SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

DR. BELUSZKY PÁL, a földrajztudományok kandidátusa, az Államigazgatási Szervezési Intézet tudományos főmunkatársa, BOD PÉTER, a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Matematikai Kutató Intézet tudományos tanácsadója, H. K. VAN DIJK, a rotterdami Erasmus Egyetem Ökonometriai Intézetének munkatársa, DOBÓ ANDOR, a KGTMTI műszaki-gazdasági tanácsadója, KISS PÉTER, az MKKE Tervezés Tanszékének munkatársa, T. KLOEK, a rotterdami Erasmus Egyetem Ökonometriai Intézetének munkatársa, KRISTÓ ZOLTÁN, a KSH Ökonometriai Laboratórium csoportvezetője, OTTO KNOLL, a bratislavai Számítógépes Kutatóközpont munkatársa, LŐVEI LÁSZLÓ, az OT TGI Matematikai Módszerek Osztálya munkatársa, MÓCZÁR JÓZSEF, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem adjunktusa, PAVEL ONDRČKA, a bratislavai Számítógépes Kutatóközpont munkatársa, DR. SIKOS T. TAMÁS, az MTA Földrajztudományi Kutató Intézet tudományos munkatársa, DR. SIMONOVITS ANDRÁS, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos munkatársa, SOMOS ENDRE, a SZÁMKI tudományos munkatársa

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43—45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (PKHI 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKH 215—96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215—11488, és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185—612. Előfizetési díj egy évre: 80,—Ft

Külföldön terjeszti a KULTÚRA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149

HERMAN K. VAN DIJK–TEUN KLOEK

A Klein – I. modell a posteriori elemzése*

Bevezetés

A cikk a Klein-I. modell *(Klein,* 1950) teljes információn alapuló elemzését mutatja be, mely olyan a priori eloszláson alapul, amely elhagyja a közgazdasági szempontból érdekes paraméterekre vonatkozó „rossz" előjeleket. Az elemzés egzakt abban az értelemben, hogy semmiféle nagy mintán alapuló közelítést[1] nem alkalmaz.

A cikk egy nagyobb kutatási terv részét képezi, mely a szimultán lineáris egyenletrendszernek a Bayes-féle teljes információn alapuló elemzésével foglalkozik. Célunk az, hogy olyan módszereket dolgozzunk ki, melyek számítási szempontból hatékonyak, annyira, hogy velük legalábbis közepes mértékű ökonometriai modellek kezelhetők legyenek[2] s amelyek elég rugalmasak, hogy a közgazdasági szempontból fontos paraméterekre vonatkozóan a lehetséges a priori eloszlások nagy halmazát vegyék figyelembe.[3] Ez utóbbi követelmény miatt kell numerikus integráló módszert alkalmaznunk.

Első cikkünkben *(Kloek–Van Dijk,* 1978) a feltételezéseinkből következő numerikus integrálási feladatok kezelésére a Monte-Carlo-módszert javasoltuk. Az ott bemutatott példában háromdimenziós feladatot kellett megoldanunk. A Klein-modell esetében kilencdimenziós numerikus integrálási feladatot oldunk meg.

A javasolt Monte-Carlo-módszer sikeres alkalmazásának alapvető feltétele, hogy jó súlyfüggvényt találjunk, azaz olyan, a Monte-Carló-módszerhez megfelelő tulajdonságokkal rendelkező sűrűségfüggvényt, amely elfogadhatóan közelíti az a posteriori sűrűségfüggvényt.

Az előzetes optimalizáló eljárások alapján megállapítottuk, hogy a Klein-I. modellre adott informatív a priori eloszlás esetén sem a teljes információn alapuló maximum likelihood becslések (FIML), sem a fontos[4] strukturális

* A tanulmány előző változatát (Van Dijk–Kloek, 1977a) az 1977 októberében Madisonban (Wisconsin) a *Bayes-féle következtetés az ökonometriában* témáról tartott 15. NBER/NSF szemináriumon, valamint az 1977 szeptemberében rendezett ESEM ülésén adtuk elő. Számos résztvevőnek tartozunk köszönettel a hasznos megjegyzéséért. Fordította *Kelemen Katalin.*

[1] Eltérően *Rothenbergtől* (1973). A szimultán egyenletek dinamikus viselkedésére és stabilitási jellemzőire vonatkozó klasszikus elemzés is általában aszimptotikusan érvényes eredményeket hoz *(Goldberger–Nagar–Odeh,* 1961; *Theil–Boot,* 1962; *Dhrymes,* 1973; *Oberhofer–Kmenta,* 1973; *Schmidt,* 1973; *Gill–Brissimis,* 1978).

[2] Mely a numerikus integrálás standard módszereivel nem lehetséges *(Morales,* 1971).

[3] Ellentétben *Harkemá*val (1971).

[4] Azaz az összes strukturális paraméter, a konstansok, a pontosan ismert paraméterek (melyek vagy 0-k vagy egységre normáltak) és a látens változók varianciái és kovarianciái kivételével.

paraméterek (amelyek egy nagyon nagy tartományon egyenletes a priori eloszlásúak) együttes a posteriori peremeloszlásának módusza nem alkalmas az a posteriori strukturális momentumok közelítésére. Így ezek nem használhatók fel súlyfüggvény kialakítására.

A feladat megoldására (első lépésként) egy közelítő eljárást mutatunk be. Az alapgondolat az, hogy a koncentrált likelihood függvény felületének *csúcsán*[5] mozdulunk el az *a priori* valószínű értékeket tartalmazó tartomány belsejébe. Itt felhasználjuk a mintán alapuló, közelítően normális a priori információt (azaz *adatokon alapuló* a priori információt). Az eredmények lehetővé teszik, hogy olyan súlyfüggvényt alakítsunk ki, mely jól közelíti az a posteriori sűrűségfüggvényt s mellyel végrehajtható a Klein-I. modell a posteriori elemzése. Hangsúlyoznunk kell, hogy végső eredményünk független ettől a közbülső lépéstől. Ezt csupán a számítások hatékonysága miatt alkalmazzuk.

Így a cikk célja kettős: (i) bemutatjuk és értékeljük elemzésünk eredményeit; (ii) ismertetjük, hogyan oldottuk meg a jó súlyfüggvény kialakításának problémáját.

A cikk felépítése a következő: A 2. fejezet az előzetes feltételezésekkel foglalkozik, így a modell specifikációjával, az a priori információkkal és az előző cikkünk néhány eredményével. A 3. fejezet az a posteriori értékek közelítésére vonatkozó eredményeket tartalmazza. A Klein-I. modell a posteriori eredményeit a 4. és 5. fejezet elemzi, az előbbi a strukturális paraméterekkel, az utóbbi a multiplikátorokkal és a stabilitási jellemzőkkel foglalkozik. A 6. fejezet következtetéseinket tartalmazza. Az A, B és C függelék a korlátozásokkal alkalmazott maximum likelihood becslés néhány részletét, az a posteriori sűrűségfüggvény közelítését, ill. a számítások pontosságának becslését tartalmazza.

2. A modell, a likelihood és az a priori információ

Az ökonometriai modell megegyezik az előző cikkünkben leírt modellel. A lényege megtalálható a *Kloek–Van Dijk* (1978, 2. fejezet), részletesebben a *Van Dijk–Kloek* (1977b, 2. fejezet) cikkekben, s a következőképp összegezhető. Kiindulópontunk a jól ismert szimultán lineáris egyenletrendszer, normális eloszlású látens változókkal, melyek kovariancia mátrixa Σ. A Σ a priori sűrűségfüggvénye arányos a $|\Sigma| - \frac{1}{2}(G+1)$ értékkel, ahol G a sztochasztikus egyenletek száma[6] és a szabad konstansok (β_0) a priori eloszlása egyenletes úgy, hogy a Σ és a szabad konstansok szerinti analitikus integrálás lehetséges. A pontosan ismert (rendszerint az identifikálhatóságot biztosító 0

[5] A „csúcs" kifejezést olyan értelemben használjuk, ahogyan a numerikus optimalizálással foglalkozó könyvek, mint pl. *Himmelblau* (1972, 83. o.). Ez nem azonos az egyes szerzők által a regresszió kifejezésben használt értelmezéssel.

[6] A fenti, a Σ-ra vonatkozó a priori sűrűségfüggvényt gyakran kevés a priori információt tartalmazónak tartják (lásd pl. *Zellner*, 1971). Számos más a priori sűrűségfüggvény létezik, mely a $|\Sigma|$ kitevőjének értékében különbözik egymástól. E cikk előző változatában (*Van Dijk–Kloek*, 1977a) kísérleteztünk néhány ilyen a priori sűrűségfüggvénnyel. Az eredményeket kérésre rendelkezésre bocsátjuk. Elhatároztuk azonban, hogy a Θ-ra, a közgazdasági szempontból közvetlenül érdekes paramétereket tartalmazó vektorra vonatkozó a priori információkra koncentrálunk.

és egységre normált) paramétereket behelyettesítjük és a többi paramétert a Θ vektorban foglaljuk össze.

A Θ elemei (az úgynevezett érdekes paraméterek) rendszerint közgazdaságilag interpretálhatók, pl. a fogyasztási határhajlandóság, a tőkenövekedési koefficiens. Még egy kis a priori információt akarunk adni ezekre a paraméterekre vonatkozóan, amennyiben a likelihood információ elméletileg valószínű módon informatív, de mi ki akarjuk zárni annak a lehetőségét, hogy a paraméterek „rossz" előjelet vegyenek fel. Pl. *a priori* nem hisszük, hogy az aktuális profit rövidtávú hatása a fogyasztási és beruházási kiadásokra negatív. Az egység intervallumot *a priori* valószínűnek tekintjük a Klein-I. modell érdekes paramétereire vonatkozóan, lásd e fejezet végét.[7]

A $(\Theta, \beta_0, \Sigma)$ a posteriori sűrűségfüggvényét úgy kapjuk, hogy a Bayes-tétel segítségével egyesítjük a szimultán lineáris egyenletrendszer likelihood függvényét és az a priori sűrűségfüggvényt. A Σ és β_0 szerint analitikusan integrálva kapjuk a Θ a posteriori, a Σ-ra és β_0-ra vonatkozó peremsűrűségfüggvényét:

$$\varkappa(\Theta; Y, X) \propto \left((\Gamma)(n)\Sigma\right) - \frac{1}{2}(n-1) \tag{1}$$

formában,[8] ahol Y és X az endogén, ill. a predeterminált változók megfigyelésmátrixai. A $|\Gamma|$ determináns, a Θ függvénye, a szimultán lineáris egyenletrendszer jól ismert Jacobi determinánsa és Σ a strukturális egyenletrendszer látens változóinak („becsült") kovariancia mátrixa, adott Θ-ra. A szimultán lineáris egyenletrendszer koncentrált likelihood függvénye csak a második tényező kitevőjében különbözik az (1) kappa-függvénytől, mely koncentrált likelihood függvény esetében $-n/2$. A szabad konstansok vektora szerinti integrálás következtében eggyel csökken a szabadságfok; lásd *Drèze* (1976). Ahogy a mintanagyság nő, a kappa-függvény és a koncentrált likelihood függvény közötti különbség elhanyagolhatóvá válik, de kis minták esetében jelentős lehet; vesd össze *Van Dijk—Kloek* (1977a, 4. fejezet).

A következőkben bemutatjuk az egzakt korlátozásokat. A Klein-I. modellt használjuk, melynek strukturális egyenletrendszere a következő:

$$\begin{aligned}
C &= \alpha_1 P + \alpha_2 P_{-1} + \alpha_3 W + \alpha_4 + u_1 \\
I &= \beta_1 P + \beta_2 P_{-1} - \beta_3 K_{-1} + \beta_4 + u_2 \\
W_1 &= \gamma_1 X + \gamma_2 X_{-1} + \gamma_3 t + \gamma_4 + u_3 \\
X &= C + I + G \\
P &= X - W_1 - T \\
K &= K_{-1} + I \\
W &= W_1 + W_2
\end{aligned} \tag{2}$$

A fogyasztási kiadások (C) függnek a profittól (P), az egy periódussal korábbi profittól (P_{-1}) és az összes bértől (W). A nettó beruházási kiadások (I) a pro-

[7] Az *egység intervallumon* a [0, 1] intervallumot értjük, az *egységtartományon* pedig az egység intervallumok Descartes szorzatát.

[8] Részletesebben lásd *Van Dijk—Kloek* (1977b).

fittól, a késleltetett profittól és az egy periódussal korábbi tőkeállománytól[9] függnek. Végül a magánszektorban kifizetett munkabérösszeg (W_1) a magánszektor piaci áron számított nettó termelésétől (X), ugyanezen változó késleltetett értékétől (X_{-1}) és egy időtényezőtől (t) függ. A modell négy azonossággal zárul. A magánszektor termelésének három felhasználási iránya van: a fogyasztási kiadások, a beruházási kiadások és az állam nem-bérjellegű kiadásai (G). A magánszektor nyereség és veszteség elszámolása a profitot, mint a magánszektor nettó termelése és az egyéni munkabérjövedelmek (W_1), valamint a forgalmi adók (T) összege közti különbséget határozza meg. A tőkeállományt és az összes bért természetszerűen definiáljuk; W_2 az állami szektorban kifizetett munkabérösszeg. A modell 7 endogén változót (C, I, W_1, X, P, K, W) és 8 predeterminált változót ($1, P_{-1}, X_{-1}, K_{-1}, G, T, W_2, t$) tartalmaz, a változókat (az 1 és a t kivételével) változatlan dollárban mérve. Részletesebb magyarázat[10] *Klein* (1950) művében található.

A Θ' paraméter-vektor a következő ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$). A priori információnk szerint e vektor egyenletes eloszlású a kilencdimenziós egységtartományon. Vitathatatlan, hogy gyakran jóval több információ is rendelkezésre áll, pl. a gazdasági változók arányára vonatkozó történeti vagy külső információk. A *Kloek–Van Dijk* (1978) cikkben felhasználtunk ilyen információkat.

Itt az volt a szándékunk, hogy megmutassuk, milyen erőhatása van az egyenletes a priori eloszlásnak a valószínűtlen paraméterek kizárásában akkor, amikor a likelihood függvény egy nagy (részben valószínűtlen) tartományon sík. Azért választottunk egyenletes a priori eloszlást, mert ezt könnyű megérteni és specifikálni. Fontos előnye, hogy nem kell *a priori* specifikálni az első- és másodrendű momentumokat nagy dimenziókban, mint ahogy azt a normális a priori eloszlás esetében kellene.

3. A posteriori elemzés: első lépés

Az a posteriori momentumok és az a posteriori peremsűrűségfüggvények numerikus becslését Monte-Carlo-módszerrel végeztük. Megfelelő egzisztenciafeltételek esetén a számításra kerülő értékek a Θ függvénye – jelöljük $G(\Theta)$-vel – várható értékeként foghatók fel s az

$$E[G(\Theta)] = \frac{\int G(\Theta)\, p(\Theta;\, Y, X)\, \mathrm{d}\Theta}{\int p(\Theta;\, Y, X)\, \mathrm{d}\Theta} \tag{3}$$

formában definiálhatók, ahol $p(\Theta;\, Y, X)$ a Θ a posteriori sűrűségfüggvénye. A (3) integrálokat fontosság szerinti mintavétel alkalmazásával becsülhetjük, ahogy a *Kloek–Van Dijk* (1978) cikkben ismertettük. A Monte-Carlo-módszer sikeres alkalmazásához szükség van egy $I(\Theta)$ súlyfüggvényre, mely jól közelíti

[9] Figyeljük meg, hogy a beruházási egyenletben szereplő β_3 előjele negatív!

[10] Az $Y = (X - T + W_2)$ jelölést alkalmazzuk a nettó nemzeti jövedelemre. A Klein-I. modellel foglalkozó irodalomban nem egységes a nettó nemzeti jövedelem Y-nal és az állami nem-bérjellegű kiadások G-vel való jelölése. Mi *Theil–Boot–Kloek* (1965)-ben alkalmazott jelölését fogadtuk el. *Klein* (1950) G-vel a béreket is magában foglaló állami kiadásokat jelölte ($= G + W_2$ a mi jelöléseink szerint). Más szerzők, pl. *Rothenberg* (1973) az Y-t használták a magánszektor nettó termelésére az X helyett. Ez a jelölésbeli különbség lényeges a redukált és a végső forma multiplikátorai egy részének interpretálásakor. Részletesebben lásd az 5. fejezetet.

az a posteriori sűrűségfüggvényt és melyből viszonylag könnyű véletlen mintákat generálni.[11] A Klein-I. modell a posteriori sűrűségfüggvénye az (1) egyenletben adott. A koncentrált likelihood függvényre és a kappa-függvényre alkalmazott előzetes optimalizáló eljárás néhány koefficiensre vonatkozóan elméletileg valószínűtlen értékeket eredményezett (lásd az A függeléket és *Van Dijk–Kloek*, 1977a). A likelihood függvény felületének közelebbi vizsgálata egy megnyújtott csúcs létezését mutatta ki.[12]

Megoldásként egy olyan eljárást javasolunk, mely két lépésben közelíti az (1) a posteriori sűrűségfüggvényt. Az első lépésben felhasználjuk a paraméterek tartományára vonatkozó közelítően normális a priori információt. Ezt a Bayes-tétel segítségével *egyesítjük* a likelihood információval, hogy megkapjuk az a posteriori momentumokat. A második lépésben felhasználjuk az első lépés a priori momentumait egy olyan súlyfüggvény momentumaiként, mely az (1)-ben adott egzakt a posteriori sűrűségfüggvényt közelíti.

Mindkét lépésben szekvenciális Monte-Carlo-módszert[13] alkalmazunk, hogy ellenőrizzük, vajon a fontosság szerinti mintavétel megfelelően közelíti-e az első lépés közelítő a posteriori sűrűségfüggvényét és a második lépés egzakt a posteriori sűrűségfüggvényét.[14]

Az első lépés fő eredményei az 1. táblázatban találhatók. Minden becsült érték pozitív. Az α_1, α_2, β_1 és β_2 átlaga jelentősen különbözik a FIML becslésétől. A γ_1 és γ_2 átlaga szintén eltér a FIML értékektől. A többi paraméter alig vagy egyáltalán nem változik. Bővebben lásd a B függelékben.

A Θ közelítő a posteriori átlagát és a közelítő a posteriori kovariancia mátrixát felhasználjuk a 2. lépésben, hogy véletlen mintákat generáljunk egy a 0-nál és 1-nél csonkított Cauchy-féle eloszlásból.[15] Kiderült, hogy ez a súlyfüggvény pontos a posteriori eredményeket ad ésszerű számítási költségek mellett.[16] E súlyfüggvény nemcsak a strukturális paramétereket közelítette jól, hanem a cikkben figyelembe vett összes a posteriori eredményt is; részletesebben lásd a C függelékben.

4. Az a posteriori eredmények I.: strukturális paraméterek

Ebben a fejezetben bemutatjuk a Θ strukturális paraméterek a posteriori momentumait és a posteriori peremsűrűségfüggvényeit, az egységtartományon[17] értelmezett Θ-ra vonatkozóan egyenletes a priori eloszlást alkalmazva.

[11] Részletesebben lásd *Kloek–Van Dijk* (1978, 6., 8., 9. o.).

[12] Kiderül (lásd a B függeléket), hogy lényegében csak egy csúcs van, melynek irányát a FIML becslés aszimptotikus kovariancia mátrixának első sajátvektora írja le.

[13] A szekvenciális Monte-Carlo-módszer azt jelenti, hogy több menetben veszünk mintát, s az egyes menetekben a minta-elrendezés az előző (egy vagy több) menettől függ. Részletesebben lásd *Halton* (1962, 60. o.) és a B függelékben. A közelítő eljárás mindkét lépésében ezt a módszert alkalmaztuk.

[14] A második lépésben alkalmazott súlyfüggvényre vonatkozó részleteket a B függelék tartalmazza.

[15] Lásd *Kloek–Van Dijk* (1978, 13. lábjegyzet).

[16] A második lépésben újra 15 000 húzást alkalmaztunk. Összehasonlításul: a numerikus integrálásra egy tíz-pontos Gauss szorzási szabály alkalmazása 10^9 függvény becslést igényelne.

[17] Részletesebben lásd a 2. fejezetben. E cikkben csupán a Θ a posteriori momentumaira fordítjuk figyelmünket. A többi strukturális paraméter a posteriori momentumai a Θ-ra vonatkozó ismeretek alapján könnyen előállíthatók (lásd *Van Dijk–Kloek*, 1977b).

Az a posteriori momentumok az 1. táblázatban találhatók. Az eredmények azt mutatják, hogy az adott évi profit hatása a fogyasztási kiadásokra (α_1) és a beruházási kiadásokra (β_1) enyhén pozitív. Mivel az a posteriori sűrűségfüggvények az egységtartományra korlátozottak, az α_1 és β_1 szórásának nagyságából következik, hogy az a posteriori peremsűrűségfüggvények nagyon ferdék. Az a posteriori eredményeket összehasonlíthatjuk a FIML becslésekkel és az első lépésben kapott közelítő a posteriori momentumokkal. Látható, hogy az ($\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$) elsőrendű momentumai a FIML becslés és a közelítő eredmények között helyezkednek el. Az α_3 és β_3 momentumai nem érzékenyek az a priori információkra. A munkabértömeg-egyenlet paraméterei közel megegyeznek a közelítő eredményekkel. A Θ a posteriori szórása az α_3 kivételével kisebb, mint a FIML becslés aszimptotikus standard hibája. Különösen az ($\alpha_1, \alpha_2; \beta_1 \beta_2$)-re vonatkozó eredmények mutatnak jelentős eltérést az a posteriori átlag és a FIML érték között.

1. *táblázat*

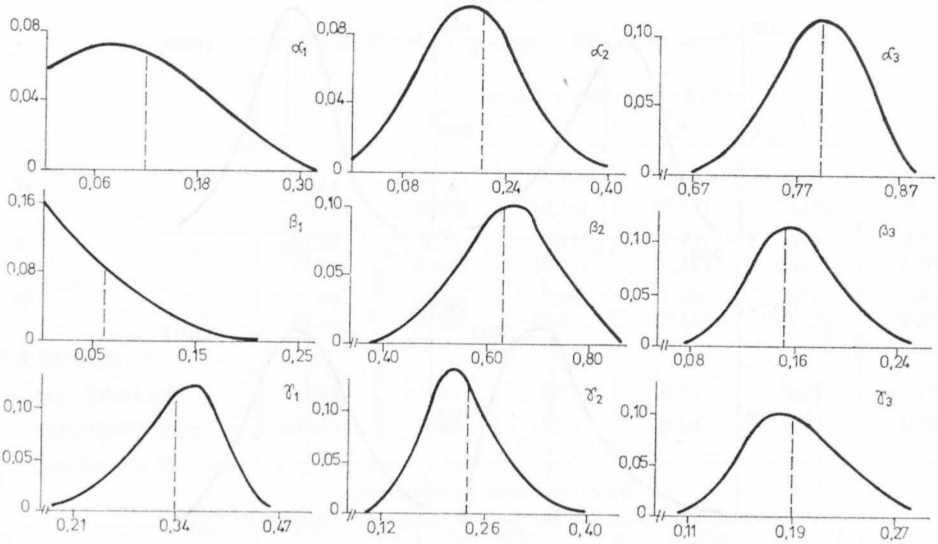
Θ a posteriori átlagai és szórásai

	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	γ_1	γ_2	γ_3
A posteriori momentumok: első lépés közelítései*	0,17	0,13	0,79	0,08	0,57	0,15	0,32	0,23	0,20
	(0,09)	(0,08)	(0,04)	(0,11)	(0,10)	(0,03)	(0,06)	(0,05)	(0,05)
A posteriori momentumok*	0,12	0,19	0,79	0,06	0,64	0,15	0,34	0,23	0,19
	(0,08)	(0,08)	(0,04)	(0,06)	(0,10)	(0,03)	(0,06)	(0,05)	(0,04)
FIML	–0,23	0,39	0,80	–0,80	1,05	0,15	0,23	0,28	0,23
	(0,58)	(0,30)	(0,04)	(0,84)	(0,43)	(0,05)	(0,09)	(0,06)	(0,06)

* Az eredmények 15 000 mintavételen alapulnak.

