

TUDOMÁNYOS ÉLET

Operációkutatás a gyakorlatban 1978^o (VIII. Magyar Operációkutatási Konferencia)

A Neumann János Számítástudományi Társaság Operációkutatási Szakosztálya a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának, a Bolyai János Számítástechnikai Társulat Alkalmazott Matematikai Szakosztályának és az NJSZT Csongrád megyei szervezetének társrendezőisége mellett 1978. szeptember 26—29 között Szegeden a Technika Házában rendezte meg „Operációkutatás a gyakorlatban '78” című konferenciáját.

A konferencia iránt élénk érdeklődés volt tapasztalható, a 350 résztvevő 4 napon keresztül két plenáris ülés, 61 előadás és egy félnapos kerekasztal vita keretében igen aktívan foglalkozott a hazai elméleti kutatásokkal, a makro és mikro gazdaság, valamint más területek operációkutatási gyakorlatában elért eredményekkel és a feladatok megoldásához többnyire nélkülözhetetlen számítástechnikai háttér problémáival.

A megnyitó plenáris előadást *dr. Trethon Ferenc* munkaügyi miniszter tartotta, ami nagyban aláhúzta az operációkutatás gyakorlati alkalmazásának aktualitását és fontosságát népgazdaságunkban. Beszédében nagy jelentőséget tulajdonított a gyakorlat igényének, amit a konferencia címe kifejez. A konferenciának ösztönzést kell adnia ennek szellemében a további kutatásokhoz, kezdeményezésekhez, hozzá kell járulnia az elért eredmények gyakorlati alkalmazásához, az alkalmazásban résztvevők körének bővítéséhez, pontosabban kell szolgálnia alapvető tudománypolitikai célkitűzésünket, hogy a tudományt mindinkább termelődővé változtassuk. Elismeréssel szölt a magyar operációkutatókról, akiknek széles köre nemzetközileg ismert szaktekintély, de megállapította, hogy tevékenységük, eredményeik hazai gyakorlati hasznosításában a várakozástól elmaradt. Óvott a „hódító metafizikai” szemlélettől, amely egy kutatási terület tudományos jellegét a matematikai megfogalmazás mértékével egyenes arányban levőnek tételezi fel. A mechanikus szemlélet elkerülése érdekében előtérbe kell helyezni, fel kell használni az „emberi tényezővel” foglalkozó tudományágak — így a szociálpszichológia, a szociológia, a pszichológia és az ergonómia — eredményeit, hiszen a várható emberi magatartás figyelembevétele nélkül kialakított optimális cselekvéssorozatok sokszor nem is hajthatók végre.

Az operációkutatók aktív munkáját a népgazdaság sok területén igényli, így segítséget nyújthatnak a tervezésben, növekedési szakaszban levő gazdaságunk tartalékainak felderítésében, a tartósan hatékony gazdasági szerkezet kialakításában, a tudományosan megalapozott prognosztikai munkában, a vállalati stratégiák kialakításában, a vállalati munka szerveztségének magasabb szintre emelésében. A szervezés és operációkutatás „kölcsonös függőségéből és egymásrautaltságából következik, hogy a vonatkozó kormányhatározat nemcsak a szervezés tudományos alapjainak, hanem az operációkutatás fejlődéséhez is kedvező feltételeket teremtett, mivel politikai-társadalmi követelményként is megfogalmazza a szerveztség és hatékonyság növelését szolgáló tudományos ismeretek, eredmények intézményes alkalmazását — mondta a miniszter.

Próbáljuk meg tömören áttekinteni a szekció előadások tárgykörét (1. táblázat) és a problémák megoldásához felhasznált matematikai módszereket (2. táblázat).

