Ábel István

Érték és gazdasági dinamika

1. Fizikai és gazdasági mozgástörvények

A gazdaság mozgástörvényeit meg lehet fogalmazni a fizika egyik ágában, a mechanikában, közelebbről a klasszikus dinamikában alkalmazott *Lagrange* és *Hamilton* által kidolgozott matematikai összefüggések formájában. (Ezekről jó áttekintést ad [4] és [14])

A gondolat egyik legkorábbi megjelenése Leon *Walras* 1907 és 1908 telén *Economique et mechanique* címmel írott dolgozata. Ez 1909-es megjelenése után feledésbe merült. (Újra megjelent: [17])

Újabb figyelemre méltó kísérlet fűződik Luigi *Amoroso* nevéhez, aki 1940-ben megjelent cikkében [1] értékelméletet modellez ezzel az eszköztárral.

Napjainkban a probléma reneszánszát éli. Ennek érzékeltetésére elég két mű említése, melyekre e dolgozat is támaszkodik: Magill [8] és Cass—Shell [5].

E munkák mind a polgári árelméletből indulnak ki, így fogalomalkotásuk szükségképpen eltér az általunk használatostól. A fizika eddigi történetéből kitűnik, hogy önmagában megálló dinamikai elméletet csak valami mélyebb megmaradási elvre (invariancia elv) lehet alapozni. Ilyen mélyebb elv a polgári árelméletből hiányzik, azonban a marxi értékelméletben fellelhető, sőt annak egyik alapeleme. A munkaértékelmélet szilárd alappal szolgál az itt tárgyalandó általános kifejtéshez.

Felhasználjuk *Novozsilov* gondolatait is, melyek árnyaltabban kidolgozzák — a *Marx*nál egyébként már felmerült — összefüggést az értéktörvény és a munkamegtakarítás elve között. Eltérünk azonban Novozsilov *modellalkotásától*, mivel az valójában csak az ún. „opportunity cost" átfogalmazását szolgáltatja.

A dolgozat e bevezetésen kívül négy fejezetre tagolódik. Az első az értéktörvény egy szabatos matematikai alakját adja meg. A második a termelési tényezők — és általában a korlátozott erőforrások — szerepével foglalkozik. A harmadik és a negyedik rész a ráfordításokkal illetve a hozamokkal kapcsolatos összefüggéseket vizsgálja és kidolgozza az értéktörvény és a munkamegtakarítás elvének kapcsolatát.

Az így nyert mozgásegyenletek árelméleti és mozgáselméleti alkalmazása egy későbbi dolgozat tárgya lesz. Ahogy a hamiltoni formalizmus a fizikai dinamika legáltalánosabb megfogalmazása — alkalmazása a modern relativitáselméletet is átvilágítja — úgy remélhető, hogy közgazdasági értelmezése is alkalmas lesz a dinamikai gondolatok világos összefoglalására.

A kifejtés során bőven élünk a jól ismert *Neumann-Leontief-Bródy* féle lineáris rendszerek dinamikai fogalmaival.

Ez azonban pusztán illusztrációként szolgál, a kiépítendő formalizmus jóval általánosabb, tehát helytálló marad nemlineáris összefüggések esetén is, sőt tulajdonképpeni rendező ereje éppen ezen az általánosabb területen bontakozik ki teljesen.

A dolgozatban mindenhol, ahol ráfordítások és hozamok közötti kvantitatív összefüggéseket tárgyalunk, a ráfordításokat negatív előjellel véve vetjük össze a hozamokkal. Ezt tekinthetjük egyszerűen jelölésbeli konvenciónak, melyet indokolhatnánk azzal, hogy a ráfordításokat negatív hozamoknak tekintjük, de úgy is, hogy a hozamokat negatív ráfordításként értelmezzük. Más szóval ugyanazon munkamennyiséghez ellenkező ,,irányítást'' rendelünk akkor, ha azt ráfordításként, mint akkor, ha azt eredményként vizsgáljuk.

2. Az értéktörvény

Az érték nagyságát a társadalmilag szükséges munkaráfordítások összege adja meg.

A következőkben két függvényt vezetünk be. Az első a gazdaság értékteremtő potenciálját adja meg a gazdaság állapotának, helyzetének függvényében, a másik pedig ennek változását. Mindkettő argumentuma ugyanazon vektorváltozó, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ amely az 1.-től n.-ig megszámozott különböző termékek mennyiségét méri, elképzelésünk szerint természetes, azaz fizikai mértékegységekben.

A gazdaság értékteremtő potenciálja bűvös kifejezés helyett használhattuk volna egyszerűen az érték szót is, de hangsúlyozni kívánjuk, hogy ezen a gazdaság olyan mennyiségi összefüggései értendők, melyek az erőforrások optimális allokációja esetében érvényesülnek tiszta formájukban. Találóbb elnevezés híján a *potenciális érték* elnevezést fogjuk használni, de e részben még megmaradunk a megszokottabb *érték* kifejezés mellett, megjegyezve, hogy ezek szinonim fogalmak.

Legyen

$$e = V(x), \tag{1}$$

azaz az x termékhalmaz e értékét adja meg a $V(x)$ függvény.

Ez a V függvény elképzelhető a legegyszerűbb $V(x) = px = \sum_i p_i x_i$ alakban, ahol p_i az i-edik termék egységének értéke. Lehetséges azonban más, általánosabb függvény is, és itt nem teszünk más kikötést a V függvényre, mint hogy vektorváltozós skalárfüggvény, amely korlátos és folytonos. Korlátos, mert véges termékhalmaznak nem lehet végtelen értéke; folytonos, mert a termékhalmaz csekély megváltozása csak kevéssé változtatja meg ennek értékét.