Az a posteriori peremsűrűségfüggvények (MPD) az 1. ábrán láthatók. A függőleges szaggatott vonalak az a posteriori átlagot jelölik. Világosan megfigyelhető annak a hatása, hogy a likelihood információt az a priori információval csonkítottuk. A β_1-re vonatkozó MPD olyan, mint egy exponenciális eloszlás. A csonkítás hatása az α_1-re vonatkozó MPD-n is megfigyelhető s jóval kisebb mértékben az α_2-re vonatkozó MPD esetében is. A γ_1 a posteriori sűrűségfüggvényének ferdesége valószínűleg a Jacobi determinánsnak tulajdonítható. Így a Klein-I. modell jó néhány paraméterére a módusz nem közelíti jól az a posteriori átlagot. Hozzá kell tenni, hogy a Θ-ra vonatkozó nagyon nagy tartományon egyenletes a priori eloszlás valószínűtlen eredményeket ad.[18]

[18] Nem tudjuk meghatározni az (1) kappa-függvény maximumát egy nagyon nagy tartomány belsejében. Néhány nem-informatív a priori eloszlással és a *Zellner*-féle (1977) maximális adat-információjú a priori eloszlás osztállyal (MDIP) végzett kísérletek szintén valószínűtlen eredményekhez vezettek. Ez nem meglepő, hiszen a modell likelihood információja már ebbe az irányba mutatott. Köszönettel tartozunk A. Zellnernek az e témában kifejtett hasznos véleményéért és azért, hogy felhívta figyelmünket arra a hibára, melyet az MDIP a priori eloszlásnak a lineáris egyenletrendszerre való alkalmazásában követtünk el (*Van Dijk–Kloek*, 1977a).



1. *ábra.* A strukturális paraméterek a posteriori sűrűségfüggvényei

5. Az a posteriori eredmények II.: a multiplikátorok és a rendszer stabilitásának jellemzői

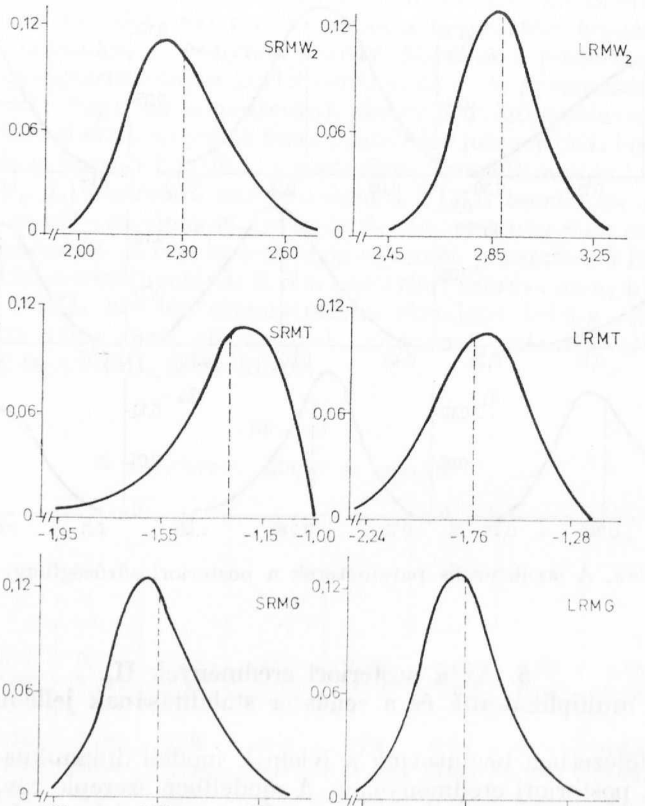
Ebben a fejezetben bemutatjuk a Klein-I. modell dinamikus viselkedésére vonatkozó a posteriori eredményeket. A modellben szereplő rövid- és hosszútávú multiplikátorok[19, 20, 21] a posteriori perem átlagai és szórásai a 2. táblázatban találhatók, s a redukált és a végső[22] nemzeti jövedelem-egyenlet multiplikátorainak a posteriori sűrűségfüggvényét a 2. ábra mutatja. A 2. táblázat oszlopaiból látható, hogy a redukált beruházási egyenletben szereplő rövidtávú multiplikátorok (SRM) a posteriori átlaga nem különbözik „szignifikánsan" 0-tól. Ez összhangban van a strukturális elemzés eredményeivel. Továbbá a költségvetési egyenleg-növekmény (az állami nem-bérjellegű kiadásokra és az adókra vonatkozó tényezők összege) a redukált fogyasztási egyen-

[19] Ezeket a multiplikátorokat a strukturális paraméterek terén vett függvényként definiáltuk, hogy elkerüljük a nehéz transzformációs problémákat.

[20] Helyhiány miatt a t időváltozóra és a késleltetett predeterminált változókra vonatkozó multiplikátorokat elhagytuk.

[21] *Klein* (1950), *Goldberger—Nagar—Odeh* (1961) és *Theil—Boot* (1962) G-vel jelölték a béreket is tartalmazó állami kiadásokat ($= G + W_2$ a mi jelölésünk szerint). Az általuk definiált G azt jelenti, hogy a W_2 növekedésének közölt hatását nem lehet úgy interpretálni, mint egy *ceteris paribus* növekedésnek a hatását, hanem csak úgy, hogy az állam nem-bérjellegű kiadásainak azonos méretű csökkenése implicite kompenzálja azt. Ez azt jelenti, hogy az e szerzők által jelölt $\partial Y/\partial W_2$ egyenlő a mi jelölésünk szerinti $\partial Y/\partial W_2 - \partial Y/\partial G$-vel. Eredményeink és Goldberger—Nagar—Odeh eredményeinek részletesebb összehasonlítása az A függelékben található.

[22] A rövidség kedvéért a végső nemzeti jövedelem-egyenlet kifejezést használjuk a *Theil—Boot* (1962) értelmezése szerinti „nemzeti jövedelem egyenlete a végső formában" kifejezés helyett. Ugyanez vonatkozik a végső forma többi egyenletére is.



2. *ábra*. A redukált és végső nemzeti jövedelem egyenlet multiplikátorainak a posteriori sűrűségfüggvényei

letben, a magánszektorban kifizetett bérből származó jövedelem- és a nemzeti jövedelem-egyenletekben pozitív.

Negatív azonban a redukált profit egyenletében és majdnem 0 a redukát beruházás-egyenletben. Figyelemre méltó, hogy az összes költségvetési egyenleg mulitplikátor-szórása kisebb, mint az adók és az állami kiadások multiplikátoraira vonatkozó szórások külön-külön. Ez az adók és az állami kiadások közti pozitív korreláció következménye, mely a megfelelő paraméterek negatív a posteriori korrelációját eredményezi. Láthatjuk továbbá, hogy a redukált profit-egyenletben szereplő multiplikátorok (abszolút) értéke nagyobb, mint a redukált személyes bérjövedelem-egyenletben levőké.

A hosszútávú multiplikátorok esetében a számítások további a priori feltételezés, a stabilitás feltételezése mellett történtek. Ezek a multiplikátorok nagyobbak (abszolút értékben), mint a rövidtávú multiplikátorok, kivéve a végső profit-egyenletben szereplő állami nem-bérjellegű kiadások és az állami bérjövedelem multiplikátorait (ez a végső beruházási egyenletre is igaz, hiszen az LRM-ek definíciószerűen 0-k az adott esetben). A végső nemzeti jövedelem-egyenlet multiplikátorai egynél nagyobbak (abszolút értékben).

2. *táblázat*

A multiplikátorok a posteriori átlaga és szórása

	Rövidtávú multiplikátorok (SRM)					
	C	I	W_1	P	Y	K
W_2	1,24	0,06	0,44	0,86	2,30	0,06
	(0,12)	(0,06)	(0,10)	(0,11)	(0,16)	(0,06)
T	−0,23	−0,08	−0,11	−1,21	−1,31	−0,08
	(0,15)	(0,08)	(0,07)	(0,13)	(0,20)	(0,08)
G	0,58	0,07	0,56	1,09	1,65	0,07
	(0,15)	(0,07)	(0,13)	(0,12)	(0,19)	(0,07)
A költségvetés						
(a) egyenlege	0,34	−0,01	0,46	−0,12	−0,34	−0,01
(b) növekménye	0,08	0,03	0,09	0,04	0,08	0,03
	Hosszútávú multiplikátorok (LRM)					
W_2	1,88	0	1,07	0,82	2,88	3,92
	(0,16)		(0,10)	(0,10)	(0,16)	(1,15)
T	−0,75	0	−0,42	−1,33	−1,75	−6,35
	(0,24)		(0,13)	(0,11)	(0,24)	(1,74)
G	1,39	0	1,35	1,04	2,39	4,97
	(0,15)		(0,11)	(0,10)	(0,15)	(1,38)
A költségvetés						
(a) egyenlege	0,64	0	0,93	−0,29	0,64	−1,38
(b) növekménye	0,15		0,11	0,05	0,15	0,48

Említésre méltó, hogy a költségvetési egyensúly-növekmény nagy negatív hatást gyakorolna a tőkére hosszú távon. Ebben az esetben azonban a szórás viszonylag nagy.

A redukált nemzeti jövedelem-egyenletben szereplő multiplikátorok a posteriori peremsűrűségfüggvényei mind ferdék, de a hosszú távra vonatkozók szimmetrikusabbak. Az a tény, hogy minden sűrűségfüggvény viszonylag kis körzetben koncentrálódik, alkalmassá tenné azokat különböző stratégiák elemzésére, de a modell természetesen túl kicsi erre a célra. (Lásd 2. ábrát.)

Végül a 3. táblázatban bemutatjuk a stabilitási jellemzők a posteriori valszínűségeit. A számításokban a redukált forma paramétereinek[23] harmadfokú polinomját azzal a formulával oldottuk meg, ami pl. *Uspensky* (1948) könyvében szerepel. Az eredmények igazolják, hogy a modell csillapított rezgő mozgást végez közelítőleg 0,97 valószínűséggel. Az oszcillálás periódusának átlaga 15,15 év, a szórása 2,99. A domináns gyök együtthatójára ezek az értékek sorrendben 0,85 és 0,08. Ez alátámasztja a 3. táblázat eredményeit. A klasszikus

[23] Minden véletlenszerűen húzott Θ_i vektorra a számítógépi program kipróbálja, hogy a polinomiális egyenlet megoldása a 3. táblázatban bemutatott négy lehetőség közül melyiket tartalmazza.

3. *táblázat*

A stabilitási jellemzők a posteriori valószínűségei

	Explozív	Csillapított
Oszcilláló	0,0258	0,9738
Monoton	0,0000	0,0004

módszerek, a FIML, a FIMLD (a látens változók kovariancia mátrixa diagonális) és a 2SLS szintén azt mutatják, hogy a modell csillapított rezgő mozgást végez. Elmondhatjuk, hogy a beruházási folyamat dinamikájának gyenge specifikálása és a Jacobi-determináns miatti ferdeség ellenére a két háború közti időszakra vonatkozó adatok hullámzása olyan jellegzetes, hogy az összes különböző becslési módszer kimutatja ezt a ciklikus viselkedést. A klasszikus becslési módszerek numerikus eredményeiről részletesebb információ az A függelékben található.

6. Következtetések

Nagyon sikeresnek bizonyult a Monte-Carlo-módszer alkalmazása a kilencdimenziós integrálási feladatunk megoldására, mihelyt egy jó súlyfüggvényt találtunk. Nem volt egészen triviális ilyen súlyfüggvényt találni, s a bemutatott megoldás többé-kevésbé ki is használta a vizsgált feladat jellemzőit. Nem tisztázott, hogy ez a közelítés milyen mértékben általánosítható más esetekre. Természetesen előnyös lenne, ha egy többé-kevésbé mechanikusan működő eljárásunk lenne. Ez azonban a további vizsgálatok tárgya marad. Ugyanez vonatkozik a likelihood diagnosztika módszerére (*Van Dijk–Kloek*, 1977a), melyet alkalmaztunk, de itt nem ismertettünk.

A Klein-modell strukturális paramétereinek a posteriori átlaga nagyon különbözik a megfelelő FIML becslésektől. Ugyanez vonatkozik – habár kisebb mértékben – a rövidtávú multiplikátorokra is. Néhány a posteriori peremsűrűségfüggvény meglehetősen ferde volt. Így az a posteriori módusz alapos megfontolás nélkül nem tekinthető az a posteriori átlag közelítésének. Ez a jelenség nagy mértékben annak a következménye, hogy az a priori sűrűségfüggvényünk kizárta a ,,rossz'' előjelet, míg a FIML becslés két ilyen ,,rossz'' előjelet is tartalmazott. Ezen becslések egyike jelentősen, bár nem szignifikánsan különbözött 0-tól.

A két háború közti adatokban szereplő ciklusok olyan jellegzetesek, hogy bár a strukturális koefficiensek numerikus értéke különbözik, minden vizsgált becslési módszer csillapított oszcilláló viselkedést jelez.

Ilyen méretű modell specifikációja természetesen nem lehet egészen reális. Néhány numerikus eredmény alapján a beruházási függvényre hosszabb késleltetés látszik indokoltnak, mint amilyet Klein alkalmazott. Az $(1-\lambda)P_t + \lambda P_{t-1}$ egy λ éves átlagos késésnek felel meg. A λ-ra vonatkozó FIML becslés 4,2, de a likelihood hányados próba nem zárja ki a $\lambda = 1$ megszorítást. A λ-ra vonatkozó a posteriori átlag közel 1, mely az adott a priori eloszlás esetén határeset. Az autoregresszív látens változók feltételezését[24] bevezető *Hendry* (1971) eredményei is felvetik, hogy az újraspecifikálás helyénvaló lehet. Cikkünk célját tekintve nem törekedtünk erre. Nem számoltunk előrejelzési momentumokat és előrejelzési sűrűségfüggvényeket sem (*Van Dijk–Kloek*, 1977b), mivel a modell valószínűleg nem alkalmas a háború utáni időszakra vonatkozó előrejelzésekre.

A. Függelék: a maximum-likelihood becslés korlátozásokkal

Ebben a függelékben a strukturális paraméterekre vonatkozó teljes információn alapuló maximum likelihood becslését (FIML) mutatjuk be különböző korlátozások mellett. Megvizsgáljuk a rövid- és hosszútávú multiplikátorokra

4. *táblázat*

*A Θ paraméter becslései különböző feltételek mellett**

		α_1	α_2	α_3	β_1	β_2
FIML	korlátozás nélküli Θ	−0,23	0,39	0,80	−0,80	1,05
		(0,58)	(0,30)	(0,04)	(0,84)	(0,43)
	$\alpha_1 = 0$	0	0,27	0,79	0,47	0,92
	$\beta_1 = 0$	0,12	0,19	0,79	0	0,70
	$\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 0$	0	0,25	0,80	0	0,71
A posteriori átlagok		0,12	0,19	0,79	0,06	0,64
		(0,08)	(0,08)	(0,04)	(0,06)	(0,10)
2SLS		0,02	0,22	0,81	0,15	0,62
		(0,12)	(0,11)	(0,04)	(0,17)	(0,16)

		β_3	γ_1	γ_2	γ_3	$\log l$
FIML	korlátozás nélküli Θ	0,15	0,23	0,28	0,23	6,07
		(0,05)	(0,09)	(0,06)	(0,06)	
	$\alpha_1 = 0$	0,16	0,27	0,26	0,22	5,91
	$\beta_1 = 0$	0,17	0,35	0,22	0,18	4,47
	$\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 0$	0,16	0,37	0,21	0,17	3,89
A posteriori átlagok		0,15	0,34	0,23	0,19	
		(0,03)	(0,06)	(0,05)	(0,04)	
2SLS		0,16	0,44	0,15	0,13	
		(0,04)	(0,04)	(0,04)	(0,03)	

* A zárójelben levő számok a standard hibát (szórást) jelentik. A korlátozás nélküli FIML eredmények megegyeznek a *Chernoff–Divinsky* (1953, 284., 288. o.) által közölt eredményekkel.

[24] Ez kilenc külön paraméter bevezetését jelenti. Egy olyan modellben, ahol már 18 paramétert illesztettünk 63 megfigyelésre, óvatosnak kell lennünk, hogy elkerüljük a túlillesztés veszélyét.

kapott értékeket. Ezeket az eredményeket azután összehasonlítjuk a 4. és 5. fejezetben található a posteriori eredményekkel, valamint néhány klasszikus eredménnyel (*Goldberger–Nagar–Odeh*, 1961; *Gill–Brissimis*, 1978).

Tekintsük az $\alpha_1 = 0$ és $\beta_1 = 0$ korlátozásokat.[25] Ezeket azért választottuk, mert ezekre a paraméterekre vonatkozóan a korlátozás nélküli FIML becslések „rossz" előjelet tartalmaztak és standard hibájuk nagy volt. A számszerű eredmények a 4. táblázatban találhatók. A loglikelihood értékeket a konstans tagot nem számítva közöljük.

Az eredmények azt mutatják, hogy az $(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2)$ becslései jelentősen változnak, pl. az α_1 becslése negatív értékből pozitívvá válik abban az esetben, ha a $\beta_1 = 0$ korlátozást tesszük. Az α_3 és β_3 becslései meglehtősen érzéketlenek a korlátozásokra, míg a bértömeg egyenletének paraméterei közepes helyzetet foglalnak el.[26]

Az a posteriori átlagokkal való összehasonlítás a 4. fejezetben található. A 2SLS becslések nemcsak az α_1 és β_1 paraméterekre különböznek, hanem a bérjövedelem egyenletének paramétereire is.

Ha a *Mizon* (1977) által javasolt eljárást követjük, mely a próba sorozatban a legjobban korlátozott hipotézist fogadja el, akkor az $\alpha_1 = 0$ és $\beta_1 = 0$ korlátozást kell előnyben részesítenünk.[27] Így azonban a szimultaneitás nagy része megszűnik a modellben. Mielőtt eldöntjük, hogy mely korlátozásokat részesítjük előnyben, először megnézzük a feltételes strukturális becslések során kapott multiplikátor értékeket.

Az állami bérjövedelmekre ($SRMW_2$), az adókra (SRMT) és az állami nembérjellegű kiadásokra (SRMG) vonatkozó rövidtávú multiplikátorok az 5. táblázatban találhatók. A redukált beruházási egyenletben szereplő $SRMW_2$ negatív értéke lényegesen eltér az FIML és az $\alpha_1 = 0$ korlátozással számolt FIML a posteriori átlagtól. A $\beta_1 = 0$ korlátozás olyan multiplikátor-értékeket eredményez, melyek viszonylag közel állnak az a posteriori átlaghoz, mint az a 4. és 5. fejezet a posteriori elemzéséből várható volt. A 2SLS strukturális becslésen alapuló multiplikátor-értékek közelebb állnak az a posteriori átlaghoz, mint a FIML becslések. Ez azzal magyarázható, hogy a 2SLS módszer nem veszi figyelembe a Jacobi-determinánst és figyelmen kívül hagyja a strukturális egyenletek látens változóinak korrelációját is.

A redukált beruházási egyenletben az SRMT és SRMG értékek „rossz" előjelet vesznek fel a nem korlátozott FIML becslés és az $\alpha_1 = 0$ feltétellel számolt FIML becslés esetén. Az $\alpha_1 = 0$ és $\beta_1 = 0$ korlátozás lényegesen csökkenti a rendszer szimultaneitását. Közgazdasági megfontolásból a $\alpha_1 = 0$ korlátozás kedvezőbbnek tűnik.

Az a posteriori szórások sokkal kisebbek, mint az aszimptotikus 2SLS standard hibák. A beruházási folyamat dinamikájának bizonytalanságát mind az a posteriori szórások, mind a 2SLS standard hibák méretei jelzik.

[25] A kovariancia mátrix diagonalitására vonatkozó hipotézist a likelihood hányados próba világosan elutasítja; $\chi^2(3) = 28{,}46$. Ennek következtében a *Theil-* és *Boot-* (1962) féle multiplikátor értékek, melyek ezeken a strukturális becsléseken alapultak, e cikkben nem szerepelnek.

[26] Hasonló következtetések adódnak, ha más klasszikus módszerekkel végzünk összehasonlítást. Lásd pl. *Klein* (1950, 68–75. o.); *Rothenberg–Leenders* (1964); *Jorgenson–Brundy* (1973).

[27] Azokat a hipotéziseket, amelyekben az $\alpha_1 = 0$ vagy $\beta_1 = 0$ és a $\Sigma = D$ feltevés együtt szerepelt, természetesen elutasítottuk. Az eredmények megtalálhatók a *Van Dijk–Kloek* (1977a) cikkben.

5. *táblázat*

*A rövidtávú multiplikátorok (SRM) becslései**

	C	I	W_1	P	Y	K
Az állami bérjellegű kiadások ($SRMW_2$)						
FIML korlátozás nélküli Θ	0,81	−0,31	0,12	0,38	1,50	−0,31
FIML $\alpha_1 = 0$	0,94	−0,24	0,19	0,51	1,70	−0,24
FIML $\beta_1 = 0$	1,21	0	0,42	0,79	2,21	0
FIML $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$	1,14	0	0,42	0,72	2,14	0
A posteriori átlagok	1,24 (0,12)	0,06 (0,06)	0,44 (0,10)	0,86 (0,11)	2,30 (0,16)	0,06 (0,06)
2SLS	1,35	0,12	0,65	0,83	2,47	0,12
Az adók (SRMT)**						
FIML korlátozás nélküli Θ	0,24	0,41	0,15	−0,51	−0,36	0,41
FIML $\alpha_1 = 0$	0,09	0,33	0,11	−0,70	−0,58	0,33
FIML $\beta_1 = 0$	−0,18	0	−0,06	−1,12	−1,18	0
FIML $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$	0	0	0	−1,00	−1,00	0
A posteriori átlagok	−0,23 (0,15)	−0,08 (0,08)	−0,11 (0,07)	−1,21 (0,13)	−1,31 (0,20)	−0,08 (0,08)
2SLS	−0,13 (0,28)	−0,18 (0,24)	−0,13 (0,21)	−1,17 (0,27)	−1,30 (0,48)	−0,18 (0,24)
Az állami nem-bérjellegű kiadások (SRMG)**						
FIML korlátozás nélküli Θ	0,01	−0,38	0,15	0,48	0,62	−0,38
FIML $\alpha_1 = 0$	0,19	−0,30	0,24	0,65	0,88	−0,30
FIML $\beta_1 = 0$	0,54	0	0,54	1,00	1,54	0
FIML $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$	0,42	0	0,52	0,90	1,42	0
A posteriori átlagok	0,58 (0,15)	0,07 (0,07)	0,56 (0,13)	1,09 (0,12)	1,65 (0,19)	0,07 (0,07)
2SLS	0,66 (0,24)	0,15 (0,21)	0,80 (0,20)	1,02 (0,24)	1,82 (0,42)	0,15 (0,21)

* A zárójelben levő számok a standard hibát (szórást) jelölik.

** Az adók és az állami nem-bérjellegű kiadások esetében a 2SLS multiplikátor-értékek megegyeznek a *Goldberger—Nagar—Odeh* (1962) és *Gill—Brissimis* (1978) eredményeivel. Ezek aszimptotikus standard hibája a becsült érték alatt található. A W_2-re vonatkozó multiplikátor-értékünk közvetlenül nem hasonlítható össze az általuk kapott értékekkel, lásd 5. fejezetet.

A 6. táblázatban található különböző becslési technikák esetén a hosszútávú multiplikátor-értékek sokkal közelebb állnak egymáshoz, mint a rövidtávú multiplikátor-értékek.

6. *táblázat*

*A hosszútávú multiplikátorok (LRM) becslései**

	C	I	W_1	P	Y	K
Az állami bérjellegű kiadások ($LRMW_2$)						
FIML korlátozás nélküli Θ	1,57	0	0,82	0,76	2,57	1,28
FIML $\alpha_1 = 0$	1,75	0	0,93	0,82	2,75	2,22
FIML $\beta_1 = 0$	1,87	0	1,06	0,81	2,87	3,40
FIML $\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 0$	1,87	0	1,07	0,79	2,87	3,56
A posteriori átlagok	1,88	0	1,07	0,82	2,88	3,92
	(0,16)		(0,10)	(0,10)	(0,16)	(1,15)
2SLS	1,89	0	1,11	0,78	2,89	3,80
Az adók (LRMT)						
FIML korlátozás nélküli Θ	−0,30	0	−0,16	−1,14	−1,30	−1,94
FIML $\alpha_1 = 0$	−0,60	0	−0,32	−1,27	−1,60	−3,48
FIML $\beta_1 = 0$	−0,72	0	−0,41	−1,31	−1,72	−5,52
FIML $\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 0$	−0,59	0	−0,34	−1,25	−1,59	−5,60
A posteriori átlagok	−0,75	0	−0,42	−1,33	−1,75	−6,35
	(0,24)		(0,13)	(0,11)	(0,24)	(1,74)
2SLS	−0,54	0	−0,32	−1,23	−1,54	−5,95
	(0,20)**				(0,20)**	(1,57)**
Az állami nem-bérjellegű kiadások (LRMG)						
FIML korlátozás nélküli Θ	0,96	0	1,02	0,94	1,96	1,59
FIML $\alpha_1 = 0$	1,21	0	1,18	1,03	2,21	2,81
FIML $\beta_1 = 0$	1,37	0	1,35	1,02	2,37	4,31
FIML $\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 0$	1,32	0	1,33	0,99	2,32	4,43
A posteriori átlagok	1,39	0	1,36	1,04	2,39	4,97
	(0,15)		(0,11)	(0,10)	(0,15)	(1,38)
2SLS	1,33	0	1,37	0,97	2,33	4,69
	(0,13)**				(0,13)**	

* Lásd az 5. fejezet első lábjegyzetét.
** Ezek a *Gill–Brissimis* (1978) féle aszimptotikus standard hibák az összehasonlítás kedvéért.