1. táblázat

A konferencia előadásainak tárgyköre

Matematikai tárgyú előadások

Egész értékű programozás	5
Nem lineáris programozás	4
Matematikai statisztika	4
Gráfelmélet	3
Lineáris programozás	3
Egyéb	2
Összesen:	21

Alkalmazási tárgyú előadások

Népgazdasági, ágazati szintű alk.	9
Iparvállalati témák alk. példákkal	9
Tényleges iparvállalati alk.	13
Mezőgazdasági alkalmazások	4
Vízgazdálkodási alkalmazások	4
Egyéb alkalmazás	1
Összesen	40
Mindösszesen	61

Az alkalmazási és elméleti tárgyú előadások különválasztása természetesen kissé önkényes dolog. A matematikai tárgyú előadások között számos olyat találunk, amelyek konkrét alkalmazásokra utalnak — mint pl. *Kovács László Béla* „Gráfszínezési algoritmusok és alkalmazásaik ütemezési feladatok megoldására” c. előadása, amely a különböző heurisztikus és egzakt eljárásokról adott matematikai megközelítésű áttekintést, ugyanakkor foglalkozott ezek ütemezési feladatokra történő alkalmazásával beleértve ebbe bizonyos számítógépes tapasztalatokat is —, egyes esetekben pedig alkalmazási projektek módszertani vonatkozású kiemelésének tekinthettük őket. Ez utóbbit jól példázza *Scherr Károly* előadása, amely „Egy korszerű útvonalkereső algoritmus és alkalmazása közút-hálózati gráfokon” címmel hangzott el. A téma egyik módszertani részét képezi a KPM által a Közlekedési Tudományos Kutató Intézet számára a korszerű forgalom és hálózat-tervezési feladat végrehajtásának. Ugyancsak nehezen választhatók szét az alkalmazási tárgyú előadások között az elméleti—közgazdasági jellegűek, az általános modellek és a tényleges alkalmazások. Ez különösen a makro- és ágazati szintű operációkutatási előadások esetében volt bonyolult, mert legtöbbjük ugyan konkrét népgazdasági problémákat elemzett, de általános elméleti következtetések jórésével mindegyikből levonhatók.

Tekintsük át röviden azokat a módszereket, amelyekre ebben a 61 előadásban a szerzők támaszkodtak:

2. táblázat

Az előadások módszertani háttere

Megnevezés	Elméleti	Gyakorlati	Össz.
	előadás		
Egészértékű programozás	5	5	10
Nem-lineáris programozás	4	2	6
Matematikai statisztika	4	12	16
Gráfelmélet	3	2	5
Lineáris programozás	3	9	12
Készletgazdálkodás	—	4	4
Szimuláció	—	3	3
Egyéb (játékelmélet, dinamikus programozás stb.)	2	3	5
Összesen	21	40	61

A módszertani szétválasztás sem egészen egyértelmű, a több módszerre támaszkodó előadásoknál a csoportosítás alapja a domináns vagy az újszerűbben alkalmazott eljárás volt.

Beszámolómban nem kívánok kitérni az egyes előadások értékelésére, hiszen ebben az esetben vagy meg kellene maradni a címeken túlmenő információkat alig tartalmazó felsorolásoknál, vagy csupán néhány jelentősnek vagy elhibáztattnak tartott előadás ismeretével és kritikájával lehetne foglalkozni. Megjegyzem, hogy az operációkutatási konferenciákon alkalmazott szokásainknak megfelelően a SZIGMA most is felkért néhányat a szerzők közül, hogy kéziratukat küldjék be a folyóiratnak, és várhatóan ezekből a jövő év folyamán több meg is jelenik.

A konferencia a gyakorlati operációkutatás érdekében kívánt elsősorban hatást gyakorolni az operációkutatók taborára és lehetőségeinek megfelelően szerény mértékben a potenciális alkalmazókra. Egyet kell értenünk a Munkaügyi Miniszter által a megnyitó ple-

náris előadáson elmondottakkal, nevezetesen, hogy reményt keltő indulás után az operációkutatás nem vált széles körben alkalmazott döntéselőkészítési eszközzé sem a makroszem a mikrogazdaság területén. Konferenciánk anyagát elsősorban ebből a szempontból kell megvizsgáljuk.

