Simonovits András

Normák, várakozások és stabilitás egy lineáris modellben

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban a normák, a várakozások (kilátások) és a stabilitás kapcsolatát vizsgálom. Kiinduló pontként *Kornai–Simonovits* modellje [8] szolgál, amelyben egy többszektoros készletjelzéses gazdaság decentralizált szabályozási problémáit vizsgáltuk. Modellünk egyik hiányosságát abban jelöltük meg, hogy nem magyarázzuk meg a normális pálya keletkezését, hanem adottnak vettük a pályát. (Egyébként ez a „rövidre-zárás" majdnem minden szabályozási modellben jelen van.)

Lovell [10] elkerülte ezt a leegyszerűsítést. Leontief-típusú modelljében a várakozásokkal helyettesítette a normális pályákat. Furcsa módon Lovell dolgozata két paradoxont tartalmazott. Míg Lovell büszkén vállalta a paradoxonokat, engem rávezettek Lovell egyik feltevésének abszurditására. Ez vezetett Lovell modelljének felülvizsgálatára.

Részletesebben a következőről van szó. Lovell szabályozási modelljének a magva egy nyílt és statikus (pontosabban: stagnáló, de a készletkötést figyelembe vevő) Leontief-modell. A modell *állapot*változói: a késztermékkészletek (és burkoltan: az anyagkészletek); *szabályozási* változói: a termelési (és burkoltan: a beszerzési) döntések.

Mindegyik termelő adott eladási várakozása (kilátása) mellett olyan késztermékkészletet tart *normális*nak, amely az eladási várakozásával arányos. *Teljes reakció* esetén mindegyik eladó olyan termelési döntést hoz, amely a várakozás teljesülése mellett a normatív készlethez vezet. Azonban a várakozás teljesülése mellett a normatív készlethez vezet. Azonban a várakozások teljesülése nulla valószínűségű esemény, és pontatlan várakozás esetén messzebb kerülhetünk a tényleges eladással arányos készlettől, mint voltunk. Ezért a döntéshozók *részleges reakció* szerint termelnek: olyan *tervezett* készletet céloznak meg, amelyek eltérése a ténylegestől arányos a normatív készlet és a tényleges készlet eltérésével. Az arányossági szorzó: a *reakció-együttható*, amely feltevés szerint 0 és 1 között van.

Az egyes anyagkészletek pontosan megegyeznek a *technikailag* szükséges minimummal, következésképpen *minden időszakban a beszerzések megegyeznek a következő időszak ráfordításaival.*

Lovell háromféle eladási várakozást vizsgál:

(i) a statikus várakozást, amely időben változatlan;

(ii) a tökéletes előrelátást;

(iii) a naiv várakozást, amely az előző időszak tényadatával azonos. (Meg kell jegyeznünk, hogy Lovell érthetetlen módon a naiv várakozást időnként statikusnak is nevezi, főleg a dolgozat közepén pl. a 282, és 284. o. Ugyanakkor a dolgozat elején pl. a 273. o. és végén, pl. a 288. o. az általunk használt elnevezéseket használja. Mikor Lovellt idézem, mindig egyértelműen használom az elnevezéseket, bár ezzel helyenként betű szerint eltérek Lovell állításaitól!)

Lovell eredményeit a következőképp foglalhatjuk össze:

1. *Statikus* várakozás esetén a szabályozás *stabil*.
2. *Tökéletes előrelátás* esetén a szabályozás *instabil*.
3. *Naiv várakozás* esetén a szabályozás stabil, ha a reakció gyenge; teljes reakció esetén a stabilitás ekvivalens azzal, hogy a rendszer bizonyos értelemben „gyengén összefüggő".

Lovell 1. és 2. állítása meglepő — ezt a tényt Lovell is aláhúzza. Véleményem szerint e paradoxonokat Lovell már említett feltevése okozza: ti. hogy minden időszakban a beszerzések a következő időszak ráfordításaival azonosak. Természetesen egyetértek Lovellel abban, hogy a „készlet-feladat lényege részben abban rejlik, hogy a termelés időt követel", (i.m. 274—5 o. 8. lábj.) tehát a beszerzés időben megelőzi a ráfordítást. Ugyanakkor az okság elve alapján szabályozási modellben semmilyen döntés nem függhet *explicite* későbbi döntésektől!

Ebben a dolgozatban Lovell gondolatmenetét e visszás feltevés nélkül folytatom. Ehhez szükségünk lesz a *Kornai—Simonovits* [6; 8] modellben bevezetett megkülönböztetésre. Az anyagkészleteket két részre osztjuk: a technikailag szükséges minimális készletre és az *ütköző anyagkészletre*. (Ez utóbbi készlet hasonló szerepet játszik, mint a késztermékkészlet — hiszen az eladáshoz technikailag szükséges minimális készletektől mindvégig eltekintünk.)

Lovell gondolatmenetét a termelőkről kiterjesztjük az *anyagbeszerzőkre:* Föltesszük, hogy adott szektor adott anyagbeszerzőjének normatív ütköző — ill. teljes anyagkészlete arányos a szektor várható termelésével. A tervezett anyagkészlet a normális és az előző időszak tényleges anyagkészlete között helyezkedik el, az anyagbeszerző reakció-együtthatójával arányosan.

Bármely adott készletnorma rendszerhez pontosan egy Neumann-pályához tartozik, s a rendszer stabilitását ehhez a pályához viszonyítjuk. Bevezetjük még a *kritikus* reakció-együtthatót, mint a Neumann-pálya egyöntetű növekedési ütemének és növekedési együtthatójának a hányadosát. Ez a mennyiség meglehetősen kicsiny: éves időszakok esetén néhány százalék, negyedéves időszakok esetén pedig egy százalék körül van.

A rövidség kedvéért rendre *erős, kritikus* ill. *gyenge* reakcióról beszélünk, ha mindegyik reakció-együttható nagyobb, egyenlő ill. kisebb mint a kritikus érték. (A *vegyes* reakciók esetével nem tudunk foglalkozni.)

Saját eredményeimet a következőkben foglalom össze:

1. *Statikus várakozásnál* a szabályozás *instabil*, de *Ljapunov-stabil* erős vagy kritikus reakció esetén.
2. *Tökéletes előrelátás* általánosan csak gyenge vagy kritikus reakciónál *értelmezhető*, ekkor a szabályozás *stabil*.
3. *Naiv várakozásnál* a szabályozás gyenge reakció esetén *stabil*, kritikus reakció esetén *instabil*, de *Ljapunov-stabil* és erős reakció esetén *Ljapunov-instabil*.

Hasonlítsuk össze a két tétel-rendszert egymással. A *statikus várakozásnál* Lovell paradoxonja teljesen eltűnik: a helyesbített modellben a rendszer nem szabadul meg hibáitól, mivel nem tanul belőlük. Szerencse, hogy a rendszer egyáltalán megél „vakon". A *tökéletes előrelátásnál* az értelmezhetőség okoz nehézséget. Érvényes marad Lovell állításának az a része, hogy az optimálisnak tűnő *teljes* reakció általában (de nem mindig!) instabilitást okoz (ha egyáltalán értelmezhető!) A legfontosabb típusnál, a *naiv várakozásnál* eredményeink lényegében megegyeznek: mivel a várakozások pontatlanok, óvatosan kell reagálni jelzéseikre.

A pontosság kedvéért megemlítem, hogy a két modell nemcsak a beszerzési szabályban tér el egymástól (bár ez a lényeges eltérés), hanem két formai feltevésben is: Modellemben a gazdaság *zárt* és *növekvő*. Ezekre a feltevésekre formai okok miatt volt szükség és nem jelentenek tartalmi eltérést Lovell feltevéseitől.

Nem érdektelen, hogy a *készlet*-modell helyett egy meglehetősen *általános* szabályozási modellt vizsgálhatunk, amilyenhez hasonlóval *Mc Fadden* [11] foglalkozott, ő azonban figyelmen kívül hagyta a várakozásokat. A készletmodell általánosítása az eredmények érvényességi körének kiterjesztésén túl jelentősen áttekinthetőbbé teszi az eredményeket és a bizonyításokat.

Figyelmeztetés: Bár a dolgozatban sokszor hivatkozunk Lovell [10] és Kornai–Simonovits [6; 8] dolgozatokra, a dolgozat megértéséhez nem szükséges a hivatkozott művek ismerete.

Köszönetnyilvánítás: Dolgozatom szorosan kapcsolódik Kornai Jánossal közösen írt fenti dolgozatainkhoz. Itt köszönöm meg Kornai Jánosnak a kutatás során nyújtott segítséget. Külön megemlítem Akar László segítségét Lovell modelljének elemzésében. A dolgozat korábbi változatát többen elolvasták. Hasznos észrevételeikért köszönetet mondok Bródy Andrásnak, Kapitány Zsuzsának, Martos Bélának és Tarján Tamásnak.

2. A készletszabályozási modell

Ebben a fejezetben matematikai formába öntöm a Bevezetésben körvonalazott készletszabályozási modellt, és kimutatom Lovell modelljének hibás voltát.

A reálszféra

Diszkrét idejű modellt vizsgálunk, az idő jele $t = 0, 1, 2, \ldots$ Szabályozáselméleti kifejezéssel élve a rendszer *állapotváltozói*: a w késztermékkészlet vektor és a V anyagkészlet mátrix elemei; a rendszer *szabályozási változói*: az r termelési vektor és az X beszerzési mátrix elemei. Bevezetve a Leontief-féle folyó ráfordítási mátrixot, A-t, a rendszer *mozgásegyenletét* az alábbi készletváltozási egyenletek adják:

$$w(t+1) = w(t) + r(t) - Y(t)\, 1 \tag{2.1}$$

és

$$V(t+1) = V(t) + Y(t) - A\langle r(t)\rangle, \tag{2.2}$$

ahol 1 az n-dimenziós oszlop-összegzővektor. (Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy e dolgozatban a készlet-*nyitó*készlet ellentétben Lovellel, aki *záró*készletekben gondolkozik!)

Kornai–Simonovits [6] 1. Megállapításában láttuk, hogy minden $\langle g\rangle$ késztermékkészlet per termelés és $\bar{B}$ anyagkészlet per termelés normamátrixhoz tartozik pontosan egy olyan pálya, amelynek arányai és növekedési együtthatója (λ_0) időben változatlanok: a *Neumann-pálya.*

$$w_0(t) = w_0\lambda_0^t,\ V_0(t) = V_0\lambda_0^t,\ r_0(t) = r_0\lambda_0^t,\ Y_0(t) = Y_0\lambda_0^t, \tag{2.3}$$

ahol

$$w_0 = \langle g\rangle r_0 \text{ és } V_0 = \bar{B}\langle r_0\rangle. \tag{2.4}$$

Ebben a dolgozatban formai okok miatt a késztermékkészletnormákat más alakban írjuk föl:

$$w_0 = \langle p\rangle Y_0 1 \tag{2.5}$$

tehát $\langle p\rangle$ a késztermékkészlet per eladás norma. (2.4) és (2.5) összehasonlításából kiderül, hogy tetszőleges $\langle p\rangle$ és $\bar{B}$ norma-mátrixokhoz pontosan egy Neumann-pálya tartozik.