A rendelkezésre álló termékhalmaz megváltoztatása — ez általában együttjár értékének módosulásával is — ráfordításokkal jár. Legyen a ráfordítások kiszámítását szolgáló függvény $F(x)$, akkor

$$-F(x) = \operatorname{grad} V(x), \tag{2}$$

ahol a negatív előjel azért szerepel, mert ráfordítást hasonlítunk össze eredmény jellegű mennyiséggel. A grad $V(x) = \dfrac{\partial V(x)}{\partial x}$ vektor értékű függvény.

A (2) egyenlet jelentése az, hogy az $F(x)$ ráfordítások azok, amelyek az értéknagyságot megnövelik.

Az F függvény ismét elképzelhető egyszerű lineáris alakban, például mint vQ, ahol Q a Leontief-inverz és v a közvetlen munkaráfordítások vektora. Egyelőre azonban ismét nem teszünk más kikötést az F függvényre, mint hogy vektorváltozós vektorfüggvény, amely korlátos és folytonos. Korlátos, mert véges termékhalmaz nem igényelhet végtelen ráfordításokat; folytonos, mert a termékhalmaz csekély megváltoztatása csak kevéssé változtatja meg a szükséges ráfordításokat.

Induljon ki most a gazdaság egy x_0 termékhalmazból és jusson el egy x_T termékhalmazhoz. Ekkor az értéknagyság megváltozását a következőképp számíthatjuk:

$$(3) \qquad \Delta e = -\int_{x_0}^{x_T} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_T} \operatorname{grad} V(x)\,dx = V(x_T) - V(x_0).$$

A (3) egyenlet legfontosabb mondanivalója az, hogy mivel a V függvény skalárfüggvény, ezért grad $V(x)$ integrálja csak a megtett út két végpontjától, x_0 és x_T értékétől függ. Nem függ semmiképpen a két végpontot összekötő pálya sajátos alakjától, tehát közömbös, hogy a két végpont közt a gazdaság milyen úton halad. x_0 és x_T a továbbiakban is rögzített állapotokat jelöl, és a dolgozatban csak e két pontot összekötő tetszőleges $x(t)$ pályákkal foglalkozunk, de magukat az x_0 és x_T állapotokat adottnak vesszük.

Az x termékhalmaz a társadalmi szükségleteknek megfeleltetve értékelődik, tehát az egyes termékfajták összmennyiségeikkel vesznek részt az értékelődésben és a termékegyedek egy-egy adott termékfajtán belül azonos értékelést kapnak, függetlenül attól, hogy egyedileg hogyan termelték őket.

Az alábbi idézetek alapján azt is mondhatnánk, hogy a (3) összefüggés a marxi értékmeghatározásból definíciószerűen adódik.

„. . . a piaci ár alakjában és továbbá a szabályozó piaci ár vagy piaci termelési ár alakjában mutatkozik meg az áruk értékének természete, az, hogy értéküket nem az egy meghatározott árumennyiség vagy egyes áruk termeléséhez egyénileg, egy meghatározott termelő számára szükséges munkaidő határozza meg, hanem a társadalmilag szükséges munkaidő; az a munkaidő, amely szükséges ahhoz, hogy a társadalmi termelési feltételek adott átlaga mellett előállítsák a piacon található árufajták társadalmilag szükséges összmennyiségét." [11] (608—609. old.)

„Az össztermék — azaz az össztermék értéke — ekkor tehát nem a benne foglalt munkaidővel egyenlő, hanem azzal a munkaidővel amelyet arányosan felhasználtak volna, ha az össztermék arányos lett volna a többi terület termelésével." [9] (197. o.)

Az értékelésben szükségesnek elismert ráfordítások az adott termékfajta összmennyiségének értékét határozzák meg:

„Tegyük fel például, hogy aránylag túl sok pamutszövetet termeltek, bár ebben a szövet-össztermékben csak az előállításához az adott feltételek között szükséges munkaidő realizálódik. De egyáltalában túl sok társadalmi munkát adtak ki ebben a különös ágban; azaz a termék egy része haszontalan. Az egész ennélfogva csak úgy kel el, mintha a szükséges arányban termelték volna." [11] (604. o.)

Mi a termékfajták összmennyiségeivel és ezek értékelésével foglalkozunk. Ebből a mértékegység megfelelő megválasztásával és osztással megkaphatjuk a termékegység értékelését. Az értékelés ilyen meghatározása a marxi értékelmélet lelke:

„Bár a közvetlen élelmiszertermelők munkája önmaguk szempontjából szétválik szükséges és többletmunkára, a társadalomra vonatkozóan ily módon csak az élelmiszerek termeléséhez megkívánt szükséges munkaidőt jelenti. Egyébként ugyanez a helyzet a munkának a társadalmon belüli minden megosztásánál, eltérően a munkának az egyes műhelyen belüli megosztásától. Ez a különös cikkek termeléséhez — a társadalom különös cikkek iránti különös szükségletének kielégítéséhez szükséges munka. Ha ez az elosztás arányos, akkor a különböző csoportok termékei értékükön (a további fejlődés során termelési árukon) kelnek el, vagy pedig olyan árakon, amelyek ezeknek az értékeknek, illetve termelési áraknak általános törvények által meghatározott módosulásai. Ez valójában az értéktörvény, ahogy érvényesül, nem az egyes árukra vagy cikkekre, hanem a különös, a munka megosztása következtében önállósult társadalmi termelési szférák mindenkori össztermékeire vonatkozóan; úgyhogy nemcsak hogy minden egyes árura csak a szükséges munkaidőt fordítják, hanem a társadalmi összmunkaidőből is csak a szükséges arányos mennyiséget használják fel a különböző csoportokban." [11] (603—604. o.)

