényező, ami a szolgáltatás jellegéből és egyéb járulékos tényezők alakulásától, az elavulás, leírás idejétől stb. függ. Jelenleg általában $0.75 \leq \lambda \leq 1,25$.

Fel kívánjuk hívni a figyelmet arra, hogy ha a számítógép modern szervezésű, nagyteljesítményű, multiprogramozású gép, akkor a (44) összefüggés többnyire módosításra szorul. Ekkor ugyanis *egy programnak a gépben tartózkodás idejét elsősorban az határozza meg, hogy milyen más programokkal együtt tartózkodott az az operatív memóriában egy adott időszak alatt. A költség-elszámolásnál ezt a tényt figyelembe kell venni.*

Napjainkban még nem alakították ki azt az egységes eljárási módot, amely ezt a kérdést megnyugtatóan rendezné. Ettől függetlenül ma már több helyen is alkalmazzák a szolgáltatásoknak olyan elszámolási rendszerét, amely a multiprogramozású gépek felhasználásakor biztosítja azt, hogy ugyanannak a feladatnak a költsége — bármilyen környezetben futott is a gépen — azonos legyen. Tájékoztatásul megemlítjük, hogy [10] szerint az Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központjában a feladatok F gépköltségét az alábbi képlet szerint számlázzák:

$$F = P \cdot D \text{ Ft}, \tag{45}$$

ahol:

$$P = \begin{cases} E \text{ Ft/mp, ha a program I/0 berendezéseken és mágneslemezeken kívül legfeljebb 2 db mágnesszalagot használ;} \\ 1{,}2^{k-2} E \text{ Ft/mp, ha a program } k > 2 \text{ számú mágneseszalagot használ;} \end{cases}$$

$$D = \{8 + \varepsilon[1 + M/400] + M \cdot \text{tr}/10000\} \text{ mp};$$

itt:

$E =$ jelenti a mp-kénti egységárat;
$\varepsilon =$ jelenti a központi egységnek a program feldolgozására fordított idejét mp-ben mérve;
$M =$ jelenti a program által lekötött memória területet 512 byte-os egységben mérve;
$\text{tr} =$ jelenti a program által transzferált összes blokkok számát.

A [10] nem ismerteti azt az eljárást, melynek segítségével E értéke meghatározható. Éppen ezért jobb híján első közelítésül az $E = \tau/3600$ összefüggéssel (vagy ennek egy konstans szorosával) számolhatunk, ahol τ értékét a (44) alatti kifejezés determinálja.

Végezetül megemlítjük, hogy például a (44) alatti összefüggés képezheti az alapját további más olyan összefüggések felírásának is, melyeket különböző döntéseknél célszerű alapul venni.

A [18]-ban például láthatjuk ennek felhasználását számítógép vásárlás esetén. Bizonyos feltételek mellett ebben kimutattam, hogy *egy — korábban már számítástechnikai szolgáltatást igénybe vevő — iparvállalatnak általában olyan számítógépet indokolt beállítania, amelynek vételára a vállalati éves árbevétel 2,7 és 5,1%-a közé esik.*

Természetesen ezek az eredmények és az itt közöltek is a témakörnek ma még inkább csak kezdetleges eredményei, s a szakembereknek még nagyon sokat kell tenniük azért, hogy a hatékonyságelmélet mint önálló diszciplina kialakulhasson, s eredményei a gyakorlatban kellőképpen használhatók, alkalmazhatók legyenek.

(Beérkezett: 1978. okt. 5-én)