Magatartási szabályok

Röviden megismételjük a Bevezetésben érintett *normális* készletek definícióját. *Kornai—Simonovits* [6] C.1 feltevésével szemben most nem tesszük föl, hogy a normális pályát (esetünkben a Neumann-pályát) ismerik a döntéshozók. Lovellt követve a normális készleteket a várakozásokhoz viszonyítjuk. Mivel a $t+1$-edik időszak normális nyitókészleteit a t-edik időszak elején kell ismernünk, a t-edik időszak várható eladásához ill. termeléséhez kell arányítani. (2.3) és (2.5) értelmében azonban figyelembe kell vennünk a növekedési együtthatót is, amelyet *ismertnek* tekintünk.

$$\tilde{w}(t+1) = \langle p\rangle\lambda_0\tilde{Y}(t)\, 1 \tag{2.6}$$

és

$$\tilde{V}(t+1) = \bar{B}\otimes\lambda_0\tilde{\mathfrak{R}}(t), \tag{2.7}$$

ahol a hullám a döntési változó becsült, várt értékét jelöli az állapotváltozónak pedig a normális értékét, $\otimes$ pedig két mátrix elemenkénti szorzatát jelöli. Értelemszerűen $\tilde{Y}(t)1$ a termelők becsült eladását jelöli, $\tilde{\mathfrak{R}}(t)$ pedig a beszerzők becslését szektoruk termeléséről: pontosabban $\tilde{r}_i^j(t)$ a j-edik szektor i-edik anyagbeszerzőjének becslése saját szektora $r_j(t)$ termeléséről a t-edik időszak elején.

Mivel azonban a normatív készleteket megcélzó termelési- és beszerzési döntések pontatlan becslésektől függnek, célszerű lehet a normatív és az előző időszak tényleges készletét az ismert λ_0 normális növekedési együtthatóval beszorozva kapott *feltételes* készlete közötti *tervezett* készleteket megcélozni:

$$\bar{w}(r+1) = \langle q\rangle\,\tilde{w}(t+1) + [\mathrm{I} - \langle q\rangle]\lambda_0 w(t) \tag{2.8}$$

és

$$\bar{V}(t+1) = Q\otimes\tilde{V}(t+1) + [11' - Q]\otimes\lambda_0 V(t), \tag{2.9}$$

(a *tervezett* készletek) ahol $11'$ az az $n\times n$-es mátrix, amelynek minden eleme egységnyi; $\langle q\rangle$ és Q mátrixok a termelők és a beszerzők *reakció-együtthatóinak* mátrixát jelöli. Például a j-edik termelő-együtthatójával, q_j-vel, arányos a tervezett késztermékkészlet eltérése a feltételes készlettől; $\overline{w}_j(t+1) - \lambda_0 w_j(t)$; ahol az arányosítás alapja a normatív készlet és a feltételes készlet eltérése: $\tilde{w}_j(t+1) - \lambda_0 w_j(t)$. Ha a j-edik termelő *óvatos*, akkor q_j alig nagyobb nullánál ha *merész*, akkor 1 közelében van.

Az előbb azt mondtuk, hogy a döntéshozók a tervezett készleteket célozzák meg. Ez közelebbről azt jelenti, hogy várakozásaikat pontosnak tekintik, és olyan termelési ill. beszerzési döntést hoznak, amelyek a várakozások teljesülése (tökéletes előrelátás) esetén a tervezett készleteket alakítja ki. Képletben: (vö. (2.1—2))

$$r(t) = \overline{w}(t+1) - w(t) + \tilde{Y}(t)\,1 \tag{2.10}$$

és

$$Y(t) = \overline{V}(t+1) - V(t) + A \otimes \tilde{\mathfrak{R}}(t). \tag{2.11}$$

Vegyük észre, hogy adott eladási- és termelési várakozások mellett (2.1—2) és (2.6—11) egyenletek valóban megadják a rendszer szabályozását. Hiszen adott tényleges készletek esetén (2.6—7) segítségével adódnak a következő időszak normatív készletei, ahonnan (2.8—9) segítségével meghatározhatók a tervezett készletek. A következő lépésben (2. 10—11) segítségével meghatározzuk az adott időszak döntéseit, majd a (2.1—2) egyenletből leolvasható a „végeredmény": a következő időszak tényleges készletei. És az eljárás „elölről" kezdődik.

Kiemeljük, hogy adott várakozások mellett szabályozásunk *teljesen decentralizált*: a j-edik szektor termelője saját w_j késztermékkészlete és $\Sigma_{k=1}^{n} \tilde{y}_{jk}$ eladási becslése alapján dönt r_j termeléséről: a j-edik szektor i-edik anyagbeszerzője saját v_{ij} anyagkészlete és $\tilde{r}_i^j$ beszerzési becslése alapján dönt beszerzéséről. Ez a vonás hasonlít *McFadden* [11] és *Kornai—Simonovits* [8] megfelelő feltevéseihez.

Mielőtt rátérnénk Lovell modelljének közelebbi vizsgálatára, röviden megismételjük az ütköző anyagkészlet *Kornai—Simonovits* [6]-féle definícióját. Képzeljük azt, hogy a dinamikus Leontief-modell B mátrixa a *technikailag szükséges eszközlekötéseket* adja a termelés függvényében: a technikailag szükséges készletek mátrixa $B\langle r(t)\rangle$. Ugyanakkor az anyagkészletek nagyobbak (kivételes esetben egyenlők) a technikai minimumnál és a többletet *ütköző anyagkészletnek* nevezzük:

$$S(t) = V(t) - B\langle r(t)\rangle. \tag{2.12}$$

Az ütköző anyagkészlet szerepe ugyanaz a beszerzéseknél, mint a késztermékkészleté az eladásoknál: képessé teszi a rendszert bizonyos ingadozások elviselésére.

A rendszer *működőképességét* a következő változók nem-negativitásával definiáljuk:

$$w(t) \geq 0,\ S(t) \geq 0,\ r(t) \geq 0,\ Y(t) \geq 0. \tag{2.13}$$

(2.12) és (2.13) egybevetéséből következik $V(t) \geq 0$ is. (2.4), (2.5), (2.12) és (2.13) szerint a Neumann-pálya működőképes, ha $\overline{B} \geq B$.

Lovell modellje

Rátérünk Lovell modelljének közelebbi bemutatására. Mint a Bevezetőben említettük, formai okokból Lovell nyílt és stagnáló gazdasága helyett zárt és növekvő gazdasággal foglalkozunk. A nyílt és a zárt modell közti különbség formai, mint az *Lovell* is hangsúlyozza (i.m. 276. o.) A növekvő gazdaság nyilván valósághűbb feltevés, mint a stagnáló; de ez utóbbit Lovell is csak egyszerűsítő formai feltevésnek tekinti és nélkülözhető (i.m. 278. o. 11. l. j.) Az sem lényeges igazán, hogy Lovell minden szektor minden felhasználásának lekötési idejét azonosnak tekinti, amelyet még a szabályozási időközzel is azonosít: $A = B$.

Egyetlen egy feltevését kell kiemelnünk; nevezetesen azt, hogy *eltekint az ütköző anyagkészletek létezésétől:* (274. o.)

$$S(t) = 0 \text{ vagyis } V(t) = B\langle r(t)\rangle. \tag{2.14}$$

(2.14)-ből és (2.11)-ből már következik, hogy *minden időszak beszerzése függ a következő időszak technikailag szükséges készletétől* (Lovellnél egyszerűen azonos a ráfordításokkal; i.m.274. o.)

$$Y(t) = B\langle r(t+1)\rangle - B\langle r(t)\rangle + A\langle r(t)\rangle \left(= A\langle r(t+1)\rangle\right). \tag{2.15}$$

Szabályozási modelleknél megengedhetetlen, hogy bármely időszak bármely szabályozási változója későbbi időszak szabályozási változóitól explicite függjön; márpedig (2.15)-nél ez a helyzet.

Mivel a (2.15) feltevést teszem felelőssé Lovell paradox állításaiért, hasznosnak tűnik részletezni, hogy az „idő megfordítása" (2.15)-ban *tényleges.* (Összehasonlításul: (2.10—11)-ben is — *látszólag* — megfordul az idő, hiszen minden időszak döntése a következő időszak tervezett állapotától függ, azonban (2.6—7) és (2.8—9) értelmében a tervezett állapot az előző időszak elején meghatározható!)

Helyettesítsük be (2.10)-be (2.1), (2.6) és (2.8) összefüggéseket:

$$\begin{aligned} r(t+1) &= \overline{w}(t+2) - w(t+1) + \tilde{Y}(t+1)\,1 = \\ &= \langle q\rangle\langle q\rangle\tilde{Y}(t+1)\,1 + [(I-\langle q\rangle)\lambda_0 - I]\,w(t+1) + \tilde{Y}(t+1)\,1 = \\ &= (I+\langle q\rangle\langle p\rangle)\,\tilde{Y}(t+1)\,1 + [(I-\langle q\rangle)\lambda_0 - I][w(t)+r(t)-Y(t)1]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

(2.15) és (2.16) összevetéséből következik, a j-edik szektor i-edik beszerzőjének $y_{ij}(t)$ beszerzése függ a j-edik szektor $t+1$-edik időszaki eladási várakozásától: $\Sigma_{k=1}^{n} \tilde{y}_{jk}(t+1)$-től, ami a tökéletes előrelátás szokásos egy időszakra vonatkozó előrelátása (lásd később (2.18)) helyett két-időszakra vonatkozó előrelátást feltételez! Ugyanakkor Lovell alternatív várakozási feltevései (a naiv és a statikus várakozás) még egy időszakra vonatkozó tökéletes előrelátást sem engedhek meg, ami ellentétes Lovell előző, bár burkolt, nem alternatív feltevésével, (2.15)-tel.

Külön zavart okoz, hogy az $y_{ij}(t)$ beszerzés függ más szektorok egyidejű $\Sigma_{k=1}^{n} y_{jk}(t)$ beszerzésétől, ami *teljesen centralizált* szabályozást jelent. Viszont teljesen centralizált szabályozás esetén milyen szerepük marad a „döntéshozók" várakozásainak?

Összefoglalva: Lovell beszerzési feltevése kibékíthetetlen ellentétben áll Lovell termelési szabályával. A megoldást már megelőlegeztük (2.7), (2.9) és (2.11)-ben: a beszerzési szabályt a termelési szabályhoz hasonlóan kell kialakítani.