Ráfordítások eszközlése mindig a gazdaság erőforrásainak felhasználását jelenti. Esetünkben a munkaráfordítások mértékében csökken a gazdaság még mozgósítható forrástartaléka, az eleven munka lehetséges mennyisége. E csökkenés egyenlő az aktivált ráfordításmennyiséggel. Vagyis ha a potenciális ráfordítások mennyiségét m jelöli, és az előbbi módon a gazdaság az x_0 termékhalmazzal jellemzett állapotból az x_T termékhalmazzal jellemzett állapotba jut, akkor az aktiválódott ráfordításokkal csökken ez a mennyiség:

$$\Delta m = \int_{x_0}^{x_T} F(x) \cdot dx. \tag{4}$$

A (3) és (4) egyenletekből adódik a

$$\Delta e + \Delta m = 0 \tag{5}$$

alapösszefüggés, mely még élesebben fejezi ki a marxi értékelmélet alapelvét, az érték megmaradásának elvét olyan értelemben, hogy értéket csak a munkaráfordítások hoznak létre. Az érték a termelési folyamatban transzformálódik ugyan, de összmennyisége nem változik. Az (5) egyenletből adódik ugyanis, hogy

$$e + m = \text{konstans} \tag{6}$$

Ami az érték megmaradásának elvét fejezi ki.

Két megjegyzés kívánkozik ide. Az első az, hogy az (5) egyenlet úgynevezett „konzervatív" rendszerekre vonatkozik, amelyben tehát a technikai lehetőségek adottak. Így nem merül fel bennük „erkölcsi kopás", tehát olyan értékcsökkenés, amelyet a technikai változás vált ki. Ugyanúgy nem merül fel az erőforrások esetleges kimerülésével kapcsolatos, a technika „romlásából" származó értékemelkedés sem. Az erőforrások korlátozottságának kérdésére a következő részben térünk ki, a nemkonzervatív (időparaméteres) rendszerek későbbi vizsgálat tárgyai.

A második megjegyzés az, hogy az egyenletek nem elosztási viszonyokat fejeznek ki, bennük a munkaerőráfordítás az általa létrehozott értéknagysággal és nem saját értékével szerepel.

3. A termelési tényezők és az érték

Eddig az x_0-ból x_T-be vezető pályákra semmilyen kikötést nem tettünk. A meglévő termelési feltételek azonban nem teszik lehetővé, hogy x_0-ból bizonyos t idő alatt tetszőleges x_t-be eljuthassunk. Az x_0-ból x_T-be vezető tetszőleges pályák egy része megsérti a termelési feltételek oldaláról érvényesülő korlátozásokat. Ezeket gazdaságilag nem lehetséges pályáknak nevezzük. A továbbiakban csak a feltételeket kielégítő, gazdaságilag lehetséges pályákkal foglalkozunk.

A termelési feltételek oldaláról jelentkező korlátozásokat forráskorlátokként vesszük figyelembe. A forráskorlát mindig valamiféle technológiai összefüggésen keresztül jelentkezik. Nyilván, ha olyan technológiai lehetőségünk lenne, mely a korlátos forrás kimerítése nélkül állítaná elő a termékmennyiséget, akkor a korlát nem lenne aktív létező. Ugyanakkor a technológiákkal kapcsolatos korlátokat minden esetben forráskorlátokra vezetjük vissza, mondván, hogy minden esetben valamiféle forráskorlát akadályozza meg adott technológiai lehetőség kiterjesztését. Egyszóval forráskorlát alatt mindenféle a termelési feltételek oldaláról jelentkező gazdaságilag reálisan létező, vagyis aktív korlátozást értünk.

A termelési tényezők korlátozottsága azt jelenti, hogy ezen tényezők rendelkezésre álló mennyisége vagy termelése az irántuk mutatkozó keresletnél, vagy pontosabban, lehetséges hatékony felhasználásuk volumenénél kisebb. Minden korlátos tényező monopolizálható, vagy legalábbis a monopolizálódás bizonyos jeleit veszi fel, ami járadékok realizálását teszi lehetővé az elosztásnál. Ez azonban már az árakon keresztül történik — amire egy későbbi vizsgálatban térünk vissza — és elosztási viszonyokat tükröz — ami szintén kívül esik jelenlegi vizsgálatunk körén.

Nagyon is ide tartozik azonban ezen termelési tényezők modellünkben való szerepeltetésének kérdése. Vagy ami ezzel szorosan összefügg, az hogy a termelési tényezők (korlátos források) milyen szerepet játszanak az értékmeghatározásban.

A forráskorlátozások egyszerűbb esetét úgy írhatjuk le, hogy a gazdaságilag lehetséges pályák pontjait az n-dimenziós pozitív ortánsnak a következő

$$g_k(x) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{7}$$

egyenletek által meghatározott többdimenziós alakzatára korlátozzuk.

Lehetőség van a korlátozásoknak egy ennél általánosabb megadására is, melyre részletesebben az árelméleti kérdéseknél térünk majd ki. Itt g_k skalár értékű vektorfüggvényeket jelöl, melyekről feltesszük, hogy folytonosak. Folytonosak, mert a termékhalmaz csekély változtatása csak kis mértékben változtatja meg a pótlólagos forrásigényt.

Az egyedi termékek termelése során, ha forráskorlátba ütközünk, akkor az adott forrásból fellépő lokális hiány miatt kényszerráfordítások merülnek fel. Ezen kényszerráfordításoknak a

$$(8) \qquad G(x) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \operatorname{grad} g_k(x)$$

függvényt feleltetjük meg, ahol $\operatorname{grad} g_k(x) = \frac{\partial g_k(x)}{\partial x}$.