Az aszimptotikus 2SLS standard hibák valamivel kisebbek, mint az a posteriori szórások.

Összegezve, előzetes megokolásokból és a strukturális forma specifikációjának próbája alapján a $\beta_1 = 0$ megszorítást kedvezőbbnek tarthatjuk. Így az a posteriori elsőrendű momentumokhoz közelálló eredményeket nyerhetünk. A Bayes-féle megközelítésnél azonban kevesebb egzakt korlátozást alkalmazhatunk, mint a likelihood közelítésnél ($\beta_1 = 0$, ill. a β_1 egyenletes eloszlású [0, 1]-en) s több (sztochasztikus) a priori információt használtunk fel, mint a likelihood megközelítésnél (vö. *Drèze*, 1962). Továbbá a Monte-Carlo-módszert alkalmazva kis mintán alapuló a posteriori sűrűségfüggvényt kaptunk a klasszikus aszimptotikus eredmények helyett.

B. Függelék: a Θ a posteriori sűrűségfüggvényének közelítése: kétlépéses megközelítés

Ebben a függelékben bemutatjuk a 3. fejezetben említett közelítő eljárás első fázisában alkalmazott, közelítően normális a priori információt. Ezután azt ismertetjük, hogy az első fázisban az a posteriori momentumokat milyen számszerű értékekkel közelítettük. Elemezzük a két súlyfüggvényt is, melyeket a közelítő eljárás mindkét fázisában alkalmaztunk.

Az első fázist azzal a megjegyzéssel kezdhetjük, hogy a FIML becslése, melyet $\widehat{\Theta}$-vel jelölünk, aszimptotikusan normális eloszlású Θ várható érték vektorral és $Q = -H^{-1}$ kovariancia mátrixszal, ahol H a szimultán lineáris egyenletrendszer (koncentrált) loglikelihood függvényének Hesse-féle mátrixa. Részletesebben lásd *Koopmans—Rubin—Leipnik* (1950, 133—153. o.) művében. Tekintsük ezután a

$$\operatorname{Var}\widehat{\Theta} = Q = P\Lambda P' = \sum_{i=1}^{M} p_i p_i' \lambda_i \tag{B.1}$$

ahol P ortogonális mátrix ($PP' = I$), melynek oszlopai (p_i) a Q ortonormált sajátvektorai. A Λ diagonális mátrix a $Q\lambda_i$ sajátértékeit tartalmazza csökkenő sorrendben. Végül M a Θ mérete. Az első tag $p_1 p_1' \lambda_1$, ahol p_1 a Q legnagyobb sajátértékének megfelelő sajátvektor P-ben, az az irány, amelyben a szórásnégyzet a maximális. Kiszámoltuk a Klein-I. modellre a P mátrixot és a Λ diagonális elemeit. A legnagyobb sajátérték és a második legnagyobb sajátérték aránya hozzávetőleg 22,5, mely azt mutatja, hogy erre a modellre a (B.1) első tagja erősen dominálja a többi tagot.

A következő lépés, hogy a $\widehat{\Theta}$ FIML becslésének aszimptotikus sűrűségfüggvényét alkalmazzuk a likelihood függvény[28] közelítésére. Azaz adott statisztikai információ esetén vesszük a Θ többdimenziós normális sűrűségfüggvényét $\widehat{\Theta}$ átlaggal és Q kovariancia mátrixszal. Ekkor Θ rotációval történő transzformációja a P' mátrixszal a következő:

$$P'(\Theta - \widehat{\Theta}) = u \tag{B.2}$$

ahol u független valószínűségi változók vektora. Könnyen belátható, hogy $\operatorname{var} u_i = \lambda_i$ és a Klein-modell esetére $\operatorname{var} u_1$ erősen domináns. Θ a priori eloszlását úgy definiáljuk, hogy az u-ra adunk a priori információt. Megszorozva (B.2)-t P-vel adódik

$$\Theta = \widehat{\Theta} + u_1 p_1 + \sum_{i=2}^{M} u_i p_i \tag{B.3}$$

[28] Vesd össze *Rothenberggel* (1973) 160. és 161. o. és az ott idézett művekkel.

Legyen u_1 normális eloszlású, $N(\mu; \Phi^2)$, ahol μ és Φ^2 később megadásra kerülő konstansok és legyen $u_2, \ldots, u_M$ normális eloszlású 0 várható értékkel és ω^2 (nagy szám) szórásnégyzettel. Az $u_1, \ldots, u_M$ egymástól független eloszlásúak. Ebből következik, hogy az a priori átlag és variancia:

$$E(\Theta) = \hat{\Theta} + \mu p_1$$

$$\operatorname{Var}(\Theta) = \Phi^2 p_1 p_1' + \omega^2 (I - p_1 p_1') \tag{B.4}$$

A Θ a priori sűrűségfüggvénye:

$$f(\Theta) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\Phi^2}(\Theta - \hat{\Theta} - \mu p_1)'\left[p_1 p_1' + \frac{\Phi^2}{\omega^2}(I - p_1 p_1')\right](\Theta - \hat{\Theta} - \mu p_1)\right\}$$

Feltesszük, hogy ω^2 olyan nagy, hogy az a priori preciziós mátrixban a második tag, $\Phi^2(I - p_1 p_1')/\omega^2$, elhanyagolható az a posteriori elemzésben. Így a közelítő a priori normális eloszlásfüggvényünk:

$$f(\Theta) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\Phi^2}(\Theta - \hat{\Theta} - \mu p_1)'(p_1 p_1')(\Theta - \hat{\Theta} - \mu p_1)\right\}, \tag{B.5}$$

így nem adjuk össze az a priori információt azon irányokban, ahol jelentős statisztikai információ áll rendelkezésre, de azon irányokban összeadjuk, ahol a statisztikai információ gyakorlatilag hiányzik. Azaz a p_1-gyel párhuzamos irányokban tekintetbe vesszük az a priori normális információt, de a p_1-re ortogonális[29] irányban nem adjuk össze.

Most a Bayes-tétel segítségével egyesítjük a közelítő a priori normális eloszlás (B.5) sűrűségfüggvényét a Θ fent adott normális sűrűségfüggvényével, mely a likelihood függvény közelítésére szolgál. Így egy többdimenziós normális a posteriori sűrűségfüggvényt kapunk, melynek első- és másodrendű momentuma *analitikusan* az alábbi módon határozható meg:

$$E(\Theta) = \left[-H + \frac{1}{\Phi^2} p_1 p_1'\right]^{-1}\left[-H\hat{\Theta} + \frac{1}{\Phi^2} p_1 p_1' \hat{\Theta} + \frac{1}{\Phi^2}\mu p_1\right] \tag{B.6}$$

$$\operatorname{Var}(\Theta) = \left[-H + \frac{1}{\Phi^2} p_1 p_1'\right]^{-1} \tag{B.7}$$

Ez a normális sűrűségfüggvény szolgál súlyfüggvényként a közelítő eljárás első szakaszában. Ebben a szakaszban is egyesítjük a Bayes-tétel segítségével a (B.5) közelítő a priori normális sűrűségfüggvényt az (1) kappa-függvénnyel. Az így nyert, a Θ-ra vonatkozó közelítő a posteriori sűrűségfüggvény momentumait nevezzük az első lépés (közelítő) a posteriori momentumainak. Ezeket Monte-Carlo-módszerrel számoltuk ki, a fent adott normális sűrűségfüggvénynyel fontosság szerinti mintavételt hajtva végre. A közelítő a posteriori átlagokat és a közelítő a posteriori kovariancia mátrixot a Monte-Carlo-módszer második menetében a súlyfüggvény momentumaiként alkalmaztuk azért, hogy a pontosságot növeljük. Ez a módszer a *szekvenciális* Monte-Carlo-módszer néven ismert (*Halton–Hammersley–Handscomb*, 1962). A közelítő a posteriori momentumokat a *Powell* (1964) módszerrel számoltuk ki.

[29] Ez a megközelítés lényegében általánosítható abban az esetben, ha több olyan irány is van, ahol a statisztikai információ hiányzik.

Mielőtt megvizsgálnánk az első lépésben kapott számszerű eredményeket, először meg kell adnunk a (B.5)-ben szereplő μ és Φ^2 konstansokat. A Θ-ra vonatkozó a priori elképzelésünk, hogy ez a paraméter-vektor az egységtartományban fekszik. Ekkor a μ-t és Φ^2-et a következő szélsőérték feladat megoldásaként határozhatjuk meg:

$$\min \mu^2/\Phi^2 \tag{B.8}$$

feltéve, hogy

$$0 < E(\Theta_i) \pm k\sigma_i < 1 \qquad (i = 1, \ldots, M) \tag{B.9}$$

ahol $E(\Theta_i)$ a (B.4) a priori várható értéke és σ_i a feltételes szórás $u_2 = \ldots = u_M = 0$ esetén, mely a (B.4)-ből az utolsó tag elhagyásával határozható meg. A k konstansról tegyük fel, hogy felveszi az 1, 2, 3 integer értékeket és így a (B.9) intervallumhoz tartozó a priori valószínűséget mutatja. A (B.9)-et átalakíthatjuk a következőképp:

$$0 < \widehat{\Theta}_i + \mu p_{1i} + k\Phi p_{1i} < 1 \quad (i = 1, \ldots, M) \tag{B.10}$$

Ez a korlátos nemlineáris optimalizálási feladat könnyen megoldható a Klein-I. modell esetére. A (B.10) korlátozások $i = 2$ és $i = 4$-re rögzítettek. A p_1 sajátvektor[30] elemeiből levezethető:

$$\mu = k\Phi < 1{,}56 \qquad i = 2 \tag{B.11}$$

és

$$\mu - k\Phi > 1{,}07 \qquad i = 4 \tag{B.12}$$

A megoldások μ-re és Φ-re: $\mu = 1{,}315$ és $\Phi = 0{,}245/k$. Ezeket az értékeket behelyettesíthetjük a (B.5) a priori sűrűségfüggvénybe.

A 7. táblázat bemutatja a Θ a posteriori momentumaira vonatkozó közelítések első fázisában kapott számszerű eredményeket[31] $k = 1, 2, 3$ esetben. A 7. táblázat felső részén a (B.6)-ban analitikusan nyert aszimptotikus a posteriori átlagokra vonatkozó eredményeket találjuk. Ez alatt mutatjuk be a közelítő a posteriori móduszokat és a közelítő a posteriori átlagokat és szórásokat. Ezen első lépés eredményei érdekes összehasonlítást tesznek lehetővé az aszimptotikus elemzés és a véges mintán alapuló elemzés között. Kiderül, hogy az aszimptotikus elemzés jó eredményeket ad az α_3, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 paraméterekre. Az α_1, α_2 és β_1-re vonatkozó eredmények azonban nagy eltéréseket mutatnak. Ez annak a következménye, hogy a kis mintán alapuló a posteriori sűrűségfüggvény erősen ferde, amit szimmetrikus aszimptotikus a posteriori sűrűségfüggvény nem képes megfelelően leírni.

A közelítő eljárás második fázisában felhasználjuk az első fázisban kapott a posteriori momentumokat a súlyfüggvény kialakítására. A (csonkított) többváltozós Cauchy-családba tartozó eloszlást alkalmazzuk e célra.[32] Főleg az első

[30] Ezek a *Van Dijk—Kloek* (1977a) cikkben adottak.

[31] A *Van Dijk—Kloek* (1977a, 23. o.) cikkében is megtalálhatók ezek a számszerű eredmények. Megjegyezzük, hogy az itt közölt eredményeket az első lépésbeli közelítésként interpretáljuk, mely az (1) kappa-függvényhez szükséges jó súlyfüggvény kialakításában nyújt segítséget; lásd még korábbi cikkünk következtetéseit.

[32] Normális súlyfüggvénnyel végzett kísérletek a k/I arány utolsó értékeinek explozív viselkedését eredményezték, ahol k az (1)-ben adott és I a súlyfüggvény. Többváltozós Chauchy-eloszlásból generált véletlen mintavételeket ismertettünk a *Kloek—Van Dijk* (1978) cikkben. A minták generálásához szükséges a posteriori kovariancia mátrixot helyhiány miatt nem közöljük.

7. *táblázat*

A Θ a posteriori momentumai; Az első lépés közelítései

k	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	γ_1	γ_2	γ_3
A fontosság szerinti mintavételben használt aszimptotikus a posteriori átlagok (= móduszok)									
1	0,40	0,07	0,78	0,14	0,62	0,17	0,30	0,25	0,21
2	0,43	0,05	0,78	0,18	0,61	0,17	0,30	0,25	0,21
3	0,43	0,05	0,78	0,18	0,61	0,17	0,30	0,25	0,21
A posteriori móduszok									
1	0,14	0,17	0,79	−0,06	0,70	0,17	0,32	0,24	0,20
2	0,19	0,13	0,78	0,11	0,59	0,16	0,35	0,22	0,19
3	0,20	0,11	0,78	0,18	0,54	0,15	0,36	0,21	0,19
A posteriori átlagok*									
1	0,09	0,18	0,79	−0,14	0,69	0,16	0,29	0,25	0,22
2	0,17	0,13	0,79	0,08	0,57	0,15	0,32	0,23	0,20
3	0,19	0,11	0,78	0,16	0,52	0,15	0,34	0,22	0,20
A posteriori szórások*									
1	0,11	0,09	0,04	0,17	0,14	0,04	0,07	0,05	0,05
2	0,09	0,08	0,04	0,11	0,10	0,03	0,06	0,05	0,05
3	0,09	0,08	0,04	0,08	0,08	0,03	0,06	0,05	0,04

* A fontosság szerinti mintavétel mindkét menetében 15 000 mintavételen alapulnak.

lépésbeli a posteriori eredményeket alkalmaztuk, melyek egy részét a 7. táblázatban mutattuk be $k = 2$ esetén. Az egységintervallumon kívüli mintákat elvetjük,[33] ahogy a 2. fejezetben megadott a priori eloszlásunk előírta. Ahogy az első fázisban tettük, egy külön menetben szekvenciális Monte-Carlo-módszert alkalmaztunk, hogy növeljük a pontosságot, mellyel a súlyfüggvény az (1) kappa-függvényt közelíti. Kiderült, hogy súlyfüggvényünk pontos a posteriori eredményeket ad, melyeket a 4. és 5. fejezetben mutattunk be. Az összes a posteriori átlag számítási pontosságát a C függelékben elemezzük.

[33] Az elvetett minták aránya az összes mintán belül 0,44. Ez viszonylag magasnak tűnik, de tisztában kell lenni azzal, hogy a modern számítógépekkel nagyon gyorsan generálhatók véletlen számok és a számítási idő zömét a k/I kiszámítása emészti fel, melyet az elvetett mintákra nem számítunk ki. Az 1. és 2. táblázatban közölt a posteriori eredmények számítása csupán néhány percet vesz igénybe egy IBM 370/158 számítógépen. Az a posteriori peremsűrűségfüggvényekre és a dinamikus viselkedés a posteriori valószínűségre vonatkozó eredmények kiszámítása 10 és 15 perc közötti számítási időt igényelt.

Természetesen ez a kétlépéses közelítő eljárás nem az egyetlen lehetséges módja az a posteriori sűrűségfüggvény (1) közelítésnek. Esetünkben a *Van Dijk–Kloek* (1977a) cikkben közölt elemzésből tudjuk, hogy a likelihood függvény felületén egy csúcs van. Ezt az információt felhasználtuk az első fázisban az a posteriori sűrűségfüggvény közelítésének konstrukciójában. Azonban kedvező lenne egy mechanikus eljárás, pl. elindulhatunk egy egyenletes eloszlású súlyfüggvénnyel relatíve kis számú véletlen mintát alkalmazva. Ekkor a közelítő a posteriori átlagok felhasználhatók a 0-nál és 1-nél csonkított Cauchy-féle súlyfüggvény momentumaiként. Várható, hogy β_1 esetében a közelítő a posteriori momentumok kis pozitív értékeket eredményeznek. Ez a folyamat a fontosság szerinti mintavétel néhányszori megismétlését jelentheti. A súlyfüggvény kialakítására vonatkozó különböző megközelítések összehasonlítása további vizsgálat tárgyát képezi.

C. Függelék: a számítás pontosságának becslése

A *p*osteriori *m*omentumokat számolunk *M*onte-*C*arlo-módszerrel (PMMC). Ez azt jelenti, hogy a szükséges integrálokat meghatározott valószínűségi változók várható értékeként interpretáljuk. Ezen valószínűségi változókra vonatkozó megfigyeléseinket az együttes eloszlásukból húzzuk, melynek sűrűségfüggvénye a súlyfüggvény. Így az integrálási feladatot egy, a hagyományos mintavételi elméletben használatos elemi statisztikai becslési feladattá alakítottuk át. (Részletesebben lásd *Kloek–Van Dijk*, 1978.) Ebből következik, hogy eredményeink pontossága közvetlenül a mintavételek számától (N) függ. N elég nagy értéke esetén a jól ismert aszimptotikusan normális eredmények alkalmazhatók. Így a PMMC eredmények numerikus pontosságát a következő valószínűségi állítással becsülhetjük:

$$P\left[\frac{|H-\mu|}{\sigma/\sqrt{N}} < 1{,}96\right] \geq 0{,}95 \tag{C.1}$$

mely 95%-os konfidencia intervallumot jelent a μ integrálra vonatkozóan egy H Monte-Carlo becslés körül. A σ^2 paraméter az egyes véletlen minták varianciáját jelöli. A μ és σ^2 becslésének számításáról azon esetekre, ahol μ integrálok aránya, bővebben lásd: *Kloek–Van Dijk* (1978, 6. fejezet).

Az elsőrendű a posteriori momentumokat 2 helyiértékes pontossággal mutattuk be e cikkben, s az ezen momentumokra vonatkozó konfidencia intervallumot használjuk integráló eljárásunk számítási pontosságának mértékéül. Ezt mutatja a 8. táblázat. Az elsőrendű PMMC értékeket láthatjuk a 95%-os számított konfidencia intervallum $\left(= 1{,}96\sigma/\sqrt{N}\right)$ fél szélességével együtt. A standard kerekítési hibára vonatkozó szabályok szerint két decimális számítási pontosság azt jelenti, hogy a számokat $\pm 0{,}005$ maximális hibával közöltük. A 8. táblázatból látható, hogy a strukturális paraméterekre a 95%-os konfidencia intervallum minden esetben kisebb, mint $2 \times 0{,}005$. A tényezőkre az az eredmény adódik, hogy minden számított konfidencia intervallum kisebb, mint $2 \times 0{,}01$, kivéve a redukált nemzeti jövedelem-egyenletben az állami nem-bérjellegű kiadások tényezőjét és a végső tőke-egyenletben szereplő tényezőket. Minden eredményre $H = 15\,000$. Egy döntő számítógépes futás $N = 60\,000$-re ugyanazt az eredményt adta, így állíthatjuk, hogy a szá-

8. *táblázat*

*Az a posteriori átlag becslések számított konfidencia intervallumai**

Strukturális paraméterek

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	γ_1	γ_2	γ_3
0,12 (0,0032)	0,19 (0,0031)	0,79 (0,0016)	0,06 (0,0022)	0,64 (0,0036)	0,15 (0,0016)	0,34 (0,0039)	0,23 (0,0034)	0,19 (0,0022)

Rövidtávú multiplikátorok

	C	I	W_1	P	Y	K
W_2	1,24 (0,0066)	0,06 (0,0022)	0,44 (0,0065)	0,86 (0,0036)	2,30 (0,0082)	0,06 (0,0022)
T	−0,23 (0,0066)	−0,08 (0,0031)	−0,11 (0,0032)	−1,21 (0,0057)	−1,31 (0,0088)	−0,08 (0,0031)
G	0,58 (0,0092)	0,07 (0,0027)	0,56 (0,0085)	1,09 (0,0045)	1,65 (0,0112)	0,07 (0,0027)

Hosszútávú multiplikátorok

	C	I	W_1	P	Y	K
W_2	1,88 (0,0056)	0	1,07 (0,0034)	0,82 (0,0035)	2,88 (0,0056)	3,92 (0,0550)
T	−0,75 (0,0082)	0	−0,42 (0,0046)	−1,33 (0,0038)	−1,75 (0,0082)	−6,35 (0,0737)
G	1,39 (0,0054)	0	1,36 (0,0041)	1,04 (0,0033)	2,39 (0,0054)	4,97 (0,0632)

* A táblázat a számított konfidencia intervallumok középpontját tartalmazza a zárójelben a megfelelő fél sávszélességgel ($1{,}96\sigma/N$).

mított konfidencia intervallum szélessége 2-vel osztható anélkül, hogy a középpontja változna. Ez a hibabecslés megerősíti azt az állítást, hogy – talán a végső tőke-egyenleteket kivéve – minden figyelembe vett a posteriori eredményre egy súlyfüggvény alkalmazható.

(Beérkezett: 1979. március 10-én.)

IRODALOM

1. Chernoff, H.–Divinsky, N.: The computation of maximum likelihood estimates of linear structural relations. In: Hood, W. C.–Koopmans, T. C. (szerk.): Studies in econometric method. New Haven, 1953. Yale University Press.
2. Dhrymes, Ph. J.: Restricted and unrestricted reduced forms: asymptotic distribution and relativ efficiency. Econometrica. 1973. 41. sz. 119–134. o.
3. Drèze, J. H.: The Bayesian approach to simultaneous equation estimation, O. N. R. Research Memorandum 67, Northwestern University, 1962.
4. Drèze, J. H.: Bayesian limited information analysis of the simultaneous equations model. Econometrica 1976. 44. sz. 1045–1075. o.
5. Gill, L.–Brissimis, S. N.: Polynomial operators and the asymptotic distribution of dynamic multipliers. Journal of Econometrics. 1978. 7. sz. 373–384. o.

6. GOLDBERGER, A. S.—NAGAR, A. L.—ODEH, H. S.: The covariance matrices of reduced form coefficients and of forecasts for a structural econometric model. Econometrica. 1961. 29. sz. 556—573. o.
7. HALTON, J. H.: Sequential Monte Carlo. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1962. 58. sz. 57—78. o.
8. HAMMERSLEY, J. M.—HANDSCOMB, D. C.: Monte Carlo methods. London, 1964. Methuen.
9. HARKEMA, R.: Simultaneous equations, a Bayesian approach. Rotterdam, 1971. Rotterdam University Press.
10. HENDRY, D. F.: Maximum likelihood estimation of systems of simultaneous regression equations with errors generated by a vector autoregressive process. International Economic Review. 1971. 12. sz. 257—272. o.
11. HIMMELBLAU, D. M.: Applied nonlinear programming. New York, 1972. McGraw-Hill.
12. JORGENSON, D. W.—BRUNDY, J. M.: Consistent and efficient estimation of systems of simultaneous equations by means of instrumental variables. In ZAREMBKA, P. (szerk.): Frontiers in econometrics. New York, 1973. Academic Press.
13. KLEIN, L. R.: Economic fluctuations in the United States, 1921—41. New York, 1950. Wiley.
14. KLOEK, T.—VAN DIJK, H. K.: Bayesian estimates of equation system parameters; an application of integration by Monte Carlo. Econometrica. 1978. 46. sz. 1—19. o.
15. KOOPMANS, T. C.—RUBIN, H.—LEIPNIK, R. B.: Measuring the equation systems of dynamic economics. In: KOOPMANS, T. C. (szerk.): Statistical inference in dynamic economic models. Cowles Commission Monograph 10. New York, 1950. Wiley.
16. MIZON, G. E.: Inferential procedures in nonlinear models: an application in a U. K. industrial cross section study of factor substitution and returns to scale. Econometrica, 1977. 45. sz. 1221—1242. o.
17. MORALES, J.-A.: Bayesian full information structural analysis. Berlin, 1971. Springer Verlag.
18. OBERHOFER, W.—KMENTA, J.: Estimation of standard errors of the characteristic roots of a dynamic econometric model. Econometrica. 1973. 41. sz. 171—177. o.
19. POWELL, M. J. D.: An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, Computer Journal 1964. 5. sz. 155—162. o.
20. ROTHENBERG, T. J.: Efficient estimation with a priori information. New Haven, 1973. Yale University Press.
21. ROTHENBERG, J. J.—LEENDERS, C. T.: Efficient estimation of simultaneous equation systems. Econometrica. 1964. 32. sz. 57—76. o.
22. SCHMIDT, P.: The asymptotic distribution of dnyamic multipliers. Econometrica. 1973. 41. sz. 161—164. o.
23. THEIL, H.—BOOT, J. C. G.: The final form of econometric equation systems. Review of the International Statistical Institute. 1962. 30. sz. 136—152. o. Új kiadása: ZELLNER, A. (szerk.): Readings in economic statistics and econometrics. Boston, 1968. Little, Brown and Co.
24. THEIL, H.—BOOT, J. C. G.—KLOEK, T.: Operations research and quantitative economics. New York, 1965. McGraw-Hill.
25. USPENSKY, J. V.: Theory of equations. New York, 1948. McGraw-Hill.
26. VAN DIJK, H. K.—KLOEK, T.: Likelihood diagnostics and a posterior analysis of Klein's model I. Working Paper. Rotterdam, 1977a. Econometric Institute, Erasmus University.
27. VAN DIJK, H. K.—KLOEK, T.: Predictive moments of simultaneous econometric models, a Bayesian approach. In: AYKAÇ, A.—BRUMAT, C. (szerk.): New developments in the applications of Bayesian methods. Amsterdam, 1977b. North-Holland.
28. ZELLNER, A.: An introduction to Bayesian inference in econometrics. New York, 1971. Wiley.
29. ZELLNER, A.: Maximal data information prior distributions. In: AYKAÇ, A.—BRUMAT, C. (szerk.): New developments in the application of Bayesian methods. Amsterdam, 1977. North-Holland.