Az előadások 60 százaléka — amint az a táblázatokból kitűnik — kifejezetten gyakorlati igényű volt. Tényleges alkalmazásokról azonban mindössze 20—25 előadáson hallottunk, ami ugyan nem kevés, de nem is elegendő. Ezek közül a legegységesebb csoport a termelővállalati alkalmazások (ipari) köre volt. Sok előadásnál inkább gyakorlatiasságot éreztünk gyakorlat helyett, ami számos okra vezethető vissza, amelyek közül néhányra még a tárgyban folytatott vita áttekintésénél visszatérünk.

Elgondolkodtatón, hogy milyen következtetéseket vonunk le áttekintve azt, hogy az előadások alapját képező kutatásokat milyen jellegű intézményekben végezték.

3. táblázat

Az előadók munkáltatója	Előadások száma
Termelő vállalat	5
Egyetem, főiskola	10
Intézet, ágazati számítóközpont	46
Összesen	61

A legtöbb előadással az MTA SZTAKI munkatársai jelentkeztek. 12 színvonalas előadásukból 9 jobbra matematikai módszertani témakörű volt, ami azt mutatja, hogy a módszertani kutatások legaktívabban ebben az intézetben folynak. Jelentős számú előadást — összesen kilencet — tartottak a SZÁMKI munkatársai és ezek közül 6 az Intézet profiljának megfelelően alkalmazási tárgyú volt. A konferencián elhangzott összes előadás kerében 30 szervezet munkatársaitól hangzott el.

Az előadásoknak a 3. táblázaton bemutatott eloszlása mindenestre azt mutatja, hogy termelő vállalatok öntevékeny aktivitása ezen a területen még nem elegendő, az alkalmazási kutatásokat általában külső — egyetemeken, intézetekben vagy számítóközpontokban dolgozó — munkatársak irányítják, hiszen vállalati társszerzőkkel is alig találkozunk. A 2. sz. táblázaton bemutatott módszertani megoszlásból viszont arra lehet következtetni, hogy az egyszerűbb technikákon alapuló alkalmazásokkal — hálótervezés, lineáris programozás, különböző AKM modellek — közismertségük és gyakorlati hasznosításuk következtében már kevésbé lehet szerepelni egy szakmai konferencián. Bizonyos optimizmusra ad okot az is, hogy a hallgatóság soraiban az államigazgatási szervek és a termelő vállalatok számos munkatársa is megjelent.

Örvendetesnek tartjuk, hogy a sztochasztikus kapcsolatok elemzése az előadások tanúsága szerint előretört, hiszen gazdasági életünk, helyzetünk áttekintése, fejlődési lehetőségeink vizsgálata, a gazdasági szabályozás átgondolt fejlesztésének igénye ezt nagyban indokolja. Az ezekben a témakörökben elhangzott elméleti előadások közül a sokváltozós matematikai statisztikai módszertani előadásokat emelnénk ki, amelynek alkalmazására napjainkban a számítógépes adatfeldolgozás kiszélesedése gyakorlati lehetőségeket teremt. Ezeket a módszereket sikerrel alkalmazhatjuk az empirikus vizsgálatok eredményeinek értékelésénél, mivel a különböző klasszifikációs technikák a legáltalánosabban értelmezett kvantitatív és kvalitatív jellemzőkkel meghatározott egyedekből (objektumokból) álló rendszerek vizsgálatát teszik lehetővé.

A népgazdasági és ágazati szintű problémák vizsgálatáról tartott előadások elsősorban tervezési, kisebb mértékben szabályozási kérdésekkel foglalkoztak. Joggal hiányolható azonban, hogy egy sor fontos gazdasági problémánkhoz hosszabb távon kapcsolódó égető kérdéssről nem vagy alig hallottunk előadást. Ezek közül csak néhányat kiemelve: munkaerőproblémák, valutáris kérdések, külkereskedelmi vizsgálatok, vállalati szabályozási problémák, árkérdések hiányoztak a beszámolókból. Reméljük, hogy kutatóintézeteink, egyetemi tanszékeink ezeken a területeken az operációkutatás eszközeit is igénybevevő jelentős kutatásokat folytatnak, és a soron következő konferenciánk programjában kellő súllyal fognak szerepelni.