Várakozási típusok

Lovell modelljétől visszatérve modellemhez, adós vagyok még a várakozások keletkezésének magyarázatával. A formai módosításoktól eltekintve Lovellt követem: három várakozási típust vizsgálok: (i) a statikusat, (ii) a tökéleteset és (iii) a naivat.

(i) *Statikus várakozásnál* az eladási- és a termelési várakozások arányai időben változatlanok, szintjük a Neumann-pálya növekedési együtthatója szerint növekszik:

$$\tilde{Y}(t)\,1 = \tilde{Y}(t-1)\,1\,\lambda_0 \quad \text{és} \quad \tilde{\mathfrak{R}}(t) = \tilde{\mathfrak{R}}(t-1)\,\lambda_0, \qquad t = 1, 2, \ldots. \tag{2.17}$$

ahol $\tilde{Y}(0)\,1$ és $\tilde{\mathfrak{R}}(0)$ adott.

(ii) *Tökéletes előrelátásnál* az eladási és a termelési várakozások egybeesnek a tényleges eladási és termelési döntésekkel:

$$\tilde{Y}(t)1 = Y(t)1 \quad \text{és} \quad \tilde{\mathfrak{R}}(t) = 1r(t)', \qquad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.18}$$

(iii) *Naiv várakozásnál* az eladási- és a termelési várakozások megegyeznek az *előző* időszak tényeinek a Neumann-pálya növekedési ütemével szorzott értékeivel:

$$\tilde{Y}(t)1 = Y(t-1)\,1\,\lambda_0 \quad \text{és} \quad \tilde{\mathfrak{R}}(t) = 1r(t-1)'\lambda_0, \quad t = 1, 2, \ldots. \tag{2.19}$$

ahol $\tilde{Y}(0)\,1$ és $\tilde{\mathfrak{R}}(0)$ adott.

Kiemeljük, hogy mind a statikus, mind a naiv várakozás összhangban van a *teljes decentralizálás* elvével. Például naiv várakozásnál az előrebecslések kizárólag olyan megfigyeléseken alapulnak, amelyeket az illető döntéshozók egymástól teljesen függetlenül, közlések nélkül elvégezhetnek. Mindegyik termelő bármely időszak elején előző termelése és mostani készletváltozása különbségeként meghatározhatja az előző időszak eladásait. Mindegyik beszerző az előző beszerzés és a mostani készletváltozás különbségeként meghatározhatja saját szektora anyagfelhasználását (ill. termelését).

3. Az általános modell

A reálszféra

Az előző fejezet alapján nem nehéz kialakítani általános modellünket. (Vö. McFadden (1969) és Simonovits (1978)). A szabályozáselmélet alapfogalmait felhasználva bevezetjük a *dinamikus rendszer* $x(t)$ *állapot*vektorát és $u(t)$ *szabályozási* vektorát. A rendszer állapot változása nem függ az állapottól, kizárólag a szabályozástól függ; az egyszerűség kedvéért *lineáris mozgásegyenletű* rendszereket vizsgálunk:

$$x(t+1) = x(t) + Ru(t) \quad t = 0, 1, 2; \; x(0) \text{ adott.} \tag{3.1}$$

(Ne tévesszük össze a termelési várakozások $\mathfrak{R}$ mátrixát a reálstruktúra R mátrixával)

Ebben a dolgozatban mindvégig föltesszük, hogy az állapot- és a szabályozási vektor dimenziója *azonos* (jele: N), tehát az R mátrix $N \times N$-es kvadratikus mátrix. Föltesszük továbbá, hogy a rendszer *skalár* állapot- és szabályozási változói kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. Megfelelő indexelés mellett x_ν állapotváltozónak u_ν szabályozási változó felel meg. Szemléletesen azt is mondhatjuk, hogy a ν-edik *döntéshozó* állapotát x_ν, döntését u_ν jelöli. (Konkrét készletszabályozási modellünkben e fogalmak és feltevések jelentése nyilvánvaló.)

Föltesszük, hogy bármely skalár állapot változtására a *saját* döntés „pozitívan" (növelően) hat, az *idegen* döntések pedig „negatívan" (csökkentően) vagy pedig sehogyan sem hatnak. Képletben:

$$r_{\nu\nu} > 0 \qquad 1 \leq \nu \leq N \tag{3.2}$$

és

$$r_{\nu'\nu} \leq 0 \qquad 1 = \nu' \neq \nu = N. \tag{3.3}$$

(3.2—3) feltevést a közgazdaságtanban először *Metzler* (1945) használta; s az ő tiszteletére e feltevésnek eleget tevő rendszereket Metzler-rendszereknek nevezik. (Ugyanakkor egyik feltétel sem teljesül *Kornai—Simonovits* (1975b) rendelésjelzéses modelljében!)

(3.2) feltevés folytán a szabályozási változók mértékegységének alkalmas megválasztásával elérhető, hogy

$$r_{\nu\nu} = 1 \qquad 1 \leq \nu \leq N. \tag{3.4}$$

Vezessük be az *idegen hatások együttható mátrixát*:

$$M = I - R. \tag{3.5}$$

(3.3), (3.4) és (3.5) szerint

$$M \geq 0 \tag{3.6}$$

és

$$m_{\nu\nu} = 0 \qquad 1 \leq \nu \leq N. \tag{3.7}$$

Triviális eseteket kizárandó, föltesszük, hogy a rendszer *összefüggő*, vagyis az M mátrix *irreducibilis*. (Belátható, hogy e feltevés a készletjelzéses modellben az A mátrix irreducibilitását követeli meg.) Vezessük be az *idegen hatások (összegezett) vektorát:*

$$z(t) = Mu(t). \tag{3.8}$$

Ugyanis (3.1)-be behelyettesítve (3.8)-at

$$x(t+1) = x(t) + u(t) - z(t) \tag{3.9}$$

egyenlethez jutunk, amely egyszerűen azt mondja ki, hogy az állapotváltozás egyenlő a saját döntés és az *idegen hatások összege* közötti különbséggel.

Általánosítva a statikus és nyílt Leontief-modell produktivitási definícióját és feltételét, a következőt mondjuk:

A gazdaság *produktív*, ha minden állapot-növekedés pozitív döntéssel megvalósítható. (Természetesen a működőképesség mellékfeltételei általában felülről korlátozzák a döntéseket, vagyis az állapotnövekedéseket és az állapotváltozásokat, azonban nem korlátozzák az állapotnövekedési *arányokat*, és valójában erről van szó!)

Ismert összefüggés (pl. *Gale* [3]) szerint a gazdaság pontosan akkor produktív, ha az (nem-negatív irreducibilis M) mátrix spektrál-sugara kisebb mint 1.

$$\varrho(M) < 1. \tag{3.10}$$

Mivel a $\varrho(M)$ növekvő függvénye az M mátrix bármelyik elemének (*Varga* [15] Theorem 2.1 (3)), $\varrho(M)$ a rendszer *összefüggőségének erősségét* méri: értéke 0 és 1 között van. Természetesen minél nagyobb $\varrho(M)$, annál erősebb az összefüggőség.

Célszerű produktivitási feltevésünket a következő ekvivalens alakban is megfogalmazni:

$$1'M \leq 1', \tag{3.11}$$

amely feltételt *Simonovits* [14]-ben az *uralkodó saját hatás* jelzővel illettük. Ez az ekvivalens alak megkönnyíti a készletjelzéses gazdaság produktivitásának igazolását. (A (3.2–4) feltételek teljesülését közvetlenül ellenőrizhetjük.) Ugyanis a $\varrho(A) < 1$ Leontief-féle produktivitási feltevés (*Kornai–Simonovits* [8] R. 4) értelmében az állapotváltozóknak van olyan mértékegységrendszerük, amelynél teljesül $1'A < 1$. Ekkor viszont (2.1–2) szerint a w_j-oszlopösszeg éppen $\Sigma_{i=1}^{n} a_{ij}$, amely kisebb mint 1, és v_{ij}-oszlopösszeg pedig pontosan 1.

McFadden [11] számpéldája szintén kielégíti a produktivitási és a Metzler-feltételt.

Neumann-pálya

Időben változatlan struktúrájú rendszerekben kitüntetett szerepet játszanak az állandó arányú és növekedési együtthatójú pályák, amelyeket a működőképességi feltételek teljesülése esetén *Neumann-pályák*nak nevezünk:

$$x_0(t) = x_0\lambda_0^t \quad \text{és} \quad u_0(t) = u_0\lambda_0^t, \ \lambda_0 > 1. \tag{3.12}$$

Vezessük be a saját állapot és az összegezett idegen hatások hányadosát, mint a döntéshozó *normáját*:

$$c_\nu = \frac{x_\nu^0}{z_\nu^0} \quad 1 \leq \nu \leq N \quad \text{azaz} \quad x_0 = \langle c \rangle z_0. \tag{3.13}$$

Szorozzuk be (3.9)-et M-mel és a kapott egyenletbe helyettesítsük be (3.8)-at és (3.12–13)-at, és rendezzük az egyenletet:

$$(\lambda_0 - 1)M\langle c \rangle z_0 = (I - M)z_0, \quad \text{ahol} \quad z_0 > 0 \quad \text{és} \quad \lambda_0 > 1.$$

Felhasználva, hogy (3.10) ekvivalens $(I-M)^{-1}>0$ egyenlőtlenséggel, új egyenletünket $(I-M)^{-1}$-gyel beszorozva és λ_0-1-gyel elosztva

$$\frac{1}{\lambda_0-1}z_0=(I-M)^{-1}M\langle c\rangle z_0, \text{ ahol } z_0>0 \text{ és } \lambda_0>1$$

sajátérték-sajátvektor feladathoz jutunk. Mivel $(I-M)^{-1}M>0$, Perron-tétele értelmében *egyetlen* megoldása *létezik* a feladatnak.

A későbbiek miatt célszerű utolsó előtti egyenletünket némileg átrendezni:

$$z_0=M[I+(\lambda_0-1)\langle c\rangle]z_0, \text{ ahol } z_0>0,\ \lambda_0>1. \tag{3.14}$$

Ezzel bebizonyítottuk a következő segédtételt:

Segédtétel. A Neumann-pálya létezése és egyértelműsége.

Bármely negatív idegen hatású és produktív rendszerben tetszőleges norma esetén pontosan egy Neumann-pálya létezik.

A továbbiakban fölteszem, hogy a λ_0 növekedési együtthatót minden döntéshozó ismeri, ismeretlen viszont a Neumann-arányok vektora, z_0. Ez a feltevés matematikailag következetlen, hiszen λ_0 a (3.14) feladat sajátértéke, és z_0 a (3.14) feladat sajátvektora. Közgazdaságilag viszont óriási különbség, hogy csak egy állandó technikájú gazdaság hosszútávú növekedési ütemének ismeretét tesszük fel, ami egy *aggregált* egyszektoros növekedési modellből is meghatározható — vagy pedig egy sok ismeretlenes egyenletrendszer teljes centralizációt követelő megoldásának ismeretét tesszük föl. Egyébként erre a feltevésre még visszatérünk a fejezet végén.

