BOD PÉTER

Újabb vizsgálatok az árnyékárak tervezési felhasználása köréből

Bevezetés

A tervezési modellekkel folytatott eddigi kísérletek során elég kevés pozitív tapasztalatot lehetett szerezni az árnyékárak gyakorlati szempontból releváns felhasználása tekintetében. Az elméleti nehézségek és a gyakorlati kudarcok az ún. komplementaritási tulajdonságban gyökereznek.

Tekintsük át, miről is van tulajdonképpen szó. Kiindulunk egy olyan lineáris programozási feladatból, amelyben bizonyos számú korlátozott erőforrás mellett egy tevékenységrendszer hozamát akarjuk maximalizálni.

$$\text{P:}\quad \begin{aligned} Ax &\leq b \qquad && A \in R^{m\times n} \\ x &\geq 0 && x \in R^n;\ b \in R^m \\ c^*x &\to \max! \end{aligned}$$

A fenti feladat kanonikus alakban a következő:

$$\text{P}':\quad \begin{aligned} Ax + u &= b \qquad && u \in R^m \\ x;\ u &\geq 0 \\ c^*x &\to \max! \end{aligned}$$

A fenti feladathoz az alábbi duális feladat tartozik:

$$\text{D:}\quad \begin{aligned} y^*A &\geq c^* \qquad && y \in R^m \\ y^* &\geq 0^* \\ y^*b &\to \min! \end{aligned}$$

Amit szintén írhatunk kanonikus alakban:

$$\text{D}':\quad \begin{aligned} y^*A - w^* &= c^* \qquad && w \in R^n \\ y^*;\ w^* &\geq 0^* \\ y^*b &\to \min! \end{aligned}$$

A primál feladat fenti gazdasági interpretációja esetén kézenfekvő a duális feladat minden megengedett megoldását az adott erőforrásokra vonatkozó valamilyen elszámoló árrendszernek, valamilyen értékelésnek tekinteni. Ezek az árak nemnegatívak és a duális feltételek értelmében az ilyen árakon számított fajlagos önköltségek nem kisebbek, mint a megfelelő tevékenységek fajlagos hozamai. A duális feltételrendszer kizárja az olyan erőforrás-értékeléseket, amelyek „profitot" biztosítanak, vagyis a modell a primál tevékenységrendszer minden eredményét az erőforrások hozamának tekinti. A duális feladat optimalizálása már most a profitot nem biztosító és nemnegatív erőforrásértékelések közül azokat választja ki, amelyek mellett az összes rendelkezésre álló erőforrás értékelése minimális. Az ilyen erőforrás-értékeléseket nevezzük árnyékáraknak.

Az árnyékárak nagysága kifejezi az egyes erőforrások határhatékonyságát. Ez azt jelenti, hogy megmutatják az optimális primál célfüggvényértékét megváltozásának a mértékét, ha a rendelkezésre álló erőforrások nagysága egy egységgel változik — feltéve, hogy a korábbi optimális bázis megengedett marad.

A lineáris programozás dualitástétele azt mondja ki, hogy ha mind a primál, mind a duál feladatnak létezik megengedett megoldása, akkor mindkét feladatnak van optimális megoldása is és a két feladat optimális célfüggvényértékei megegyeznek. Vagyis, ha létezik optimális tevékenységrendszer, akkor ahhoz tartozik árnyékárrendszer is és megfordítva.

Legyen a primál feladat optimális megoldása:

$$(x_0;\, u_0) = (x_0;\, b - Ax_0).$$

Míg a duál feladaté:

$$(y_0^*;\, w_0^*) = (y_0^*;\, y_0^*A - c^*).$$

Ekkor:

$$z_0 = c^*x_0 = y_0^*b.$$

A komplementaritás már most az optimális megoldásoknak azt a sajátosságát fejezi ki, hogy az optimális megoldásokhoz tartozó eltérésvektorok ortogonálisak a másik feladat optimális megoldására. Ugyanis:

$$y_0^*u_0 = y_0^*(b - Ax_0) = y_0^*b - y_0^*Ax_0 = z_0 - y_0^*Ax_0$$

$$w_0^*x_0 = (y_0^*A - c^*)x_0 = y_0^*Ax_0 - c^*x_0 = y_0^*Ax - z_0$$

Összeadva:

$$y_0^*u_0 + w_0^*\, x_0 = 0$$

Azonban nem-negatív számok összege csak akkor 0, ha minden egyes tag értéke is zérus, vagyis

$$y_0^*u_0 = w_0^*x_0 = 0$$

A komplementaritás miatt minden olyan erőforrásra, amelyet az optimális program nem használ ki teljesen — zárus értékelés adódik az árnyékárrendszerben.

Ez a jelenség egy többé-kevésbé objektív értékelmélet alapján álló közgazdasági gondolkodás keretei között nehezen interpretálható és a zérus árak megjelenése rendkívül megnehezíti az árnyékárakból származó információknak felhasználását (bizonyos érzékenységi vizsgálatokon túl).

A gazdasági gyakorlat sem igazolja azt az elméleti magyarázatot, amit az árnyékárak zérussá válása sugall. Nevezetesen, hogy az optimális megoldást nem korlátozó erőforrásokat „szabad" és „ingyenes" erőforrásoknak kell tekinteni. Bármekkora is egy adott gazdaságban a munkaerőfelesleg, a dolgozó munkás nem termel ingyen; bármekkora is a túlkínálat valamilyen termékből: a forgalomba ténylegesen belépő egységeinek az ára nem zérus.

Úgy tűnik, hogy a ki nem merülő erőforrások nem egészükben értéktelenek, hanem csak az a részük, amelyet az optimális program nem képes felhasználni. Ezt a felfogást képviseli *George Dantzig* egy dolgozatában, amelyet 1978 júniusában a Velencében tartott Nemzetközi Matematikai Programozási Konferencián ismertetett: „Árak-e a duális változók és ha nem: hogyan tehetők inkább azzá" címmel [3].

Dantzig az alábbi feltevésekből indul ki:

1. Egy lineáris programozási feladatban az optimális megoldás által fel nem használt erőforrások értéktelenek és az erőforrások így kihasználatlanul maradó része az eredeti kapacitásokról leválasztható.

2. Az optimális megoldás által felhasznált erőforrások infinitezimálisan kicsiny mértékben nyújthatók, illetve zsugoríthatók.

3. A kapacitások értéke úgy mérhető, hogy zsugorítjuk őket ε mértékben, majd megnézzük, mennyivel növekszik a célfüggvény, ha ezt az ε-nyi részt visszatesszük.

Az ilyen módon perturbált feladat optimális primál megoldása azonos az eredeti primál optimummal; ugyanakkor új árnyékárrendszer adódik, amely nem változik, miközben ε tart a nullához.

Tekintsük a következő lineáris programozási feladatot: egy gazdasági rendszert, amely n tevékenységet képes megvalósítani és m terméket bocsát ki, úgy akarunk működtetni, hogy a rendszer rögzített struktúrában maximális volumenű kibocsátást nyújtson, miközben k számú és adott kapacitású erőforrást használhat fel.

Legyen:	$A \in R^{m\times n}$	mátrix a kibocsátások mátrixa;
	$B \in R^{k\times n}$	mátrix a ráfordítások mátrixa;
	$d \in R^{k}$	a rendelkezésre álló erőforrások vektora;
	$f \in R^{m}$	a kibocsátások tervezett struktúrája;
	$z \in R$	indikátorváltozó.