POSTERIOR ANALYSIS OF KLEIN'S MODEL I

This paper gives a posterior analysis of Klein's well known model I (Klein [1950]). The underlying prior distribution of the parameters which are interesting for economists is uniform on finite intervals, which exclude "wrong" signs. Monte Carlo is used as a numerical integration method in order to compute posterior results which include posterior moments and marginal posterior densities for structural parameters and for short-run and long-run multipliers. Special attention is paid to the problem of constructing a good weighting function, which is required in the Monte Carlo procedure. In addition, the posterior probability that the model is of the damped oscillatory type is computed and found to be 0.97.

АПОСТЕРИОРНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ-I КЛЕЙНА

В данной статье рассматривается апостериорный анализ известной модели-I Клейна (Клейн, 1950). Априорное распределение экономически важных параметров является стандартным распределением, интерпретируемым для конечных величин, из которых исключены «плохие» знаки. Метод Монте-Карло был использован для вычисления апостериорных моментов структурных параметров одновременных и запаздывающих мультипликаторов, а также функции предельной плотности. Специальное внимание было уделено формулировке подходящей функции веса, которая необходима для применения метода Монте-Карло. Была вычислена апостериорная вероятность того, что модель выполняет затухающиеся колебания и полученное значение было равно 0,97.

Dobó Andor

Elsőbbségi osztályozáson alapuló egyetértés létrehozása

Bevezetés

Az utóbbi években számos szerző foglalkozott preferencia-sorrend megállapításával csoportos (kollektív, testületi) döntések, illetve minősítések alapján. Ilyen problémákkal egyre gyakrabban találkozunk különböző területeken, így pl.: új termékek piacra dobásakor, kutatási-fejlesztési tervek elsőbbségének eldöntésénél, szavazási rendszerek tervezésekor stb. Az eljárásokról és alkalmazásuk lehetőségeiről átfogó képet nyújt pl. *Kindler—Papp* [1] és [2] munkája. (Ezekben többek között példák találhatók személygépkocsik minősítésére, beruházási változatok összehasonlítására és értékelésére, gyártmánystruktúra és gyártmányszínvonal vizsgálatára stb.) Számos szerző, közöttük *Black* [3], *Davis* és szerzőtársai [4], valamint *Riker* [5] különösen a választásokkal és a szavazással kapcsolatban végzett tanulmányokat. *Brightwell* és *Mehndirata* [6] a katonai támaszpontokkal kapcsolatos konstrukciós tervek elsőbbségének problémáját vizsgálta. *Brightwell* és *Cook* [7] bemutat egy elképzelést a katonai előléptetési bizottság döntéseinek egyesítésére.

Az irodalomban találhatók más példák is. Lásd pl.: *Shocker* és *Srinivasan* [8], *Dobó* [9], [10], *Dobó* és *Szajcz* [11], *Dobó—Szajcz—Fenyves* [12]. Csaknem minden példában a cél az, hogy az egyéni elsőbbségben részesítést csoportos vélemény nyilvánítási funkcióba vagy egyhangú besorolásba egyesítsék.

Valamennyi besorolási (osztályozási, rangsorolási) feladatot két alapvető kategóriába lehet szétválasztani; nevezetesen *kardinális* és *sorrendi* feladatra. A kardinális besorolás létrehozása olyan esetekben fordul elő, amikor az egyén nemcsak az egyik alternatívának a másikkal szembeni előnyét képes kifejezni, hanem ennek az előnynek a mértékét is. A sorrendi osztályozások általában nem fejezik ki kellően az előny mértékét, jóllehet a legtöbb esetben az osztályozás végrehajtására valamilyen *metrikát* használnak.

Utalásképpen teszünk említést arról, hogy ha az (x, y) pontpár távolságát $d(x, y)$-nal jelöljük, és az $x, y, z \in E$ esetén eleget tesz az alábbi követelményeknek:

$$\text{I. } d(x, x) = 0,$$

$$\text{II. } d(x, y) = d(y, x) > 0 \quad (\text{ha } x \neq y),$$

$$\text{III. } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{háromszög egyenlőtlenség}),$$

akkor az ilyen tulajdonságú $d(x, y)$ *függvényt metrikus függvénynek, vagy röviden metrikának nevezzük.*

Egy igen általánosnak mondható metrika, amely tetszőleges $1 \leq p < \infty$ érték mellett értelmezhető a Minkowski-féle, s ez a következőképpen van definiálva:

$$d_p(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |^p\right]^{1/p} . \tag{1}$$

A Minkowski metrika $p = 2$ esetén az euklidesi metrikával (d_2) azonos; $p = 1$ esetén pedig a távolságmérő függvény (d_1) a koordinátánkénti eltérések összegével egyenlő.

A *cluster-analízis* alkalmával például ezt a két speciális esetet szokták használni. Erre nézve bővebb információ *Füstös—Meszéna—Simonné* [13], valamint *Párniczky* [14] munkájában található. Ezekből megtudhatjuk azt is, hogy számos esetben a metrika helyett a pontok közötti hasonlóságot definiálják úgy, hogy ennek értéke nulla és egy közé essék. $h(x, y)$-nal jelölve a hasonlóságot, megkövetelik, hogy $x = y$ esetén $h(x, x) = 1$ legyen; vagyis minden pont (tulajdonság, tárgy, objektum stb.) saját magához hasonlítson a legjobban. Ilyen esetben az alkalmazásnál a minimális távolság maximális hasonlóságnak felel meg és fordítva. Ismertebb hasonlósági mérték, például a (0, 1) intervallumra transzformált korrelációs együttható, a *Russel* és *Rao*-, a *Sokal* és *Michener*-, a *Jaccard*- stb. féle formulákkal kifejezett mérték. Különösen sok előnyös tulajdonsággal rendelkezik a [12]-ben tárgyalt *hasonlósági függvény*. (Ebben a dolgozatban a szerzők kimutatják azt is, hogy az általuk kétféle módon származtatott hasonlósági mérték milyen kapcsolatban áll a *Jeffreys*-féle invarianciával, a *Shannon*-féle entrópiával, az információnyerés kifejezésével, a *Hellinger*-integrállal stb. Bemutatják alkalmazását függvényközelítés esetén. Speciális választások mellett valószínűségszámítási értelmezését adják, s ez magában foglalja a korrelációs együtthatót is. Alkalmazási példaként az 1976. évi nyári olimpián elért helyezések alapján az országok közötti rangsorolást számítják ki vele.)

Ezúttal távolságmértékkel kifejezett sorrendiségi feladatokkal s kompromisszumok (kölcsönös engedményekkel járó megegyezések) létrehozásának problémáival foglalkozunk. Célunk: egy sorrendi típusba tartozó feladatnak kardinális típusú feladattá tétele. Mielőtt hozzáfognánk, áttekintjük az irodalmat, s röviden ismertetjük az előzményeket.

Az előzmények áttekintése

Az elsők között *Arrow* [15] volt 1951-ben, aki a közös vélemény kifejezésére alapvető követelményként bizonyos axiómákat állított fel. Amikor az egyéni előnyben részesítések sorrendi besorolások formájában vannak megadva, a közös vélemény legegyszerűbb formája a többségi elven alapuló határozat. *Inada* [16], [17] bemutatott olyan körülményeket, amelyeknél az egyszerű többségi elven alapuló döntés olyan társadalmi jóléti függvény, amely kielégíti *Arrow* feltételeit. *Bowman* és *Colantoni* [18], [19], valamint *Blin* és *Whinston* [20] munkái megmutatták, hogy a többségi elven alapuló feladat tranzitivitás mellett egész értékű programozási modellként megoldható.

Kendall [21] a bizottsági vélemény egy más irányú megközelítését javasolta. Szerinte, ha az érdekeltek az előnyben részesítéseket elsőbbségi vektorok formájában adják meg, akkor a közös vélemény kifejezését úgy származtathatjuk, hogy egyszerűen összeadjuk a tagok által jellemzett vektorokat és azok átlagát vesszük. Bár ez a megközelítésmód nem vezet szükségszerűen olyan közös véleményhez, amely minden esetben rendelkezne egy társadalmi választási függvény által mutatott és elvárható sajátsággal, de az összes rendelkezésre álló eljárás közül valószínűleg a legszélesebb körben elterjedt és használatos.

1962-ben *Kemeny* és *Snell* [22] ezen a területen új irányú kutatást kezdeményezett, s azt javasolták, hogy a bizottsági besorolásokat „távolsági mérték" formájában jellemezzék. A besorolások egy párjára vonatkozó ilyen mérték a besorolások közötti összefüggés (vagy hiányának) kölcsönös kapcsolatát fejezné ki, jellemezné. *Kemeny* és *Snell* olyan axiómák felállítását javasolta, amelyet bármelyik ilyen mérték kielégít; bizonyították ennek létezését és egyértelműségét. Az axiómák megválasztása hasonló az *Arrow* által megadotthoz, kivéve azt, hogy nem igényli a „jelentéktelen alternatívák" kikötését. A választott távolsági függvények mellett (d_1 és d_2 metrikák) *Kemeny* és *Snell* a medián és az átlagbesorolásokat a közös vélemény elfogadható formájaként javasolták. *Cook* és *Saipe* [23] kidolgozott egy elválasztási és korlátozási algoritmust a sorrendi besorolások mediánjának meghatározására. Ennek az algoritmusnak számítógépes tanulmányozását [24]—[26]-ban találjuk. *Bogart* [27], [28] kifejlesztette a részleges sorrendek közötti távolság elméletét. Ez tulajdonképpen a *Kemeny* és *Snell* eredményeinek kifejlesztése egy jelentősen szélesebb feladatkörre. Figyelembe veszi a tranzitív és intranzitív elrendezéseket, bebizonyítja egy egyértelmű távolsági függvény létezését, majd meghatározza annak formáját. Az eddigi megközelítésektől eltérően *Dobó* és *Szajcz* [11] a vélemény nyilvánítások ismeretében a rangsorolást valószínűségszámítási alapon tárgyalja.

Legújabban *Cook* és *Seiford* [29] végzett sikeres és biztató vizsgálatokat a témakörben. Dolgozatukban az I—III metrikus tulajdonságokat axiómának tekintve további három axiómát vezetnek be, vagyis összesen hat igen kézenfekvőnek mondható axiómával dolgoznak, amelyek egyébként hasonlóak *Kemeny*, *Snell* és *Bogart* axiómáihoz. Bizonyítják az axiómákat kielégítő egyértelmű távolsági függvény létezését és leszármaztatják a függvény formáját. Az egyértelmű d-t, amely kielégíti az axiómákat, a következőképpen adják meg:

$$(2)\qquad d = d(a, b) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|,$$

ahol

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

a két besorolást reprezentáló vektor, amelynek komponensei az $(1, 2, \ldots, n)$ számok egy permutációja.

Amennyiben m számú bizottsági tag valamely $T_1, T_2, \ldots, T_n$ tulajdonságra (eseményre, tárgyra, célra stb. vonatkozóan) sorrendi besorolást végez, úgy a k-adik bizottsági tag által rögzített sorrendet az

$$a^k = \begin{bmatrix} a_1^k \\ a_2^k \\ \vdots \\ a_n^k \end{bmatrix}$$

vektor jellemzi. *Cook* és *Seiford* értelmezése (4.1. definíciója) szerint medián rangsorolást eredményez az a $\hat{b}$ vektorral jellemzett besorolás, amely minimálisra csökkenti a teljes abszolút távolságot, vagyis az

(3) $$M(b) = \sum_{k=1}^{m} d(a^k, b) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} | a_i^k - b_i |$$

kifejezést. A $b \in R^n$ esetén (itt R^n a rendezett valós szám-n-esek halmaza) $M(b)$ a minimumát akkor éri el, amikor

(4) $$b_i = \text{medián } \{a_i^k\}_{k=1}^{m} = b_i'.$$

Jelölje B az n számú ,,tárgy'' összes besorolásainak a halmazát. [Az axiómák és definíciók értelmében például $n = 2$ esetén három lehetséges besorolás van, éspedig: (1,2), (2,1) és (1,5), (1,5); ez utóbbit ,,zéró besorolásnak'' hívják.]

Legyen b' az a vektor, melynek komponensei $b_1', b_2', \ldots, b_n'$. Ekkor

(5) $$\min_{b \in B} \sum_{k=1}^{m} d(a^k, b) \geq \min_{b \in R^n} \sum_{k=1}^{m} d(a^k, b) = \min_{b \in R^n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} | a_i^k - b_i |$$

és

(6) $$M(b') \leq M(b) \text{ minden } b \in B\text{-re}.$$

A közöltek alapulvétele mellett *Cook* és *Seiford* [29]-ben szereplő 4.1. tétele az alábbiakat mondja ki:

Legyen $\{a^k\}_{k=1}^{m}$ a besorolások halmaza és b' komponenseit (4) határozza meg. Ha $b' \in B$, akkor b' medián rangsorolást eredményez. Ezzel kapcsolatban a szerzők megjegyzik, hogy az alkalmazásoknál gyakran elő fog állni, hogy a (6)-nak eleget tevő b' vektor nem jelent besorolást, azaz $b' \notin B$.

Általánosságban a medián rangsorolás egy speciális algoritmust igényelne; erre a kérdésre azonban a szerzők egy következő tanulmányban szándékoznak visszatérni.

Amennyiben korlátozzuk a teljes besorolások halmazát, úgy a problémát a lineáris programozási formulázások valamelyikével lehet kezelni. Erre az esetre *Cook* és *Seiford* két modellt is közöl.

Az 1. modellben a cél olyan b vektor keresése, melynek b_i komponensei a lehető legközelebb esnek a_i^k értékeihez az összes i, k esetében. Felhasználva *Gaiha* és *Gupta* [30] eredményeit, a problémát egy lineáris programozási (LP) feladatra vezetik vissza. Ezt az LP modellt $2^n - 1 + mn$ korlátozó feltétel és $(2m + 1)n$ változó jellemzi. Ebből kifolyólag nagyméretű feladatoknál a számítógépes tárolóigény kritikussá válhat.

A feladatot hatásosabban lehet megoldani úgy, ha hozzárendelési feladatként fogjuk fel. A problémát ilyen értelemben tárgyalja a 2. modell. Eszerint, ha

(7) $$d_{ik} = \sum_{l=1}^{m} | a_i^l - k |,$$

akkor meghatározandó

$$\min_{x_{ik}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_{ik} x_{ik} \tag{8}$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1 \quad \text{minden } k\text{-ra,} \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1 \quad \text{minden } i\text{-re} \tag{10}$$

és $x_{ik} \geq 0$ minden i, k-ra. Itt tehát

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ha } b_i = k \\ 0, & \text{máskülönben.} \end{cases}$$

A minimalizálás után kapott $[x_{ik}]$ mátrix ismeretében a keresett $\hat{b}$ vektor i-edik komponense azzal a k értékkel lesz egyenlő, amelyre nézve $x_{ik} = 1$.

Mivel a 2. modellben szereplő hozzárendelési feladat megoldására rendkívül hatékony megoldási eljárások léteznek és ezeket a szakirodalom részletesen tárgyalja, ezért *Cook* és *Seiford* ezt a modellt a feladat kezelésére meglehetősen alkalmasnak találja. Hozzáteszik még, hogy ez a megoldásmód lehetővé teszi, hogy a besorolásokat egy polyhedron extrém pontjaival azonosítsuk, így érzékenységi elemzés is végezhető.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy a közölt előzmények és eredmények ismeretében hogyan lehet a szóban levő sorrendi problémákat a kardinális problémák kategóriájába helyezni. Más szóval, hogyan lehet olyan információkra szert tenni, amelyek a döntések helyes kimeneteléről, megbízhatóságáról, többet nyújtva, jobban tájékoztatnak bennünket.

Az előzmények felhasználása

Tegyük fel, akár az 1., akár a 2. modell alapján vagy valamilyen más úton már megkaptuk a keresett $\hat{b}$ vektort, amely tehát valamilyen értelmezés mellett bizonyos egyetértést fejez ki, s komponensei az $(1, 2, \ldots, n)$ számok egy permutációja.

A $\hat{b}$ ismeretében képezzük az $a^k - \hat{b} = v^k$ vektort. Jelölje i_k a v^k vektor azon komponenseinek a számát, amelynek értéke nulla. Nyilvánvalóan $0 \leq i_k \leq n$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Jelölje A_k azt az eseményt, hogy a k-adik $(k = 1, 2, \ldots, m)$ tag (pl. szakértő) jól ad meg egy komponenst, illetve jó helyre sorol egy tulajdonságot. Legyen $P(A_k)$ az A_k esemény bekövetkezésének a valószínűsége. Továbbá legyen

$$C_{kjl} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } k\text{-adik tag a } j\text{-edik helyre sorolja az } l\text{-edik tulajdonságot} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{11}$$

Itt $l = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

A tagok által egymástól függetlenül alkalmazott konkrét besorolások ismeretében *Dobó* és *Szajcz* [11] kimutatták: annak a valószínűségét, hogy az l-edik tulajdonságra nézve a j-edik helyre sorolás a helyes helyre sorolás — feltéve, hogy azok a tagok, akik ezt a besorolást választották jónak, a besorolás alkalmával ezt a helyet tüntették fel ténylegesen is — az alábbi kifejezés adja:

$$R_{jl} = 1 - \prod_{k=1}^{m} [1 - P(A_k)]^{C_{kjl}}. \tag{12}$$

Ennek alapján az l-edik tulajdonságot arra a helyre soroljuk, amelynek „jelzőszáma" megegyezik azon j index értékével, melyre R_{jl} értéke maximális.

Amennyiben R_{jl} több j indexre is felveszi a maximumát, akkor ezek közül véletlenszerűen választunk egyet és ez határozza meg a besorolás helyét; vagy valamilyen más meggondolással döntünk a lehetséges besorolási helyek egyike felől. (Ez a „helyre-sorolás" nem feltétlenül eredményez egyértelmű rangsorolást. Hozzárendelési feladatként való értelmezéssel azonban már azt kapunk.)

A $P(A_k)$ valószínűségek ismeretében a számítás gyakorlati kivitelezése nyilván nem okoz gondot. Amennyiben ezek a valószínűségek nem ismeretesek, akkor jobb híján becsüljük $P(A_k)$ értékét a $p_k = \frac{i_k}{n}$ értékkel, s (12) alapján így végezzük el a kívánt számításokat.

Nyilvánvaló, hogy a besorolásról ezáltal többlet információhoz jutunk, mivel nem csupán egy kívánt rangsort kapunk, hanem tájékozódást arra nézve is, hogy hozzávetőlegesen mekkora annak a valószínűsége (R_{jl}), hogy azok a véleményt nyilvánító tagok, akik egymástól függetlenül az l-edik tulajdonságot a j-edik helyre sorolták, nem tévedtek.

A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy az egyes tagoknak mennyire egyezett a besorolása a közös véleményt kifejező besorolással. Kézenfekvőnek mutatkozna ezt az értéket a $d_1(a^k, \hat{b})$, illetve $d_2(a^k, \hat{b})$ metrikákkal kifejezni. A d_1 metrika alkalmazásának hátránya, hogy nem eléggé érzékenyen fejezi ki a különbségeket. A d_2 viszont „érzékenyen" reagál valamely komponens jelentősebb eltérésére.

Áthidaló megoldásként célszerűnek látszik az összehasonlítást a

$$H_{\alpha,\beta}(a^k, \hat{b}) = \lambda(P_k, Q) \left[\frac{1}{PQ} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(a_i^k \hat{b}_j)^{\alpha}}{(a_j^k \hat{b}_i)^{\alpha-1}} \right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \tag{13}$$

hasonlósági függvény (lásd [12]) alapján végezni.

Itt $\beta > 0, \alpha \geq 0, \alpha \neq 1$ valós számok:

$$P_k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k, \quad Q = \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_i ;$$

és

$$0 \leq \lambda(P_k, Q) \leq 1,$$

ahol $\lambda(P_k, Q)$ a P_k és Q változóknak alkalmasan választott szimmetrikus függvénye, amelyre teljesül: $\lambda(P_k, Q) = 1$, akkor és csak akkor, ha $P_k = Q$. Esetünkben $P_k = P = \dfrac{(n+1)n}{2} = Q$. Tovább egyszerűsödik (13) alakja $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/4$ választások mellett. Ekkor

$$H_{1/2,\,1/4}(a^k, \hat{b}) = H = \frac{1}{\sqrt{PQ}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^k \hat{b}_i} = \frac{2}{(n+1)n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^k \hat{b}_i}. \tag{14}$$

Példa: Kiindulásul tekintsük *Cook* és *Seiford* [29]-ben közölt példáját, melyben a bizottsági tagok száma $m = 10$; a tulajdonságok száma, melyet rangsorolni kell $n = 5$, az egyes tagok pedig a $T_1, T_2, \ldots, T_5$ tulajdonságok besorolását az alábbi a^k $(k = 1, 2, \ldots, 10)$ vektorokkal adják meg:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
k\rightarrow & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} &
& \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}
& \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}
& \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}
& \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}
& \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}
& \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}
& \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}
& \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}
& \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}
& \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.
\end{array}$$

A sorbarendezés problémáját hozzárendelési feladatként kezeljük.

$[d_{ik}]$ *mátrix*

$$\begin{bmatrix} 13 & 11 & 11 & 17 & 27 \\ 21 & 15 & 11 & 11 & 19 \\ 24 & 16 & 12 & 12 & 16 \\ 22 & 16 & 14 & 14 & 18 \\ 20 & 12 & 12 & 16 & 20 \end{bmatrix}.$$

A megoldás:

$[x_{ik}]$ *mátrix*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek következtében a $\hat{b}$ vektor:

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix},$$

és így $M(\hat{b}) = 66$; $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}6$, $p_3 = 0{,}0$; $p_4 = 0{,}4$; $p_5 = 0{,}2$; $p_6 = 0{,}2$; $p_7 = 0{,}2$; $p_8 = 0{,}6$; $p_9 = 0{,}2$; $p_{10} = 0{,}0$.

Ezek alapján kapjuk:

$[R_{jl}]$ *mátrix*

$$
\begin{bmatrix}
\boxed{0{,}92} & 0{,}36 & 0{,}60 & 0{,}20 & 0{,}00 \\
0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}40 & 0{,}68 & \boxed{0{,}90} \\
0{,}20 & \boxed{0{,}84} & 0{,}68 & 0{,}20 & 0{,}52 \\
0{,}68 & 0{,}81 & \boxed{0{,}68} & 0{,}20 & 0{,}00 \\
0{,}00 & 0{,}20 & 0{,}36 & \boxed{0{,}90} & 0{,}68
\end{bmatrix},
$$

Ebben rögzített l mellett a legnagyobb R_{jl} értéke van bekeretezve. Mint látható, így is ugyanazt a besorolást kapjuk, mint amit *Cook* és *Seiford* kapott hozzárendelési feladatként való megoldás esetén, csakhogy most tudjuk azt is, hogy hozzávetőlegesen mekkora annak a valószínűsége, hogy azok akik egymástól függetlenül az l-edik tulajdonságot a j-edik helyre sorolták, nem tévedtek.