Magatartási szabályok

Rátérünk a magatartási szabályokra.

(2.6—7) általánosításaként a *normatív állapotot* az előző időszak idegen döntéseinek összegére vonatkozó várakozással arányosan határozzuk meg, ahol az arányossági mátrix (3.13)-mal összhangban $\langle c\rangle\lambda_0$:

$$\tilde{x}(t+1)=\lambda_0\langle c\rangle\,\tilde{z}(t). \tag{3.15}$$

(2.8—9) általánosításaként a *tervezett állapotot* úgy határozzuk meg a *0* és *1* közötti d reakció együttható vektorral, hogy a tervezett állapot eltérése a *feltételezett* $\lambda_0 x(t)$ állapottól $\langle d\rangle$-szerese legyen a normatív állapotnak a feltételezett állapottól való eltérésének:

$$\bar{x}(t+1)=\langle d\rangle\,\tilde{x}(t+1)+(I-\langle d\rangle)\,\lambda_0 x(t) \quad 0<d\leq 1. \tag{3.16}$$

(2.10—11) általánosításaként a döntéshozók olyan döntéseket hoznak, hogy az idegen hatások összegére vonatkozó előrebecslés teljesülése esetén a tervezett állapot valósuljon meg. (Ez összhangban van a tervezett állapot intuitív fogalmával!)

$$u(t)=\bar{x}(t+1)-x(t)+\tilde{z}(t). \tag{3.17}$$

Általában is igaz, amit a készletszabályozásról elmondtunk: (3.15), (3.16), (3.17) és (3.8—9) meghatározza a rendszer dinamikáját — adott várakozások mellett.

Az érdekesség kedvéért megemlítjük, hogy a *normatív* döntés

$$\tilde{u}(t) = \tilde{x}(t+1) - x(t) + \tilde{z}(t) \tag{3.18}$$

bevezetésével visszatérhetünk a norma szerinti szabályozás gondolatkörébe. Vonjuk ki (3.17)-ből (3.18)-at: és vegyük figyelembe (3.16)-ot:

$$u(t) - \tilde{u}(t) = [I - \langle d \rangle][\lambda_0 x(t) - \tilde{x}(t+1)]. \tag{3.19}$$

Furcsa módon nincs összhang (3.19) és például a negatív visszacsatolás *Kornai—Simonovits* [8] C. 7. feltevése között, pedig a közgazdasági rokonság kézenfekvő. Mégis elmondható, hogy sikerült beváltani azt az ígéretet, hogy a normatív pálya képzése is bevonható az elemzésbe.

Várakozási feltevéseink

Röviden megismételjük — igaz, hogy általánosan — az előző fejezetben elmondottakat:

Statikus várakozásnál a döntéshozók ragaszkodnak kezdeti várakozásukhoz, csak minden időszakban beszorozzák λ_0 növekedési együtthatóval előző becslésüket:

$$\tilde{z}(t) = \lambda_0 \tilde{z}(t-1) \quad t = 1, 2, \ldots, \tilde{z}(0) \text{ adott.} \tag{3.20}$$

Tökéletes előrelátásnál a döntéshozók várakozásai teljesülnek:

$$\tilde{z}(t) = z(t) \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.21}$$

Naiv várakozásnál a döntéshozók az előző időszak megfelelő tényadatait beszorozzák a λ_0 növekedési együtthatóval:

$$\tilde{z}(t) = \lambda_0 z(t-1) \quad t = 1, 2, \ldots, \tilde{z}(0) \text{ adott.} \tag{3.22}$$

Nyilvánvaló, hogy a statikus várakozás és a tökéletes előrelátás szélsőséges feltevések, kizárólag elméletileg érdekesek.

A vizsgálat kérdései

Vizsgálatunk során két kérdésre keresünk választ: (i) stabil-e a szabályozás és (ii) működőképes-e a szabályozás?

(i) *Stabilitáson* (pontosabban: *relatív stabilitáson*) azt értjük, hogy a pálya aszimptotikusan tart a Neumann-pályához. Pontosabban:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_\nu(t)}{x_\nu^0(t)} = 1 \quad 1 \leq \nu \leq N \tag{3.23}$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u_\nu(t)}{u_\nu^0(t)} = 1 \quad 1 \leq \nu \leq N. \tag{3.24}$$

Megjegyezzük, hogy *McFadden* [11] és a gazdaság *vegetatív működésével* foglalkozó dolgozatok — *Kornai—Martos* [4; 5], *Dancs—Hunyadi—Sivák* [2], *Kornai—Simonovits* [6; 7; 8] stb. mindig stabilitást kerestek és találtak. Ez „erős" feltevéseikből (késleltetés hiánya, centralizált szabályozás ill. adott normatív pálya) következett, de gazdaságilag a relatív stabilitás a fontos. A közönséges stabilitás természetesen gyorsabb igazodást jelez, mint a relatív stabilitás.

Bevezethetnénk a *normatív pálya* fogalmát, amikor a várakozások teljesülnek és a tényleges állapot megegyezik a normálissal. Bár *részleges reakció* $(0 < d < 1)$ esetén a normatív pálya azonos a Neumann-pályával, *teljes reakciónál* $(d = 1)$ egész sereg normatív pályához tartozik egyetlen egy Neumann-pálya.

(ii) *Működőképességen* a változók pozitivitását (és bizonyos „$V(t) \geq B\langle r(t)\rangle$" típusú-általános egyenlőtlenségek teljesülését) értjük: $x(t) \geq 0$, $u(t) \geq 0$ és $x(t) \geq \langle c^{(m)}\rangle u(t)$.

Általában a szabályozás stabilitását bizonyítjuk vagy cáfoljuk és ebből következtetünk a szabályozás működőképességére ill. működőképtelenségére. Mivel a lineáris rendszereknél a Ljapunov-féle stabilitás ekvivalens a *lokális* működőképességgel, a működőképességet külön csak a *globális* esetben említjük meg.

Szokás szerint a stabil szabályozást előnyösebbnek tartjuk az instabil szabályozásnál, s ez utóbbi osztályon belül a Ljapunov-stabil szabályozást a Ljapunov-instabil szabályozásnál. Ugyanis a stabil szabályozás „célravezet", míg az instabil nem. Továbbá a stabil ill. Ljapunov-stabil szabályozás lokális működőképességet biztosít, míg a Ljapunov-instabilitás kizárja azt — legalábbis hosszútávon.

Ugyanakkor utalunk e hagyomány visszásságaira: egy Ljapunov-stabil, de instabil szabályozás működőképes indulási állapotainak tartománya bővebb is lehet, mint egy stabilé. Hasonlóan: egy Ljapunov-instabil szabályozás releváns időszakra vonatkozó működőképes indulási állapotainak tartománya bővebb lehet mint egy Ljapunov-stabil szabályozásé. (Erre a visszásságra egy beszélgetés során Kornai János hívta föl a figyelmemet.)

Lovell dolgozatát követve három várakozási típust vizsgálunk stabilitási szempontból. Külön kitérünk a *reakció-együtthatók* szerepére.

Reakció-együttható és várakozások

Tökéletes előrelátás esetén (3.9) és (3.17) szerint a tényleges és a tervezett állapot azonos:

$$\bar{x}(t+1) = x(t+1). \tag{3.26}$$

(3.16) szerint ekkor célszerűnek látszik *teljes reakciót* alkalmazni:

$$d = 1; \tag{3.27}$$

ugyanis ekkor a normatív és a tervezett állapot is megegyezik:

$$\tilde{x}(t+1) = \bar{x}(t+1). \tag{3.28}$$

Később látni fogjuk, hogy ez a sejtésünk általában hamis. Érdemes a részleges reakciót alkalmazni, már csak egy olyan ok miatt is, amit nem modellezünk: a termelés nagyfokú ingadozása drágább mint a készletek ingadozása. Mindenesetre tökéletlen előrelátásnál előfordulhat, hogy a teljes reakció jobban eltéríti a rendszert a Neumann-pályától, mintha egyáltalán nem reagálnának a döntéshozók. Az utóbbi esetben a rendszert *magára hagyják:*

$$d = 0, \tag{3.29}$$

és (3.16) szerint a tervezett állapot a feltételezett állapottal esik egybe:

$$\bar{x}(t+1) = \lambda_0 x(t).$$

A felesleges változók kiküszöbölése

Belátjuk, hogy a modell leírásán kívül nincs szükség a normatív, a tervezett és a feltételes állapot-változókra: kiküszöbölhetők. Helyettesítsük be (3.15)-öt (3.16)-ba:

$$\bar{x}(t+1) = \lambda_0 \langle d \rangle \langle c \rangle \tilde{z}(t) + [I - \langle d \rangle d] \lambda_0 x(t),$$

amelyet behelyettesítve (3.17)-be a döntés az állapot és a várakozás függvényében kifejezhető:

$$u(t) = [\lambda_0 \langle d \rangle \langle c \rangle + I] \tilde{z}(t) + [(\lambda_0 - 1) I - \lambda_0 \langle d \rangle] x(t). \tag{3.30}$$

Érdemes a következő rövidítéseket bevezeni:

$$\langle k \rangle = I + \lambda_0 \langle d \rangle \langle c \rangle \tag{3.31}$$

és

$$\langle h \rangle = -\lambda_0 I + I + \lambda_0 \langle d \rangle. \tag{3.32}$$

(3.31–3.32) segítségével (3.30) tömörebben fölírható:

$$u(t) = \langle k \rangle \tilde{z}(t) - \langle h \rangle x(t). \tag{3.33}$$

Helyettesítsük be (3.33)-at (3.8)-ba:

$$z(t) = M \langle k \rangle \tilde{z}(t) - M \langle h \rangle x(t). \tag{3.34}$$

Behelyettesítve (3.33)-at és (3.34)-et (3.9)-be, rendezés után az új állapot a régi állapot és a várakozás lineáris függvényeként kifejezhető:

$$x(t+1) = [I - (I - M) \langle h \rangle] x(t) + (I - M) \langle k \rangle \tilde{z}(t). \tag{3.35}$$

Szükségünk lesz még egy összefüggésre, amely (3.34) és (3.35) összeadásával adódik:

$$z(t) + x(t+1) = \langle k \rangle \tilde{z}(t) + [I - \langle h \rangle] x(t) \tag{3.36}$$

A kritikus, a gyenge és az erős reakció

A következő fejezetben fontos szerepet játszik a következő kérdés: Adott várakozás esetén nagyobb állapot-vektorhoz mikor tartozik mindig nagyobb döntés-vektor? (3.33) szerint akkor és csak akkor, ha

$$h \leq 0. \tag{3.37}$$

(3.32) szerint (3.37) ekvivalens a

$$(0<)\,d \leq \frac{\lambda_0-1}{\lambda_0}\,1 \tag{3.38}$$

feltétellel. Mivel (3.38) feltételre még gyakran hivatkozunk, célszerű lesz röviden *gyenge reakcióról* beszélni ilyenkor.