A (8) meghatározásban kifejezésre jut, hogy a kényszerráfordítás annál nagyobb, minél nagyobb az adott termelési szint mellett a termelés pótlólagos forrásigénye $(\operatorname{grad} g_k(x))$ és minél nagyobb az adott forrásfajta egységének helyettesítéséhez szükséges ráfordítás (λ_k). Természetesen λ_k is változhat a termelési feltételek változásával (akárcsak x ez is t függvénye), de negatív értelemszerűen nem lehet.

A kényszerráfordítások $G(x)$ függvénye vektorértékű vektorfüggvény, akárcsak az $F(x)$ ráfordításfüggvény.

A kényszerráfordításokat is figyelembe véve értékmeghatározásunk (3) mintájára a következő lesz:

$$(9) \qquad \Delta e = -\int_{x_0}^{x_T} [F(x) + G(x)]\, dx.$$

Mivel azonban x_t csak olyan értékeket vehet föl, hogy a (7) egyenletek egyikét se sértse meg, így x változása: dx ortogonális $\operatorname{grad} g_k(x)$-el. Ugyanis (7) miatt:

$$\int \lambda_k \operatorname{grad} g_k(x)\, dx = \lambda_k g_k(x) = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

Ebből pedig már következik

$$(10) \qquad \int G(x)\, dx = 0.$$

Vagyis a (9) összefüggés (10) felhasználásával (3)-ba megy át.

Ez éppen azt fejezi ki, hogy a termelési tényezők nem értékalkotók. A források korlátozottsága a monopolizálhatóság révén az áralakulásra, az elosztási viszonyokra hat, de értékalkotóként csak a munka jön szóba.

4. A ráfordítás

4.a. A társadalmilag szükséges ráfordítások intenzitása

Eddig az értéket határoztuk meg a társadalmilag szükséges ráfordításokkal. A termékhalmaz megváltoztatásához az x állapotban szükséges ráfordításokat $F(x)$ jelölte. Példaként említettük a statikus Leontief modellt, melyben a termékhalmaz megváltoztatásához szükséges ráfordításokat vQ fejezi ki, a termékhalmaz növekményét pedig y jelöli. Vagyis az $y = x_T - x_0$ változáshoz szükséges ráfordításokat vQy adja.

A (3) egyenlet alapján láttuk, hogy az értéknagyság megváltozása (Δe) független attól, hogy milyen $x(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ pályán jutunk el x_0-ból x_T-be. A tényleges ráfordítások nagysága azonban nagyon is függ attól, hogy milyen tényleges pályán mozog a gazdaság. Az értéknagyság meghatározásának vizsgálatáról áttérve a ráfordítások vizsgálatára éppen ez a vonatkozás kerül a középpontba. Az előző részekben a társadalmilag szükséges ráfordításokat tekintettük ismertnek, és azokkal határoztuk meg az értéket. Most megfordítjuk a dolgot. Az értéket véve alapul a társadalmilag szükséges ráfordítások meghatározására irányítjuk figyelmünket. Pontosabban arra, hogyan határozhatók meg a társadalmilag szükséges ráfordítások az időben alakuló konkrét termelési pályák mentén.

A $V(x_T) - V(x_0)$ értékváltozás ismeretében az értékváltozást időbeli alakulása alapján is felírhatjuk.

$$\Delta e = \int_0^T \frac{dV(x(t))}{dt}\, dt$$

alakban. Feltevésünk szerint azonban $V(x)$ csak közvetett módon függ t-től, így e felírás tulajdonképpen a következő alakot veszi fel:

$$\Delta e = \int_0^T \operatorname{grad} V(x(t))\, \dot{x}(t)\, dt, \tag{11}$$

ahol $\dot{x}(t)$ az $x(t)$ függvény idő szerinti deriváltja.

A (2) összefüggés alapján a társadalmilag szükséges ráfordításokra (5) figyelembevételével a következő meghatározást kapjuk:

$$\Delta m = \int_0^T F(x(t))\, \dot{x}(t)\, dt. \tag{12}$$

Ilyen formában a termékhalmaz x_0-ról x_T-re történő változtatásához társadalmilag szükséges ráfordítások nagyságát időbeli folyamat összegeként adjuk meg. Kézenfekvő az integrandust a *társadalmilag szükséges ráfordítások intenzitásának* nevezni, mivel időegységre (pontosabban infinitezimális időegységre) eső társadalmilag szükséges ráfordítást jelöl.

De ez még mindig csak elméleti képződmény, amiről biztosan csak azt tudhatjuk, hogy nem megfigyelhető. Legjobb esetben is csak a konkrét tényleges ráfordítások megfigyelhetők.

4.b. *A tényleges ráfordítások*

A gazdaság konkrét pályáján a *tényleges ráfordítások intenzitását* $\mathfrak{L}(x(t), \dot{x}(t))$ funkcionállal jelöljük. E funkcionálról a kezelés egyszerűsítése céljából feltesszük, hogy megengedett függvényei, a termelési pályát leíró $x(t)$ függvények kétszer folytonosan differenciálhatók. A dolgozatban használt levezetések eredményei kevésbé megszorító feltevések mellett is helytállóak maradnak (esetleges apróbb módosításoktól eltekintve), tehát feltevéseink nem szükséges, csak elégséges feltevések. A tárgyalás egyszerűsítése érdekében csak ezekre szorítkozunk.