Modellünk a következő:

$$P_1: \quad \begin{array}{l} Ax - zf \geq 0 \\ Bx \qquad \leq d \\ \hline x \geq 0;\ z \geq 0 \\ z \to \max! \end{array}$$

Legyen a primál feladat optimális megoldása (x_0, z_0).

Az optimális megoldás $d^0 = Bx_0$ mennyiségű erőforrást használ fel. Az optimális megoldáshoz tartozó kapacitásfelesleg most $u_0 = d - d^0 \geq 0$. Ha $u_0 = 0$ akkor nincs probléma, mert az optimális megoldás minden erőforrást felhasznál, és így az árnyékárak rendre pozitívak.[1] Ha viszont $u_0 \neq 0$, akkor

[1] Degenerációmentes esetben minden további nélkül érvényes, hogy valamely erőforrás kimerülése az optimális megoldásban pozitív árnyékárat eredményez. Amennyiben a duál feladat optimális megoldása degenerált: a helyzet valamivel bonyolultabb. Ilyenkor adódhat olyan primál optimális megoldás, amely minden erőforrást felhasznál és ennek ellenére — éppen a degeneráció miatt — egyes teljesen kihasznált erőforrásokra zérus árnyékár jelenik meg.

A duálfeladat degeneráltsága azonban azt jelenti, hogy a primál feladat optimális megoldása nem egyértelmű. Ilyen helyzetben mindig létezik olyan $(\hat{x};\ \hat{y})$ optimális megoldáspár, amelyekre nem csak

$$\hat{y}^*(b - A\hat{x}^*) = 0$$

teljesül, hanem

$$\hat{y} + b - A\hat{x}^* > 0$$

is fennáll.

a kiinduló feltevéseknek megfelelően a felesleges erőforrásokat töröljük a modellből, vagyis d helyett d^0 kerül a korlátok jobboldalára. A kiinduló feladat tehát módosult:

$$\mathrm{P}_2: \quad \begin{array}{c} Ax - zf \geq 0 \\ Bx \qquad \leq d^0 \\ \hline x \geq 0;\; z \geq 0 \\ z \to \max! \end{array}$$

Nyilvánvaló, hogy (x_0, z_0) optimális primál megoldása a P_2 feladatnak is, de ez a megoldás itt erősen degenerált, hiszen most $Bx_0 = d^0$.

A dualitástételből ismeretes, hogy ha a primál feladat optimális megoldása degenerált: a duál feladatnak alternatív optimális bázismegoldásai vannak és a duáloptimális megoldások száma végtelen.

Ezt a helyzetet már most úgy lehet kiaknázni, hogy kibővítjük P_2-t egy perturbációs feltétellel, amely kikényszerít egy bizonyos kismértékű erőforrásmegtakarítást. Legyen $y \in R^k$ az erőforrásokban jelentkező megtakarítások mértéke és jelöljön $p \in R^k$ egy olyan aktuális árrendszeren alapuló vektort, amely kifejezi a különböző erőforrások egymáshoz viszonyított értékelését. Tekintsük a következő feladatot:

$$\mathrm{P}_3: \quad \begin{array}{c} Ax - zf \geq 0 \\ Bx + Ey \leq d^0 \\ p^*y \geq \varepsilon \\ \hline x;\, y;\, z \geq 0 \\ z \to \max! \end{array}$$

Minthogy $\varepsilon \to 0^+$ esetén a P_3 feladat P_2-be megy át: P_3 optimális megoldása az $\varepsilon \to 0^+$ határátmenet után nem más, mint (x_0, z_0).

Azt kell csak belátni, hogy P_3 duális optimuma valóban pozitív értékelést rendel minden erőforráshoz. Tekintsük a megfelelő duális feladatot:

$$\mathrm{D}_3: \quad \begin{array}{c} -\pi^*A + \varrho^*B \geq 0^* \\ \pi^*f \qquad \geq 1 \\ \varrho^* - \sigma p^* \geq 0 \\ \hline \pi;\, \varrho;\, \sigma \geq 0 \\ (\varrho^*d^0 - \sigma\varepsilon) \to \min! \end{array}$$

Általában feltételezhető, hogy P_3 optimális megoldása mellett csak annyi erőforrás takarítódik meg, amennyit a perturbációs feltétel éppen kikényszerít, vagyis $p^*y_0 = \varepsilon$. Ebben az esetben $\sigma_0 > 0$ és a megfelelő duális feltételnek az optimális megoldásra való teljesülése miatt:

$$\varrho_0^* \geq \sigma_0 p^* > 0^*.$$

Ez a tartalma a kiegészítő eltérések ún. „erős" tételének.

Degenerált esetben mindig erre az optimális megoldáspárra építjük következtetéseinket. Ez biztosan létezik és benne

$$(w_0)_i = 0 \Rightarrow (y_0)_i > 0.$$

A szerző ezúton mond köszönetet a cikk egyik lektorának, amiért felhívta a figyelmet arra, hogy a fenti következtetés indokolást igényel.

Ha valamilyen feladatbeli sajátosság miatt mégis $\sigma_0 = 0$ lenne: akkor P_2 helyett az alábbi P_4 feladatot oldjuk meg:

$$
\mathrm{P}_4: \quad \begin{array}{r} Ax - zf \geq 0 \\ Bx + Ey \leq d \\ z \geq z_0 \\ \hline x;\, y;\, z \geq 0 \\ p^*y \to \max! \end{array}
$$

Vagyis keressük azt az optimális hozamot biztosító tevékenységrendszert, amely ezt minimális erőforrásfelhasználással éri el. Az így nyert x_0-t használjuk a továbbiakban d_0 meghatározására és ezzel a redukált kapacitásvektorral indítjuk a P_3 feladat megoldását. Most ki van zárva, hogy az optimális megoldásban $p^*y_0 > \varepsilon$ legyen és így σ_0 pozitivitásához nem férhet kétség.

A perturbált feladatból nyert árnyékárrendszer természetesen ε függvénye. Azonban létezik olyan ε_1 küszöbszám, hogy minden $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$-re azonos duál optimum adódik. Az árnyékárak ugyanis kizárólag a megengedett bázistól függnek. Ha ε_1 és ε_2 esetén, ahol $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ugyanaz a bázis megengedett, akkor ez megengedett minden $\varepsilon_1 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_2$-re is. Minthogy a különböző megengedett bázisok száma véges, létezik olyan bázis, amely végtelen sokszor ismétlődik: ahogy $\varepsilon \to 0^+$-hoz. Így, hacsak ε_1 elég kicsi: a duális optimum változatlan lesz a $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ intervallumban.

Az ismertetett módon mindig biztosítható olyan pozitív erőforrásértékelés, amely konzisztens a primál feladat preferenciarendszerével és maga is bizonyos fokig az aktuális árrendszerre támaszkodik.

Vegyük észre, hogy minden lineáris programozási feladat ekvivalens módon átírható a P_1 feladat formájára és ezért az ismertetett meggondolások függetlenek attól a speciális szerkezettől, amelyet P_1-nek adtunk. Ugyanakkor látni kell azt is, hogy a P_1 modell alapszerkezete megegyezik számos gyakorlatban alkalmazásra kerülő tervezési modell struktúrájával.