Hasonlóan fontos szerephez jut az az eset, amikor nagyobb állapot-vektorhoz mindig kisebb döntés-vektor tartozik. (3.33) szerint ez

$$(1\geq)\,h \geq 0 \tag{3.39}$$

ill.

$$\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0}\,1 \leq d(\leq 1) \tag{3.40}$$

feltétellel ekvivalens, amikor *erős reakcióról* beszélünk. (3.38)-ban ill. (3.40)-ben egyes egységekre egyenlőség állhat, míg másoknál továbbra is egyenlőtlenség.

Külön említjük azt az esetet, amikor a döntés explicite független az állapottól (implicite, a várakozáson keresztül függhet). Ismét (3.32—33) szerint ez

$$h=0 \tag{3.41}$$

és

$$d=\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0}\,1 \qquad \text{(kritikus reakció)} \tag{3.42}$$

feltétellel ekvivalens.

Osztályozásunkból kimaradt a *vegyes* reakciók esete, amikor egyes reakciók erősek, mások pedig gyengék. Ezt az esetet általában nem tudjuk vizsgálni, akárcsak Lovell.

Honnan ismerik a döntéshozók a Neumann-féle növekedési együtthatót?

A magatartási szabályok ismertetése előtt már mentegetőztem amiatt, hogy a döntéshozókról föltételeztem a Neumann-féle növekedési együttható pontos ismeretét. Ebben a pontban röviden kitérnék arra, hogy miképpen lehet*ne* megszabadulni ettől a feltevéstől.

A gyakorlatilag legérdekesebb naiv várakozásokra szorítkozunk. Tegyük fel, hogy kezdetben minden döntéshozó rendelkezett valamilyen $\tilde{\lambda}_\nu(0)$ növekedési tényezőbecsléssel. A t-edik időszak elején ($t\geq 1$) saját állapotának ill. az őt érő idegen hatások eredőjének növekedési tényezőjét a naiv várakozás szabályai szerint az előző időszak saját tényleges növekedési együtthatójával becsli:

$$\tilde{\lambda}_{x_\nu}(t)=\frac{x_\nu(t)}{x_\nu(t-1)} \quad \text{és} \quad \tilde{\lambda}_{z_\nu}(t)=\frac{z_\nu(t-1)}{z_\nu(t-2)}.$$

A normális állapot (3.15)-ös képletébe $\tilde{\lambda}_{z_\nu}(t)$-t, a tervezett állapot (3.16) képletébe $\tilde{\lambda}_{x_\nu}(t)$-t és a naiv várakozást definiáló (3.22)-es képletébe megint $\tilde{\lambda}_{z_\nu}(t)$-t helyettesítve, minden olyan előzetes információtól is megszabadultunk, amely csak központilag számítható ki.

E módosított modell elvileg jobban alkalmas a valóság tükrözésére mint elődje. Nem tudjuk azonban, hogy vizsgálata mennyiben erősíti meg ill. mennyiben cáfolja meg az egyszerűbb modellről szóló ismereteinket. Mivel a módosított rendszer nem lineáris, vizsgálata jóval nehezebb az eredetinél, és egyelőre nem tudjuk elemezni.

4. Reakció-sebességí várakozás és stabilitás

Ebben a fejezetben rátérek állításaim kimondására és bizonyítására. Lovell súlyozásától eltérve a statikus és a tökéletes várakozást nemcsak érintem, hanem részletesen is elemzem. Ezt a súlypontváltoztatást két dolog indokolja: 1) Eredményeink különbözősége épp a statikus és a tökéletes várakozás esetén lényeges és 2) a naiv várakozás elemzését jól megalapozza a fenti két várakozás elemzése.

(i) *Statikus várakozás*

Helyettesítsük be (3.20)-at (3.35)-be, és osszuk el az így kapott egyenlet mindkét oldalát λ_0^{t+1}-gyel:

$$\frac{x(t+1)}{\lambda_0^{t+1}} = \frac{I-(I-M)\langle h\rangle}{\lambda_0}\,\frac{x(t)}{\lambda_0^t} + \frac{(I-M)\langle k\rangle}{\lambda_0}\,z(0). \tag{4.1}$$

Az inhomogén differencia-egyenletrendszerek elméletéből jól ismert, hogy (4.1) egyenlet $x(t)/\lambda_0^t$ változói akkor és csak akkor konvergálnak (valamilyen $z(0)$-tól függő értékhez), ha a homogén rendszer (relatíve) stabil, vagyis az $[I-(I-M)\langle h\rangle]/\lambda_0$ mátrix spektrálsugara kisebb mint 1:

$$\varrho[I-(I-M)\langle h\rangle] < \lambda_0. \tag{4.2}$$

Vegyük észre, hogy (4.2) nem teljesül minden reakciósebességvektorra. Például a magára hagyott rendszernél $d=0$ — (3.32)-t figyelembe véve — a szóban forgó mátrix $I+(I-M)(\lambda_0-1)=\lambda_0 I-(\lambda_0-1)M$. Márpedig az M mátrixnak van negatív valósrészű sajátértéke, tehát a fenti mátrixnak van λ_0-nál nagyobb abszolút értékű sajátértéke, vagyis (4.2) valóban nem teljesül.

[Az M mátrix sajátértékeiről azt tudjuk, hogy a nulla körüli $\varrho(M)$ sugarú körben fekszenek és összegük nulla (lévén az M mátrix diagonális elemeinek összege nulla). Mivel Frobenius-tétele szerint van pozitív sajátérték, kell lennie negatív valósrészű sajátértéknek is.]

Nem törekszünk teljességre, egyszerűen föltesszük, hogy a reakció *kritikus* vagy *erős*.

(3.40)-ben egyelőre kizárva az egyenlőségeket, (3.39)-ben is határozott egyenlőtlenségeket kapunk: $0 < h(\leq 1)$. Így a szóban forgó mátrix, $I-\langle h\rangle + M\langle h\rangle > 0$ és irreducibilis. Fölhasználva, hogy e mátrix Leontief-inverze, $[I-I+\langle h\rangle - M\langle h\rangle]^{-1} = \langle h\rangle^{-1}(I-M)^{-1}$ létezik és pozitív, már említett összefüggésünk szerint a szóban forgó mátrix spektrálsugara kisebb mint 1.

Folytonossági megfontolások szerint (3.40) eddig kizárt eseteire ill. (3.42)-re a spektrálsugár legfeljebb 1 lehet.

Mindkét esetben teljesül tehát (4.2).

(4.1) és (4.2) folytán a növekedési együtthatóval normált állapot-változók konvergens sorozatot alkotnak, $\varkappa$ határértékkel:

$$\varkappa = \left[I - \frac{I - I - M\langle h \rangle}{\lambda_0} \right]^{-1} (I - M)\langle k \rangle \, \tilde{z}(0). \tag{4.3}$$

Láthatjuk, a kezdeti $\tilde{z}(0)$ várakozástól függ, hogy az állapotarányok hová tartanak. A (4.3)-ban szereplő mátrixok regularitása miatt $\varkappa$ és $\tilde{z}(0)$ között kölcsönösen egyértelmű megfelelés van. Tehát a Neumann-pályához akkor és csak akkor konvergál a rendszer, ha a kezdeti várakozás Neumann-féle volt. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

I. Tétel: Statikus várakozás és erős reakció mellett az állapot-arányok konvergálnak, ahol a határérték független az induló állapottól, viszont függ a kezdeti várakozástól. A rendszer hosszútávú növekedési üteme azonos a Neumann-pályáéval. A szabályozás (aszimptotikusan) instabil, de Ljapunov-értelemben stabil. Túl gyenge reakció esetén a szabályozás Ljapunov-instabil.

Megjegyzés Az I. Tétel magától értetődő: ha egy rendszer nem tanul saját hibáiból, akkor nem tud megszabadulni tőlük. Az I. Tétel kimondásának egyetlen célja: megcáfolni Lovell megfelelő (VI.) tételének mondanivalóját; amely szerint a statikus várakozás stabilizálja a rendszert, tehát a ,,vakság'' kifejezetten előnyös a készletszabályozásnál. (Figyelmeztetjük az Olvasót, hogy Lovell VI. Tétele, akárcsak a többi tétele, matematikailag hibátlan. Abszurd mondanivalójáért a sokszor idézett feltevését hibáztatom.)

(ii) *A tökéletes előrelátás*

Rátérünk a statikus várakozás ellentétének, a tökéletes előrelátásnak a vizsgálatára. Ezt a típusú várakozást a szabályozáselméletben nem kedvelik, amire a 2. pontban, Lovell modelljének bírálatánál már utaltam. Ezzel Lovell is tisztában van és védelmére a következőket írja:

,,Az eljárást megvédhetjük azzal az észrevétellel, hogy szükséges a tökéletes előrelátás következményeit elemezni, hogy megmutassuk, az instabilitás nem egyszerűen az előrebecslési hiba következménye.'' (i.m. 288. o. 26. lábjegyzet).

Mint a Bevezetésben említettem, a legnagyobb nehézséget a tökéletes előrelátás értelmezhetetlensége okozza.

Mikor értelmezhető egyáltalán a tökéletes előrelátás?

Vizsgáljuk meg közelebbről a tökéletes előrelátás kérdését! Helyettesítsük be (3.21)-et (3.34)-be és rendezzük az így kapott egyenletet:

$$[I - M\langle k \rangle]\, z(t) = M\langle -h \rangle\, x(t) \tag{4.4}$$

(4.4)-ból látható, hogy a $z(t)$ előrebecslési vektor (ami megvalósítja önmagát) az $x(t)$ állapot vektortól függ—burkolt formában. A többismeretlenes lineáris egyenletrendszerek elméletéből ismert, hogy (4.4)-nak akkor és csak akkor van adott $x(t)$-re $z(t)$ megoldása, ha az $M\langle h \rangle x(t)$ vektor az $I - M\langle k \rangle$ mátrix képterében fekszik.

Azonban az $x(0)$ kezdeti állapot vektor tetszőleges — esetleg az $x_0(0)$ Neumann-kezdő állapot valamilyen környezetében fekvő-vektor, amelyre a tökéletes előrelátás $z(0)$ vektora akkor és csak akkor létezik, ha az $M\langle h\rangle$ mátrix képtere az $I - M\langle k\rangle$ mátrix képterében fekszik.