A $d_1 = d_1(a^k, \hat{b})$ és $d_2 = d_2(a^k, \hat{b})$ metrikák, valamint $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{1}{4}$ esetén H értékének alakulását az alábbi táblázat tünteti fel:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_1	2	6	6	4	8	8	8	6	6	12
d_2	1,414	4,243	2,828	2,236	4,690	4,472	4,243	4,243	3,162	5,831
H	0,995	0,933	0,969	0,983	0,931	0,950	0,938	0,955	0,961	0,895

E szerint a tagok rangsorolásukkal az alábbi sorrendben közelítik meg a legjobban $\hat{b}$ értékét:

d_1 *mellett:*	1	4	2	3	8	9	5	6	7	10
d_2 *mellett:*	1	4	3	9	2	7	8	6	5	10
H *mellett:*	1	4	3	9	8	6	7	2	5	10

A keretben foglalt tagok között pusztán a táblázat számai alapján (pontosabban egyezősége miatt) nem lehetett egyértelmű sorbarendezést végezni. Mint látható a d_2-vel és a H-val végzett két számítás esetén a sorrend viszonylag jól egyezik.

A korábbi jelzéseinknek megfelelően az is kitűnik, hogy H az összehasonlítást „finomabban", „érzékenyebben" látja el, amiből kifolyólag a sorrendiség is egyértelműbben áll elő.

Talán nem érdektelen rámutatni arra, hogy a felhozott példánál a vektorok átlagolása mellett kapott sorrendet az a $\bar{b}$ vektor jellemzi, melynek komponensei rendre (1, 3, 5, 4, 2). Mint látható, ez nem egyezik azzal a sorrenddel, melyet *Cook* és *Seiford*, illetve a szerző kapott. Más szóval ez azt jelenti, hogy az alkalmazott feltételek mellett az átlagolással jellemzett „kollektív bölcsesség" nem eredményez megfelelő döntést.

(Beérkezett: 1979. október 12-én.)

IRODALOM

1. KINDLER J.—PAPP O.: Komplex rendszerek egyes összemérési módszerei. A KIPA-eljárás módszertana és alkalmazástechnikája. Budapest, 1975. BME Továbbképző Intézete.
2. KINDLER J.—PAPP O.: Komplex rendszerek vizsgálata. Budapest, 1977. Műszaki Könyvkiadó.
3. BALCK, D.: The Theory of Committees and Elections. Cambridge, 1958. Cambridge Univ. Press.
4. DAVIS, O. A., DE GROOT, M. H. and HINICH, M. J.: Social Preference Orderings and Majority Rule. Econometrica, Vol. 40, No. 1 (1972).
5. RIKER, W. H.: Voting and Summation of Preferences: An Interpretative Bibliographical Review of Selected Developments During the Last Decade. Amer. Political Sci. Rev., Vol. 5 (1961).
6. BRIGHTWELL, S. A. and MEHNDIRATTA, S. L.: Priority Assignment to Command Construction Projects. INFOR, Vol. 13, No. 3 (1975).
7. BRIGHTWELL, S. A. and COOK, W. D.: Unifyng Group Decisions Relating to Cardinal Preference Ranking: With an Application to the Operation of a Military Promotions Boards. Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationelle, Vol. 20, No. 1 (1978).
8. SHOCKER, A. D. and SRINIVASAN, V.: A Consumer-Based Methodology For The Identification of New Product Ideas. Management Sci. Vol. 20, No. 6 (1974).
9. DOBÓ A.: Vélemény-nyilvánítással kapcsolatos statisztikai értékelés. Minőség és Megbízhatóság, 1977/6.
10. DOBÓ A.: Egy új diszciplína: a hasonlóságelmélet. Természet Világa, 1979/7.
11. DOBÓ A.—SZAJCZ S.: Szakvélemények értékelése valószínűségszámítási módszerekkel I—II. rész. Minőség és Megbízhatóság, 1976/6, 1977/1.
12. DOBÓ A.—SZAJCZ S.—FENYVES F.: A hasonlósági függvény és néhány tulajdonsága. SZIGMA 1977/1—2.
13. FÜSTÖS L.—MESZÉNA GY.—SIMONNÉ MOSOLYGÓ N.: Cluster analízis. SZIGMA 1977/3.
14. PÁRNICZKY G.: A statisztikai informatika alapjai. Budapest, 1976. Statisztikai Kiadó Vállalat.
15. ARROW, K. J.: Social Choice Individual Values. New York, 1951. Wiley.
16. INADA, K.: A Note on the Simple Majority Rule. Econometrica, Vol. 32, No. 4 (1964).
17. INADA, K.: The Simple Majority Rule. Econometrica, Vol. 37, No. 3 (1969).
18. BOWMAN, V. J. and COLANTONI, C. S.: Majority Rule Under Transitivity Constraints. Management Sci, Vol. 19, No. 9 (1973).
19. BOWMAN, V. J. and COLANTONI, C. S.: Further Comments on Majority Rule Under Transitivity Constraints. Management Sci. Vol. 20. No. 11 (1974).
20. BLIN, J. M. and WHINSTON, A. B.: A Note on Majority Rule Under Transitivity Constraints. Management Sci. Vol. 20, No. 11 (1974).
21. KENDALL, M.: Rank Correlation Methods, 3rd Ed. New York, 1962. Hafner.
22. KEMENY, J. G. and SNELL, L. J.: Preference Ranking: An Axiomatic Approach, in Mathematical Models in the Social Sciences. New York, 1962. Ginn.
23. COOK, W. D. and SAIRE, A. L.: Committee Approach to Priority Planning: the Median Ranking Method. Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationelle. Vol. 18, No. 3 (1976).
24. COOK, W. D. and FARR, H.: A Computer Program for Determining the Median of a Set of Rankings. Defence Research Board Staff Note No. 9, Canadian Forces Base, Trenton, 1975.
25. LEESE, E. L.: A Program to Determine the Median of a Set of Rankings. Directorate of Mathematics and Statistics (DMS) Staff Note No. 4, Ottawa, 1974.
26. NORMAN, A.: A program to Determine the Median of a Set of Rankings Using Branch and Bound. DMS Staff Note No. 9, Ottawa, 1974.

27. Bogart, K. P.: Preference Structures I: Distances Between Transitive Preference Relations. J. Math. Sociology. Vol. 3 (1973).
28. Bogart, K. P.: Preference Structures II: Distances Between Asymmetric Relations. SIAM J. Appl. Math. Vol. 29, No. 2 (1975).
29. Cook, W. D. and Seiford, L. M.: Priority Ranking and Consensus Formation. Management Sci. Vol. 24, No. 16 (1978).
30. Gaiha, P. and Gupta, S. K.: Adjacent Vertices on a Permutohedron. SIAM J. Appl. Math., Vol. 32, No. 2 (1977).

ACHIEVING AGREEMENT BASED ON PRIORITY RANKING

The present study is concerned with the ranking and the associated achievement of compromise, determination of order which expresses common judgement. Beyond giving a review of literature the author tries to convert a problem of ordinal type into a cardinal one. This is achieved by using the results of some other ranking method (e.g. median ranking) in the application of probability ranking. It is pointed out that additional information is obtained this way, since we get not only the required ranking but also learn about the approximate probability of the infallibility of the committee members who ranked the I-th aim (quality, object, event, etc.) to j-th place independently of each other. Finally it is pointed out that under the applied conditions the "collective wisdom" obtained by averaging individual opinions results in an inadequate decision.

ФОРМУЛИРОВКА СОГЛАСИЯ НА ОСНОВЕ УПОРЯДОЧЕННОСТИ

В статье обсуждаются задачи упорядоченности и связанные с ними компромисса и последовательность, отражающая однообразие. Помимо обзора литературы, статья ставит перед собой цель преобразовать задачу, принадлежащую к исследуемому типу последовательности, в задачу кардинального типа. Это осуществляется применением результатов других методов, например, результаты медианного метода для применения метода упорядочения, основанного на вычислении вероятностей. Доказывается, что таким образом действительно получается дополнительная информация, потому что дается не только желаемая последовательность, а также сведение о том, приблизительно какова вероятность того, что не ошиблись те члены, которые независимо друг от друга, классифицировали l-товую цель (качество, предмет, событие и т. п.) на i-товое место.

В конце указывается на то, что при введенных условиях «коллективная мудрость», характеризуемая взвешиванием мнений, ведет к несоответствующим решениям.

SIMONOVITS ANDRÁS

A költségmegosztás elméletéről

1. Bevezetés

Induljunk ki a következő feladat vizsgálatából: egy egyetem egy telefonközpontot működtet, amelynek használatáért (a beszélgetés távolságától, időtartamától és időszaktól függően) a felhasználók fizetnek. Adminisztratív okokból a költségeknek s a bevételeknek egyezniük kell. Kérdés: ki mennyit fizessen? Hogyan osszuk föl a költségeket a felhasználók között? [Vö. *Billera, Heath* és *Raanan* (1978).]

Hasonló problémák merülnek föl pl. több ország közös vállalkozásánál, vagy a közszolgáltatásoknál. Nem állítom azt, hogy a telefon, az energiatermelés vagy -szállítás nem lehet veszteséges, ill. nyereséges; azonban az említett tevékenységek monopol-jellege (amely a növekvő hozadékok létezése miatt törvényszerű) merőben eltérő árszabályozást követel, mint más tevékenységek. Ilyenkor valamilyen értelemben a többlet vagy veszteség adott; ekkor általánosított költségmegosztásról beszélhetünk.

Ebben a dolgozatban az egyszerűség kevéért a szűkebb értelemben vett költségmegosztással foglalkozunk, méghozzá meglehetősen elvont formában. Összehasonlítunk különböző elméleti és gyakorlati költségmegosztási mechanizmusokat. Ki fog derülni, hogy nincs olyan mechanizmus, amely minden jogos követelményt kielégít. Ezért különböző körülmények között más-más mechanizmusra van szükség. [Vö. *Ruggles* (1950).]

A dolgozat hat fejezetet tartalmaz, a bevezetésen kívül. A 2. fejezet arról szól, hogy a profitot maximalizáló árak azonosak a határköltségekkel, amelyek azonban nem vezetnek nulla profithoz, azaz költségmegosztáshoz. A 3. fejezetben a határköltség-ár alapján, azt általánosítva, az ár-költségfüggvény hozzárendeléseket vizsgáljuk és ezeknek hat tulajdonságát mutatjuk be: 1. mértékegység függetlenség, 2. additivitás, 3. nem-negativitás, 4. pozitivitás, 5. homogenitás és 6. költségmegosztás. A hat közül a 2. és az 5. nem triviális: 2. többek között azt mondja ki, hogy ha külön számítjuk a tőkeköltségeket és a munkaköltségeket és az így adódó árakat összeadjuk, akkor ugyanazt az árat kapjuk, mint ami az összeg költségfüggvényhez tartozik. 5. többek között azt mondja ki, hogyha a piros autó termelése ugyanannyiba kerül, mint a kéké, akkor az árának is ugyanannyinak kell lennie. A határköltség-árrendszer az első öt tulajdonságot kielégíti, a 6-ot azonban nem. A 4. fejezetben *Billera–Heath* (1979) és *Mirman–Tauman* (1979) munkáival foglalkozunk, akik egy olyan ár-költségfüggvény hozzárendelést találtak, amelyik mind a hat követelményt kielégíti, természetesen az „optimalitási" tulajdonság nélkül. Játékelméleti analógia alapján a szerzők *Aumann–Shapley*-áraknak nevezték a fellépő árakat.

Figyelemre méltó, hogy a hat tulajdonságot csak egyetlen egy ár-költségfüggvény hozzárendelés elégíti ki. A képlet jelentése viszonylag egyszerű, a képlet a határköltségek speciális átlagolásán alapul.

Az 5. fejezetben megkíséreljük megmutatni, hogyan lehet e képletre rájönni. Itt röviden utalunk a kérdés játékelméleti hátterére is.

A 6. fejezet saját eredményemet tartalmazza: amely az előző költségfüggvény ár-hozzárendelést kiterjeszti több önálló termelő esetére.

A 7. fejezetben visszatérünk *Mirman–Tauman* (1979) eredményeire. Bevezetjük a keresleti függvényeket és tanulmányozzuk a kereslet-kínálat egyenlőségéből adódó egyensúlyt. *Baumol* és *Bradford* (1970) áttekintését követve röviden kitérünk a második legjobb árra, amelyet először *Ramsey* (1927) tanulmányozott. Egy fogyasztó esetén a Ramsey-árrendszer elméletileg előnyösebb az A—S egyensúlyi árnál, azonban több fogyasztó esetén az előbbi a jövedelemnek explicit bár közvetett újraelosztását foglalja magába, holott éppen ennek (közvetlen formájának) elkerülése végett alkalmazzák. Azonban még egy fogyasztó esetén is vannak olyan tulajdonságai a Ramsey-áraknak, amelyek akadályozhatják alkalmazását.

Végül figyelmeztetjük az Olvasót, hogy példáink inkább a gondolatok megértését szolgálják, mint konkrét helyzetek leírását. Éppen ezért nem kell túl szigorúan érteni őket.

2. A határköltség-árrendszer

Induljunk ki a következő feladatból: egy gazdasági egység m árut termel, $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m$ mennyiségben, a termelés összköltsége $F(x) = F(x_1, \ldots, x_m)$. Föltesszük, hogy a termeléshez kizárólag *más* árukra, ill. szolgáltatásokra van csak szükség, melyeknek ára *adott*. Föltesszük, hogy a lehetséges termelési vektorok halmaza a $\times_{i=1}^{m} [0, c_i]$ halmaz; $F(x)$ *nemcsökkenő* függvény és mindenütt *differenciálható*.

E feltevések jól ismertek a közgazdaságtanban; korántsem olyan ártalmatlanok, mint amilyennek látszanak, ebben a dolgozatban azonban — az 5. fejezet kitérőjétől eltekintve — mindig olyan esetekre szorítkozunk, amelyekre e feltevések érvényesek.

Profit-maximalizálás

Először vizsgáljuk meg, hogy adott $p > 0$ m-dimenziós árvektor mellett milyen termelési vektor maximalizálja a bevételek és a költségek különbségét, a profitot. Képletben:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i x_i - F(x) \to \max; \quad x \geq 0.$$

A differenciál-számítás egyik jól ismert tétele szerint a profitmaximum *szükséges* feltétele ($\bar{x}$-szel jelölve az optimumot!)

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial x_j}(\bar{x}) \qquad \text{ha } \bar{x}_j > 0 \tag{2.1}$$

és

$$p_j \leq \frac{\partial F}{\partial x_j}(\bar{x}) \qquad \text{ha } \bar{x}_j = 0. \tag{2.2}$$

Szavakban megfogalmazva: pozitív mennyiségben termelt áru ára egyenlő a *határköltséggel*, nem termelt áru ára pedig legfeljebb akkora, mint a határköltség. (Ez az eredmény kb. 100 éves!)

A továbbiakban a termelés—ár függvény helyett az inverzét, az ár—termelés függvényt vizsgáljuk.

A (2.1—2) feltétel *elégséges*, ha a költségfüggvény *konvex:* azaz két termékvektor átlagának termelési költsége nem nagyobb, mint az egyes termékvektorok termelési költségének az átlaga.

A továbbiakban fontos szerepet játszik az az eset, amikor nincsenek fix költségek:

$$F(0) = 0. \tag{2.3}$$

Például (2.3) mellett, ha a költségfüggvény (szigorúan) konvex, akkor a profit (pozitív) nem negatív. (Szigorúan) konkáv költségfüggvény esetén viszont a profit (negatív) nem pozitív — feltéve, hogy (2.1) teljesül. Igaz, ez utóbbi *minimális* profitot ad.

Ebben a dolgozatban azonban olyan helyzeteket vizsgálunk, ahol intézményes okokból nem lehet se nyereség, se veszteség.

$$\sum_{i=1}^{m} p_i x_i = F(x) \tag{2.4}$$

Ilyen esetben *költségmegosztásról* beszélünk. Jól ismert, hogy a határköltség-árak általában nem elégítik ki (2.4)-et. A következő fejezetben a határköltség-árakhoz *hasonló* árakat keresünk, amelyek azonban biztosítják a költségmegosztást.

3. Ár-költségfüggvény hozzárendelések

Ebben a fejezetben azt kérdezzük, hogy *adott* kínálat (kereslet) esetén az árak hogyan függjenek a költségektől; pontosabban, a költségfüggvényektől. Valóban, a határköltség-ár nem egyszerűen a költségtől függ, hanem a költségfüggvénytől, speciálisan annak differenciálhányadosától. Általában $p(F, \bar{x})$ jelöli az árvektor és a költségfüggvény közötti kapcsolatot, amelyet *ár-költségfüggvény hozzárendelésnek* nevezünk.

Az alábbiakban fölsorolunk öt olyan tulajdonságot, amellyel a határköltség-ár rendelkezik, azonban nemcsak ő rendelkezik vele. Aláhúzzuk, hogy szemléletünkben m nemcsak tetszőleges, de nem is rögzített. Pl. a 4. és az 5. tulajdonságban egyszerre tekintünk különböző m-eket.

Az ár-költségfüggvény hozzárendelések „kívánatos" tulajdonságai

Az ár-költségfüggvény hozzárendeléstől a következő tulajdonságokat várjuk.

1. *Mértékegység-függetlenség.* Tegyük föl, hogy adott termelési és érték mértékegység esetén, $\bar{x}$ termeléshez és $F(x)$ költségfüggvényhez $p(F, \bar{x})$ ár

tartozik. Ha új mértékegységekre térünk át, ahol az i-edik termék új mértékegysége λ_i-szerese a réginek, és az érték mértékegysége μ-szöröse a réginek, akkor az új költségfüggvény $\langle\lambda\rangle = \langle\lambda_i\rangle_{i=1}^m$ jelöléssel ($\lambda > 0$)

$$(3.1) \qquad G(x) = \frac{1}{\mu} F(\langle\lambda\rangle x) \quad \text{minden } x\text{-re.}$$

A mértékegység-függetlenség esetén a $G(x)$ költségfüggvényhez tartozó árvektor:

$$(3.2) \qquad p(G, \bar{x}) = \frac{\langle\lambda\rangle}{\mu} p(F, \langle\lambda\rangle\bar{x}).$$

Megjegyzés. Ez a tulajdonság nyilvánvalóan teljesül a határköltség-árrendszerre. Speciális esetben azonban könnyű más árrendszert is mutatni, ugyanezzel a tulajdonsággal.

2. *Additivitás.* Tegyük föl, hogy adott G költségfüggvény F^1 és F^2 költségfüggvények összegeként előállítható:

$$(3.3) \qquad G(x) = F^1(x) + F^2(x).$$

Additivitás esetén a $G(x)$ függvényhez tartozó árvektor

$$(3.4) \qquad p(G, \bar{x}) = p(F^1, \bar{x}) + p(F^2, \bar{x}).$$

Additív költségfüggvények

A legegyszerűbb esetben a költségfüggvény az egyes termékek előállítási költségfüggvényének összege:

$$(3.5) \qquad F(x_1, \ldots, x_m) = F_1(x_1) + \ldots + F_m(x_m) \quad \text{minden } x\text{-re.}$$

Ekkor (2.4)-ből és (3.4)-ből „egyértelműen" adódik a megoldás:

$$(3.6) \qquad p_j = \frac{F_i(x_j)}{x_j} \qquad 1 \leq j \leq m\,.$$

Mit mondhatunk azonban általános esetben, amikor a költségfüggvény nem additív? A választ a 4. fejezet tartalmazza.

Könnyű gyakorlati példákat hozni az additivitás megsértésére. Például a menettérti repülőjegy ára jóval alacsonyabb, mint két egyirányú repülőjegy ára, holott az oda-, ill. visszautazás költségei nyilvánvalóan azonosak és additívak — azonos kapacitás-kihasználást feltételezve. Hasonló a helyzet az utazási és szállásköltségek kombinációjával. Mindkét esetben fogyasztási ár diszkriminációról van szó, az egyik fogyasztó többet fizet, mint a másik fogyasztó — lényegében ugyanazért a szolgáltatásért.

3. *Nem negativitás:* $p(F, \bar{x}) \geq 0$

A határköltség-ár a költségfüggvény nem csökkenő volta miatt nem-negatív: ez a tulajdonság természetesnek tűnik, hiszen ki fizet azért, hogy eladjon. Nos, a környezetszennyezés korszakában ez nem is olyan magától értetődő: a gyáraknak vagy a környezetszennyezés elhárításáért, vagy pedig a környezetszennyezésért kell fizetni, márpedig a füst és egyéb szennyeződés is „termék". Ettől a bonyodalomtól azonban a továbbiakban eltekintünk.

4. *Nulla költség, nulla ár*

Tegyük föl, hogy az i-edik áru termelésének volumene nincs hatással a termelési költségre:

Létezik egy olyan $G(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ költségfüggvény, hogy minden x-re:

$$F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) = G(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)\,. \tag{3.7}$$

Ekkor

$$p_i(F, \bar{x}) = 0. \tag{3.8}$$

Megjegyzés. Ez a tulajdonság nyilvánvalóan teljesül a határköltség ár-rendszerre. A gyakorlatban azonban a feltétel nem mindig teljesül. Pl. a maximálistól távol levő kihasználás esetén az autópálya használati költsége jó közelítéssel független a felhasználók számától, egyes nyugati országokban mégis kell fizetni a használatáért. Azonban példánk nem tökéletes, hiszen ha senki sem használná az autópályát, akkor meg sem kellene építeni. E szépséghiba ellenére a kérdés releváns, sőt a mai napig megoldatlan. A megoldásnál nem lenne szabad kizárni a fix költségeket!

5. *Homogenitás*

Ezzel a névvel durván szólva azt akarjuk kifejezni, hogy költség-szempontból azonos termékek árai is azonosak.

Pontosabban: tegyük föl, hogy mind az m termék altermékek csoportja: a j-edik csoport $x_{j1}, \ldots, x_{jk_j}$ volumenű altermékekből áll. A részletezett költségfüggvény csak az aggregátumoktól függ:

$$G(x_{11}, \ldots, x_{1k_1}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mk_m}) = F\left(\sum_{i=1}^{k_1} x_{1i}, \ldots, \sum_{i=1}^{k_m} x_{mi}\right). \tag{3.9}$$

Ekkor az egyes csoportokon belül az altermékek ára azonos:

$$p_{ji}(G, \bar{X}) = p_j(F, \bar{x}) \qquad 1 \leq i \leq k_j;\ 1 \leq j \leq m\,. \tag{3.10}$$

Megjegyzés. A határköltság ár-rendszer kielégíti a homogenitási feltételt.

Inhomogén árakra gyakorlati példák tömegével találkozhatunk; a legismertebb ismét a menettérti repülőgépjegy ára. Az értelmezés most némileg eltér az additivitási példától: Két adott város közti utazáson belül két alosztályt képzünk: az egyirányú, ill. a menettérti utazásokét. Költségoldalról nyilvánvaló, hogy a menettérti utazás költsége azonos két egyirányú utazás költségével; a valóságban azonban az előbbi ára jóval alacsonyabb az utóbbiénál. Példánk azonban nem alkalmazható olyan esetekre, amikor a különböző irányú forgalomra irányuló kereslet nem független egymástól (pl. sífelvonónál a hegymenetre, és a völgymenetre).

6. *Költségmegosztás*

$$\sum_{j=1}^{m} p_j(F, \bar{x})\bar{x}_j = F(\bar{x})\,. \tag{3.11}$$

Mivel folytonos árrendszereket vizsgálunk, $\bar{x} = 0$-ra $F(0) = 0$-nak teljesülnie kell [vö. (2.3)]. A továbbiakban tehát föltesszük, hogy *nincsenek fix költségek*.

Megjegyzések. A határköltség-ár az első öt követelményt kielégíti, általában azonban nem elégíti ki a hatodik követelményt. Mint korábban említettük, szigorúan konvex költségfüggvényeknél a megfelelő profit pozitív, szigorúan konkáv költségfüggvényeknél pedig negatív. Egyetlen viszonylag általános költségfüggvény osztály ismert, amelynél a határköltség-árak kielégítik a költségmegosztási feltételt; nevezetesen, az *elsőfokú homogén függvényeké:*

$$F(\nu x) = \nu F(x) \quad \text{minden } \nu\text{-re és } x\text{-re.} \tag{3.12}$$

Ekkor egy jól ismert tétel értelmében [*Baumol* (1968), eredetileg *Wicksteed* (1894)] (3.11) teljesül a határköltség-árakra.

Milyen árrendszert alkalmaznak, ha (3.12) nem teljesül: azaz, ha a termelés arányos kiterjesztése nem arányosan növeli a költségeket?