A vállalati alkalmazások témakörénél előrelépésnek tekintendő, hogy egyre gyakrabban támaszkodnak a kidolgozott modellek számítógépes adatfeldolgozásra, ami a legtöbb eset-

ben garanciája annak, hogy az operációkutatás a hatékonyság fokozását célzó döntések előkészítésének ténylegesen részévé válik.

A konferencia Szervező Bizottsága egy egész délutánt a számítástechnika gazdaságossága és az operációkutatás helyzete kerekasztal vitájára szabadított fel. A négy órán át tartó vitán több, mint százán vettek részt, és 29 felszólalás hangzott el. A számítógépesítés gazdaságosságának vizsgálatát a résztvevők fontosnak tartották — az V. ötéves terv folyamán például mintegy 13—14 milliárd forintot fordítunk erre a célra —, hasznos gondolatok merültek fel egy sor ehhez kapcsolódó kérdésben. Az elhangzottakat összefoglalva: megállapították, hogy a számítógépesítés gazdaságossága infrastrukturális jellegénél fogva nem vizsgálható, különösen ha arra gondolunk, hogy az eredmények hasznosítása az esetek jelentős részében végső soron a felhasználótól — elsősorban a vezetőktől — függ. A gazdaságosság fogalmának itt újszerű fogalmazásban kell megjelennie, ami ma még ismeretlen előttünk, így mérésére módszerekkel nem rendelkezünk. Ugyanakkor nem várható, hogy ez a kérdés a hagyományos gazdaságossági szemléletet kielégítő mennyiségi mutatókkal lefedhetővé válik. A számítástechnika gazdaságosságának megfogalmazásában és az ehhez kapcsolódó módszerek kidolgozásában az operációkutatók fontos szerepet vállalhatnak. A gazdaságosság egy-egy konkrét feladatra kiválasztott rendszer esetében lehet követelmény. Minden alkalmazásnak határozott célokat kell megfogalmaznia, a számítógépesítéssel kapcsolatos elvárásokat azonban nem kell okvetlenül mennyiségi haszonnal alátámasztani.

A záró plenáris előadást *dr. Németh Lóránt*, a KSH OSZI igazgatója tartotta „A számítástechnika alkalmazásának fejlesztési feladatai a VI. ötéves terv időszakában” címmel. Elmondotta, hogy a számítógépesítésnek a VI. ötéves tervben általános gazdaságpolitikai célkitűzéseinket kell támogatnia. Prioritást kell adni az olyan információs rendszerek fejlesztésének, amelyek lehetővé teszik a gazdasági helyzet gyors észlelését, a hatékony döntések előkészítését. Olyan vállalatok számítógépesítését kell előtérbe helyezni, amelyek a külgazdasági egyensúly érdekében versenyképes export árualapot termelnek, segíteni kell a munkaerőhiányból eredő feszültségek feloldását. Beszélt a számítástechnikában jelentkező új irányzatokról és ezek várható hazai jelentkezéséről, számítógépesítésünk eredményeiről nemzetközi összehasonlításban.

Elmondotta, hogy a következő ötéves tervnek már elkészült egy durva koncepciója, konkrét számokról azonban ma még nem érdemes beszélni. Az 1981—85-ös időszak számítógépesítése azonban várhatóan rekonstrukciós jellegű lesz, mivel 8 milliárd körüli cserepótlást kell eszközölnünk. A számítógépes teljesítőképesség a technikai fejlődést is figyelembevéve az 1980. évinek mintegy kétszerese lesz, a kapcsolódó létszámnövekedés azonban csak 30% körül alakul.

Összefoglalásként megállapíthatjuk: aktív, sikeres konferenciát zártunk. A sikerhez nagyban hozzájárultak a kitűnő feltételek, amelyek Szegeden egy konferencia rendezéséhez rendelkezésre állnak. Az operációkutatás gyakorlati alkalmazásának széles körű elterjesztésében azonban még nagyon sok tennivaló van hátra.