Árnyékárak egy statikus modellben

A Dantzig-féle módosított árnyékár-koncepció gyakorlati vizsgálatára kísérleti számításokat folytattunk egy kis statikus népgazdaságtervezési modellel. A modell a következő volt:

$$
\begin{array}{r} (E - A)x + z_1 f_{si} + z_2 f_{ti} - z_3 f_{se} - z_4 f_{te} - zf \geq 0 \\ p_s z_1 - q_s z_3 \leq R \\ p_t z_2 - q_t z_4 \leq D \\ Bx \leq d \\ Ex \leq k \\ \hline x;\, z_1;\, z_2;\, z_3;\, z_4;\, z \geq 0 \\ z \to \max! \end{array}
$$

Itt $x \in R^5$; $d \in R^3$; f_{si} és f_{ti} az import, f_{se} és f_{te} az export és f a fogyasztás szerkezetét fejezik ki; R és D a fizetési mérlegek megengedett egyenlegei; d a három külső erőforrás adott nagysága, míg k az öt ágazat extern termelésének a kapacitása.

A modell számszerű adatait *Gábor Győző* bocsátotta rendelkezésünkre és azok nagyjából reális, 1967-re vonatkozó hazai összefüggéseket fejeztek ki. A modellben szereplő külső erőforrások: létszám, összes lekötött eszköz és földterület.

Az alapfeladat $\hat{z} = 246383{,}8$ nagyságú maximális végső kibocsátást biztosított 1967-es áron számítva millió Ft-ban. Az optimális megoldás kimerítette a tőkés deviza, a szocialista deviza, a létszám, az eszköz és a feldolgozóipari kapacitásokat. Feleslegesek maradtak: a földkorlátnál, valamint a többi négy ágazat termelési kapacitásában.

A kihasználatlan kapacitásrészek leválasztása után beléptettük a perturbációs feltételt az alábbi paraméterekkel: Szoc. dev.: 3,125; Tőkés dev.: 5,0505; Létszám: 0,1; Eszköz: 1,0; Föld: 0,42; Kitermelő ip. kap.: 1,731; Feldolg. ip. kap.: 0,826; Mezőg. kap.: 1,353; Építőip. kap.: 0,655; Közl. és ker. kap.: 3,404.

A beállított kalkulatív árakat az alábbi meggondolások alapján számszerűsítettük. A kiindulópont az eszközök ára, amit 1-nek választunk. Ez megfelel egy millió Ft értékű eszköznek. 1967-ben egy munkahely létesítésének a költsége átlagosan 100 000 Ft volt, ezért a létszám árát 0,1-nek választottuk. Az ágazati kapacitások árai azonosak az egy millió Ft ágazati termelés eszközigényével. A föld ára azért 0,42, mert ennyi az összes föld értékének az aránya az összes eszközhöz.

Ugyanakkor a devizák árai szándékosan hibásak. 3,125 és 5,0505 voltak a rubel, illetve a dollár átlagos ára devizaforintban 1967-ben. A perturbációs feltétel viszont forintban van mérve. Egy devizaforint durván 11 folyó forintnak felel meg. Így a perturbációs feltételben a devizákat erősen aláértékeltük.

Ezután a perturbált feladatot ε szerint paraméteresen futtattuk és $\varepsilon = 1{,}87 \cdot 10^{-6}$ paraméterértéknél kaptunk először pozitív árnyékárrendszert. Az alábbi értékek adódtak: Szoc. dev.: 3,3572; Tőkés dev.: 5,4328; Létszám: 0,0097; Eszköz: 0,097; Föld: 0,0406; Kitermelő ip. kap.: 0,2114; Feldolg. ip. kap.: 0,2491; Mezőg. kap.: 0,1306; Építőip. kap.: 0,0632; Közl. és ker. kap.: 0,3287; Pert. f.: $-0{,}097$.

Fenti megoldásértékek mellett a

$$\varrho^* \geq \sigma p^*$$

duális feltételek közül 6 egyenlőségre és 4 egyenlőtlenségre teljesült.

$$\varrho_i^0 > \sigma^0 p_i$$

adódott mindenek előtt a két devizamérlegben, amelyeknek az árnyékára kb. tizenegyszer akkorára jött ki, mint: $\sigma^0 p_i$.

Nagyobbak voltak még az árnyékárak a kitermelő és a feldolgozóipari kapacitások esetén, de itt csak 1,5—3-szoros eltérés jelentkezett.

Ezeket a számszerű eredményeket olyan jelzésekként lehet értelmezni, miszerint a perturbációs feltételben a megfelelő erőforrások alá vannak értékelve. Ezért új perturbációs feltételt gyártottunk a

$$p_i = \frac{\varrho_i}{\sigma^0}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 10)$$

egyenlőségek alapján. Vagyis áttértünk egy árnyékár arányos erőforrás-értékelésére. Az új perturbációs feltételbeli együtthatók persze hat esetben azonosak az eredetileg alkalmazott értékekkel. A módosítottak a következők: Szoc. dev.: 3,125 helyett 34,7689; Tőkés dev.: 5,0505 helyett 56,2637; Kitermelői ip. kap.: 1,731 helyett 2,1849; Feldolg. ip. kap.: 0,826 helyett 2,58.

Az új perturbációs feltétellel ismét megoldva a feladatot: visszakaptuk nem csak az eredeti primáloptimális megoldást, ami természetesen minden megoldásban változatlanul megjelenik; hanem az optimális duál megoldást is. Mindebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a perturbált megoldásból nyert pozitív árnyékárrendszer alapján meghatározható egy olyan aktuális erőforrásértékelés, amely konzisztens a kiinduló feladattal. Ezen azt értjük, hogy ha ezt használjuk perturbációs árakként; az árnyékárrendszer változatlan marad.

A továbbiakban már most abból indulhatunk ki, hogy megoldható lineáris programozási modelljeink duális optimumai általában pozitívak. Ha eleve nem ez a helyzet, akkor a fentiekben leírt Dantzig-féle ötlet segítségével azzá tehetők. Ennek tudatában fordulunk most a következő probléma felé, amelyet a matematikai tervezési gyakorlat vetett fel.

Változatlan ár kontra folyó ár egy lineáris távlati tervezési modellben

A népgazdasági szintézisben alkalmazott (rendszerint lineáris programozási típusú) modelljeink valamilyen bázisidőszak árrendszerében meghatározott együtthatókkal működnek. A tevékenységek mértéke ennek megfelelően ebben az árrendszerben, mint változatlan áras rendszerben fejeződik ki. Ugyanakkor a tervidőszak minden egyes periódusában egy-egy ettől különböző és a különböző periódusok között is változó folyó árrendszer lesz érvényben. Mi a biztosíték arra, hogy a bázisidőszak árrendszerére épített változatlan árakon működő modell megoldásai érvényes információkat képesek nyújtani a tervidőszakra?

A dilemma annál súlyosabb, minél hosszabb a tervidőszak és ezért különösen kiélezett a hosszútávú tervezés modellezésénél. Egy hosszútávú terv időhorizontjában a bázis-ārarányok lényeges megváltozása biztosnak vehető. Ezért joggal kérdezhetjük, hogy az ārarány változások „előzetes ismerete esetén" megszerkeszthető folyó áras modell nem adna-e minőségileg más információkat a népgazdasági optimális jövőbeni tevékenységszerkezetéről, mint a változatlan áras modell.