4. Az Aumann—Shapley-árrendszer

Az előző fejezetben láttuk, hogy a határköltség-árrendszer kielégíti az első öt követelményt, azonban általában nem elégíti ki a hatodikat. Márpedig ebben a dolgozatban éppen a költségmegosztás a vizsgálat célja.

Szerencsés módon a fenti hat követelmény egyszerre kielégíthető az ún. Aumann—Shapley árrendszerrel:

$$p_j(F, \bar{x}) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_j}(t\bar{x})\,dt \qquad 1 \leq j \leq m\,. \tag{4.1}$$

Mielőtt vázolnánk a bizonyítást, érdemes szemléltetni az Aumann—Shapley-árak jelentését. Tegyük föl, hogy a kereslet a $[0, 1]$ időszak alatt lineárisan nőtt 0-ról $\bar{x}$-ra. Ekkor a t időpillanatban a j-edik termék határköltség-ára $\frac{\partial F}{\partial x_j}(t\bar{x})$, (4.1) pedig a *határköltség-árak időátlaga*. Az Aumann—Shapley-ár tehát egyfajta ötvözete a határ- és az átlagköltség-árnak.

A (4.1) formula alapján viszonylag könnyű belátni, hogy az Aumann—Shapley-árrendszer mind a hat fent említett tulajdonsággal rendelkezik. Valóban, az utolsó tulajdonság (költségmegosztás) kivételével az összes tulajdonság következik a határköltség-ár megfelelő tulajdonságaiból, ezeken az integrálás nem változtat. A 6. tulajdonság a következő összefüggésekből következik:

$$F(\bar{x}) = F(\bar{x}) - F(0) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial t}(t\bar{x})\,dt = \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_j}(t\bar{x})\,dt\,. \tag{4.2}$$

Távolról sem ilyen egyszerű azt igazolni, hogy *csak* az Aumann—Shapley-árak elégítik ki a fenti hat követelményt. A matematikai részletek iránt közömbös olvasó nyugodtan kihagyhatja a fejezet hátralevő részét és a következő fejezetet és rögtön a 6. fejezettel folytathatja az olvasást. Itt csak utalunk a bizonyításra, az érdeklődők a teljes bizonyítást *Mirman—Tauman*

(1979) cikkében találhatják meg. Egyébként a teljes bizonyítás *Aumann–Shapley* (1974) alaptétele bizonyításának egyszerűsítése. [Lásd még *Billera* és *Heath* (1979).]

a) Először tegyük fel, hogy egy termékünk van:

Ekkor a 6. tulajdonság egymaga egyértelműen meghatározza az árat:

$$p(F, \bar{x}) = \frac{F(\bar{x})}{\bar{x}} \tag{4.3}$$

b) A $G(x) = \left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right|^l$ típusú függvények esetén a (3.9–10) homogenitási tulajdonság $m = 1$-re biztosítja az ár-költségfüggvény hozzárendelés egyértelműségét; hiszen mind a k termék ára egyenlő, ekkor a költségmegosztás megintcsak egyértelmű.

c) Az $F(x) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i x_i)^l$ költségfüggvénynél az ár-költségfüggvény hozzárendelés a mértékegység (λ) függetlenségi tulajdonság alapján egyértelműen meghatározott a b) pont alapján.

d) Az m-változós $F(x)$ polinomok az $F(0) = 0$ feltétel esetén lineáris kombinációi a c) pontbeli kifejezéseknek [*Aumann–Shapley* (1974), Lemma 7.2]. Az additivitás és a mértékegység függetlenség (μ) alapján a polinomok halmazán is egyértelműen meghatározott az ár-költségfüggvény hozzárendelés.

e) Finomabb meggondoásokkal belátható, hogy amennyiben rögzített kompakt halmazon vannak értékelve a költségfüggvények, a folytonosan differenciálható függvények halmazán a *hozzárendelés folytonos*. Mivel a folytonosan differenciálható függvények egyenletesen megközelíthetők polinomokkal, a d) pont alapján a hozzárendelés egyértelműen kiterjeszthető a folytonosan differenciálható függvények osztályára is.

5. Egy intuitív megközelítés

Ebben a fejezetben megpróbáljuk megvilágítani, hogyan lehet eljutni az Aumann–Shapley-árrendszerhez. Előbb azonban két egyszerűbb feladatot vizsgálunk meg, amelyek önmagukban is érdekesek.

a) *A Shapley-érték*

Tegyük föl, hogy valamilyen létesítmény adott termékből több fogyasztót szolgál ki egyszerre. Legyen az i-edik fogyasztó igénye y_i, $1 \leq i \leq n$. A létesítmény beruházási és üzemeltetési költsége csak az összes igénytől, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$-től függ: $F(y)$ a költségfüggvény. Föltehetjük, hogy az igények együttes kielégítési költsége nem nagyobb, mint a részigények kielégítési költségének az összege:

$$F(y) \leq F\left(\sum_{k=1}^{l} y_{i_k}\right) + F\left(y - \sum_{k=1}^{l} y_{i_k}\right), \tag{5.1}$$

ahol $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leq n$; i_k természetes szám.

Ha a költségfüggvény additív volna; azaz $F(y) = \sum_{i=1}^{n} F(y_i)$ teljesülne, akkor semmi probléma nem volna, az i-edik fogyasztó az $F(y_i)$ költségrészt fedezne. Ekkor azonban akár külön-külön is végrehajthatják a beruházást; ez az eset nem érdekes. (Vö. a 3. fej. additív költségfüggvény résszel.)

Ha létezne valamilyen ,,természetes'' számozása a fogyasztóknak, és azt alkalmaznánk, akkor az i-edik fogyasztónak

$$F(y_1 + \ldots + y_i) - F(y_1 + \ldots + y_{i-1})$$

költségnövekményt kellene fedeznie.

Ilyen számozás azonban esetünkben *nem* létezik, és a különböző sorrendek különböző költségmegosztáshoz vezetnének.

Tekintsük azonban az összes lehetséges sorrendet egyforma valószínűséggel és mindegyik fogyasztó az általa *okozott költségnövekmény várható értékét fizesse.*

Például két fogyasztó esetén a fogyasztók teherviselése rendre:

$$\frac{1}{2}\,[F(y_1 + y_2) - F(y_2) + F(y_1)]\,,$$

$$\frac{1}{2}\,[F(y_1 + y_2) - F(y_1) + F(y_2)]\,. \tag{5.2}$$

Egy ilyen rendszer, amelyet *Shapley* (1953) tiszteletére *Shapley-értéknek* neveznek, a következő tulajdonságokkal rendelkezik: additív, nem-negatív és költségmegosztó. Sőt, ha két fogyasztó fogyasztása azonos, akkor a hozzájárulásuk is azonos. Nulla fogyasztás esetén nem kell fizetni.

Viszonylag egyszerű belátni, hogy e tulajdonságok egyértelműen meghatározzák a Shapley-értéket. [Vö. *Szép—Forgó* (1974), ahol az Olvasó megismerkedhet a Shapley-érték eredeti felhasználásával, a karakterisztikus függvénnyel adott kooperatív játékok értékével.]

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a Shapley-érték több termék esetén is hasonlóan definiálható, de ekkor nemcsak a fogyasztók, hanem az áruk összes lehetséges sorrendjét is figyelembe kell venni a költségnövekmények meghatározásánál. Erre a kérdésre még visszatérünk a c) alpontban. A Shapley-érték fenti alkalmazását egymástól függetlenül *Shubik* (1962), *Littlechild* (1970) és *Loehmann — Whinston* (1971) dolgozták ki.

b) *A Shapley-értékrendszerről*

Egy tetszőleges fogyasztó fogyasztásához tartozó Shapley-értéket elosztva a fogyasztással, valamilyen *egységár*-jellegű mennyiséghez jutunk, amely azonban a fogyasztástól függően változik. Ez a jelenség jól ismert a gyakorlati életből is; pl. minél többet telefonál valaki egy hónap alatt, annál kevesebbet fizet egy beszélgetésért, hiszen az előfizetői díj annál több részre oszlik. (Persze itt megint a fix-költség tér vissza!)

Természetesen nem mindig indokolható egy ilyen díjszabás. Felmerül a kérdés: mi történik, ha *nem vesszük* figyelembe, hogy egy fogyasztó, aki kétszer többet fogyaszt egy adott termékből, több (kevesebb) mint kétszer annyi többletköltséget okoz, mint egy másik fogyasztó. Vagyis ismét több terméket mérlegelve, csak az egyes termékek által okozott költségeket osztjuk el; és az egyes fogyasztók fogyasztásukkal *arányos* részt fizetnek. Részletesebben: visszatérve az előző fejezetek $F(x_1, x_2, \ldots x_m)$ költségfüggvényéhez; az i-edik termék által okozott költségnövekmény az *eredeti számozás* mellett

$$F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, 0, \ldots 0) - F(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, 0, \ldots, 0).$$

Az áruk összes lehetséges számozását egyforma valószínűséggel figyelembe véve eljutunk az *i-edik termék Shapley-értékéhez;* ezeket x_i volumennel elosztva eljutunk a Shapley-árakhoz. Új árrendszerünknél az egységár független a fogyasztás mennyiségétől, ellentétben az a) ponttal. Látszólag tehát teljesen visszatérünk az Aumann—Shapley-árakhoz, hiszen az új árrendszer mértékegység-invariáns, additív, nem-negatív, nulla költségnél nulla árat ad és költségmegosztó. „Csupán" a homogenitási tulajdonsággal van baj. Valóban, legyen két „költséghomogén" árunk:
$G(x_1, x_2) = F(x_1 + x_2)$. Ekkor az 1. áru Shapley-ára (5.2) alapján

$$\frac{1}{2x_1}[F(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) - F(\bar{x}_2) + F(\bar{x}_1)],$$

amely általában nem azonos az igazi átlagárral, ami

$$F(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/(\bar{x}_1 + \bar{x}_2).$$

c) *Az Aumann—Shapley-árrendszer heurisztikus levezetése*

Ebben az alpontban megpróbáljuk megvilágítani, hogyan lehet rájönni az A—S képletre. [Vö. *Aumann—Shapley* (1974).]

Az egyszerűség kedvéért egy két-termékes gazdaságot vizsgálunk.

Térjünk vissza az a) alpont végén említett átlagnövekmény árhoz. Tegyük föl, hogy az első áru iránti kereslet $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^l$, a második áru iránti kereslet pedig $x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^l$. Ha azt gondoljuk, hogy először az 1. áru iránti keresletek érkeznek meg, akkor ennek a rendezésnek a $p_1 = F(\bar{x}_1, 0)/\bar{x}_1$ átlagár felel meg.

Ha azt gondoljuk, hogy először a 2. áru iránti keresletek érkeznek meg, akkor ennek a $p_1 = [F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - F(0, \bar{x}_2)]/\bar{x}_1$ átlagár felel meg. Bonyolultabb a helyzet, ha az egyes termékek iránti keresletek érkezési sorrendje keveredik. Tegyük föl például, hogy felváltva érkeznek az 1. és a 2. áru iránti igények, méghozzá éppen a számozás szerinti sorrendben. $x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_1^l, x_2^l$. Ekkor az 1-es termék termelésével járó növekmény-költségeket $F(x_1^i, x_2^{i-1},) - F(x_1^{i-1}, x_2^{i-1})$ $1 \leq i \leq n$ adják, ahol $x_1^0 = x_2^0 = 0$.

Felesleges lenne az általános képletet fölírni. Tegyük föl, hogy a felosztás egyre finomabb:

$$\lim_{l} \max_{i} x_{j,l}^i = 0, \qquad j = 1,2.$$

Ekkor a nagy számok törvénye értelmében a két növekmény az esetek legnagyobb részében arányos egymással: $x_{1l}^i \sim t\bar{x}_1$ esetén $x_{2l}^i - t\bar{x}_2$, ahol a $\sim$ jel két mennyiség aszimptotikus egyenlőségét jelöli, $l \to \infty$ mellett.

Mivel a felosztás egyre finomodó, az összegek határértékben integrálhoz tartanak; mivel alkalmas t-re:

$$F(x_1^i, x_2^{i-1}) - F(x_1^{i-1}, x_2^{i-1}) \sim \frac{\partial F}{\partial x_1}(t\bar{x})\,\bar{x}_1\,dt + \frac{\partial F}{\partial x_2}(t\bar{x})\,\bar{x}_2\,dt\,,$$

az A—S képletet „levezettük".

6. Aumann—Shapley-árak több termelő esetén

Ebben a fejezetben (amely saját eredményeimet tartalmazza) általánosítjuk a 4. fejezet eredményeit egy termelőről több termelőre.

Legyen a termelők jele $k = 1, 2, \ldots, q$. Legyen x^k a k-adik termelő termelése és $F^k(x^k)$ a megfelelő költségfüggvény.

$$\sum_{k=1}^{q} x^k = \bar{x} \tag{6.1}$$

Két megoldás lehetséges, aszerint, hogy a termelők között a) van vagy b) nincs jövedelem-átcsoportosítás.

a) *A termelők között (tetszőleges) jövedelem-átcsoportosítás lehetséges*

Tegyük föl, hogy létezik egy központ, amelyik tetszőleges $\bar{x}$ kereslet esetén úgy határozza meg az egyes termelők termelését, hogy az összköltséget minimalizálja.

$$F(x) = \min\left\{\sum_{k=1}^{q} F^k(x^k)\,,\ \sum_{k=1}^{q} x^k = \bar{x}\,;\ \ x^k \geq 0,\ \ k = \overline{1, q}\right\}. \tag{6.2}$$

Föltesszük, hogy a feladat megoldható.

Az $F(x)$ összköltségfüggvény — amennyiben folytonosan differenciálható — egyértelműen meghatározza az Aumann—Shapley-árakat.

Ennél a megoldásnál az egyes termelők bevételei és kiadásai azonban általában nem egyeznek meg; egyes termelőket támogatásban kell részesíteni, másokat pedig meg kell adóztatni; a veszteséget, ill. a nyereséget eltüntetendő.

Jól ismertek a jövedelem-átcsoportosításokkal járó veszélyek: a veszteséges termelők elvesztik érdekeltségüket saját költségeik minimalizálásában, hiszen a veszteséget úgyis fedezi a központ. A nyereséges termelők közömbössége hasonló, bár ellenkező előjelű okból fakad: a nyereséget úgyis elveszi a központ. A valóságban tehát a jövedelem-átcsoportosításnak szigorú határai vannak. Az egyszerűség kedvéért a következőkben az előzővel szélsőségesen ellenkező esetet vizsgáljuk.

b) *A termelők között nem lehetséges jövedelem-átcsoportosítás*

Ekkor minden termelőnél a bevételek és a kiadások egyeznek, tehát minden termelő a saját termelésének és költségfüggvényének megfelelő A—S árat számítja föl a fogyasztóinak: ha tetszőlegesen választják meg az egyes termelők saját termelési vektorukat, akkor az egyes áruk A—S ára más és más lesz, a termelőktől függően. Modellünkben azonban minden pozitív mennyiségben termelt áru ára független kell hogy legyen a termelőtől:

Léteznie kell tehát egy $\overline{p}$ vektornak, amelyre

$$\overline{p}_j = p_j(F^k, x^k) \quad \text{ha } x_j^k > 0 \quad 1 \leq j \leq n \tag{6.3}$$

és

$$\overline{p}_j \leq p_j(F^k, x^k) \quad \text{ha } x_j^k = 0 \quad 1 \leq k \leq q. \tag{6.4}$$

Valóban, ha (6.4) nem teljesülne, akkor $x_j^k = 0$-t kicsit növelve (6.4) ellentéte továbbra is érvényben maradna, azaz a k-adik termelő olcsóbban termelhetne, mint a „többi", mégsem termel. Ugyanakkor szigorú egyenlőtlenség könnyen előfordulhat (6.4)-ben, hiszen x_j^k növelésével a k-adik termelő ára továbbra is a „többi" ár fölött marad.

Belátható, hogy folytonosan differenciálható F^k költségfüggvények esetén ($k = 1, 2, \ldots, q$) létezik legalább egy olyan $\overline{p}$ árvektor és $x^1, x^2, \ldots, x^q$ termelési kombináció, amely kielégíti (6.1)-et.

Általában több ilyen kombináció létezik; az a) pont szellemében a minimális költségű kombinációt kell választani, ahol a költséget a

$$\sum_{k=1}^{q} p^k(F^k, x^k) = \overline{p}\overline{x}$$

kifejezés adja. Persze, csalóka lehet a költségösszehasonlítás különböző árak mellett!

A bizonyítás gondolata

A bizonyítás indukciós, itt csak a kezdő lépést ismertetjük, amikor $n = 1$, $q = 2$ (egy áru, két termelő). Tekintsük a $p(F^1, x^1)$ és $p(F^2, \overline{x} - x^1)$ egyváltozós skalárértékű folytonos függvényeket a $0 \leq x^1 \leq \overline{x}$ intervallumon. A következő eseteket különböztetjük meg:

(i) $p(F^1, 0) \geq p(F^2, \overline{x})$,
(ii) $p(F^1, \overline{x}) \leq p(F^2, 0)$,
(iii) $p(F^1, 0) < p(F^2, \overline{x})$ és $p(F^1, \overline{x}) > p(F^2, 0)$.

Az (i) esetben $x^1 = 0$, $x^2 = \overline{x}$ és $\overline{p} = p(F^2, \overline{x})$, a (ii) esetben $x^1 = \overline{x}$, $x^2 = 0$ és $\overline{p} = p(F^1, \overline{x})$. A (iii) esetben Weierstrass tétele értelmében van egy olyan $x^1 \in (0, \overline{x})$, amelyre $p(F^1, x^1) = p(F^2, \overline{x} - x^1)$, azaz $(x^1, \overline{x} - x^1)$ a megfelelő pár.

Megjegyzés. Jól ismert, hogy profit-maximalizálás esetén minden termelőnek ugyanazt a határköltséget kell elérnie. Az optimalizálás decentralizálható, *feltéve*, hogy csökkenő hozadékokról van szó, amikor is a profitok pozitívok.

7. Az Aumann—Shapley egyensúlyi árvektor és viszonya a Ramsey-árvektorhoz

Ez a fejezet teljes egészében *Mirman–Tauman* (1979) dolgozatán alapul.

Az előző öt fejezetben adott kínálat esetén vizsgáltuk a költségek és az árak kapcsolatát. Ebben a fejezetben (amely egyben zárófejezete is a dolgozatnak), bekapcsoljuk a keresleti oldalt is.

Az A—S egyensúlyi ár

Föltesszük, hogy a fogyasztók száma l. Az i-edik fogyasztó hasznosságfüggvénye $u^i(x^i)$, amely a C_i fogyasztási halmazon van értelmezve, és az i-edik fogyasztó kiinduló gazdagsága a^i (pénzegység). Az általános egyensúlyelmélet rendszerét követve föltesszük, hogy adott p árvektor mellett minden fogyasztó maximalizálja saját hasznossági függvényét a pénztári egyensúly feltétele mellett:

Legyen a maximum-hely egyértelmű; $\psi^i(p)$ $1 \leq i \leq l$:

(7.1) $$u^i(\psi^i(p)) > u^i(x^i)$$

feltéve, hogy

(7.2) $$px^i \leq a^i; \quad x^i \in C^i \subset R^m_+.$$

Az általános egyensúlyelmélet szokásos feltevései mellett belátható, hogy létezik legalább egy olyan $\bar{p}$ árvektor, amely által meghatározott $\psi(\bar{p}) = \sum_{i=1}^{l} \psi^i(\bar{p})$ társadalmi keresletnél az A—S árvektor azonos p-vel:

(7.3) $$\bar{p} = p[F, \psi(\bar{p})].$$

Az ilyen tulajdonságú árvektor(oka)t *A—S egyensúlyi árvektor(ok)*nak nevezzük.

Megjegyezzük, hogy *Billera—Heath—Raanan* (1978) elhanyagolták az egyensúlyi feltételeket és az általuk javasolt A—S árvektort a tényleges árakon kialakult kereslet mellett számították ki. Ezt az egyszerűsítéssel járó következetlenséget azzal próbálták ellensúlyozni, hogy az A—S áraknál várhatóan fellépő keresletnél kisebb kiinduló kereslettel dolgoztak, tehát a növekvő hozadékok miatt némi profit volt várható.

A Ramsey-árvektor

Mint a Bevezetésben már említettük, a költségmegosztásnak hatalmas irodalma van, és az A—S egyensúlyi árvektor feltalálása előtt a közgazdászok szinte egyöntetűen az ún. Ramsey-árakat ajánlották. Nem meglepő tehát, hogy Mirman és Tauman előadásaik után mindig szembetalálkoztak azzal a kérdéssel: mi az A—S egyensúlyi árvektor viszonya a Ramsey-árvektorhoz, mi szükség van az előbbire, amikor az utóbbi — bár nem a legjobb ár — a második legjobb ár.

Mielőtt megmondanánk, mi a Ramsey-árvektor, mi a második legjobb ár, utalunk arra, hogy mi a legjobb árrendszer. „Természetesen" a határköltség-árrendszer. Valóban, a 2. fejezet értelmében tetszőleges fogyasztási hasznosságfüggvények esetén teljesülnie kell az ár-határköltség egyenlőségnek; azonban a költségmegosztási feltétel nem teljesül. Természetesen a profitok vagy veszteségek valamilyen formában a fogyasztók kezdő gazdagságát növelik, ill. csökkentik.

Tehát az optimum megvalósítása adóztatást igényel, méghozzá nem arányos, hanem egyszeri adó (lump sum tax) formájában.

A fogyasztók közötti közvetlen jövedelem-átcsoportosítás azonban hasonló buktatókkal jár, mint a termelőknél. A kiutat általában az ún. *társadalmi* *jóléti függvényben* szokás keresni, ahol a jóléti függvény az egyes fogyasztók fogyasztásaitól függ, azonban nem egyszerűen az összegüktől!

$$w(x^1, x^2, \ldots, x^l). \tag{7.4}$$

Most a keresleti függvények nem az egyes hasznossági függvényekből származnak, hanem a közös jóléti függvényből: különbséget teendő, most $\tilde{\psi}^i(p)$-vel jelöljük az új egyéni keresleti függvényeket, a társadalmit pedig $\tilde{\psi}(p)$-vel. Az indirekt jóléti függvény $z(p) = w[\tilde{\psi}^1(p), \ldots, \tilde{\psi}^l(p)]$.

A közvetlen jövedelem-átcsoportosítás elkerülése végett vissza kell térnünk a (2.4) költségmegosztási feltételhez.

$$\Pi(p) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j(p) - F[x(p)], \text{ ahol } x(p) = \sum_{i=1}^{l} x^i(p). \tag{7.6}$$

Definíció

A Ramsey-árvektor, $\tilde{p}$; a $z(p)$ indirekt hasznossági függvényt a $\Pi(p) = 0$ feltétel mellett maximalizálja.

Mielőtt ismertetnénk a Ramsey-árvektor kiszámítását *Baumol—Bradford* (1970) alapján, hadd húzzuk alá, hogy különböző jóléti függvények általában különböző elosztáshoz vezetnek; közvetlen jövedelem-átcsoportosítás helyett *közvetettet* kaptunk. Nem célunk választani két „rossz" között, csak a jövedelem-újraelosztás fennmaradását emeljük ki — ellentétben az A—S egyensúlyi árvektorral.

Jól ismert tétel szerint a maximum szükséges feltétele

$$\frac{\partial z}{\partial p_j} = \lambda \frac{\partial \Pi}{\partial p_j} \qquad 1 \le j \le m. \tag{7.7}$$

Belátható, hogy tetszőleges $z(p)$ függvény esetén $\dfrac{\partial z}{\partial p_j} = -\mu x_j$, ahol μ pozitív skalár, tehát (7.6) helyett $-x_j = \dfrac{\lambda \partial \Pi}{\mu \partial p_j}$ írható.

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy az összes kereslet-ár keresztrugalmasság nulla:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(p) = 0 \qquad i \neq j. \tag{7.8}$$

Jelölje továbbá $E_j = -\dfrac{dx_j}{dp_j} \cdot \dfrac{p_j}{x_j}$ a j-edik termék saját kereslet-árrugalmasságát. Viszonylag egyszerű számolással belátható, hogy (7.7) ekvivalens a következő feltétellel:

$$\tilde{p}_j = \frac{\left.\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x_j)\right|_{x_j = \tilde{\psi}_j(\tilde{p}_j)}}{1 - \dfrac{\nu}{E_j}} \qquad 1 \le j \le N, \tag{7.9}$$

ahol a ν skalár a (2.4) feltételből meghatározható.