A tényleges ráfordításokat $[C(x(t))]$ a ráfordításintenzitásból integrálással kapjuk:

$$C(x(t)) = \int_0^T \mathfrak{L}(x(t), \dot{x}(t))\, dt. \tag{13}$$

A korábbi Leontief-féle modellünk egyszerű példájánál maradva ezt a következőképp illusztrálhatjuk. Figyelembe véve a (12) összefüggést és azt, hogy F-re a vQ alakot említettük, $\mathfrak{L}$-re példaként a $vQ\dot{x}$ alak adódna, ahol feltevés szerint v és Q független t-től. Ne feledkezzünk azonban meg arról, hogy $\dot{x}$ itt nem a termelési szint idő szerinti deriváltját jelöli, hanem a termékhalmaz idő szerinti deriváltját. Leontief zárt dinamikus modelljében, ahol a nettó terméket fölhalmozásra fordítják, a termékhalmaz idő szerinti deriváltját $B\dot{\underline{x}}$ jelöli, ahol $\dot{\underline{x}}$ a termelési szint idő szerinti deriváltja. Így példánk $\mathfrak{L}$-re $vQB\dot{\underline{x}}$ alakot nyeri. Hasonló meggondolásokkal $x = B\underline{x}$ fejezi ki a gazdaság rendelkezésére álló termékhalmaz és a termelési szint közötti összefüggést.

Ez a példa egyébként a következő meggondolásokkal is indokolható. A termelés növekedését időpontról időpontra a köetkező egyenlet írja le:

$$\underline{x}_t = A\underline{x}_t + B\dot{\underline{x}}_t + y_t \tag{14}$$

ahol A a közvetlen ráfordítási együtthatók mátrixa, B pedig a tőkelekötési mátrix. Feltesszük, hogy A és B matrixok konstansok, vagyis technológiai változás nem módosítja a ráfordítási viszonyokat.

A $[O, T]$ intervallumot n részre osztva, véges differenciákkal a következő alakban írhatjuk le a termelés növekedését ezen időintervallumokban:

$$\underline{x}_t = A\underline{x}_t + B(\underline{x}_{t+\Delta t} - \underline{x}_t) + y_t, \tag{15}$$

ahol

$$0 \leq t \leq T - \Delta t \quad \text{és} \quad \Delta t = \frac{T}{n}.$$

A (15) egyenletből átrendezéssel kapjuk:

$$y_t = (E - A + B)\,\underline{x}_t - B\underline{x}_{t+\Delta t}$$

Bevezetve a $G = (E - A + B)$ jelölést, a $[O, T]$ intervallumban a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_{\Delta t} \\ \vdots \\ y_t \\ \vdots \\ y_{T-\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & -B & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & G & -B & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & G & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -B \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_{\Delta t} \\ \vdots \\ \underline{x}_t \\ \vdots \\ \underline{x}_{T-\Delta t} \end{bmatrix}.$$

Az utolsó egyenlet csonka marad, mert már nem fér bele a hipermátrixba $\underline{x}_T$ szorzója $-B$. A beosztás finomításával tetszőlegesen csökkenthetjük azonban e csonkítás okozta torzítást. A beosztás finomítása azt jelenti, hogy $n \to \infty$ és $\Delta t \to 0$.

Innen Leontief dinamikus inverzszámításával kapjuk: (ld. [7] 77—107 old.)

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_{\Delta t} \\ \vdots \\ \underline{x}_t \\ \vdots \\ \underline{x}_{T-\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{-1} & G^{-1}BG^{-1} & (G^{-1}B)^2G^{-1} & \ldots & (G^{-1}B)^{n-1}G^{-1} \\ 0 & G^{-1} & G^{-1}BG^{-1} & \ldots & (G^{-1}B)^{n-2}G^{-1} \\ 0 & 0 & G^{-1} & \ldots & (G^{-1}B)^{n-3}G^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_{\Delta t} \\ \vdots \\ y_t \\ \vdots \\ y_{T-\Delta t} \end{bmatrix}.$$

A finomítás során a részintervallumok száma a végtelenhez tart és ezzel hipermátrixunk is végtelen mátrixá alakul. Azonban bizonyos feltételek mellett (ld. [2] (297. old.) e matrix minden sorának és oszlopának összege Q:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(E-A+B)^{-1}B]^{n}(E-A+B)^{-1}=[E-(E-A+B)^{-1}B]^{-1}(E-A+B)^{-1}=$$
$$=[(E-A+B)-B]^{-1}=(E-A)^{-1}=Q.$$

Így ha $v_t = v$ és $y_t = y$ minden t-re, akkor funkcionálunkra példaként vQy említhető, ahol Q a dinamikus inverzből speciális esetként adódó jól ismert Leontief-féle inverz. Ez a zárt modell esetén, mivel ott $y = B\underline{\dot{x}}$, a $vQB\underline{\dot{x}}$ alakot veszi fel. A nyílt dinamikus modellben, ahol a termékhalmaz növekményét $y + B\underline{\dot{x}}$ jelöli, a ráfordításintenzitás függvényt $vQy + vQB\underline{\dot{x}}$ jelöli.

4.c. *A tényleges és a társadalmilag szükséges ráfordítások kapcsolata*

Marx az adott társadalmi szükségleteknek megfelelő összetételű végtermék előállításához társadalmilag szükséges ráfordításokat a termelési feltételek szerint minimálisan szükséges ráfordításokkal határozza meg.[1] Ezt a meghatározást veszi alapul Novozsilov is és a munkaértékelméletet a társadalmilag szükséges ráfordítások konkretizálásán keresztül felépítvén fejti ki a munkamegtakarítás törvényét. Eszerint a társadalmilag szükséges ráfordításokat a tényleges ráfordításokat minimalizáló feladattal határozhatjuk meg:

$$\Delta m = \min C(x(t)) \tag{16}$$

vagyis

$$\Delta m = \min \int_0^T \mathfrak{L}(x(t), \dot{x}(t))\, dt \tag{17}$$

$x(t) \in$ {gazdaságilag lehetséges pályák halmaza}.