PONGRÁCZ TIBOR

„Matematikai Programozás és Közgazdasági Alkalmazásai”

(Nemzetközi tudományos konferencia Velencében)

A Velencei Egyetem Közgazdaságtudományi és Kereskedelmi Kara — több olasz tudományos egyesület közreműködésével — 1978. június 12. és 16. között nemzetközi jellegű konferenciát szervezett a Canale Grande-ra néző, festői szépségű épületében a Ca' Foscari palotában.

A Konferencia rendezői a tanácskozással kettős célt kívántak elérni. Egyrészt alkalmat akartak teremteni az operációkutatás terén dolgozó hazai matematikusok és közgazdászok eszmecseréjére; különös tekintettel a matematikai programozás gyakorlati alkalmazásai terén elért eredmények értékelésére. Másfelől külföldi szakemberek meghívása révén külső impulzusokat reméltek nyerni mind a matematikai programozás gyakorlati alkalmazása, mind az elméleti-módszertani kutatások ösztönzése érdekében.

A konferencián 12 külföldi vendégelőadón kívül kb. 120—140 hazai szakember vett részt. A konferencia végig plenáris ülések keretében tanácskozott. Délelőttönként került sor a felkért előadók egyenként 1—1 órás előadásaira; míg délutánonként a bejelentett

előadások 20—30 perces ismertetése szerepelt a programon. A Konferencia teljes anyaga kiadványkötetben meg fog jelenni angol nyelven.

A felkért előadók az alábbi témákkal foglalkoztak:

- *Benassy, J. P.* (Paris): Az egyensúlytalanság matematikai modelljei
- *Bod P.* (Budapest): A matematikai programozás szerepe a magyar távlati népgazdasági tervezésben.
- *Bródy A.* (Budapest): Telatív árak matematikai modelljei a tervezésben
- *Crémer, J. C.* (Paris): Árak kontra volumenek a tervezésben
- *Dantzig, G. B.* (Stanford): Árak-e a duális megoldások és ha nem: hogyan tehetők inkább azzá?
- *Giannessi, F.* (Pisa): Integer programozás és alkalmazásai
- *Heal, G.* (Sussex): A tervezéstudomány újabb eredményeiről
- *Impicciatore, G.—Rossi, E.* (Roma): Árak és volumenek dinamikája nem-egyensúlyi makro-modellekben
- *Ritter, K.* (Stuttgart): Algoritmusok lineáris feltételű nem-lineáris programozási feladatokhoz
- *Rockafellar, R. T.* (Univ. of Washington): Lagrange szorzók majdnem biztos létezése nem lineáris programozásban
- *Sitzia, B.* (Milano): Ökonometriai modellek közelítő vezérelhetősége
- *Stone, R.* (Cambridge): Input-output elemzés és tervezés
- *Volpato, M.* (Padova): A dinamikus programozás alapjai
- *Wets, R.* (Kentucky): Újabb eredmények a sztochasztikus programozásban különös tekintettel a közgazdasági alkalmazásokra.

Ez a felsorolás is jól mutatja már, hogy milyen széles volt a konferencián érintett problémák köre. A hazai résztvevők által ismertetett rövid előadások — ha lehetséges — még tarkább képet mutattak. Ilyen körülmények között az egyszerű résztvevő számára meg lehetőségek voltak a konferencia tartalmi követése. Ez kifejezésre is jutott abban, hogy a teremben tartózkodók száma előadásról előadásra jelentős ingadozást mutatott.

A tematikai tarkaság miatt reménytelen lenne megkísérlni az elhangzott előadások tartalmi áttekintését. Ehelyett inkább arra vállalkozunk, hogy egyetlen előadást — George Dantzigét — részletesen ismertetünk.

G. B. Dantzig az árnyékárakról

Dantzig előadásában egy rendkívül egyszerű és ugyanakkor igen gyümölcsözőnek tűnő ötlettel járult hozzá ahhoz, hogy a lineáris programozás technikáján alapuló tervezési modellek duális megoldásait eredményesebben lehessen felhasználni az értékviszonyok elemzésére.