A kérdés gyakorlati és operatív megválaszolása elvben az alábbi iteratív formában képzelhető el: kiindulunk a változatlan áras modell optimális megoldásából; meghatározzuk az optimális tevékenységstruktúra által indukált árváltozásokat; érvényesítjük ezeket az árváltozásokat a modellben — vagyis áttérünk egy folyó áras modellre; megvizsgáljuk az így nyerhető optimális tevékenységstruktúra által indukált további árváltozásokat; és így tovább.

A fenti iteráció gondolata nem új a matematikai tervezés irodalmában. Bizonyos kezdeti kísérletek történtek is egy ilyen megközelítés realizálására [1]. Nem ismerünk azonban még olyan eredményeket, amelyek a megközelítés gyakorlati használhatóságát alátámasztanák. A továbbiakban megkísérlünk a vázolt problémakör néhány részkérdésére bizonyos elméleti választ adni. Hangsúlyozni szeretnénk, hogy válaszaink nem oldják meg a gyakorlati tervezés jelzett problémáját, mert megállapításaink egy jól meghatározott speciális, lineáris tervezési modell néhány tulajdonságát fejezik csak ki. Minthogy azonban ilyen típusú (vagy ehhez hasonló) modelleket a matematikai tervezés gyakorlatában széles körben használunk és használnak másutt is: megállapításainknak lehet bizonyos érdekességük a kérdések tisztázása szempontjából [2].

Modellünk egy Leontief típusú gazdaságot ír le. A gazdaság n homogénnek feltételezett terméket bocsát ki; minden egyes termék egy-egy gazdasági szektor produktuma. Az ikertermék termelés lehetősége nem áll fenn. Minden egyes szektor bizonyos számú lineárisan kombinálható alternatív technológiával rendelkezik. E technológiák megvalósításához az ágazatok felhasználják egymás kibocsátásait. A gazdaságon belül újratermelődő erőforrásokon felül minden egyes ágazat felhasznál olyan naturálisan mért külső erőforrásokat, amelyek a gazdaságon belül nem termelhetők újra és amelyek minden egyes periódusban előre rögzített mennyiségben állanak rendelkezésre.

Minden ágazat minden egyes lehetséges technológiájához, tartozik egy a tervidőszak elején rendelkezésre álló induló kapacitás. Ezeket a modell endogén módon fejleszti. Feltételezzük, hogy a t-ik időszakban végrehajtott kapacitásfejlesztés eredménye a $t+1$-ik időszakra már mint produktív többletkapacitás rendelkezésre áll.

A gazdaság kötött struktúrájú export és importtevékenységet folytat kívülről adott külkereskedelmi árakon.

A modell működtetésének a célja a rögzített szerkezetű végső kibocsátás maximalizálása.

A modell dinamikus, N periódusra terjed ki. A modell változói belföldi áron mért tevékenységeket fejeznek ki periódusonként. A modell periódusonként lineáris; együtthatói periódusról periódusra különbözőek.

A továbbiakban megkülönböztetjük a modell változatlan áras formáját (VM) és folyó áras formáját (FM). A változatlan áras forma azt jelenti, hogy minden a bázis időszak árrendszerében van kifejezve. A folyóáras forma azt jelenti, hogy a tervidőszak minden periódusához más és más folyó árrendszer tartozik. A t-ik időszakban érvényes áraknak a bázis időszak áraira vonatkozó indexeit egy n elemű pozitív vektor fejezi ki: $p^{(t)} \in R^n$.

Az árindex vektorából képezhető diagonális mátrixot $\langle p^{(t)}\rangle$-val fogjuk jelölni.

Vegyük észre, hogy a t-ik időszak árainak valamilyen közbülső $1 \leq l \leq t$ időszak áraira vonatkozó indexét ${}^{(l)}p^{(t)}$-vel jelölve fennáll a következő összefüggés:

$$\langle p^{(l)}\rangle \langle {}^{(l)}p^{(t)}\rangle = \langle p^{(t)}\rangle$$

és innen

$$\langle {}^{(l)}p^{(t)}\rangle = \langle p^{(l)}\rangle^{-1} \langle p^{(t)}\rangle.$$

A következőkben megadjuk a modell formális leírásához szükséges szimbólumok definícióit. Cikkünkben végig követjük azt a jelölési megállapodást, hogy a folyó áron való mérés tényének kifejezésére a megfelelő szimbólumot felülvonással látjuk el.

A modell változói

1. $$0 \leq x_j^{(t)} \in R^{n_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (t = 1, 2, \ldots, N).$$

A j-ik szektor termelési szintjei a t-ik periódusban lehetséges n_j számú különböző technológia alapján.

2. $$X^{(t)} = \begin{bmatrix} x_1^{(t)} \\ x_2^{(t)} \\ \vdots \\ x_n^{(t)} \end{bmatrix} \in R^{\sum_{j=1}^{n} n_j} \qquad (t = 1, 2, \ldots, N).$$

3. $$x^{(t)} = \hat{E} X^{(t)} \in R^n \qquad (t = 1, 2, \ldots, N),$$

ahol

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} 1_1^* & 0^* & \ldots & 0^* \\ 0^* & 1_2^* & \ldots & 0^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0^* & 0^* & \ldots & 1_n^* \end{bmatrix} \in R^{nx \sum_{j=1}^{n} n_j} \quad \text{és} \quad 1_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in R^{n_j}.$$

A bruttó termelés vektora.

4. $$0 \leq \Delta x_j^{(t)} \in R^{n_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n); \quad (t = 1, 2, \ldots, N).$$

A j-ik szektor különböző termelési kapacitásainak a fejlesztése a t-ik periódusban.

5. $$\Delta X^{(t)} = \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(t)} \\ \Delta x_2^{(t)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(t)} \end{bmatrix} \in R^{\sum_{j=1}^{n} n_j}.$$

6. $$0 \leq z_e^{(t)} \in R \qquad (t = 1, 2, \ldots, N).$$

Az export volumene a t-ik periódusban.

7. $$0 \leq z_i^{(t)} \in R \qquad (t = 1, 2, \ldots, N).$$

Az import volumene a t-ik periódusban.

8. $$0 \leq z^{(t)} \in R \qquad (t = 1, 2, \ldots, N).$$

A végső kibocsátás volumene a t-ik periódusban.

A modell állandói

1. $$a_{i,j,l}^{(t)} \in R \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \quad (l = 1, 2, \ldots, n_j); \quad (t = 1, 2, \ldots, N).$$

A j-ik szektor l-ik technológia szerinti egységnyi termeléséhez szükséges ráfordítás az i-ik termékből a t-ik periódusban.

2. $$a_{jl}^{(t)} = \begin{bmatrix} a_{1,j,l}^{(t)} \\ a_{2,j,l}^{(t)} \\ \vdots \\ a_{n,j,l}^{(t)} \end{bmatrix} \in R^n.$$

3. $$A_j^{(t)} = [a_{j1}^{(t)};\ a_{j2}^{(t)};\ \dots\ a_{j,n_j}^{(t)}] \in R^{nxn_j}.$$

4. $$A^{(t)} = [A_1^{(t)};\ A_2^{(t)};\ \dots\ A_n^{(t)}] \in R^{nx\sum\limits_{j=1}^{n} nj}.$$

5. $$b_{i,j,l}^{(t)} \in R \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (l = 1, 2, \dots, n_j);\ (t = 1, 2, \dots, N).$$

A j-ik szektor l-ik technológia szerinti kapacitásának a t-ik periódusban történő egységnyi növeléséhez szükséges ráfordítás az i-ik termékből.