Mivel $x_j = \tilde{\psi}_j(p_j)$ és $E_j = E_j(p_j)$, (7.9) egy olyan nem-lineáris implicit egyenletrendszer, amelyet meglehetősen nehéz megoldani.

Bár az egyes egyenletek látszólag függetlenek egymástól, ν meghatározása — a költségmegosztási feltételen keresztül — összeköti őket. Semmi sem biztosítja a megoldás egyértelműségét, sem pedig a pozitivitását.

Összehasonlítás

Mivel több különböző fogyasztó esetén a Ramsey-árrendszer egy egész sereg megoldást ad — az alkalmazott jóléti függvénytől függően — célszerű az összehasonlításnál egy fogyasztó esetére szorítkozni. Ekkor (de csak ekkor) a Ramsey egyensúlyi árrendszer logikusabbnak tűnik, mint az A–S egyensúlyi rendszer. Azonban még ekkor is fellelhetők kifogásolható tulajdonságok.

a) *Költség-átcsoportosítás*

Tegyük föl, hogy költségfüggvényünk additív: pl. $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$. Ekkor a 3. tulajdonság (additivitás) és a 6. tulajdonság (költségmegosztás) alapján az A–S ár-költségfüggvény hozzárendelés azonnal meghatározható: $p(F, \bar{x}) = (\bar{x}_1, 1)$.

Legyen a fogyasztói hasznosságfüggvény Cobb–Douglas-alakú: $u(x_1, x_2) = x_1^r \cdot x_2^s$; $(r, s > 0)$. Ekkor egyszerű számolással levezethető a keresletfüggvény [vö. (7.1)–(7.2)]:

$$\psi(p) = \left[\frac{s}{r+s}\frac{a}{p_1};\quad \frac{r}{r+s}\frac{a}{p_2}\right].$$

(7.3)-ba helyettesítve adódik az A–S egyensúly:

$$\bar{p} = \left[\frac{s}{r+s},\ 1\right]. \tag{7.10}$$

A Ramsey-árakat nem lehet explicite meghatározni, mert a (7.9) egyenletrendszer negyedfokú egyenlethez vezet. Elégedjünk meg itt ennek bemutatásával, hogy a Ramsey-árvektor különbözik az egyensúlyi A–S árvektortól. Valóban, speciális keresleti függvényünk mellett $E_1 = E_2 = 1$; speciális költségfüggvényünk mellett

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = 2x_1 \text{ és } \frac{\partial F}{\partial x_2}(x) = 1, \text{ tehát (7.9) szerint:}$$

$$\tilde{p}_1 = \frac{2\cdot\dfrac{s}{r+s}\dfrac{a}{p_1}}{1-\nu},\quad \tilde{p}_2 = \frac{1}{1-\nu}. \tag{7.11}$$

Ha a két árvektor azonos lenne, akkor (7.10)–(7.11) összehasonlításából $\nu = -1$, ill. $\nu = 0$ adódna, és ez ellentmondás.

Tehát a Ramsey-árak alkalmazása még additív költségfüggvény esetén is az egyik termék költségének egy részét a másik termék költségtöbbletéből fedezi: $\tilde{p}_1 < \bar{p}_1$ és $\tilde{p}_2 > \bar{p}_2$. Az ilyen költség-átcsoportosítás tényleg hasznos lehet, azonban intézményes akadályai lehetnek.

Kuriózumként említjük meg *Hotelling* (1938) ötletét, miszerint a határköltségeken alapuló, általa javasolt közlekedési stb. díjszabásokból fakadó veszteséget pl. a luxus villák fokozott adóztatásából fedezzék. Eltekintve a gyakorlati akadályoktól, nem tudnám megmondani, hogy mi az a nagy különbség az egyenes adóztatás és a közvetett adóztatás fenti válfaja között.

b) *Költségben inhomogén árak*

Erre a pontra nem hozunk példát. Csak annyit jegyzünk meg, hogy az 5. tulajdonság feltevése (költség homogenitás) esetén az A—S-árak azonosak. Mivel a határköltség-árak is azonosak, amennyiben a kereslet-rugalmasságok is szerephez jutnak, ($\nu \neq 0$) és egymástól eltérőek, akkor a Ramsey-árak nem azonosak egymással, következésképpen *eltérnek* az A—S áraktól. Esetenként az ár-különbségeket nehéz megvédeni.

* * *

A dolgozat végére érve szeretnék kitérni e dolgozat keletkezésének körülményeire. Az 1978/79. akadémiai évet a CORE-ban (Belgium) töltöttem, ahol egy szemináriumon Billera beszámolt arról, hogyan alkalmazta munkatársaival együtt az atommentes játékok elméletét egy egyetemi telefonközpont díjszabásának kidolgozására. Ők azonban csak a kínálati oldalt vizsgálták. Két kollégám, *Mirman* és *Tauman*, hamarosan bekapcsolták a keresleti oldalt és egyensúlyi eredményeket kaptak. Egy beszélgetés során felhívtam a szerzők figyelmét arra, hogy jó lenne feltevéseiket a játékelméleti eszköztár nélkül megfogalmazni. (Ezzel szinte egyidőben Scarf professzor ugyanezt a kérdést tette föl Billerának.) Mirman és Tauman hamarosan kidolgozták az axiomatikus részt (itt 4. fejezet), akárcsak Billera és Heath — tőlük függetlenül. A következőkben én a több termelő esetén fellépő kérdéseket vizsgáltam és sokat beszélgettem a szerzőkkel a Ramsey-árakhoz való viszonyról. Elhatároztam, hogy a magyar olvasó számára hozzáférhetővé teszem ezeket az izgalmas elméleti újdonságokat, anélkül, hogy elmerülnék a részletekben. Ez a dolgozat tehát — kivéve az 5. és 6. fejezetet — leegyszerűsítése (nem egyszerűsítése!) Mirman—Tauman dolgozatának. Köszönetet mondok L. Mirmannek és Y. Taumannak, hogy hozzájárultak eredményeik közléséhez. Köszönet illeti Bod Pétert, Bródy Andrást, Forgó Ferencet, Lackó Máriát és Molnár Györgyöt az értelemzavaró hibák feltárásáért. Természetesen semmilyen felelősség nem terheli a felsoroltakat a cikkben foglaltakért.

(Beérkezett: 1980. január 17-én)

IRODALOM

Aumann, R. J. and Shapley, L. S. (1974): Values of Non-Atomic Games, Princeton. Princeton University Press.

Baumol, W. J. (1968): Közgazdaságtan és operációanalízis. Budapest. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

Baumol, W. J. and Bradford, D. F. (1970): Optimal Departures from Marginal Cost Princing. American Economic Review, 60, 265—283.

BILLERA, L. J., HEATH, D. C. and RAANAN, J. (1978): Internal Telephone Billing Rates — A Novel Application of Non-Atomic Games. Operations Research 26:6, 956—965.

BILLERA, L. J. and HEATH, D. C. (1979): A Unique Procedure for Efficient Allocation of Shared Costs. Technical Report 430, School of Operations Research and Industrial Engineering. Ithaca. Cornell University.

BOITEUX, M. (1956): Sur le gestion des Monopoles Publiques asreints à l'equilibre budgetaire. Econometrica 24:1, 22—40.

DRÉZE, J. (1964): Postwar Contributions of French Economists, American Economic Review 54

HOTELLING, H. (1938): The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and of Railway and Utility Rates. Econometrica 6, 242—264.

LITTLECHILD, S. C. (1970): A Game Theoretic Approach to Public Utility Pricing. Western Economic Journal, 8, 162—166.

LOEHMANN, E. T.—WHINSTON, A. B. (1971): A New Theory of Princing and Decision Making for Public Investment. Bell Journal of Economics 2, 606—625.

MIRMAN, L. and TAUMAN, Y. (1979): Incentive Compatible Equitable Cost Sharing. CORE Discussion Paper 7930 Louvain-la-Neuve.

RAMSEY, F. (1927): A Contribution to the Theory of Taxation. Economic Journal 37, 47—61.

RUGGLES, N. (1950): Recent Developments in the Theory of Marginal Cost Pricing. Review of Economic Studies 17, 107—126.

SKAPLEY, L. S. (1953): A Value for N-person Games. In Advances in Game Theory. Annals of Mathematical Studies. No. 52. Princeton. Prince-University Press.

SHUBIK, M. (1962): Incentives, Decentralized Control, the Assignement of Joint Costs and Internal Pricing. Management Science, 8, 325—343.

SZÉP, J. és FORGÓ, F. (1974): Bevezetés a játékelméletbe. Budapest. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

WICKSTEED, PH. (1894): The Coordination of the Laws of Distribution. London. Mc. Millan.

ON THE THEORY OF COST SHARING

The present study discusses the question of cost sharing following Mirman—Tauman (1979). Let an m-dimensional vector x be formed from the quantities of products and services produced by an economic unit and $F(x)$ be the cost function. Under adequate conditions the traditional theory suggests to equate prices of individual products with marginal costs. This proposition is, however, inapplicable if institutional causes exclude the profits (or losses): e.g. telephone networks, railways and other public utilities. Nevertheless, marginal-cost prices are known to have five attractive properties which are expected to be fulfilled when assigning other price-cost functions:

1. its independence of the unit of measurement [(3.1—2); 2. additivity [(3.3—4)]; 3. non-negativity; 4. positivity [(3.7—8)] and 5. homogeneity [(3.9—10)]. The main finding of Mirman—Tauman is as follows:

Under the conditions of zero profit (cost sharing) there exists a unique price-cost function which satisfies the five preconditions above: the Auman—Shapley (1974) prices (4.1) which are special averages of marginal costs.

In the further part of the paper the case of more than one producer is discussed as well as the correspondence of supply and demand and the relation to Ramsey prices.

О ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗДЕРЖЕК

В настойщей статье рассматривается вопрос распределения издержек по Мирману—Тауману (1979). Пусть будет x вектор т-ого порядка, составленный из величин выпушенной продукции и услуги одной хозяйственной единицы и F (x) функция затрат. При соответствующих условиях традиционная теория предполагает приравнивать цены отдельных продуктов предельным затратам. Однако это предложение не применимо, если организационные причины исключают формирование прибыли (или убытков): например телефонная сеть, железная дорога и прочие коммунальные услуги. Однако известны пять

привлекательных качеств этих цен — предельных затрат — и их выполнение ожидается в случае других функций цен-затрат также:

1. Независимость от единицы измерения (3.1—2), 2. аддитивность (3.3—4), 3. не отрицательность, 4. положительность (3.7—8) и 5. однородность. Главный результат Мирмана—Таумана (1979):

При условиях нулевой прибыли (распределения затрат) существует одна и только одна функция цены-затрат, которая удовлетворяет вышеупомянутым качествам: цены Аумана—Шепли (1974) (4.1) которые являются специальными средними предельных затрат.

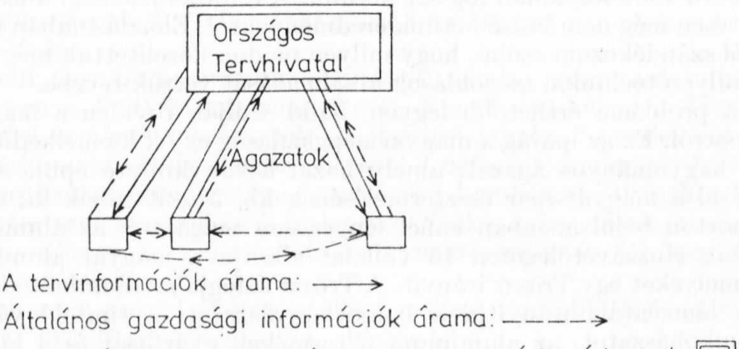
В дальнейшем обсуждается случай, где существуют несколько производителей, а также соответствие спроса и предложения и отношение к ценам Рэмси.

BOD PÉTER

Stratégiai döntések az alumíniumipar fejlesztéséről[1]

A népgazdasági tervezés folyamata szervezett párbeszéd a népgazdaság különböző egységei és a központi tervező szerv között. A párbeszéd célja: a részegységek tervjavaslatai alapján kialakítani a népgazdaságnak, mint egésznek, a fejlődési útvonalait; olyan pályákat, amelyeken a fejlődés egyensúlyban van és hatékony.

Az 1968-ban bevezetett magyar gazdaságirányítási rendszerben a gazdasági tervezés több szinten folyik. A központi tervező szerv alapjában a gazdaság makrofolyamataival kapcsolatban dönt; míg a mikroökonómiaia jellegű döntések a különböző gazdasági egységek hatáskörébe tartoznak. A népgazdasági tervezés folyamatában a központi tervező szerv és az alsóbb szintű tervező egységek között információcsere bonyolódik le. Az 1. ábra vázlatosan mutatja ennek a menetét.



1. *ábra.* A tervezési folyamatban lezajló párbeszéd vázlata

A népgazdasági tervezés módszereinek fejlesztése terén az elmúlt 10–15 évben számottevő eredményeket sikerült elérnünk. Ezek közül az egyik legfontosabb, hogy a központi tervező szerv munkájában jelentős szerephez jutottak a formalizált tervezési modellek. Különösen vonatkozik ez a megállapítás a hosszútávú (15–20 évre kitekintő) népgazdasági tervezésre;

[1] A cikk a szerző 1979 augusztusában, Montrealban, tartott előadásának magyar változata. Az angol eredeti a X. Nemzetközi Matematikai Programozási Szimpózion Programbizottságának a felkérésére íródott.

amelynek központi számításait sikerült számítógépre szervezett modellrendszerre építeni. A rendszer magja matematikai programozási modellekből áll.

1978 júniusában alkalmam volt ennek a rendszernek a működését a Velencében tartott ,,Mathematical programming and its economic applications'' konferencián ismertetni. Az előadás anyag ,,On the role of mathamatical programming methods in the Hungarian long run national economic planning'' a konferencia kiadványkötetében meg fog jelenni.

Míg egyfelől a matematikai tervezési modellek jelentős szerephez jutottak a népgazdasági tervezés központi szintetizáló számításaiban; másfelől megmaradtak az ún. hagyományos, nem formalizált tervezési módszerek az alsóbb szintű gazdasági egységek tervező munkájában; azoknál, akik éppen párbeszédben állnak a központi tervező szervvel. Ez a helyzet arra ösztönözte a tervezési technológia további tökéletesítésére irányuló kutatásokat, hogy elsősorban olyan, gyakorlatilag is használható szektormodellek kialakítására törekedjenek, amelyek a népgazdasági szintézis létrejött modellrendszerének keretei között képesek a tervezési folyamatban megvalósuló információcserét szolgálni.

Egy ilyen irányú kutatási erőfeszítésről szeretnék Önöknek beszámolni. Néhány éve, közgazdászokból, matematikusokból és műszaki szakemberekből álló munkacsoport dolgozik vezetésem alatt egy, a vázolt rendszer keretei között működőképes hosszútávú tervezési modell kialakításán a magyar alumíniumipar számára[2] A modell teljesen specifikált formában elkészült és paramétereinek számszerűsítése jelenleg van folyamatban. Az első kísérleti számításokra 1980 folyamán fog sor kerülni. A kutatás jelenlegi állása mellett természetesen még nem beszélhetünk eredményekről. Előadásomban mindenek előtt arról szándékozom szólni, hogy milyen módon közelítettük meg a problémát, és milyen technikai megoldások alkalmazását vettük tervbe.

Hogy a probléma érthetőbb legyen, hadd szóljak röviden a magyar alumíniumiparról. Ez az iparág a magyar népgazdaság egyik kiemelkedően fontos ágazata; hagyományos ágazat, amely hazai ásványkincsre épül. Az ágazat kibocsátásai a magyar ipar össztermelésének kb. 5%-át teszik ki; a magyar ipari exporton belül azonban ennél lényegesen magasabb az alumíniumipar részesedése. Hozzávetőlegesen 15 vállalat alkotja a magyar alumíniumipar zömét, amelyeket egy Tröszt irányít. A Tröszt átfogja az alumíniumipar teljes termelési láncolatát; irányítja a bauxitbányászatot, a timföldgyártást, az alumíniumkohászatot, az alumínium féltermékek gyártását és a késztermék gyártás egy részét.

Az alumíniumipar termékeire minden vertikumban jellemző, hogy jelentős hányaduk exportálható és importálható. Ennek következtében a belső piac semmilyen tekintetben sem korlátozza az alumíniumipar fejlesztési lehetőségeit. Sőt: olyan fejlődés is lehetséges, amelynek a során a termelés egymást követő vertikumaiban a kibocsátási és felhasználási kapacitások nem esnek egybe. A hazai timföldgyártás kapacitásai például meghaladhatják a hazai alumíniumkohászat timföldigényét, mert a hazai piacon felesleges timföld exportálható és egyidejűleg importból fedezhető az az alumínium mennyiség, amely mondjuk hiányzik a hazai félgyártmány gyártás igényeinek kielégíté-

[2] A munkacsoport az MTA Matematikai Kutató Intézete és a Magyar Alumíniumipari Tröszt munkatársaiból áll.

séhez. Azonban ellenkező irányú eltérések is elképzelhetők az iparág vertikális struktúrájában, mert pl. ha több fémmel rendelkezünk, mint a hazai fémigény: a fémalumínium minden piacon jól értékesíthető exporttermék.

Ilyen körülmények között egyáltalában nem kézenfekvő a válasz arra a kérdésre, hogy mi a magyar alumíniumipar célszerű hosszútávú fejlesztési stratégiája. Azt kell mondanunk, hogy a vizsgált rendszer igen nagy szabadságfokkal rendelkezik. Bonyolítja a problémát az a körülmény is, hogy az alumíniumipar fejlesztése igen szoros kölcsönös kapcsolatban áll más gazdasági ágak fejlődésével. Így pl. az alumíniumiparon belül lehetséges különböző fejlesztési alternatívák rendkívül különböző mértékű és minőségű igényeket támasztanak az energiaiparral szemben. Ugyanakkor figyelembe kell venni azt is, hogy az alumíniumipari fejlesztések beruházásigényesek, a beruházások átfutási ideje hosszú, és minden jelentősebb fejlesztés hosszú távon ható és irreverzibilis következményekkel jár.

Mindezeket figyelembe véve úgy döntöttünk, hogy stratégiai típusú döntések megalapozására alkalmas modellt dolgozunk ki. Olyant, amely első sorban a hosszú távon lehetséges fejlesztési változatok közötti választást illetően tud segítséget nyújtani.

A meglevő modellel elvégzendő vizsgálat központi kérdése az, hogy a magyar alumíniumipari komplexum mely részeit fejlesszük az elkövetkező 15—20 évben; milyen mértékben és milyen technológiák alapján. Nyilvánvaló, hogy csak olyan fejlesztési stratégiák jöhetnek számításba, amelyek mind pénzügyi, mind anyagi tekintetben megalapozottak. Ugyanakkor csak olyan stratégiák valósíthatók meg, amelyek a hosszútávú tervidőszak minden részidőszakában biztosítják az ágazaton belüli anyagi egyensúlyt, valamint lehetővé teszik az alumíniumipar és a többi népgazdasági ág közötti anyagcsere zavartalan lebonyolódását.

A modellt úgy szerkesztettük meg, hogy minden megengedett megoldása eleget tegyen a fenti követelményeknek. Ennek érdekében a Tröszt teljes tevékenységi területét úgynevezett „fejlesztési körökre" particionáltuk. Fejlesztési körön a tevékenységeknek olyan jól definiált csoportját értjük, amelyekhez meghatározott nagyságú (rendszerint beruházott állóeszközök formájában megtestesült) kapacitások tartoznak. Ezek a kapacitások meghatározott termékekre (illetve termékcsoportokra) vonatkoznak és jól meghatározott technológiát tételeznek fel.

A modellben a kutatás jelenlegi állása mellett az alábbi fejlesztési köröket definiáltuk: (Táblázatot lásd a 174. oldalon.)

A fejlesztési köröket a jövőről való gondolkodás egységének tekintjük. Ez azt jelenti, hogy fejlesztési körönként több változatban konkrét fejlesztési variánsokat dolgoztatunk ki. Ezek 15 évre szóló alternatív csomagtervek az alumíniumipari komplexum fent felsorolt részterületeire. A fejlesztési körökre kialakított alternatív koncepciók többsége szerves egységet képez. Ezek elfogadhatók megvalósításra, vagy elvethetők, de nem valósíthatók meg részlegesen. Éppen ezért ezeket a modellben (0, 1) értékű, ún. bivalens döntési változókkal ábrázoljuk, amelyek a hosszútávú terv teljes időszakára vonatkoznak. Néhány fejlesztési körben a fejlesztési koncepciókat egymással kombinálhatóknak tételezzük fel, ezért ezeket folytonos fejlesztési változókkal írjuk le.

A döntési változók értékeinek minden egyes kombinációja a Tröszt valamilyen hosszútávú fejlesztési stratégiáját írja le. Minthogy azonban minden

A modellben definiált fejlesztési körök

Megnevezés	Az alternatívák száma	Az alternatívák típusa
1. Bakonyi Bauxitbánya	2	folytonos
2. Fejér megyei Bauxitbányák	2	folytonos
3. Ajkai timföldgyártás	3	diszkrét
4. Almásfüzitői Timföldgyár	2	diszkrét
5. Mosonmagyaróvári timföldgyártás	1	diszkrét
6. Mosonmagyaróvári egyéb fejlesztés	3	diszkrét
7. A hazai kohászati bázis fejlesztése	4	diszkrét
8. Magyar–szovjet egyezmény	2	diszkrét
9. Magyar–lengyel egyezmény	2	diszkrét
10. Félgyártmánygyártás meglevő üzemekben	3	diszkrét
11. Félgyártmánygyártás további bővítései	3	diszkrét
12. Alumíniumfólia termelés	3	diszkrét
13. Ajkai öntöde	3	diszkrét
14. Balassagyarmati öntöde	2	diszkrét
15. Készárutermelés I.	2	folytonos
16. Készárutermelés II.	2	folytonos

egyes döntési változó egy bonyolult interdependens rendszer különböző részeinek fejlesztési változatait ábrázolja, nyilvánvaló, hogy a döntési változók értékeinek nem minden kombinációja jelent megengedett stratégiát. Egyes fejlesztési részelképzelések ugyanis kizárják vagy feltételezik más részelképzelések megvalósítását. Vagyis bizonyos logikai kapcsolatoknak kell érvényesülniük a variánsok között ahhoz, hogy egyidejűleg kivitelezhetők legyenek.

Ezeket a logikai követelményeket azáltal biztosítjuk, hogy a bivalens döntési változókra különböző korlátokat írunk elő. Ezek a feltételek képezik a modell ún. logikai blokkját. A logikai blokk biztosítja, hogy a modell csak logikailag ellentmondásmentes stratégiákat generálhasson.

A modell logikai blokkja a következő:

1. $z_{31}+z_{32}+z_{33}=1$
2. $z_{41}+z_{42}=1$
3. $z_{51}=1$
4. $z_{61}+z_{62}+z_{63}=1$
5. $z_{71}+z_{72}+z_{73}+z_{74}=1$
6. $z_{81}+z_{82}=1$
7. $z_{91}+z_{92}=1$
8. $z_{10,1}+z_{10,2}+z_{10,3}=1$
9. $z_{11,1}+z_{11,2}+z_{11,3}\leq 1$
10. $z_{12,1}+z_{12,2}+z_{12,3}=1$
11. $z_{13,1}+z_{13,2}+z_{13,3}=1$
12. $z_{14,1}+z_{14,2}=1$
13. $z_{74}+z_{82}\leq 1$

14. $z_{11,1} - z_{73} - z_{74} \leq 0$
15. $z_{11,2} - z_{82} \leq 0$
16. $z_{11,2} + z_{73} + z_{74} \leq 1$
17. $2z_{11,3} - 2z_{74} - z_{73} - z_{82} \leq 0$

Az 1–2, 4–8 és 10–12 sorszámú feltételek biztosítják, hogy a megfelelő fejlesztési körökben pontosan egy alternatív fejlesztési variáns valósuljon meg. A 3. sorszámú feltétel megmutatja, hogy ebben a fejlesztési körben nincs választási lehetőség. A 9. sorszámú feltétel lehetővé teszi, hogy ebben a fejlesztési körben valamelyik variáns megvalósuljon, de nem feltétlenül kell bármelyiknek is megvalósulnia. A 13. feltétel megmutatja, hogy a hetedik fejlesztési kör negyedik variánsa és a nyolcadik fejlesztési kör második változata együtt nem valósulhatnak meg. A 14. feltétel szerint a tizenegyedik fejlesztési kör első változata megvalósulhat, ha a hetedik fejlesztési kör harmadik vagy negyedik változata megvalósul. A 15. feltétel megmutatja, hogy a nyolcadik fejlesztési kör második variánsának a megvalósulása előfeltétele a tizenegyedik fejlesztési kör második változatának. Ugyanakkor ez a változat – a 16. feltétel miatt – összeférhetetlen a hetedik fejlesztési kör harmadik és negyedik változata közül bármelyikkel. Végül a 17. feltétel kiköti, hogy a tizenegyedik fejlesztési kör harmadik változata csak akkor valósulhat meg, ha vagy a hetedik fejlesztési kör negyedik változata megvalósul, vagy együtt megvalósulnak a hetedik fejlesztési kör harmadik és a nyolcadik fejlesztési kör második változatai.