Ismeretes, hogy az ún. árnyékárak közgazdasági értelmezése és főként gyakorlati elemzési célokra való felhasználása eléggé problematikus. Világszerte széles körben vitatták a kérdést és a vitákhoz — különösen a szocialista országokban — jelentős ideológiai összecsapások is járultak. Ez nem egyszer azzal járt, hogy „a priori” meggyőződések korlátozták a kutatók érzékenységét a gazdasági valóság tényei iránt, amelyek pedig általában eléggé makacs dolgok. Mindez arra vezetett, hogy a matematikai tervezők modelljeik duális megoldásait a gyakorlatban általában nem tudták értelmezni, és így teljesen az illúziók birodalmába került minden olyan próbálkozás, amely valamilyen volumen-maximalizáló makro-modell árnyékárrendszeréből kívánt a primál feladat preferenciarendszerével konzisztens „optimális” árendszert levezetni.

Az elméleti nehézségek és a gyakorlati kudarcok a dualitás tétel ún. „complementary slackness” tulajdonságából fakadtak. Köztudott, hogy a primál-duál feladatpár optimális megoldásánál a primál feladat maradékváltozóinak a vektora merőleges a duális feladat optimális megoldásvektorára. Vagyis a maradékváltozók és az árnyékárak skaláris szorzata zérus. Egyenlőtlenség alakú feltételek esetén mind a maradékváltozók, mind az árnyékárak nem-negatívak és ebből következik, hogy minden olyan erőforrás, amelyet a primál feladat optimális megoldása nem használ fel maradék nélkül, az árnyékárrendszerben szükségképpen nulla értékelést kap.

Ez a körülmény reális anyagi ráfordításokat kifejező erőforráskorlátok esetén összeegyeztethetetlen ellentmondást hoz létre az árnyékárak és a gyakorlatban létező árak között. Egy tervezési modellben ki nem merülő munkaerő korlát a munkaerőt „ingyenes”, „szabad” erőforrásnak mutatja. A valóságban azonban a munkaerő foglalkoztatott része

nincs ingyenben, a dolgozók munkabért kapnak, és csak a nem foglalkoztatott munkaerő nem okoz költséget.

Az összes eddigi modellezési tapasztalat azt mutatta, hogy az ellentmondás áthidalására irányuló különböző marginalista megfontolások semmi segítséget sem adtak ahhoz, hogy az árnyékárakat az értékviszonyok elemzésére hasznosítani lehessen. Az árnyékárak felhasználása az ún. érzékenységvizsgálatokra korlátozódott, vagyis megmaradt a primál feladat szférájában.

Dantzig előadásában megmutatta, hogy hogyan lehet a fentiekben jelzett problémát megkerülni, hogyan lehet a primál feladatot, annak megoldása után, úgy módosítani, hogy egyfelől az optimális primál megoldás ne változzék; másfelől az árnyékárak viselkedése közelebb kerüljön az igazi árakéhoz.

A javasolt eljárás a következő három feltételezésen alapszik:

- egy adott gazdasági rendszer szempontjából az optimális megoldás által fel nem használt kapacitások értéktelenek és törölhetők a rendszerből;
- a felhasznált kapacitások egy infinitezimálisan kicsi ε hányadban nyújthatók és zsugoríthatók;
- a kapacitások értéke úgy mérhető, hogy zsugorítjuk őket ε mértékben, majd megnézzük, mennyivel növekszik a célfüggvény, ha ezt az ε -nyi részt visszatesszük.

Az ilyen módon perturbált feladat optimális primál megoldása azonos az eredeti primál optimummal; ugyanakkor új árnyékárrendszer adódik, amely nem változik, miközben ε tart a nullához.

Tekintsük a következő lineáris programozási feladatot: egy gazdasági rendszert, amely n tevékenységet képes megvalósítani és m terméket bocsát ki, úgy akarunk működtetni, hogy a rendszer rögzített struktúrában maximális volumenű kibocsátást nyújtson, miközben r számú és adott kapacitású erőforrást használhat fel.