6. $$b_{jl}^{(t)} = \begin{bmatrix} b_{1,j,l}^{(t)} \\ b_{2,j,l}^{(t)} \\ \vdots \\ b_{n,j,l}^{(t)} \end{bmatrix} \in R^n.$$

7. $$B_j^{(t)} = [b_{j1}^{(t)};\ b_{j2}^{(t)};\ \dots\ b_{jn_j}^{(j)}] \in R^{nxn_j}.$$

8. $$B^{(t)} = [B_1^{(t)};\ B_2^{(t)};\ \dots\ B_n^{(t)}] \in R^{nx\sum\limits_{j=1}^{n} n_j}.$$

9. $$d_{i,j,l}^{(t)} \in R \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (l = 1, 2, \dots, n_j)\ (t = 1, 2, \dots, N).$$

A j-ik szektor l-ik technológia szerinti termelésének fajlagos ráfordítása a naturális egységekben mért i-ik külső erőforrásból a t-ik periódusban.

10. $$d_{jl}^{(t)} = \begin{bmatrix} d_{1,j,l}^{(t)} \\ d_{2,j,l}^{(t)} \\ \vdots \\ d_{n,j,l}^{(t)} \end{bmatrix} \in R^n.$$

11. $$D_j^{(t)} = [d_{j1}^{(t)};\ d_{j2}^{(t)};\ \dots;\ d_{jn_j}^{(t)}] \in R^{kxn_j}.$$

12. $$D^{(t)} = [D_1^{(t)};\ D_2^{(t)};\ \dots;\ D_n^{(t)}] \in R^{kx\sum\limits_{j=1}^{n} n_j}.$$

13. $$d^{(t)} \in R^k \qquad (t = 1, 2, \dots, N):$$

A modellen belül újra nem termelhető külső erőforrások mennyisége a t-ik periódusban.

14. $$k_{jl}^0 \in R \quad (j = 1, 2, \dots, n);\ (l = 1, 2, \dots, n_j).$$

A j-ik szektor l-ik technológiával működő induló kapacitása.

15. $$k_j^0 = \begin{bmatrix} k_{j1}^0 \\ k_{j2}^0 \\ \vdots \\ k_{jn_j}^0 \end{bmatrix} \in R^{n_j}.$$

16. $$K^0 = \begin{bmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \\ \vdots \\ k_n^0 \end{bmatrix} \in R^{\sum_{j=1}^{n} n_j}$$

17. $$f_e^{(t)} \in R^n \qquad (t = 1, 2, \ldots, N);\ 1^* f_e^{(t)} = 1.$$

Az export struktúrája a t-ik periódusban.

18. $$f_i^{(t)} \in R^n \qquad (t = 1, 2, \ldots, N);\ 1^* f_i^{(t)} = 1.$$

Az import struktúrája a t-ik periódusban.

19. $$f^{(t)} \in R^n \qquad (t = 1, 2, \ldots, N);\ 1^* f^{(t)} = 1.$$

A végső kibocsátás struktúrája a t-ik periódusban.

20. $$q_e^{(t)}, q_i^{(t)} \in R^n \qquad (t = 1, 2, \ldots, N).$$

Az export és az import ágazatonkénti szorzói a t-ik periódusban.

A modell feltételrendszere

A fenti jelölések felhasználásával a modell változatlan áras formája a következő alakban írható fel:

$$VM:$$

VM I. Termékmérlegek:

$$(\hat{E} - A^{(t)})\, X^{(t)} - B^{(t)} \Delta X^{(t)} + f_i^{(t)} z_i^{(t)} - f_e^{(t)} z_e^{(t)} - f^{(t)} z^{(t)} \geq 0$$

VM II. Kapacitásmérlegek:

$$- \sum_{l=1}^{t-1} \Delta X^{(l)} + X^{(t)} \leq K^0$$

VM III. Fizetési mérlegek:

$$- q_i^{(t)*} f_i^{(t)} z_i^{(t)} + q_e^{(t)*} f_e^{(t)} z_e^{(t)} \geq 0$$

VM IV. Külső erőforrások korlátai:

$$D^{(t)} X^{(t)} \leq d^{(t)}$$

VM V. Nem-negativitási kikötések:

$$X^{(t)};\ \Delta X^{(t)};\ z_i^{(t)};\ z_e^{(t)};\ z^{(t)} \geq 0$$

$$(t = 1, 2, \ldots, N).$$

VM VI. Célfüggvény:

$$\sum_{t=1}^{N} z^{(t)} \to \max!$$

A feladat duálisa a következő:

VMD:

VMD I. A termelési változókra vonatkozó duális feltételek:

$$-\pi_t^*(\hat{E} - A^{(t)}) + \varrho_t^* + \sigma_t^* D^{(t)} \geq 0^*$$

VMD II. A kapacitásfejlesztési változókra vonatkozó duális feltételek:

$$\pi_t^* B^{(t)} + \varrho_{t+1}^* + \varrho_{t+2}^* + \ldots + \varrho_N^* \geq 0^*$$

VMD III. Az importra vonatkozó duális feltételek:

$$-\pi_t^* f_i^{(t)} + \delta_t q_i^{(t)} * f_i^{(t)} \geq 0$$

VMD IV. Az exportra vonatkozó duális feltételek:

$$\pi_t^* f_e - \delta_t q_e^{(t)} * f_e^{(t)} \geq 0$$

VMD V. A végső kibocsátásra vonatkozó duális feltételek:

$$\pi_t^* f^{(t)} \geq 1$$

VMD VI. Nem-negativitási kikötések:

$$0 \leq \pi_t \in R^n;\ 0 \leq \varrho_t \in R^{\sum_{j=1}^{n} n_j};\ 0 \leq \sigma_t \in R^k,\ 0 \leq \delta_t \in R \qquad (t = 1, 2, \ldots, N)$$

VMD VII. Célfüggvény:

$$\sum_{t=1}^{N} (\varrho_t^* K^0 + \sigma_t^* d^{(t)}) \to \min!$$

A modell folyóáras alakja a következő:

FM:

FM I: $$(\hat{E} - \bar{A}^{(t)})\,\bar{X}^{(t)} - \bar{B}^{(t)}\,\Delta\bar{X}^{(t)} + \bar{f}_i^{(t)}\bar{z}_i^{(t)} - \bar{f}_e^{(t)}\bar{z}_e^{(t)} - \bar{f}^{(t)}\bar{z}^{(t)} \geq 0$$

FM II: $$-\sum_{l=1}^{t-1} \langle P_l \rangle^{-1} \langle P_t \rangle\, \bar{\Delta} X^{(l)} + \bar{X}^{(t)} \leq \bar{K}^{(t)}$$

FM III: $$-\bar{q}_i^{(t)} * \bar{f}_i^{(t)}\,\bar{z}_i^{(t)} + \bar{q}_e^{(t)} * \bar{f}_e^{(t)}\,\bar{z}_e^{(t)} \geq 0$$

FM IV: $$\bar{D}^{(t)}\,\bar{X}^{(t)} \leq d^{(t)}$$

FM V: $\bar{X}^{(t)};\ \Delta\bar{X}^{(t)};\ \bar{z}_i^{(t)};\ \bar{z}_e^{(t)};\ \bar{z}^{(t)} \geq 0$

$$(t = 1,2, \ldots, N)$$

FM VI: $\sum_{t=1}^{N} \bar{z}^{(t)} \to \max!$

Ennek a duálisa viszont:

$$FMD:$$

FMD I: $-\bar{\pi}_t^*[\hat{E} - \bar{A}^{(t)}] + \bar{\varrho}_t^* + \sigma_t^* \bar{D}^{(t)} \geq 0^*$