Kezdjük a vizsgálatot a legegyszerűbb esettel, a kritikus reakcióval: (3.42). Ekkor (3.31) szerint $\langle k\rangle = I + (\lambda_0 - 1)\langle c\rangle$, következésképpen

$$I - M\langle k\rangle = I - M[I + (\lambda_0 - 1)\langle c\rangle]. \tag{4.5}$$

(3.14) értelmében $I - M\langle k\rangle$ *elfajult* mátrix. Szerencsére $\langle h\rangle = 0$ folytán (4.4) a

$$z(t) = M[I + (\lambda_0 - 1)\langle c\rangle]z(t) \tag{4.6}$$

fixpontfeladatra egyszerűsödik (v.ö. (4.5)), amelynek egyedül a Neumann-arányok tesznek eleget. Bár $z(t)$ *szintje* matematikailag határozatlan, közgazdaságilag kézen fekvő $z(t)$ szintjét az előző $z(t-1)$ szintjének λ_0-szorosaként meghatározni. Ekkor több is igaz:

(4.7) $z(t) = \lambda_0 z(t-1)$, $z(0)$ tetszőleges szintű megoldása (4.6)-nek.

Mivel a várakozások struktúrája időben változatlan, *statikus* várakozásnak is felfogható esetünk, amelynél a gazdaság az I. Tétel értelmében a Neumann-pályához konvergál, vagyis stabil.

A továbbiakban nemcsak a most tárgyalt kritikus reakciótól tekintünk el, hanem minden olyan reakció-együttható vektortól, amelynek valamelyik összetevője kritikus. (A figyelmen kívül hagyott esetek hasonlóan tárgyalhatók mint a tárgyalandó esetek). Ezért a $\langle h\rangle$ mátrix reguláris, vagyis $M\langle h\rangle$ képtere az egész tér. Előző megállapításunk szerint tehát ugyanezt kell megkövetelni az $I - M\langle k\rangle$ mátrixtól is, vagyis, az $M\langle k\rangle$ mátrixnak nem lehet fixpontja.

Ez a feltétel általánosan (azaz az M ill. $\langle c\rangle$ mátrixra vonatkozó megszorítások nélkül) csak *gyenge* reakciókra áll. Ugyanakkor ez a feltétel a stabilitást is biztosítja.

Gyenge reakció stabilizál

Tegyük fel, hogy (3.38) teljesül. Ekkor (3.31), (3.14) és a spektrál-sugárra vonatkozó Frobenius-tétel szerint

$$\varrho[M\langle k\rangle] < 1. \tag{4.8}$$

Mivel $M\langle k\rangle > 0$, (4.8) értelmében

$$[I - M\langle k\rangle]^{-1} > 0, \tag{4.9}$$

tehát (4.4) nemcsak hogy minden c norma-vektornál egyértelműen megoldható, hanem pozitív állapothoz pozitív előrebecslést rendel. Sőt, (3.33) és (3.37) értelmében minden pozitív állapothoz pozitív döntést rendel.

Helyettesítsük be (3.21)-et (3.36)-ba: a

$$x(t+1) = Px(t) \tag{4.10}$$

jelöléssel élve a

$$P = I + \{I + (\langle k\rangle - I)[I - M\langle k\rangle]^{-1}M\langle -h\rangle\} \tag{4.11}$$

összefüggést kapjuk. (3.31) szerint $k > 1$, (3.37) és (4.9) szerint $P > 0$, tehát minden pozitív állapot pozitív állapotba megy át.

Ha a működőképesség mellékfeltételeitől eltekintünk, akkor minden pozitív kezdőállapot *működőképes.*

Mivel a Neumann-pálya kielégíti a (4.10—11) egyenletrendszert, a P mátrixnak a λ_0 sajátértéke, az x_0 pedig sajátvektora. Ismét Perron tétele szerint a P mátrix többi sajátértéke abszolút értékben kisebb mint λ_0. Ezzel a tökéletes előrelátáson alapuló szabályozás stabilitását igazoltuk gyenge reakciók esetén.

A két-szereplős gazdaság

Nem tudjuk, hogy mi a helyzet, ha elejtjük a (3.38) feltevést. Bár az $N = 2$ eset bizonyos szempontból speciális, mégis alkalmas arra, hogy részleges választ adjunk a jelzett kérdésre.

Vegyük észre, hogy $N = 2$ esetén $M\langle k\rangle$ spektrál sugara (3.7) miatt egyszerűen fölírható:

$$\varrho[M\langle k\rangle] = m_{12}m_{21}k_1k_2. \tag{4.12}$$

Figyelembe véve (3.31)-et és (4.12)-t a $\varrho[M\langle k\rangle] = 1$ feltétel a

$$m_{12}m_{21}(1 + \lambda_0 d_1 c_1)(1 + \lambda_0 d_2 c_2) = 1 \tag{4.13}$$

összefüggésre egyszerűsödik. Könnyen belátható, hogy adott c_1, c_2 normákra (4.13) a (d_1, d_2) síkban egy olyan hiperbolaívet határoz meg, amely átmegy a kritikus reakció-együttható párt képviselő ponton és a vegyes reakció-együttható párok tartományában halad. Ha a normákat tetszőlegesen változtatjuk, a (4.13) hiberbola-ívek az egész „vegyes-tartományt" kitöltik.

Nem meglepő, hogy adott (c_1, c_2) normapárhoz tartozó hiperbola-ív környezetében a rendszer *gyengén meghatározott,* tehát a gazdaság (Ljapunov)-*instabil,* vagyis működésképtelen.

Erős reakciónál nemcsak az igaz, hogy a tökéletes előrelátás értelmezhető, hanem az is, hogy stabilitást biztosít. Ugyanis felírva $[I - M\langle k\rangle]^{-1}$ explicit alakját

$$[I - M\langle k\rangle]^{-1} = \frac{1}{1 - m_{12}m_{21}k_1k_2}\begin{bmatrix} 1 & m_{12}k_2 \\ m_{21}k_1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

látható, hogy

$$[I - M\langle k\rangle]^{-1} < 0. \tag{4.15}$$

Figyelembe véve (3.39)-et és (4.11)-t, $P > 0$, vagyis a gazdaság ugyanúgy stabil, mint a gyenge reakciónál.

Mindjárt belátjuk, hogy a gyenge és az erős reakció hasonlósága $N \geq 4$-re már nem érvényes; $N = 3$ esetén pedig nem ismerjük, hogy mi a helyzet. Lényegében arról van szó, hogy $N < 4$-re nem lehet M-nek két pozitív sajátértéke, mivel M sajátértékeinek összege nulla és $\varrho(M)$ domináns sajátérték.

Egyöntetű normák és reakciók

Lovellt követve (i.m. 285. o.) bevezetjük a *normák és a reakció-együtthatók egyöntetűségének* feltevését:

$$c = \gamma 1 \tag{4.16}$$

és

(4.17) $$d = \delta 1.$$

Ez a feltevéspár életidegen; de megkönnyíti a vizsgálatot. Ugyanis (4.11)-be behelyettesítve (4.16—17)-et, a P mátrix az M racionális törtfüggvényévé válik. Ismeretes, hogy az előbbinek a sajátértékei (a λ-k) ugyanilyen függvényei az utóbbi mátrix sajátértékeinek: (a μ-knek)

(4.18) $$k = \varkappa 1$$

ill.

(4.19) $$\varkappa = 1 + \lambda_0 \gamma \delta$$

és

(4.20) $$h = \chi 1$$

ill.

(4.21) $$\chi = -\lambda_0 + 1 + \lambda_0 \delta$$

jelölésekkel (v.ö. (3.31—32))

(4.22) $$\lambda = 1 - \{1 - (\varkappa - 1)(1 - \mu\varkappa)^{-1}\mu\} \chi,$$

ahol μ az M mátrix tetszőleges sajátértéke. (4.18—21) behelyettesítésével (4.22) a következő alakra hozható:

(4.23) $$\lambda = \lambda_0 \frac{1 - \delta - \mu[1 + (\gamma - 1)\delta]}{1 - \mu[1 + \lambda_0 \gamma \delta]},$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

(4.24) $$\sigma = \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

és

(4.25) $$\alpha = 1 - \delta$$

és

(4.26) $$\beta = 1 + (\gamma - 1)\delta.$$

Ekkor (4.23—26) értelmében

(4.27) $$\sigma = \frac{\alpha - \mu\beta}{1 - \mu\varkappa};$$

A stabilitás szükséges és elégséges feltétele:

(4.28) $$|\sigma| < 1, \quad \mu \neq \mu_0, \; |\mu| \leq \mu_0.$$

Mivel nem törekszünk teljességre, föltehetjük, hogy az *M mátrix összes sajátértéke valós*! (Például az M mátrix szimmetrikus). Ekkor föltehetjük, hogy a sajátértékeket nem-növekvő sorrendben számoztuk meg: ($\mu_0 = \varrho(M)$ egyszeres sajátérték!)

(4.29) $$\mu_0 > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_{N-1} (\geq -\mu_0).$$

(4.23) — és vele együtt a tökéletes előrelátás — akkor és csak akkor értelmezhetetlen, ha

$$1 = \mu_\nu(1 + \lambda_0\gamma\delta) \text{ legalább egy } \nu\text{-re;} \tag{4.30}$$

$\nu = 0$ esetén (4.30)-ban $<$ áll; negatív μ_ν-re (ilyen pedig biztos van) ellenkezőleg, $>$ áll. (4.30) kizárását tehát a $0 < \delta \leq 1$ reakció-sebesség tartományában (v.ö. (3.14))

$$1 > \mu_1(1 + \lambda_0\gamma\delta) = \mu_1(2 - \mu_0 + \gamma) \tag{4.31}$$

feltétellel biztosíthatjuk. Ha μ_1 pozitív, akkor (4.31) a

$$\gamma_0 = \frac{1}{\mu_1} + \mu_0 - 2 > 0$$

*kritikus normá*nál kisebb normákra teljesül, egyébként nem.

Ha $\varrho(M)$-en kívül az M mátrix többi sajátértéke negatív: vagy nulla:

$$\mu_1 \leq 0, \tag{4.32}$$

akkor (4.31) minden normára teljesül. A (4.32) feltétel teljesülése jó példa a *teljesen szimmetrikus* rendszer:

$$m_{\nu'\nu} = \omega > 0 \quad 1 \leq \nu' \neq \nu \leq N. \tag{4.33}$$

A (4.33)-ban definiált mátrix saját értékei

$$\mu_0 = (N-1)\omega \quad \text{és} \quad \mu_1 = \ldots = \mu_{N-1} = -\omega. \tag{4.34}$$

Mellesleg a „saját hatás az uralkodó" feltevése (3.10)] folytán

$$(0 <)\ \omega < \frac{1}{N-1}. \tag{4.35}$$

Összefoglalva a (ii) pontban mondottakat:

II. Tétel: A tökéletes előrelátás a normától függetlenül általánosan csak gyenge reakcióknál értelmezhető. Ekkor a gazdaság globálisan stabil és (globálisan) működőképes (ha eltekintünk a működőképesség mellék-feltételeitől). Vegyes vagy erős reakcióknál a tökéletes erőrelátás általánosan nem értelmezhető, és amikor értelmezhető, általában instabilitást okoz. Speciális esetben azonban az erős reakció is stabilizál.