Azt a termelési pályát keressük, amely a legalacsonyabb ráfordításokat adja; amelyet már nem tudunk úgy változtatni, hogy $C(x(t))$ értéke javuljon. Legyen ez a pálya x, és a lehetséges pályamódosítás (perturbáció) h legyen olyan, hogy $h(O) = h(T) = 0$ (zérus vektor) és $h(t)$, $O < t < T$ tetszőleges. A módosított pálya tehát $x + h$ lesz. A ráfordítások virtuális változása a h virtuális

[1] „Ha a tőkésnek az az ötlete támad, hogy vasorsók helyett aranyorsókat alkalmaz, a fonal értékében akkor is csak a társadalmilag szükséges munka számít, azaz a vasorsók termeléséhez szükséges munkaidő." ([10] 178. old.) „. . . a munka csak annyiban számít, amennyiben a használati érték termelésére felhasznált idő társadalmilag szükséges. Ez különféle dolgokat foglal magában. A munkaerőnek normális feltételek között kell funkcionálnia. Ha a fonás társadalmilag uralkodó munkaeszköze a fonógép, akkor a munkás kezébe nem szabad rokkát adni. Normális minőségű gyapot helyett nem szabad hulladékot kapnia, amely minden pillanatban elszakad. Mindkét esetben a társadalmilag szükségesnél többet használna fel egy font fonal termeléséhez, ez a fölös idő azonban nem alkotna értéket . . ." ([10] 184. old.)

pályamódosítás esetén a Taylor-formula felhasználásával (ld. [15] 598–605 old.):

(18)
$$C(x+h)-C(x)=\int_0^T [\mathfrak{L}(x+h,\dot{x}+\dot{h})-\mathfrak{L}(x,\dot{x})]dt=\int_0^T \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}h+\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}}\dot{h}\right]dt+o(\|h\|).$$

Mivel parciális integrálással

$$\int_0^T \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}}\dot{h}\,dt=-\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}}\right)h\,dt,$$

így $h\to 0$ határátmenetet véve (18)-ban adódik:

(19)
$$dC(x)=\int_0^T \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}}\right]h\,dt=0.$$

Innen a *Du Bois Reimond* lemma alkalmazásával nyerjük, hogy a vizsgált funkcionál minimumához az szükséges, hogy a függvényei kielégítsék a következő, *Euler–Lagrange* differenciálegyenlet rendszernek nevezett feltételt:

(20)
$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}}=0.$$

A zárt modellből származó korábbi példánkon illusztrálva $\mathfrak{L}=pB\underline{\dot{x}}$ és $\underline{x}=A\underline{x}+B\underline{\dot{x}}$ összefüggések alapján adódik, hogy ugyanakkor $\mathfrak{L}=p(E-A)\underline{x}$, így tehát

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \underline{\dot{x}}}=pB \quad \text{és} \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \underline{x}}=p(E-A).$$

Ebből adódóan a (20) összefüggés a következő alakot veszi fel:

$$p(E-A)-\frac{d}{dt}pB=0.$$

Ebből a jól ismert áregyenlet adódik:

$$p=pA-\dot{p}B.$$

E differenciálegyenlet rendszer megoldása a marxi termelési ár egyenletét adja. Ugyanis a $p=-\dot{p}B(E-A)^{-1}$ egyenletrendszert kielégítik a $p=\pi e^{-\frac{1}{r}t}$ függvények, ahol π az $\frac{1}{r}\pi=\pi B(E-A)^{-1}$ sajátérték – sajátvektor feladat megoldása. E sajátérték – sajátvektor feladattal részletesen foglalkozik Bródy [2] $\pi=\pi(A+rB)$ alakban. Így tehát megkaptuk a $\pi=\pi A+r\pi B$ termelési áregyenletet, melyben a profit a tőkelekötés szerint az átlagprofit rátája (r) arányban oszlik el.

5. A hozam

Az allokáció optimalitását föltételezve a társadalmilag szükséges ráfordításokat vesszük alapul a továbbiakban. Miután az előző részben a társadalmilag szükséges ráfordítások meghatározására helyeztük a hangsúlyt, e részben visszatérünk az eredeti gondolatmenethez, vagyis az érték változásának — más szóval a hozamnak — a társadalmilag szükséges ráfordításokkal történő meghatározását tárgyaljuk.

Az allokáció optimalitása azt jelenti, hogy a vizsgált termelési pályák kielégítik a (20) egyenletet, pontosabban a ráfordításokat a (17) feladat szerint határozzuk meg. Formailag adott (optimális) pályára korlátozzuk a most következő összefüggések tárgyalását, és ezen belül is ezen pálya valamely tetszőleges, de rögzített pontjáról lesz szó. E megszorítások a matematikai összefüggések egyszerűbb kezelhetősége miatt kívánatosak.

A *hozam intenzitását* (melyet $\mathcal{H}(p, x)$ jelöl majd) a *ráfordításintenzitás* függvény duálisaként értelmezzük. Az $\mathfrak{L}(x, \dot{x})$ és $\mathcal{H}(x, p)$ függvények közötti dualitást *L. C. Young* szerinti értelemben használjuk. Ez tulajdonképp azt jelenti, hogy a Legendre duális transzformációt alkalmazva az egyik függvényre, megkapjuk a másikat. (ld. [6] 71—79. old.)

A Legendre duális transzformációban p_i-vel jelölt duális változókat a következőképp definiáljuk:

$$p_i = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{21}$$

Ne feledkezzünk meg arról, hogy $\mathfrak{L}(x, \dot{x})$ függvényben x-et rögzítettük, így tehát p_i a függvény adott pontjához van definiálva — esetünkben az optimális allokációhoz tartozó duális változókat jelöli.