FMD II: $\bar{\pi}_t^* \bar{B}^{(t)} + \bar{\varrho}_{t+1}^* \langle P_t\rangle^{-1} \langle P_{t+1}\rangle + \ldots + \bar{\varrho}_N^* \langle P_t\rangle^{-1} \langle P_N\rangle \geq 0^*$

FMD III: $-\pi_t^* \bar{f}_i^{(t)} + \bar{\delta}_t \bar{q}_i^{(t)} * \bar{f}_i^{(t)} \geq 0$

FMD IV: $\bar{\pi}_t^* \bar{f}_e^{(t)} - \bar{\delta}_t \bar{q}_e^{(t)} * \bar{f}_e^{(t)} \geq 0$

FMD V: $\bar{\pi}_t^* \bar{f}^{(t)} \geq 1$

FMD VI: $\bar{\pi}_t;\ \bar{\varrho}_t;\ \bar{\sigma}_t;\ \bar{\delta}_t \geq 0$

$$(t = 1,2, \ldots, N)$$

FMD VII: $\sum_{t=1}^{N} (\bar{\varrho}_t^* \bar{K}^{(t)} + \bar{\sigma}_t^* d^{(t)}) \to \min!$

Vegyük észre, hogy a külső erőforrásokra vonatkozó korlátok a két formában nem különböznek egymástól, mert naturálisan mért mennyiségekről van szó. Másfelől az ágazati kapacitáskorlátok a modell két formájában nem csak annyiban különböznek egymástól, hogy az első esetben felülvonás nélküli, a második esetben felülvont szimbólumok jelennek meg. Figyelembe kell venni azt a körülményt, hogy ezek a feltételek intertemporális kapcsolatokat fejeznek ki. Ezért gondoskodni kell arról, hogy a folyó áras modellben minden periódusra vonatkozóan a megfelelő kapacitásmérlegekben minden egyes mennyiség a periódusban érvényes aktuális áron szerepeljen. A megfelelő átárazást itt a $\langle P_t\rangle$ diagonál mátrixokkal érjük el. Ezek $\sum_{j=1}^{n} n_j$-ed rendű operátorok, amelyeknek a főátlójában $p_1^{(t)} : n_1$-szer, $p_2^{(t)} : n_2$-ször, stb., $p_n^{(t)}$ viszont n_n-szer fordul elő.

Ha ismerjük minden egyes periódusra a folyó áraknak a bázis időszak áraira vonatkozó indexeit: kifejezhetjük az FM forma paramétereit a VM forma paraméterei és az árindexek segítségével.

Az ágazatok közötti termelési, illetve bővítési kapcsolatokat kifejező fajlagosok esetén az árváltozások e törtként értelmezhető mutatóknak mind a számlálóját, mind a nevezőjét érintik. Ezért:

$$\bar{a}_{i,j,l}^{(t)} = a_{i,j,l}^{(t)} \frac{p_i^{(t)}}{p_j^{(t)}}$$

és

$$\bar{b}_{i,j,l}^{(t)} = b_{i,j,l}^{(t)} \frac{p_i^{(t)}}{p_j^{(t)}}.$$

A naturális egységekben mért külső erőforrásokra vonatkozó fajlagosok esetében az árváltozások viszont csak a nevezőt érintik. Ezért:

$$\bar{d}_{i,j,l}^{(t)} = \frac{d_{i,j,l}^{(t)}}{p_j^{(t)}}.$$

A feltételekben szereplő mátrixok átárazása így a következő formulákkal valósítható meg:

$$(\hat{E} - \bar{A}^{(t)}) = \langle p^{(t)} \rangle [\hat{E} - A^{(t)}] \langle P_t \rangle^{-1}$$
$$\bar{B}^{(t)} = \langle p^{(t)} \rangle B^{(t)} \langle P_t \rangle^{-1}$$
$$\bar{D}^{(t)} = D^{(t)} \langle P_t \rangle^{-1}.$$

A külkereskedelem és a végső kibocsátás struktúráit kifejező vektorok megoszlási viszonyszámok, ezért az átárazáskor ezeket megfelelően (egységre) normálni kell. Vagyis:

$$\bar{f}_i^{(t)} = \frac{\langle p^{(t)} \rangle f_i^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)} \rangle f_i^{(t)}}$$
$$\bar{f}_e^{(t)} = \frac{\langle p^{(t)} \rangle f_e^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)} \rangle f_e^{(t)}}$$
$$\bar{f}^{(t)} = \frac{\langle p^{(t)} \rangle f^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)} \rangle f^{(t)}}.$$

A hazai árrendszer megváltozása miatt megváltoznak a devizaszorzók is; $\bar{q}_i^{(t)} = \langle p^{(t)} \rangle^{-1} q_i^{(t)}$; $\bar{q}_e^{(t)} = \langle p^{(t)} \rangle^{-1} q_e^{(t)}$.

Végül nem azonos a tervidőszak elején meglévő kiinduló kapacitások mértéke sem, ha nem változatlan, hanem folyó áron vizsgáljuk. A változatlan áron K^0 nagyságú kiinduló kapacitások a t-ik periódus árrendszerében mérve éppen

$$K^{(t)} = \langle P_t \rangle K^0$$

nagyságra rúgnak.

Tegyük fel ezek után, hogy a VM modellnek van megengedett megoldása. Legyen

$$(X^{(t)};\ \Delta X^{(t)};\ z_i^{(t)};\ z_e^{(t)};\ z^{(t)}) \qquad (t = 1, 2, \ldots, N)$$

a VM megengedett megoldása, és válasszunk egy tetszőleges árindex rendszert, amelyet a $p^{(t)} \in R^n (t = 1, 2, \ldots, N)$ pozitív vektorok írnak le. Fejezzük ki VM fenti megengedett megoldását a választott árindexek által definiált folyóáras rendszerben. Az átárazás eredménye a következő:

$$\bar{X}^{(t)} = \langle P_t \rangle X^{(t)}$$
$$\bar{\Delta X}^{(t)} = \langle P_t \rangle \Delta X^{(t)}$$
$$\bar{z}_i^{(t)} = z_i^{(t)} \cdot 1^* \langle p^{(t)} \rangle f_i^{(t)}$$
$$\bar{z}_e^{(t)} = z_e^{(t)} \cdot 1 \langle p^{(t)} \rangle f_e^{(t)}$$
$$\bar{z}^{(t)} = z^{(t)} \cdot 1 \langle p^{(t)} \rangle f^{(t)}.$$

Bebizonyítjuk a következőket:

1. *Tétel*: A VM modell megengedett megoldásai bármilyen folyó árrendszerre átszámítva megengedettek az FM modellben.

Egyszerű számolgatással megmutatjuk, hogy ha

$$(X^{(t)};\ \varDelta X^{(t)};\ z_i^{(t)};\ z_e^{(t)};\ z^{(t)}) \qquad (t = 1, 2, \ldots, N)$$

kielégíti VM-et, akkor

$$(\bar{X}^{(t)};\ \bar{\varDelta} X^{(t)};\ \bar{z}_i^{(t)};\ \bar{z}_e^{(t)};\ \bar{z}^{(t)}) \qquad (t = 1, 2, \ldots, N)$$

kielégíti FM feltételeit.