Megjegyzés: A II. Tétel szövevényessége miatt nehéz megmondani, hogy Lovell megfelelő V. Tétele mennyiben van összhangban vele. Ha az általános (borúlátó) részt tekintjük, és figyelembe vesszük még, hogy Lovell modelljében nincs növekedés, akkor Lovellel összhangban elérkezünk a tökéletes előrelátás teljes instabilitásához. Azonban már itt is különbséget jelent, hogy Lovellnél a tökéletes előrelátás mindig értelmezve van és instabilitása szükségszerű; nálam viszont a tökéletes előrelátás általában nincs értelmezve, és ez okozza az instabilitás lehetőségét.

Szélesedik a két eredmény-csoport között az eltérés, ha figyelembe vesszük, hogy Lovell tétele növekedés esetén is érvényes; hiszen a megjelenő gyenge reakció nálam stabilitást nyújt, nála instabilitást, legalább is (4.16—17) mellett.

Kiáltóvá válik az ellentét a teljesen szimmetrikus rendszer egyöntetű szabályozása esetén, amikor Lovell teljes instabilitásával teljes stabilitást szögezek szembe.

(iii) *Naiv várakozás*

Már a Bevezetésben is említettük, hogy az eddig tárgyalt két várakozási típus (a statikus és a tökéletes) csupán elméleti szélsőség. Sokkal gyakorlatiasabbnak tűnik a naiv várakozás vizsgálata, amikor a döntéshozók legújabb tapasztalatuk alapján becsülik előre a következő idegen hatásokat.

A tárgyalás sorrendje azonos a tökéletes előrelátáséval. Először a kritikus reakciót vizsgáljuk.

A (ii) pont (4.6) képletéhez hasonlóan; (3.32—34)-be behelyettesítve (3.21)-et és (3.42)-t a

$$z(t+1) = \lambda_0 M[I + (\lambda_0 - 1)\langle c\rangle]z(t), \; [z(0) \text{ tetszőleges}], \tag{4.36}$$

képletet kapjuk. (3.14) értelmében $z(t)/\lambda_0^t$ akkor és csak akkor konvergál a Neumann-arányokhoz, ha az M mátrix *aciklikus*, vagyis *nem* írható (sorok és oszlopok egyidejű fölcserélésével) a következő alakba:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & M_1 & \dots & 0 \\ & & M_2 & \vdots \\ \vdots & & & M_{q-1} \\ M_q & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (q > 1), \tag{4.37}$$

ahol M_1 oszlop-száma megegyezik M_2 sor-számával, M_2 oszlop-száma M_3 sor-számával. . . . és M_q oszlop-száma M_1 sor-számával.

Mindenesetre a készlet-modell M mátrixa (2.1—2) értelmében ciklikus; eleve (4.37) alakban van fölírva: $q = 2$, M_1 $n \times |\bar{J}|$-os, M_2 pedig $|\bar{J}| \times n$-es mátrix, ahol $\bar{J}$ azon (i, j) indexpárok halmaza, amelyekre a j-edik szektor vásárol az i-ediktől: $a_{ij} > 0$; $|\bar{J}|$ pedig a $\bar{J}$ halmaz *elemszámát* jelöli.

A ciklikus mátrix esete hasonlít a statikus várakozáséhoz: a szabályozás instabil, de Ljapunov-értelemben stabil, tehát működőképes.

Jó hasznát vesszük a tökéletes várakozásnál megtanult összefüggéseknek, ha az *alapmegoldásokra* szorítkozunk:

$$x(t) = x\lambda^t \quad \text{és} \quad z(t) = z\lambda^t. \tag{4.38}$$

Ekkor (3.21) és (3.22) között az egyetlen különbség az, hogy az egyikben λ_0 a szorzó, a másikban pedig λ. Ezért (3.36)-ban k helyére $k\lambda_0$) kerül és (4.11) megfelelője

$$P_\lambda = I + \left\{ I + \left[\frac{\lambda_0}{\lambda}\langle k\rangle - I\right]\left[I - M\frac{\lambda_0}{\lambda}\langle k\rangle\right]^{-1} M \right\} \langle -h\rangle, \tag{4.39}$$

ahol P_λ indexe a λ sajátértéktől való függésre utal.

A gyenge reakció ismét stabilizál

Másodszor szintén a (3.38) feltevéshez folyamodunk: bebizonyítjuk, hogy ekkor a $P_\lambda x = \lambda x$ sajátértékfeladat domináns megoldása a Neumann-féle növekedési együttható: λ_0. Képletben:

$$\varrho(P_\lambda) < |\lambda|, \quad \text{ha} \quad \lambda \geq \lambda_0 \quad \text{és} \quad \lambda \neq \lambda_0. \tag{4.40}$$

Csoportosítsuk át (4.39) tagjait a következőképp:

$$P_\lambda = [I - \langle h \rangle] + \left[\frac{\lambda_0}{\lambda}\langle k \rangle - I\right]\left[I - M\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\langle k \rangle\right)\right]^{-1} M\langle -h \rangle. \tag{4.41}$$

Az első tag (3.39) szerint pozitív diagonális mátrix, a második tag első tényezőjeként szereplő diagonális mátrix ν-edik elemének abszolút értékére pedig az

$$\left|\frac{\lambda_0}{\lambda}k_\nu - 1\right| < k_\nu - 1, \quad \text{ha} \quad |\lambda| \geq \lambda_0 \quad \text{és} \quad \lambda \neq \lambda_0 \tag{4.42}$$

egyenlőtlenség teljesül. A második tényező $|\lambda| \geq \lambda_0$ és (4.8) értelmében invertálható és hatványsorba fejthető:

$$\left[I - M\frac{\lambda_0}{\lambda}\langle k \rangle\right]^{-1} = \sum_{t=0}^{\infty}\left[M\frac{\lambda_0}{\lambda}\langle k \rangle\right]^t. \tag{4.43}$$

Ismét $|\lambda| \geq \lambda_0$ folytán (4.43) bármely elemének abszolút értéke nem lehet nagyobb mint a

$$\sum_{t=0}^{\infty}[M\langle k \rangle]^t = [I - M\langle k \rangle]^{-1} \tag{4.44}$$

mátrix megfelelő eleme. (4.41) — (4.42) figyelembe vételével ugyanez igaz P_λ-ra és P_{λ_0}-ra is.

Jól ismert elemi segédtétel szerint ekkor

$$\varrho(P_\lambda) < \varrho(P_{\lambda_0}) \quad \text{ha} \quad |\lambda| \neq \lambda_0, \quad \text{és} \quad \lambda \neq \lambda_0, \tag{4.45}$$

ahonnan $\varrho(P_{\lambda_0}) = \lambda_0$ értelmében (4.40) következik.

A tökéletes előrelátással szemben a naiv várakozás mindig értelmezhető, legfeljebb működőképtelen gazdaságot ír le a negatív elemet tartalmazó döntési- vagy állapotvektor.

Erős reakciónál a készletszabályozás Ljapunov-instabil

A kritikus reakció csak Ljapunov-stabilitást biztosít ciklikus rendszereknél. Nem meglepő, hogy az erős reakcióknál a ciklikus rendszerek (legalábbis a párosak) Ljapunov-instabilak, tehát működésképtelenek.

(3.22)-t és (4.38)-ot behelyettesítve (3.36)-ba, némi rendezéssel:

$$x = [(\lambda - 1)I + \langle h \rangle]^{-1}\left[\frac{\lambda_0\langle k \rangle}{\lambda} - I\right]z.$$

(Megjegyezzük, hogy képletünk nincs értelmezve a $\lambda_\nu = 1 - h_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, N$) 0 és 1 közötti számokra, azonban instabilitásnál ez nem érdekes!)

Képletünket visszahelyettesítve (3.34)-be – ismét felhasználva (3.32)-t és (4.38)-ot

$$(4.46)\qquad z = M\langle k\rangle \frac{\lambda_0}{\lambda} z - M\langle h\rangle [(\lambda-1)I + \langle h\rangle]^{-1}\left[\langle k\rangle \frac{\lambda_0}{\lambda} - I\right] z$$

fixpont-feladathoz jutunk. Bevezetve a

$$(4.47)\qquad \langle\psi(\lambda)\rangle = \langle k\rangle \frac{\lambda_0}{\lambda} - \langle h\rangle [(\lambda-1)I + \langle h\rangle]^{-1}\left[\langle k\rangle \frac{\lambda_0}{\lambda} - I\right]$$

jelölést, (4.46) tömörebben is fölírható:

$$(4.48)\qquad z = M\langle\psi(\lambda)\rangle z.$$

A Neumann-pálya (4.48)-at is kielégíti és (3.14)-gyel összhangban

$$(4.49)\qquad \langle\psi(\lambda_0)\rangle = I + (\lambda_0 - 1)\langle c\rangle.$$

(4.47) alapján – (3.31–32) felhasználásával

$$(4.50)\qquad \langle\psi(-\lambda_0)\rangle = -\langle k\rangle + \langle h\rangle[-2\lambda_0 I + \lambda_0\langle d\rangle]^{-1}[\langle k\rangle + I].$$

(4.3–4); (4.49), (4.50) és $k \geq I + (\lambda_0 - 1)\langle c\rangle$ (mert $d \geq d_0$) folytán

$$(4.51)\qquad -\langle\psi(-\lambda_0)\rangle > \langle\psi(\lambda_0)\rangle.$$

(4.51) és az említett lemma értelmében

$$(4.52)\qquad \varrho\{-M\langle\psi(-\lambda_0)\rangle\} > \varrho\{M\langle\psi(\lambda_0)\rangle\}.$$

Mivel föltevésünk szerint M mátrix *párosan ciklikus*, s ezt a tuajdonságot egy reguláris diagonális mátrixszal való beszorzás változatlanul hagyja (v.ö. (4.37)), a $-M\langle\psi(-\lambda_0)\rangle$-nak spektrálsugara mellett a spektrálsugár ellentettje is sajátértéke. (Varga [15] Theorem 2.3) Mivel (4.52) jobboldalán álló mennyiség (3.14) értelmében 1-gyel egyenlő, az előbbi sajátérték – 1-nél kisebb.

Másrészt $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} M\langle\psi(\lambda)\rangle = 0$, tehát van olyan $\lambda \in (-\infty, -\lambda_0)$, melyre $-M\langle\psi(\lambda)\rangle$ spektrálsugara 1, vagyis a szóban forgó mátrixnak van fixpontjá a λ_0 sugarú körön kívüli λ paraméterre is, tehát a rendszer Ljapunov-instabil.

Egyelőre vizsgálatlan, hogy mi a helyzet *páratlan ciklusú M* mátrixok esetén, de minden bizonnyal hasonló eredményt kapunk: instabilitást.

Példa: Erős reakciók stabilizálják a szabályozást

A tökéletes előrelátásnál tapasztaltuk, hogy speciális feltételek esetén az ,,általánossal'' ellentétes eredményeket kaphatunk.