IRODALOM

1. DOBÓ, A.—SZAJCZ, S.: *Bevezetés a megbízhatóságelméletbe* I—II. rész KGM ISZSZI kiadványa, Budapest, 1968.
2. DOBÓ, A.—SZAJCZ, S.: *Bevezetés a rekurrens folyamatok elméletébe,* Minőség és megbízhatóság, 1975/4.
3. DOBÓ, A.—SZAJCZ, S.: *Valószínűségszámítási vizsgálatok véletlen sorozatokkal kapcsolatosan* (Kézirat), Budapest, 1978.
4. TAKÁCS, L.: *On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes.* Acta Math. Acad. Sci. Hung. 8. (1957)
5. GNYEGYENKO, V. B.—BELJAJEV, J. K.—SZOLOVJEV, A. D.: *A megbízhatóságelmélet matematikai módszerei,* Budapest, 1970. Műszaki Könyvkiadó
6. BARLOW, R. E.—HUNTER, L. C.: *System efficiency and reliability,* Technometrics 2 (1960): 1.
7. RÉNYI, A.: *Valószínűségszámítás,* Budapest, 1954. Tankönyvkiadó
8. JÁNOSI, F.: *A gazdaság kategóriájának tartalma a különböző termelési módokban.* Közgazdasági Szemle, 1976/11.
9. POLÁK, M.—SUBICZ, P.: *A gazdaságos termékszerkezet kialakításának problémái,* Vállalatvezetés, vállalatszervezés, 1976/4.
10. TÓTH, I.: *Az Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központja,* OTSZK Közlemények, 1973/1.
11. DOBÓ, A.: *A számítógépek teljesítményeinek értékelése,* Automatizálás, 1976/12.
12. DOBÓ, A.: *A számítógép rendszerek létszámvonzatának alakulása a teljesítőképességük függvényében.* (Kézirat)
13. MAJOROS, P.: *Módszerek a struktúra változások mérésére,* Statisztikai Szemle, 1978/7.
14. LANGE, O.: *Bevezetés a közgazdasági kibernetikába,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1967.
15. DOBÓ, A.: *Megjegyzések a szabályozási rendszerek stabilitásának vizsgálatához,* SZIGMA 1978/1—2.
16. DOBÓ, A.: *Számítástechnikai eszközök tulajdonságainak értékelése matematikai módszerekkel,* KGM ISZSZI kiadvány, Budapest, 1972.
17. JORDAN, K.: *Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból,* Budapest, 1956. Akadémiai Kiadó
18. DOBÓ, A.: *A számítógépvásárlás egy kritériuma,* Vezetéstudomány, 1978/4.
19. DOBÓ A.—SZAJCZ S.: *Számítógépes szolgáltatások költségalakulásának becslése,* Könnyűipari Szervezési Tájékoztató, 1977/1.

20. FÜLÖP, G.: *Hatékonyság és az újratermelés arányai*, Budapest, 1978. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
21. LOPATNYIKOV, L. I.: *Közgazdasági matematikai kisszótár*, Kossuth Könyvkiadó (1975).

MATHEMATICAL ANALYSIS ON THE EFFICIENCY OF SYSTEMS

This paper deals with questions belonging to the sphere of efficiency theory, particularly with the mathematics thereof.

A basic model is presented under very general conditions and in connection with this the probability is determined that a system is in a state favourable from some viewpoint (Theorem 1).

The complicated relationships are examined in stationary state (Theorem 2), which can be conceived, after all, as a generalization in certain directions of the results belonging to the theory of recurrent processes.

Results obtained in this way are used for the mathematical description of problems connected with the efficiency and performance of the system, the organization of work, etc. Labour input problems, arising when numerical characteristics are kept at favourable value, are dealt with as well.

The presentation of further, approximatively valid relationships promote the application of the results to a case when the system is a computer.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, КАСАЮЩИЕСЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ

В данном материале рассматриваются вопросы, относящиеся к проблематике теории эффективности и являющиеся, в первую очередь, по своему характеру математическими.

Исходя из весьма общих предпосылок излагается основная модель и определяется вероятность нахождения системы в состоянии, благоприятном с какой-либо точки зрения (теорема 1.).

Рассматривается формирование сложных зависимостей в станционарном состоянии (теорема 2.) которые, в конечном счете, могут восприниматься в качестве некоторого обобщения результатов, относящихся к теории рекуррентных процессов.

Получаемые таким образом результаты используются для описания математическими средствами вопросов, связанных с эффективностью системы, результативностью, организацией труда и т. п. Изучаются проблемы трудовых затрат, имеющих место при поддержании цифровых характеристик на благоприятном уровне.

Посредством изложения приближенных взаимосвязей представляется возможным применить полученные результаты в таких случаях, когда система представляет собой вычислительную машину.