Hajtsuk végre a megfelelő helyettesítéseket:

FM I:
$$\langle p^{(t)}\rangle [\hat{E} - A^{(t)}] \langle P_t\rangle^{-1} \langle P_t\rangle X^{(t)} -$$
$$- \langle p^{(t)}\rangle B^{(t)} \langle P_t\rangle^{-1} \langle P_t\rangle \varDelta X^{(t)} + z_i^{(t)} 1^* \langle p^{(t)}\rangle f_i \frac{\langle p^t\rangle f_i^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)}\rangle f_i^{(t)}} -$$
$$- z_e^{(t)} 1^* \langle p^{(t)}\rangle f_e^{(t)} \frac{\langle p^{(t)}\rangle f_e^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)}\rangle f_e^{(t)}} - z^{(t)} \cdot 1^* \langle p^{(t)}\rangle f^{(t)} \frac{\langle p^{(t)}\rangle f^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)}\rangle f^{(t)}} =$$
$$= \langle p^t\rangle [(E - A^{(t)}) X^t + B^{(t)} \varDelta X^{(t)} + f_i^{(t)} z_i^{(t)} - f_e^{(t)} z_e^{(t)} - f^{(t)} z^{(t)}] \geq 0$$

FM II:
$$- \sum_{l=1}^{t=1} \langle P_e\rangle^{-1} \langle P_t\rangle \langle P_e\rangle \varDelta X^{(l)} + \langle P_t\rangle X^{(t)} =$$
$$= \langle P_t\rangle \left[- \sum_{l=1}^{t-1} \varDelta X^{(l)} + X^{(t)} \right] \leq \langle P_t\rangle K^0 = \bar{K}^{(t)}$$

FM III:
$$- \langle p^{(t)}\rangle^{-1} q_i^{(t)} * \frac{\langle p^{(t)}\rangle f_i^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)}\rangle f_i^{(t)}} z_i^{(t)} 1^* \langle p^{(t)}\rangle f_i^{(t)} +$$
$$+ \langle p^{(t)}\rangle^{-1} q_e^{(t)} * \frac{\langle p^{(t)}\rangle f_e^{(t)}}{1^* \langle p^{(t)}\rangle f_e^{(t)}} z_e^{(t)} \cdot 1^* \langle p^{(t)}\rangle f_e^{(t)} =$$
$$= q_i^{(t)} * \cdot f_i^{(t)} z_i^{(t)} - q_e^{(t)} * f_e^{(t)} z_e^{(t)} \geq 0$$

FM IV:
$$\bar{D}^{(t)} X^{(t)} = D^{(t)} \langle P_t\rangle^{-1} \langle P_t\rangle X^{(t)} = D^{(t)} X^{(t)} \leq d^{(t)}.$$

Tegyük fel ezek után, hogy ismerjük VM egy optimális megoldását. Legyen ez

$$(\hat{X}^{(t)};\ \hat{\varDelta} X^{(t)};\ \hat{z}_i^{(t)};\ \hat{z}_e^{(t)}\ \hat{z}^{(t)}) \qquad (t = 1, 2, \ldots, N)$$

Ha VM optimális megoldása létezik, akkor létezik VMD-nek is és a két optimális megoldás célfüggvényértékei megegyeznek. Legyen VMD optimális megoldása:

$$(\hat{\pi}_t;\ \hat{\varrho}_t;\ \hat{\sigma}_t;\ \hat{\delta}_t) \qquad (t = 1, 2, \ldots, N).$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a termékmérlegekhez tartozó duális megoldások pozitívak. Tekintsük a továbbiakban a termékmérlegek árnyékárait árindexeknek. Vagyis legyen

$$p_t = \hat{\pi}_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, N).$$

A VM optimális megoldását a VMD optimális megoldása alapján nyert árnyékárakkal átárazva az alábbi folyóáras megoldást nyerjük:

$$\widetilde{X}^{(t)} = \langle \widehat{\Pi}_t \rangle \widehat{X}^{(t)}$$

$$\widetilde{\Delta X}^{(t)} = \langle \widehat{\Pi}_t \rangle \Delta \widehat{X}^{(t)}$$

$$\tilde{z}_i^{(t)} = \hat{z}_i^{(t)} \cdot 1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_i^{(t)}$$

$$\tilde{z}_e^{(t)} = \hat{z}_e^{(t)} \cdot 1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_e^{(t)}$$

$$\tilde{z}^{(t)} = \hat{z}^{(t)} \cdot 1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f^{(t)} = \hat{z}^{(t)}.$$

(Minthogy $z^{(t)}$ feltétlenül eleme az optimális bázisnak, a végső kibocsátáshoz tartozó duál feltételekben egyenlőség teljesül és ezért $\hat{\pi}_t^{(*)} f^{(t)} = 1$).

Kimondhatjuk a következőket:

2. *Tétel*: A VM modell optimális megoldásának a termékmérlegekhez tartozó árnyékárakkal átárazott programja optimális megoldás az FM modellben.

Az 1. Tétel alapján a fenti megoldás FM-ben megengedett és célfüggvényértéke az átárazásnál nem változik. Ugyanakkor a VM-beli optimalitás miatt fennáll:

$$z_0 = \sum_{t=1}^{N} \hat{z}^{(t)} = \sum_{t=1}^{N} (\hat{\varrho}_t^* K^0 + \hat{\sigma}_t^* d^{(t)}) = \sum_{t=1}^{N} \tilde{z}^{(t)}.$$

Megmutatjuk, hogy FMD-nek van olyan megengedett megoldása, amelynek célfüggvényértéke éppen: z_0. Ez viszont a dualitás tétel miatt azt jelenti, hogy a fenti FM megoldás nem csak megengedett, hanem optimális is.

Legyen:

$$\tilde{\pi}_t = 1 \in R^n$$

$$\tilde{\varrho}_t^* = \hat{\varrho}_t^* \langle \widehat{\Pi}_t \rangle^{-1}$$

$$\tilde{\sigma}_t^* = \hat{\sigma}_t$$

$$\tilde{\delta}_t = \hat{\delta}_t$$

Ez a megoldás kielégíti FMD feltételeit:

FMD I. $$-1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle [\widehat{E} - A^{(t)}] \langle \widehat{\Pi}_t \rangle^{-1} + \varrho_t^* \langle \widehat{\Pi}_t \rangle^{-1} +$$
$$+ \hat{\sigma}^* D^{(t)} \langle \widehat{\Pi}_t \rangle^{-1} = [-\hat{\pi}_t (\widehat{E} - A^{(t)}) + \hat{\varrho}_t^* + \hat{\sigma}_t^* D^{(t)}] \langle \widehat{\Pi}_t \rangle^{-1} \geq 0^*$$

FMD II. $$1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle B^{(t)} \langle \widehat{\Pi}_t \rangle^{-1} + \hat{\varrho}_{t+1}^* \langle \Pi_{t+1} \rangle^{-1} \langle \Pi_t \rangle^{-1} \langle \Pi_{t+1} \rangle +$$
$$+ \hat{\varrho}_{t+2}^* \langle \widehat{\Pi}_{t+2} \rangle^{-1} \langle \widehat{\Pi}_t \rangle^{-1} \langle \widehat{\Pi}_{t+2} \rangle + \ldots + \hat{\varrho}_N^* \langle \Pi_N \rangle^{-1} \langle \widehat{\Pi}_t \rangle^{-1} \langle \widehat{\Pi}_N \rangle =$$
$$= [\hat{\pi}_t^* B^{(t)} + \hat{\varrho}_{t+1}^* + \hat{\varrho}_{t+2}^* + \ldots + \hat{\varrho}_N^*] \langle \widehat{\Pi}_t \rangle^{-1} \geq 0^*$$