Legyen: $A: (m \times n)$ típusú mátrix a kibocsátások mátrixa;
 $B: (r \times n)$ típusú mátrix a ráfordítások mátrixa;
 $k \in R^r$ a rendelkezésre álló erőforrások vektora;
 $b \in R^m$ a kibocsátások tervezett struktúrája;
 $\lambda \in R$ indikátorváltozó.

Modellünk a következő:

$$P_1: \begin{array}{r} Ax - \lambda b \geq 0 \\ Bx \leq k \\ x \geq 0; \quad \lambda \geq 0 \\ \lambda \rightarrow \max! \end{array}$$

Legyen a primál feladat optimális megoldása $(x^0; \lambda^0)$.

Az optimális megoldás $k^0 = Bx_0$ mennyiségű erőforrást használ fel. Az optimális megoldáshoz tartozó kapacitásfelesleg most $u_0 = k - k^0 \geq 0$. Ha $u_0 = 0$ akkor nincs probléma, mert az optimális megoldás minden erőforrást felhasznál, és így az árnyékárak rendre pozitívak. Ha viszont $u_0 \neq 0$, akkor a kiinduló feltevéseknek megfelelően a felesleges erőforrásokat töröljük a modelltől, vagyis k helyett k^0 kerül a korlátok jobb oldalára. A kiinduló feladat tehát módosult:

$$P_2: \begin{array}{r} Ax - \lambda b \geq 0 \\ Bx \leq k^0 \\ x \geq 0 \quad \lambda \geq 0 \\ \lambda \rightarrow \max! \end{array}$$

Nyilvánvaló, hogy $(x_0; \lambda^0)$ továbbra is optimális megoldás, azonban a módosított feladatban minden körülmények között degeneráció lép fel.

A dualitástételből ismeretes, hogy ez a körülmény azt jelenti: a duál feladat optimális megoldása nem egyértelmű; létezik a duáloptimális megoldásoknak egy végtelen sok elemet tartalmazó halmaza. A duális megoldás egyértelművé tétele érdekében ezért egy perturbációt alkalmazunk a módosított feladaton. Megvizsgáljuk, hogyan viselkedik a rend-

szer „ ε ”-nál kevesebb összerőforrás mellett, hogyan értékeli az erőforrásokat. A következő feladatból indulunk ki:

$$\begin{array}{r}
 Ax - \lambda b \geq 0 \\
 Bx + u \leq k^0 \\
 P_3: \quad \frac{p^*u \geq \varepsilon}{x \geq 0; u \geq 0; \lambda \geq 0} \\
 \lambda \rightarrow \max!
 \end{array}$$

A perturbációs feltételben szereplő $p^* = (P_1; P_2; \dots; P_r) > O^*$ vektor kívülről bevezetett paramétereket tartalmaz. Ezek segítségével valamilyen közös egységre vezetjük vissza a különböző erőforrásokat, P_i pl. arányos lehet egy egység pótlólagos i -ik erőforrás előteremtésének költségeivel valamilyen bázisidőszak árrendszerében. Legyenek a perturbált feladat duális változói: (π^* ; σ^* ; ϱ). Akkor a duális feladat így fest:

$$\begin{array}{r}
 -\pi^*A + \sigma^*B \geq O^* \\
 \pi^*b \geq 1 \\
 \sigma^* - \varrho p^* \geq O^* \\
 \frac{}{x \geq 0; \sigma \geq 0; \varrho \geq 0} \\
 (\sigma^*k_0 - \varrho\varepsilon) \rightarrow \min!
 \end{array}$$

Mínt hogy az eredeti feladat optimális megoldása k^0 erőforrásmennyiséget használt fel: általában elvárhatjuk, hogy a perturbált feladat optimális primál megoldásában $p^*u_0 = \varepsilon$ adódik és a megfelelő duál változó pozitív lesz. Vagyis $\varrho_0 > 0$ -t nyerünk. Ebben az esetben viszont a duális feltételek harmadik blokkja szerint: $\sigma_i \geq \varrho P_i$, és ez biztosítja, hogy valamennyi erőforrás duális értékelése pozitívnek adódik.