A (20) összefüggésből adódóan, melynek teljesülését e részben eleve feltételeztük:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}_i} = \int \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} dt. \tag{22}$$

Vagyis a duális értékelést egy függvény $\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i}\right)$ idő szerinti integráljának primitív függvénye adott helyen (az optimális allokációt jellemző x helyen) vett helyettesítési értékével definiáltuk. Ez gazdaságilag azt jelenti, hogy a duális értékelést differenciális ráfordítással határoztuk meg, ugyanis $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i}$ az i-edik termék szerinti differenciális ráfordításintenzitást jelöli, amelynek idő szerinti integrálja a differenciális ráfordítás. Mégpedig itt, mivel feltételezzük az allokáció optimalitását, ezek egyben *differenciális társadalmilag szükséges ráfordítások*. (A differenciális ráfordítás fogalmát novozsilovi értelemben használjuk. (ld. [12] 370—380 old.)

A duális függvényt ezen új változók segítségével a következőképp definiáljuk:

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{x}_i - \mathfrak{L}(x, \dot{x}). \tag{23}$$

A (21) alakú n egyenlet lehetővé teszi, hogy $\dot{x}_i$ változóinkat kifejezzük p és x függvényében, vagyis a *hozamintenzitás* kifejezhető p és x explicit függvényeként.

Az értékváltozás pedig a társadalmilag szükséges ráfordításokkal a (17) feladat duálisaként írható fel:

$$\Delta e = \max \int_0^T \mathcal{H}(x, p)\, dt \tag{24}$$

$p \in$ {a gazdaságilag lehetséges pályamódosításoknak megfelelő duális értékelések halmaza}.

Az allokáció optimumának megfelelő értékeléseket véve (24) átmegy az egyszerűbb

$$\Delta e = \int_0^T \mathcal{H}(x, p)\, dt \tag{25}$$

alakba, ahol tehát p a (24) maximumának, x pedig a (17) minimumának megfelelően vannak megválasztva.

Ez azt jelenti, hogy a hozamimpulzus primitív függvényeként áll elő az értékmegváltozás függvény, melyet korábban a potenciális érték függvény $(V(x))$ változásaként állítottunk elő. Nincs szükségünk azonban a primitív függvény meghatározására, hiszen a (25) határozott integrál már megadja az értékmegváltozást, anélkül hogy az értékmegváltozás-függvényt elő kelljen állítanunk. Egyebek között ez az egyik érv dinamikus rendszerünk mellett — pontosabban amellett, hogy az értéktörvény helyett a sok tekintetben általánosabb munkamegtakarítás törvényét alkalmazzuk —, hiszen könnyen konstruálhatunk olyan gyakorlati eseteket, ahol $\mathcal{H}(x, p)$-nek nincs primitív függvénye. Például ilyenek azok az esetek, ahol a ϱ diszkonttényező szerinti diszkontálást explicite szerepeltetjük $e^{-\varrho t}$ formában. Ekkor a primitív függvény nem létezik, így a (3) meghatározás használhatatlan, mert $V(x)$ nem létezik. Továbbra is érvényes azonban a (25) meghatározás. A példaként felhozott eset azonban már az időt explicite tartalmazó $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ és $\mathcal{H}(x, p, t)$ függvényekkel jellemzett rendszerek köréből származik.

A (25) feladatból a termelési pályákra, melyek az allokáció optimalitása esetén írják le a gazdaság mozgását, a következő mozgásegyenleteket nyerjük (kanonikus mozgásegyenletek):

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{x}_i, \tag{26}$$

ami a (23) meghatározásból következik és

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = -\dot{p}_i, \tag{27}$$

ami (21) folyománya, mivel a (23) meghatározás szerint $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}$.

Ha az időt is explicit termelési tényezőként vesszük figyelembe, melynek változásával változnak a ráfordítási és hozamviszonyok, akkor (27) mintájára e hatások pályameghatározó szerepére a következő összefüggések adódnak:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\dot{p}_t \quad \text{és} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \dot{p}_t. \tag{28}$$

Mivel p_t-t kézenfekvő időtényezőnek tekinteni, így a ráfordítási és hozamviszonyok változását eredményező technikai változásnak az időtényezőre gyakorolt hatását fejezik ki a (28) összefüggések. Amennyiben a technikai változástól eltekintünk és így t nem szerepel explicit változóként, akkor (28)-ból azt kapjuk, hogy $\dot{p}_t = 0$, vagyis az időtényezőt konstansnak tekinthetjük. Ez összhangban van azzal, ahogy az irodalomban elterjedt modellek a technikai változást kezelik.

E részhez szemléltetésül *Bródy* András [3] cikkéből merítve egy időoptimum feladatot említünk.

Vegyünk egy zárt *Leontief* modellel leírt gazdaságot, melyben meg akarjuk határozni az x_0-ból x_T-be vezető azon pályát, mely minimális T idő alatt futható be. A gazdaságilag lehetséges pályák nem sérthetik meg a következő feltételeket:

(29) $B\dot{\underline{x}} \leq (E - A)\,\underline{x}$ a termelési szintek vonatkozásában,

(30) $\dot{p}B = -\,p(E - A)$ az árak vonatkozásában.

A (29) egyenlőtlenséget az y slack változó bevezetésével a következő formában írhatjuk:

(31) $$y + B\dot{\underline{x}} = (E - A)\underline{x}$$

E feladat *Hamilton* függvényével a következő szélsőértékfeladat írható fel:

(36) $$H = -\,1 + pB\dot{\underline{x}} - p(E - A)\,\underline{x} + py$$
$$\int_0^T H\,dt \to \max$$

(Az itt szereplő H-val felírt szélsőértékfeladat ugyanaz, mint amit Bródy [3] tanulmányában elemzett.)

A Legendre duális transzformáció alkalmazásával határozzuk meg az L Lagrange függvényt!