FMD III. $$-1^* \frac{\langle \hat{\pi}_t \rangle f_i^{(t)}}{1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_i^{(t)}} + \hat{\delta}_t q_i^{(t)} * \langle \hat{\pi}_t \rangle^{-1} \frac{\langle \hat{\pi}_t \rangle f_i^{(t)}}{1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_i^{(t)}} =$$
$$= \frac{-\hat{\pi}_t^* f_i^{(t)} + \delta_t q_i^{(t)} * f_i^{(t)}}{1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_i^{(t)}} \geq 0$$

FMD IV.
$$1^* \frac{\langle \hat{\pi}_t \rangle f_e^{(t)}}{1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_e^{(t)}} - \delta_t q_e^{(t)} * \langle \hat{\pi}_t \rangle^{-1} \frac{\langle \hat{\pi} \rangle f_e^{(t)}}{1^* \langle \hat{\pi}_t \rangle f_e^{(t)}} =$$
$$= \frac{\hat{\pi}_t^* f_e^{(t)} - \hat{\delta}_t q_e^{(t)} * f_e^{(t)}}{1 \langle \hat{\pi}_t \rangle f_e^{(t)}} \geq 0$$

FMD V.
$$1^* \frac{\langle \hat{\pi}_t \rangle f^{(t)}}{1 \langle \hat{\pi}_t \rangle f^{(t)}} = 1.$$

Végül a célfüggvény értéke:

$$\tilde{z} = \sum_{t=1}^{N} (\tilde{\varrho}_t^* \bar{K}^{(t)} + \tilde{\sigma}_t d^{(t)}) = \sum_{t=1}^{N} (\hat{\varrho}_t^* \langle \hat{\Pi}_t \rangle^{-1} \langle \hat{\Pi}_t \rangle K^0 + \hat{\sigma}_t^* d^{(t)}) =$$
$$= \sum_{t=1}^{N} (\hat{\varrho}_t^* K^0 + \hat{\sigma}_t^* d^{(t)}) = z_0 .$$

Néhány záró megjegyzés

Vizsgálatunk megmutatta: egy Leontief típusú tervezési modellben meglehetősen nagy szabadságunk van abban, hogy a modellt milyen időszak árrendszerében számszerűsítjük. Ez a megállapítás mindenek előtt a makrovariánsok konzisztenciája szempontjából érvényes. Az 1. Tétel ugyanis éppen azt mutatta meg, hogy ha egy makrovariáns megfelel a modellben kikötött egyensúlyi feltételeknek valamilyen bázisidőszak árrendszerében: akkor egyensúlyban lesz egy tetszőleges más, időben változó árrendszerben is.

Másfelől kiderült, hogy létezik a tervidőszakra olyan folyó árrendszer, amelyben a bázisárrendszerben optimális makrovariáns optimális marad. Ezt a folyó árrendszert a modell termékmérlegeire adódó árnyékárak generálják. A VM modell duális megoldásában megjelenő termék-árnyékárak így bizonyos értelemben jelzik, hogy a primál optimális megoldás által adott makrovariáns milyen ár arány változásokat implikál a tervidőszak alatt.

Óvakodnunk kell persze attól, hogy a vizsgált modell tulajdonságaiból következtetéseket vonjunk le a modell érvényességi körén kívül. Nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy modellünk csak a termékek és a termelőkapacitások bővített újratermelését ábrázolja többé-kevésbé explicit módon és csak a velük kapcsolatos összefüggéseket veszi körkörösen számba. A modell például nem tartalmazza sem a munkaerő újratermelését, sem a pénzbeni jövedelmek elosztásának és újraelosztásának a folyamatát; rendkívül elnagyoltan szerepel a modellben a külkereskedelem – hogy csak néhány alapvető fogyatékosságát említsük. Eredményeinket ezért elsődlegesen további vizsgálatok kiinduló pontjának tekintjük.

(Beérkezett: 1979. április 24-én.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Augustinovics, M. és szerzőtársai: *Népgazdasági modellek a távlati tervezésben.* Budapest, 1979. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. Bod, P.: *A népgazdaság hosszú távú 15—20 éves tervezésének egy lehetséges matematikai modelljéről.* SZIGMA. 1969. 1. 59—66. old.
3. Dantzig, G. B.: *Are dual variables prices? If not, how to make them more so.* Stanford University. System Optimization Laboratory. Technical Report sol. 78—6. March 1978.

NEW CONTRIBUTIONS TO THE UTILISATION OF SHADOW PRICES IN PLANNING

In the article two planning applications of George B. Dantzig's modified shadow price conception are discussed. As opposed to the traditional one, this conception does not consider the total quantity of a resource not exhausted by the optimum solution as valueless: only the surplus not wanted by the optimum solution. Thus, by a certain modification of the problem it becomes possible to produce such a shadow price system which is positive in every case and, besides, is in connexion with the current price system of economy.

The author presents within the numerical limits of a small static model of national economic planning, the practical usability of modified shadow prices for revealing the contradictions in the price system.

Thereafter he uses a multiperiod, dynamised linear model serving for long-term volume planning of the national economy to examine the role of the price system used for the quantification of the model. The model is set up in two forms: measured at unchanged prices (UP), and at current prices (CP).

The author proves that-feasibility is an invariant quality of the model, as current prices change relative to the fixed prices of the basic period;

— optimum solutions obtained from the UP model remain optimal in the CP model if the shadow prices of product balances constitute the price indices between current prices and prices of the basic period.

НОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕНЕВЫХ ЦЕН В ПЛАНИРОВАНИИ

В данной статье рассматриваются два варианта использования в процессе планирования видоизменной концепции теневых цен Джорджа Б. Данцига. Такой подход — в отличие от традиционного — не считает излишним весь объем ресурсов, неиспользованных полностью в рамках оптимального решения; речь идет только о том излишке, который не используется в этом оптимальном решении. Таким образом посредством некоторого видоизменения задачи стоновится возможным построение системы таких теневых цен, которые в любых случаях являются положительными и, помимо этого, увязываются также и с актуальными системами цен в экономике.

Автор, в рамках небольшого числового примера модели статического планирования народного хозяйства показывает, насколько могут практически применяться видоизмененные теневые цены в интересах выявления противоречий системы цен.

В последующем, в рамках многопериодичной, динамичной линейной модели планирования народного хозяйства, служащей долгосрочному планированию некоторого определенного объема, рассматривается роль системы цен, используемой для конкретной модели. Модель определяется в двух формах, т. е. в форме неизменно определенных цен и в форме определенной по текущим ценам.

Автор доказывает, что

— допускаемость представляет собой инвариантное свойство модели независимо от того, как складываются текущие цены по сравнению с ценами базисного периода, которые рассматриваются в качестве неизменной системы цен;

— оптимальные решения, получаемы на основании с неизменно определенными ценами остаются оптимальными также и в модели с текущими ценами в том случае, если баланс теневых цен представляют собой индексы цен между текущими ценами и ценами базисного периода.