Ha történetesen mégis $\varrho_0 = 0$ lenne, a következőket lehet tenni: az eredeti problémát nem úgy módosítjuk, hogy az eredeti feladat optimális megoldása által felhasznált erőforrásokat rögzítjük, hanem úgy, hogy az itt nyert optimális kibocsátást írjuk elő. Majd keressük azt a primál megoldást, amely ezt a kibocsátást a lehető legkevesebb erőforrással képes előállítani.

$$\begin{array}{r}
 Ax \geq \lambda^0 b \\
 Bx + u \leq k \\
 P_2: \quad \frac{}{x \geq 0; u \geq 0; \lambda \geq 0} \\
 p^*u \rightarrow \max!
 \end{array}$$

Ha a perturbált feladatban most már ennek az optimális megoldását használjuk x_0 -ként, biztosítva van $\varrho_0 > 0$ és ezzel az árnyékárrendszer pozitivitása.

A perturbált feladat alapján nyert árnyékárrendszer nyilván ε függvénye. Azonban létezik olyan ε_1 küszöbérték, hogy minden $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ -re azonos duál optimum adódik. Az árnyékárak ugyanis kizárólag a megengedett bázistól függenek. Ha azonos bázis megengedett ε_1 és ε_2 esetén és $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$: akkor a bázis megengedett marad minden $\varepsilon_1 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_2$ -re. Mínt hogy a különböző megengedett bázisok száma véges, létezik legalább egy olyan bázis, amely végtelen sokszor ismétlődik, ahogy ε tart a 0^+ -hoz. Így a duális megoldás változatlan lesz valamilyen $(0, \varepsilon_1)$ intervallumban, ha ε_1 elég kicsi.

Az ismertetett módon tehát mindig biztosítható olyan erőforrás-értékelés, amely konzisztens a primál feladat preferenciarendszerével és amely minden erőforráshoz pozitív árat rendel.

Dantzig nem említette előadásában a hagyományos árnyékárrendszer egy másik, hatásában szintén igen kellemetlen anomáliáját. Ez pedig abból adódik, hogy minden tervezési modellben szerepelnek olyan feltételek is, amelyek nem a szűkebb értelemben vett anyagi erőforráskorlátokra vonatkoznak. Piaci korlátok, gazdaságpolitikai minimumokat előíró követelmények, a modell lineáris jellegét korlátozni hivatott feltételek stb. formálisan hasonló szerepet játszanak a modellekben, mint a szűkebb értelemben vett erőforráskorlátok. Ezek egy része az optimális megoldásokban kimerül, egyenlőségre teljesül és gyakran éppen ezek a korlátok teszik lehetővé bizonyos anyagi erőforrások teljes felhasználását. Mínt hogy a primál feladat optimális célfüggvényértékét a megoldás „szétosztja” a kime-

rülő „erőforrások” között, nem anyagi jellegű feltételek pozitív értékelést kapnak, miközben zérus értékelésű marad egy sor anyagi erőforrás.

Úgy tűnik, hogy ez a jelenség is kezelhetővé tehető a fentiekben ismertetett gondolatok segítségével. A nem anyagi típusú feltételek jobboldalait rendszerint eleve elég sok subjektív megfontolás alapján számszerűsítik. Így ezekkel kapcsolatban a nyújthatóság és zsugoríthatóság teljes joggal feltehető — méghozzá nem is csak infinitezimális szinten. Míg azonban az anyagi jellegű korlátok esetében a perturbációt azért alkalmazzuk, hogy a megfelelő feltételeket aktívként őrizzük meg; a nem anyaginak ítélt feltételek esetében a cél éppen ellenkezőleg: a feltételek redundánsá tétele kell, hogy legyen.

Úgy tűnik, érdemes Dantzig ismertetett ötleteinek fényében újra megvizsgálni, hogy mire használhatók az árnyékárak a tervezési gyakorlatban.

BOD PÉTER