Figyelembe véve a termelési szint és a termékhalmaz közötti már korábban említett megfeleltetést ($\dot{x} = B\dot{\underline{x}}$ és $x = B\underline{x}$):

$$p = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial H}{\partial B\dot{\underline{x}}}$$

és a (23) szabályt, kapjuk:

$$L = p\dot{x} - H = pB\dot{\underline{x}} + 1 - pB\dot{\underline{x}} + p(E - A)x - py$$

Ebből a (31) összefüggés figyelembevételével adódik:

$$L = 1 + pB\dot{\underline{x}}$$

ami csak az 1 skalárban tér el az előzőekben emlegetett zárt modell példától. Másrészt azonban (36) feladat ugyancsak (31) figyelembevételével

$$\int_0^T -\,1\,dt \to \max \quad \text{vagyis} \quad \int_0^T 1\,dt \to \min$$

feladattá alakul, ami a beígért időoptimum feladat.

Megjegyzés

Köszönetet mondok *Bródy András* professzornak a lelkes bátorításért, tanácsaiért, a segítségért, amellyel e dolgozat előkészülését támogatta. Nagyrészt az ő figyelmes támogatásának köszönhető, hogy egyáltalán bele mertem kezdeni e munkába, támaszkodva állandó közreműködésére a fellépő nehézségek leküzdésében. Megjegyzései áthatják a dolgozat egész tartalmát. Éppen ezért úgy érzem, hogy nem fejezné ki e kérdés tárgyalásához való hozzájárulását, ha pusztán kiragadott részleteket jelölnek meg mint tőle származó elgondolást. Hálás vagyok *Molnár György* matematikusnak, hogy felhívta figyelmemet a dolgozat egy korábbi változatának számos hibájára.

(Beérkezett: 1978. okt. 10-én)

IRODALOM

1. Amoroso, L.: *The transformation of value in the productive process.* Econometrica, *8* (1940) pp. 1–11
2. Bródy, A.: *Érték és újratermelés* Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
3. Bródy, A.: *Optimal and time-optimal paths of the economy.* Contribution to Input-Output Analysis. Carter, A. P.–Bródy, A. (szerk.) Amsterdam–London, North-Holland P. C. (62–74. old.)
4. Budó, Á.: *Mechanika,* Budapest, 1965. Tankönyvkiadó
5. Cass, D.–Shell, K. (szerk.): *The Hamiltonian approach to dynamic economics.* New York–San Francisco–London, 1976. Academic Press.
6. Гельфанд, И. М.–Фомин, С. В.: Вариационное исчисление. Москва, 1961. Государственное Издательство физико-математичезкой литературы.
7. Leontief, W.: *Terv és gazdaság.* Budapest, 1977. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
8. Magill, M. J. P.: *On a general economic theory of motion.* Berlin–Heidelberg–New York, 1970. Springer-Verlag.
9. Marx, K.: *Értéktöbblet-elméletek* (Első rész) Budapest, 1958. Kossuth Könyvkiadó.
10. Marx, K.: *A tőke* I. Budapest, 1973. Kossuth Könyvkiadó.
11. Marx, K.: *A tőke* III. Budapest, 1974. Kossuth Könyvkiadó.
12. Novozsilov, V. V.: *Ráfordítások és eredmények mérése,* Budapest, 1971. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
13. Новожилов, В. В. Теория трудовой стоимости и математика. Вопросы Экономики, 1964. 12 (96–110).
14. Synge, J. L.: *Classical dynamics.* Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1960. Springer-Verlag.
15. Szép, J.: *Analízis,* Budapest, 1972. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
16. Young, L. C.: *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory.* Philadelphia–London–Toronto, 1969. W. B. Saunders Company
17. Walras, L.: *Economique et mechanique.* Metroeconomica *12* (1960)1: 3–11.

VALUE AND ECONOMIC DYNAMICS

Application of the mathematical structure of classical dynamics to the theory of value will provide such a formulation of the theory of economic motion in which growth theory and price theory melt together.

Even within the discussion of the theory of value this formalism can be considered rather general not only in the technical sense that it enables to deal with non-linear relations, but also in the sense that not only questions of the labour theory of value can be discussed by using it, but even some problems of the theory of marginal utility.

Here only problems of the theory of value will be modelled. This will provide a basis for the subsequent study of questions of price and growth theory.

The socially necessary inputs will be determined by a problem minimizing actual inputs as it is done also by Novozhilov. In the dual problem which can be interpreted as the maximization of returns, the shadow prices express socially necessary differential inputs.

The examples presented as illustrations to the model are taken from the sphere of thought of the Neumann—Leontief—Bródy's linear systems. We proceed from the static model through the dynamic one to time-optimum problems.

СТОИМОСТЬ И ДИНАМИКА ЭКОНОМИКИ

Применяя математическую структуру классической динамики к теории стоимости, получаем такую формулировку теории движения экономики, в которой теория экономического роста и теория цен представляют собой одно целое.

В то же время формализм, к которому прибегают в рассматриваемой работе даже и в рамках изучения теории стоимости может считаться довольно общим не только в том смысле, что с точки зрения техники моделирования делает возможным изучение нелинейных зависимостей, с его помощью могут рассматриваться не только вопросы теории трудовой стоимости, но и некоторые вопросы теории предельной стоимости.

В данном случае производится лишь моделирование вопросов теории стоимости. Это является основой дальнейшего рассмотрения вопросов теории цен и теории роста.

Общественно необходимые затраты решались посредством задачи по минимализации фактических расходов как это делает Новожилов. Двойственные оценки, фигурирующие в двойственной задаче, которая может толковаться в качестве максимализации получаемого дохода выражает дифференцированные общественно необходимые затраты.

Примеры, приводимые в порядке иллюстрации модели связаны с аспектом линейных систем Неймана—Леонтьева—Броди, исходя из статической модели через динамическую приводят к проблемам оптимума времени.