A *ciklikus* rendszerek a kritikus reakciónál még stabilak, tehát folytonossági megfontolások szerint bizonyos erős reakciókra is fönnáll a stabilitás. Fölvetődik azonban a kérdés: Van-e olyan rendszer, amely minden (0 és 1 közti) reakció-együtthatónál stabil? A válasz: igen.

Akárcsak a tökéletes előrelátásnál, most is az *egyöntetű normákra és reakciósebességekre*-szorítkozunk. (4.16–17) esetén a $\langle\psi(\lambda)\rangle$ diagonális mátrix összes átlós eleme azonossá válik. A továbbiakban ezt a közös értéket jelöljük $\psi(\lambda)$-

val és a $\langle\,\rangle$ elhagyásával ezúttal nem vektort, hanem skalárt jelölünk. Ezért (4.47) (4.18—21) segítségével a következő alakra hozható:

$$\psi(\lambda) = \frac{(\varkappa\lambda_0 + 1)\lambda - \varkappa\lambda_0}{(\lambda - 1 + \chi)\lambda}, \tag{4.53}$$

A stabilitás szükséges és elégséges feltétele

$$\psi(\lambda)\mu \neq 1 \quad \text{ha} \quad |\lambda| \geq \lambda_0 \quad \text{és} \quad \lambda \neq \lambda_0, \quad (|\mu| \leq \mu_0). \tag{4.54}$$

Nem akarunk belemerülni a részletekbe! Elegendő meghatározni $\max\limits_{\lambda \geq \lambda_0} \psi(\lambda)$-t és $\min\limits_{\lambda \leq -\lambda_0} \psi(\lambda)$-t, hogy reciprokukat véve pozitív felső ill. negatív alsó határt kapjunk az M mátrix „maradék" sajátértékeire — ismét föltéve, hogy valósak. Némi számolással belátható, hogy mind a maximum, mind a minimum fölvétetik (az utóbbi mindig $-\lambda_0$-nál!) Sőt végigfuttatva a δ reakció-együtthatót az erős reakciók $(\delta_0, 1)$ intervallumán, a fenti szélsőértékek szélsőértékét véve — reakció-együtthatótól független — de a normáktól függő — korlátokat kapunk a „maradék" sajátértékre. Sejtésünk szerint a szélsőértékek szélsőértéke mindkét esetben a teljes reakciónál valósul meg.

Teljesen szimmetrikus rendszerekre szorítkozva a „maradék" sajátértékek negatívak, amelyek λ_0 rögzítése mellett a döntéshozók számának növelésével tetszőlegesen kicsiny abszolút-értékűvé tehetők (v.ö. (4.34)) — tehát (4.54) stabilitási feltétel kielégíthető.

A (iii) rész összefoglalásaként kimondjuk az alábbi tételt:

III. Tétel: A naiv várakozásnál a szabályozás stabil, ha a reakció gyenge. Ha a rendszer ciklikus, pl. a készletjelzéses rendszer, akkor a kritikus reakciónál a szabályozás instabillá válik (bár Ljapunov értelemben stabil marad); ha párosan ciklikus (pl. a készletjelzéses rendszer); akkor erős reakciónál (Ljapunov-értelemben is) instabil. Vegyes reakciónál a rendszer lehet stabil is, instabil is.

Aciklikus rendszerek esetén is általában a szabályozás előbb-utóbb instabillá válik, azonban speciális esetben még a teljes reakció is stabilitást biztosít.

Megjegyzés: A III. Tétel nagyjából összhangban van Lovell megfelelő I—IV. Tételeivel: naiv várakozás esetén az óvatosság biztosítja a stabilitást. Mindkét eredményben közös, hogy képtelen a „vegyes" reakciókat kezelni.

Elméletileg fontos eltérést jelent, hogy Lovellnél a készletszabályozás teljes reakciónál is stabil, feltéve, hogy a rendszer *gyengén összefüggő;* ami $\varrho(M) = \sqrt{\varrho(A)}$-ra nézve jelent egy bizonyos felső korlátot: Lovell I. Tétele szerint $\varrho(A) < 1/(3 + 2 \max p_i)$-t. Viszont dolgozatom III. Tétele szerint a készletszabályozás teljes reakciónál feltétlenül instabil.

Gyakorlatilag azonban az eltérés nem túl jelentős. Egyrészt Lovell is kiemeli, hogy tényadatok szerint $\varrho(A) > 1/2$. Másrészt, ha zárt modellre térünk át, akkor $\varrho(A)$ méginkább felülmúlja a teljes reakció stabilitását biztosító 1/3 felső határt. Érdekes, hogy Lovell IV. Tétele — zárt modell tényadataira szintén 0,05 körüli kritikus reakciót szolgáltat $\varrho(A) = 0{,}85$ és $\lambda_0 = 1{,}05$ esetén.

5. Összefoglalás

A dolgozat végére érve nemcsak tételenként, hanem összességében is összehasonlíthatjuk a fenti eredményeket Lovell eredményeivel. Lovell szerint mennél pontatlanabb az előrelátás, annál jobb a szabályozás: a legjobb a statikus („vak"), a legrosszabb a tökéletes, végül közbülső a naiv („tanuló"). Ez a sorrend nyilvánvalóan ellentétes a józan ész sugallta sorrenddel: mennél pontosabb az előrelátás, annál jobb a szabályozás: a legjobb a tökéletes előrelátás, a legrosszabb a statikus, és középen helyezkedik el a naiv.

E dolgozat szerint a helyzet bonyolultabb. A józan ésszel összhangban a statikus várakozás nem *célravezető*, ugyanakkor Lovellel összhangban nem is vezet el teljesen a céltól; feltéve, hogy a döntéshozók *merészek* (vagyis némileg komolyan veszik „komolytalan" előrebecslésüket).

Figyelemreméltó, hogy mind a tökéletes előrelátás, mind a naiv várakozás általában véve akkor és csak akkor *célravezető*, ha a döntéshozók *óvatosak* vagyis alig veszik komolyan „komoly" előrebecslésüket). Tehát a mindentudás és a tanulás lehet előnyösebb mint a tudatlanság (cáfolva Lovellt) és lehet hátrányosabb (igazolva Lovellt). Ugyanakkor a tanulás nem előnyösebb, de nem is hátrányosabb mint a mindentudás (egyaránt cáfolva Lovellt és a józan észt).

(Beérkezett: 1978. máj. 27-én)

IRODALOM

1. Akar, L.: *Késleltetéseken alapuló gazdaságszabályozási modellek,* szakdolgozat 1977
2. Dancs, I.—Hunyadi, L.—Sivák, J.: *Készletjelzésen alapuló szabályozás Leontief-típusú gazdaságban.* Szigma 1973, *6,* 185—208.
3. Gale, D.: *The theory of linear economic models,* New York, 1960. Mc Graw Hill
4. Kornai, J.—Martos, B.: *Gazdasági rendszerek vegetatív működése,* Szigma 1971, *4,* 34—50.
5. Kornai, J.—Martos, B.: *Autonomous functioning of the economic system.* Econometrica, 1973, *41,* 509—528.
6. Kornai, J.—Simonovits, A.: *Szabályozási problémák Neumann-gazdaságokban,* Szigma 1975, *8,* 81—99.
7. Kornai, J.—Simonovits, A.: *Rendelés-jelzésen alapuló szabályozás egy Neumann-gazdaságban,* Szigma, 1975, *8,* 281—289.
8. Kornai, J.—Simonovits, A.: *Decentralized control problems in Neumann-economies.* Journal of Economic Theory, 1977, *14,* 44—67.
9. Lovell, M. C.: *Manufacturers' inventories, sales expectations and the acceleration principle. Econometrica,* 1961, *29.*
10. Lovell, M. C.: *Buffer stocks, sales expectations, and stability: A multi-sector analysis of the inventory cycle. Econometrica,* 1962, *30,* 267—296.
11. Mc Fadden, D.: *On the controllability of decentralized macroeconomic systems: the assignment problem* a Mathematical Systems Theory and Economics *I* c. kötetben (szerk.: H. W. Kuhn és G. Szegő) 221—234. Berlin—Heidelberg—New York, 1969, Springer Verlag
12. Metzler, L. A.: *The nature and stability of the inventory cycles.* Review of Economic Studies 23, 1941, 113—129.
13. Metzler, L. A.: *Stability of multiple markets: the Hicks conditions,* Econometrica, 1945, *13,* 113—129.
14. Simonovits, A.: *Decentralizált rendszerek destabilizálása,* kézirat, Budapest, 1978, KTI
15. Varga, R. S.: *Matrix iterative analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Yersey, 1962.

NORMS, EXPECTATIONS AND STABILITY IN A LINEAR ECONOMY

Lovell (1962) examined in a multisectoral stock-control model three kinds of sales expectations: (i) *static*, (ii) *perfect* and (iii) *naive* expectations (the latter being equal to actual sales of the previous period).

Lovell's conclusions are summarized in the following:

1. In case of *static expectations* the control is *stable*.
2. In case of *perfect foresight* the control is *unstable*.
3. In case of *naive expectation* the control may be either stable or unstable, but it is always unstable with a ,,weak'' reaction.

I am going to show in my paper that Lovell's paradoxical statements — 1. and 2. — are based on a paradoxical assumption. With an adequate modification of this assumption the following results are obtained:

1′. In case of *static expectation* the control is *unstable;* but with a ,,strong'' reaction it is *Ljapunov-stable*.

2′. *Perfect foresight* can be interpreted usually only in the case of ,,weak'' reactions, then the control is stable.

3′. In case of *naive expectations* the control is *stable* only with a ,,weak'' reaction.

НОРМЫ, ОЖИДАНИЕ И СТАБИЛЬНОСТЬ В ЛИНЕЙНОЙ ЭКОНОМИКЕ

В рамках многосекторной модели регулирования запасов Ловелл (1962 г.) изучал три вида ожиданий при продаже: (i) *статическое*, (ii) *идеальное предвидение* и (iii) *наивное* (оно рaьно реализации предшествующего периода).

Выводы Ловелла могут быть сформулированы следующим образом:

1) В случае *статического ожидания* регулирование является *стабильным.*

2) В случае *идеального предвидения* регулирование является *нестабильным.*

3) В случае *наивного ожидания* регулирование может быть стабильным или же нестабильным, однако при «слабой» реакции оно всегда стабильное.

В данной работе указывается, что положения парадокса Лавелла — 1 и 2;— базируются на одной парадоксальной предпосылке. Если соответствующим образом изменим эту предпосылку, то можно получить следующие результаты:

1′) При *статическом ожидании* регулирование *нестабильное;* в случае «сильной» реакции однако — по Ляпунову — стабильное.

2′) *Оптимальное предвидение* чаще всего может *толковаться* лишь при «слабой» реакции и тогда регулирование стабильное.

3′) *При наивном ожидании* регулирование *стабильно* только в случае «слабой» реакции.