A logikai feltételek teljesülése azonban nem elégséges ahhoz, hogy a kialakuló stratégia gazdaságilag ténylegesen megvalósítható legyen. A fejlesztési döntési változók ugyanis csak bizonyos kereteket teremtenek a trószti gazdálkodáshoz. Valamely stratégiát akkor tekinthetünk csak megvalósíthatónak, ha a logikai ellentmondásmentességen túl biztosítja, hogy a törszti gazdálkodás az adott keretek között egyensúlyban legyen.

Ezért nem elégséges a modellben csak a döntési alternatívákat ábrázolni, jóllehet főként a fejlesztésekről akarunk majd a modell segítségével dönteni. A modellnek szimulálnia kell a különböző fejlesztési lehetőségek által biztosított keretek közötti trószti gazdálkodást. Ezért a modellben ábrázoljuk a Tröszt valamennyi lényeges gazdasági tevékenységét és explicit módon megfogalmazzuk ezeknek a tevékenységeknek valamennyi fontos belső és külső feltételét.

A folyó gazdasági tevékenységeket a modellben folytonos változókkal írjuk le, amelyek a hosszútávú tervidőszak részidőszakaihoz kapcsolódnak. A modell folytonos változói részben ún. külső, részben pedig ún. belső változók. A külső változók a gazdasági környezetre vonatkozó információkat közvetítik. Ilyenek pl.: a Tröszt termékei iránt várható kereslet nagysága, a Tröszt részére biztosítható külső anyagi erőforrások terjedelme, a várható anyag- és termékárak, stb. A külső változók értékei a népgazdasági tervezés szintetizáló számításaiból származnak és a tervezési dialógus során változhatnak. Minden egyes konkrét trószti modellszámításban azonban ezek az értékek numerikusan rögzítettek és általában a feltételek jobb oldalán jelennek meg. A külső változókra vonatkozó érzékenységvizsgálatok éppen arra az összefüggésre világítanak rá, hogy miként függ a célszerű trószti fejlesztési politika a gazdasági környezet különböző jövőben lehetséges fejlődési pályáitól.

A belső változók értékeit a modell határozza meg. Ezek a számítások tulajdonképpeni ismeretlenjei. A modell globális szerkezetét a 2. ábra mutatja.

Látható, hogy amennyiben rögzítjük a döntési változóknak valamilyen, a logikai feltételeket kielégítő értékrendszerét, vagyis generálunk egy ellentmondásmentes stratégiát, a modell egy struktúrált lineáris programozási feladattá változik. Ha ez a feladat megoldható, akkor megvalósítható stratégiával rendelkezünk. Ennek a megvalósítható stratégiának az „értékét" a feladat célfüggvényei értékelik. Vagyis megmutatkozik, hogy a szóban levő stratégia milyen gazdálkodási feltételeket teremt hosszú távon. Ha sikerül találnunk egy másik megvalósítható stratégiát, amely ennél jobb gazdálkodási feltételeket ígér: úgy ez utóbbi nyilván „jobb stratégia", mint az előző. A modell egzakt matematikai megoldása pontosan azt a megvalósítható stratégiát generálja, amely az adott feltételek figyelembevétele mellett a lehető legkedvezőbb gazdálkodási körülményeket biztosítja. Ezt a stratégiát tekintjük majd optimális stratégiának.

A 3. ábrában bemutatjuk az egyes részidőszakokra érvényes feltételek szerkezetét. Az első kísérleti számítások céljaira a hosszútávú terv 15 éves időszakát három ötéves részidőszakra bontottuk. Az ábrán láthatók a modell méretei is.

Modellünk a vegyes-egészértékű lineáris programozási modellek családjába tartozik. A lineáris jelző itt azonban csak a modell megoldásához használható technikára utal. A modell, tartalmát illetően, távolról sem lineáris; bonyolult, nem is mindig konvex összefüggéseket ír le olyan megközelítő pontossággal, amely összhangban van a folyamatokról rendelkezésünkre álló információk pontosságával.

A modell elsősorban azáltal képes nem-lineáris kapcsolatok kifejezésére, hogy a fejlesztési változatokat (0, 1) változókkal kezeli. A modell endogén módon generálja a fejlesztési stratégiákat és a fejlesztési stratégiák meg-

	$X^{(1)}$ $n_1 = 497$	$X^{(2)}$ $n_2 = 497$	$X^{(3)}$ $n_3 = 497$	Z $n_0 = 31$	$n = 1522$
Változók: n / Feltételek: m	1981–1985	1986–1990	1991–1995	1981–1995	
Logikai feltételek $m_0 = 17$				$L^{(0)}$	$= (\leq)\ 1$
1981–1985-re vonatkozó feltételek $m_1 = 340$	$T^{(1)}$			$L^{(1)}$	$= 0$ $\geq f^{(1)}$ $\leq k^{(1)}$
1986–1990-re vonatkozó feltételek $m_2 = 340$		$T^{(2)}$		$L^{(2)}$	$= 0$ $\geq f^{(2)}$ $\leq k^{(2)}$
1991–1995-re vonatkozó feltételek $m_3 = 340$			$T^{(3)}$	$L^{(3)}$	$= 0$ $\geq f^{(3)}$ $\leq k^{(3)}$
$m = 1037.$					

2. *ábra.* A MAT modell áttekintő sémája

340 sor
497 oszlop

	$L^{(t)}$	$T^{(t)}$																			
	31	67	67	14	18	26	26	28	22	24	65	23	18	11	9	19	23	34	3		
	Z	$X_1^{(t)}$	$X_2^{(t)}$	$X_3^{(t)}$	$X_4^{(t)}$	$X_5^{(t)}$	$X_6^{(t)}$	$X_7^{(t)}$	$X_8^{(t)}$	$X_9^{(t)}$	$X_{10}^{(t)}$	$X_{11}^{(t)}$	$X_{12}^{(t)}$	$X_{13}^{(t)}$	$X_{14}^{(t)}$	$X_{15}^{(t)}$	$X_{16}^{(t)}$	$X_{17}^{(t)}$	$X_{18}^{(t)}$	$\mathfrak{b}^{(t)}$	
Bakonyi Bauxitbánya		$T_{11}^{(t)}$																		$\mathfrak{b}_1^{(t)}$	34
Fejérmegyei Bauxitbányák			$T_{22}^{(t)}$																	$\mathfrak{b}_2^{(t)}$	34
Közös bauxit feltételek		$T_{31}^{(t)}$	$T_{23}^{(t)}$																	$\mathfrak{b}_3^{(t)}$	6
Bauxit-timföld feltételek		$T_{41}^{(t)}$	$T_{42}^{(t)}$	$T_{43}^{(t)}$	$T_{44}^{(t)}$	$T_{45}^{(t)}$														$\mathfrak{b}_4^{(t)}$	17
Ajkai Timföldgyár	$L_5^{(t)}$			$T_{53}^{(t)}$																$\mathfrak{b}_5^{(t)}$	7
Almásfüzitői Timföldgyár	$L_6^{(t)}$				$T_{64}^{(t)}$															$\mathfrak{b}_6^{(t)}$	10
Monosmagyaróvári Timföldgyár	$L_7^{(t)}$					$T_{75}^{(t)}$														$\mathfrak{b}_7^{(t)}$	15
Timföld-kohászat feltételek	$L_8^{(t)}$			$T_{83}^{(t)}$	$T_{84}^{(t)}$	$T_{85}^{(t)}$	$T_{86}^{(t)}$	$T_{87}^{(t)}$	$T_{88}^{(t)}$	$T_{89}^{(t)}$						$T_{8,15}^{(t)}$				$\mathfrak{b}_8^{(t)}$	8
Ajkai Alumíniumkohó	$L_9^{(t)}$						$T_{96}^{(t)}$													$\mathfrak{b}_9^{(t)}$	14
Inotai Alumíniumkohó	$L_{10}^{(t)}$							$T_{10,7}^{(t)}$												$\mathfrak{b}_{10}^{(t)}$	15
Tatabányai Alumíniumkohó	$L_{11}^{(t)}$								$T_{11,8}^{(t)}$											$\mathfrak{b}_{11}^{(t)}$	11
Új kohó és blokkanódagyár	$L_{12}^{(t)}$									$T_{12,9}^{(t)}$										$\mathfrak{b}_{12}^{(t)}$	15
Kohászat félgyártmány feltételek	$L_{13}^{(t)}$						$T_{13,6}^{(t)}$	$T_{13,7}^{(t)}$	$T_{13,8}^{(t)}$	$T_{13,9}^{(t)}$	$T_{13,10}^{(t)}$	$T_{13,11}^{(t)}$	$T_{13,12}^{(t)}$	$T_{13,13}^{(t)}$	$T_{13,14}^{(t)}$		$T_{13,16}^{(t)}$			$\mathfrak{b}_{13}^{(t)}$	9
Székesfehérvári Könnyűfémmű	$L_{14}^{(t)}$										$T_{14,10}^{(t)}$									$\mathfrak{b}_{14}^{(t)}$	38
Kőbányai Könnyűfémmű	$L_{15}^{(t)}$											$T_{15,11}^{(t)}$								$\mathfrak{b}_{15}^{(t)}$	14
Félgyártmány-készáru feltételek							$T_{16,6}^{(t)}$	$T_{16,7}^{(t)}$	$T_{16,8}^{(t)}$	$T_{16,9}^{(t)}$	$T_{16,10}^{(t)}$	$T_{16,11}^{(t)}$	$T_{16,12}^{(t)}$	$T_{16,13}^{(t)}$	$T_{16,14}^{(t)}$			$T_{16,17}^{(t)}$		$\mathfrak{b}_{16}^{(t)}$	12
Balassagyarmati Fémfeldolgozó Váll.	$L_{17}^{(t)}$												$T_{17,12}^{(t)}$							$\mathfrak{b}_{17}^{(t)}$	14
Alumíniumszerkezeti Gyár														$T_{18,13}^{(t)}$						$\mathfrak{b}_{18}^{(t)}$	9
Hódmezővásárhelyi Fémfeldolgozó V.															$T_{19,14}^{(t)}$					$\mathfrak{b}_{19}^{(t)}$	8
Közös készáru feltételek							$T_{20,6}^{(t)}$						$T_{20,12}^{(t)}$	$T_{20,13}^{(t)}$	$T_{20,14}^{(t)}$			$T_{20,17}^{(t)}$		$\mathfrak{b}_{20}^{(t)}$	5
Folyó ráfordítások	$L_{21}^{(t)}$	$T_{21,1}^{(t)}$	$T_{21,2}^{(t)}$	$T_{21,3}^{(t)}$	$T_{21,4}^{(t)}$	$T_{21,5}^{(t)}$	$T_{21,6}^{(t)}$	$T_{21,7}^{(t)}$	$T_{21,8}^{(t)}$	$T_{21,9}^{(t)}$	$T_{21,10}^{(t)}$	$T_{21,11}^{(t)}$	$T_{21,12}^{(t)}$	$T_{21,13}^{(t)}$	$T_{21,14}^{(t)}$	$T_{21,15}^{(t)}$	$T_{21,16}^{(t)}$	$T_{21,17}^{(t)}$	$T_{21,18}^{(t)}$	$\mathfrak{b}_{21}^{(t)}$	13
Spec. bauxit ráfordítások		$T_{22,1}^{(t)}$	$T_{22,2}^{(t)}$																	$\mathfrak{b}_{22}^{(t)}$	5
Spec. timföld ráfordítások	$L_{23}^{(t)}$			$T_{23,3}^{(t)}$	$T_{23,4}^{(t)}$	$T_{23,5}^{(t)}$														$\mathfrak{b}_{23}^{(t)}$	9
Spec. kohászati ráfordítások	$L_{24}^{(t)}$						$T_{24,6}^{(t)}$	$T_{24,7}^{(t)}$	$T_{24,8}^{(t)}$	$T_{24,9}^{(t)}$										$\mathfrak{b}_{24}^{(t)}$	7
Egyéb spec. ráfordítások												$T_{25,11}^{(t)}$	$T_{25,12}^{(t)}$	$T_{25,13}^{(t)}$	$T_{25,14}^{(t)}$					$\mathfrak{b}_{25}^{(t)}$	2
Beruházási ráfordítások	$L_{26}^{(t)}$	$T_{26,1}^{(t)}$	$T_{26,2}^{(t)}$										$T_{26,12}^{(t)}$	$T_{26,13}^{(t)}$	$T_{26,14}^{(t)}$					$\mathfrak{b}_{26}^{(t)}$	6
Eredmények		$T_{27,1}^{(t)}$	$T_{27,2}^{(t)}$	$T_{27,3}^{(t)}$	$T_{27,4}^{(t)}$	$T_{27,5}^{(t)}$	$T_{27,6}^{(t)}$	$T_{27,7}^{(t)}$	$T_{27,8}^{(t)}$	$T_{27,9}^{(t)}$	$T_{27,10}^{(t)}$	$T_{27,11}^{(t)}$	$T_{27,12}^{(t)}$	$T_{27,13}^{(t)}$	$T_{27,14}^{(t)}$	$T_{27,15}^{(t)}$	$T_{27,16}^{(t)}$	$T_{27,17}^{(t)}$	$T_{27,18}^{(t)}$	$\mathfrak{b}_{27}^{(t)}$	3
	Fejlesztési változások	Bakonyi Bauxitbánya	Fejérmegyei Bauxitbányák	Ajkai Timföldgyár	Almásfüzitői Timföldgyár	Mosonmagyaróvári Timföldgyár	Ajkai Alumíniumkohó	Inotai Alumíniumkohó	Tatabányai Alumíniumkohó	Új kohó és blokkanódagyár	Székesfehérvári Könnyűfémmű	Kőbányai Könnyűfémmű	Balassagyarmati Fémfeldolgozó Váll.	Alumíniumszerkezeti Gyár	Hódmezővásárhelyi Fémfeldolgozó Váll.	Timföld külkereskedelem	Kohászati külkereskedelem	Félgyártmány és készáru külker.	Eredmények	Jobboldal	

3. ábra. A t-ik időszakon belüli kapcsolatok határozzák az alkalmazásra kerülő technológiákat. Ilyen módon a modellben érzékelhetővé válik az esetleges „növekvő hozadék" is, mégpedig mind a beruházási, mind a termelési folyamatokban.

A (0, 1) változók jelenléte kényelmessé teszi az ún. fix költségek és egyéb, a tevékenységek terjedelmétől független, állandó nagyságú ráfordítások figyelembevételét. Ismeretes, hogy a vegyipari és kohászati jellegű technológiákban az ilyen típusú ráfordítások gyakoriak. A termelés energiaigénye, a szükséges munkáslétszám és néhány más ráfordítás nagysága részben a berendezések és a technológia adottságaitól függő konstans érték; részben pedig a tevékenységek terjedelmével arányos.

Az alumíniumipar termelési folyamataiban léteznek olyan nem-lineáris kapcsolatok is, amelyek nem ragadhatók meg a modell logikai változói révén. Ezeknek a folyamatoknak a valósághű ábrázolása speciális meggondolásokat igényel.

Az alumíniumiparban az egyik legbonyolultabb nem-lineáris kapcsolat a timföldgyártási folyamat modellezésénél lép fel. Ha azt vizsgáljuk, hogy adott mennyiségű bauxit feldolgozásából mennyi timföld nyerhető és ehhez milyen nagyságú ráfordításokra van szükség, kiderül: a felhasznált bauxit minősége jelentősen befolyásolja mind a kihozatal, mind a ráfordítások nagyságát. A bauxit minőségét egyfelől kémiai összetétele, másfelől kristálytani szerkezete határozza meg. Minthogy azonban a bauxit természetben előforduló ásvány, minősége lelőhelyről lelőhelyre változik, és az átlagos minőség az időben általában rosszabbodó tendenciát mutat.

A timföldgyártás modellezésénél a bauxitminőség eltéréseiből adódó nehézségeket általában úgy szokták megkerülni, hogy feltételeznek valamilyen átlagos minőséget, és ehhez állapítják meg az átlagosan érvényes kihozatali és ráfordítási fajlagosokat. Ezt a megközelítést saját modellünkben nem tartottuk megfelelőnek, mert egy stratégiai modellből nem hiányozhat az ásványvagyonnal való gazdálkodás lehetősége sem. Ha előírnánk egy átlagos bauxit minőséget a modellben, megszűnnék a bányafejlesztés terén a döntési szabadság.

Modellünkben a bauxit minősége nem előre rögzített. Azt a modell alakítja ki időszakról időszakra azáltal, hogy keveri a különböző minőségű bauxitokat. A modell úgy alakítja ki a különböző felhasználóknak biztosított bauxit minőségét, hogy egyfelől figyelembe veszi a különböző lelőhelyek geológiailag adott fejlesztési lehetőségeit, másfelől a felhasználók igényeit, valamint azt, hogy miként értékesülnek a különböző minőségű bauxitok a feldolgozás során. Ilyen módon a modell meghatároz egy bizonyos optimálisnak tekinthető bauxitminőséget, ahol az optimális nem a bányászat és nem is a timföldgyártás érdekei szerint definiálódik, hanem a Tröszt szintjén.

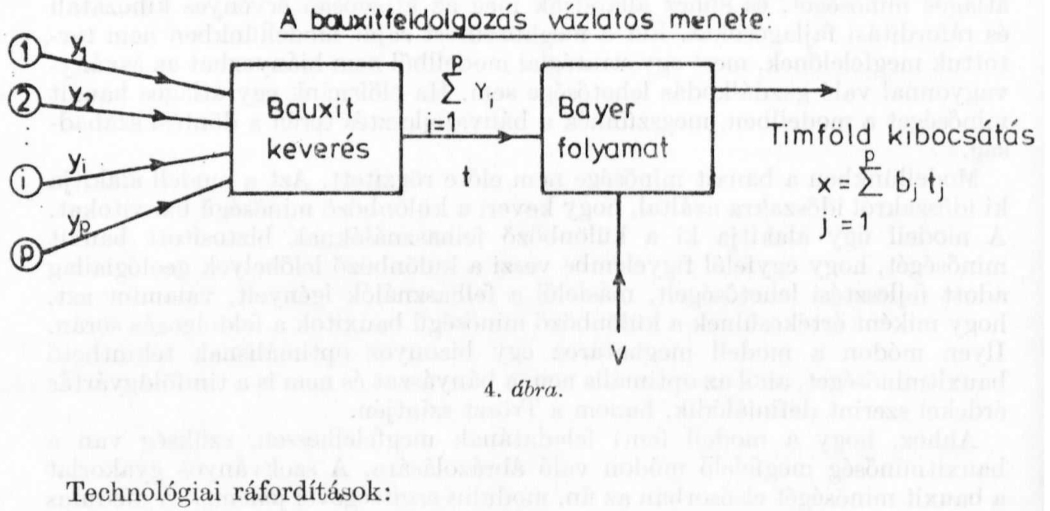
Ahhoz, hogy a modell fenti feladatának megfelelhessen, szükség van a bauxitminőség megfelelő módon való ábrázolására. A szokványos gyakorlat a bauxit minőségét elsősorban az ún. modulus segítségével jellemzi. A modulus a bauxitban levő Al_2O_3 tartalom és SiO_2 tartalom hányadosa. Mi abból indulunk ki, hogy ismerjük valamennyi létező és jövőben megnyitható bauxitlelőhelyen az előforduló ásvány minőségi jellemzőit. A lelőhelyeket úgy határozzuk meg, hogy tartalmukat homogénnek lehessen tekinteni. Ez lehetővé teszi azt, hogy bármilyen, a modell által kialakított bauxitelegyre nézve a modell kiszámítja annak Al_2O_3; SiO_2; Fe_2O_3, CaO és MgO tartalmát, valamint az egyéb szennyeződések mértékét és az elegy nedvességtartalmát. Mindezek a tényezők ugyanis befolyásolják a keletkező timföld mennyiségét és a timföldgyártás egyéb ráfordításait. A befolyás konkrét mértékei az alkalmazott technológiától függnek, ezt viszont a modellben a kialakuló fejlesztési stratégia határozza meg. Így végül is a modell a bauxitminőséget körkörösen érvényesülő ellentétes hatások együttes értékelése alapján alakítja.

Az alábbiakban leegyszerűsített formában bemutatjuk, hogyan fogalmazódnak meg a fenti összefüggések.

Vezessük be a következő jelöléseket:

i-edik sorszámú bauxitlelőhely, amely homogén bauxitot tartalmaz ($i = 1, 2, 3, \ldots, p$): $\{i\}$,
i-edik lelőhelyen kitermelhető bauxit bányanedves t-ban: k_i,
bauxitkitermelés az i-edik lelőhelyről: $y_i \leq k_i$,
i-edik lelőhelyen levő bauxit százalékos összetétele:

tapadó nedvesség	a_i^0
Al_2O_3	a_i^1
SiO_2	a_i^2
Fe_2O_3	a_i^3
$CaO + MgO$	a_i^4
Egyéb	a_i^5



4. ábra.

Technológiai ráfordítások:

$$t = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{bmatrix} \qquad v = Bt$$

A Bayer-folyamatba belépő bauxitot a t vektor komponensei jellemzik. Nevezetesen

$t_0 = \sum_i a_i^0 y_i$ a folyamatba belépő száraz bauxit mennyisége,

$t_1 = \sum_i a_i^1 y_i$ a folyamatba belépő Al_2O_3 mennyisége,

$t_2 = \sum_i a_i^2 y_i$ a folyamatba belépő SiO_2 mennyisége,

$t_3 = \sum_i a_i^3 y_i$ a folyamatba belépő Fe_2O_3 mennyisége,

$t_4 = \sum_i a_i^4 y_i$ a folyamatba belépő $CaO + MgO$ mennyisége,

$t_5 = \sum_i a_i^5 y_i$ a folyamatba belépő egyéb szennyezők mennyisége.

A dolog lényege az, hogy ezekután a timföldgyártási folyamat kibocsátása és a feldolgozáshoz szükséges tevékenységtől függő ráfordítások már a t vektor komponenseinek lineáris függvényei.

Befejezésül röviden szólni szeretnék arról, hogyan működik majd a modell a tervezési dialógusban. Mint már említettem: a modell rendeltetése a Tröszt optimális fejlesztési stratégiáinak elemzése, figyelemmel a népgazdaság egészének igényeire és lehetőségeire. Ezeket a modellben a külső változók értékei fejezik ki. A külső változók értékeire nézve azonban nem rendelkezünk eleve konzisztens információkkal. A hosszútávú tervezési folyamat indításakor ezek inkább prognosztikus értékű becslések. Ezért az első kísérleti számításokat a külső változók általunk becsült értékeivel fogjuk elvégezni. Vagyis bizonyos feltételezésekkel élünk a gazdasági környezet várható alakulását illetően.

A modell tröszti szintű számításaiban olyan célfüggvényekkel kívánunk dolgozni, amelyek különböző tröszti érdekeket fejeznek ki. Úgy véljük, hogy egy olyan modell számára, mint a miénk, amely igen bonyolult rendszer működését írja le: nem definiálható egyetlen megfelelő célfüggvény. Nem létezik ugyanis olyan egyetlen, homogén érdek, amelyhez a Tröszt hosszútávú fejlődését hozzá lehetne kapcsolni. Ehelyett számos, egymásnak ellentmondó érdek hat.

Ezeknek az érdekeknek egyike, másika olyan erős, hogy meghatározott szinten való érvényesülésüket kötelezően elő kell írni. Ilyen érdek többek között a meglevő beruházott eszközök működésének biztosítása. Ezért a modellban nem engedjük meg létező tevékenységkörök megszüntetését. Az ilyen tevékenységkörökre vonatkozó döntési változók összege pontosan egy kell, hogy legyen. Vagyis valamilyen szinten a tevékenységek folytatódnak. Nem így a jövőre tervezett, jelenleg még nem folytatott tevékenységek. Itt a logikai változóktól csak azt követeljük, hogy összegük ne legyen egynél nagyobb. Hasonlóan, a feltételek között biztosítjuk bizonyos környezetvédelmi és szociális intézkedések végrehajtását is.

Mindezek után a tröszti gazdálkodás hatékonyságának mérésére több célfüggvény szimultán alkalmazását tervezzük. Ezek között minden bizonnyal szerepelni fog a nettó tröszti eredmény, a tröszti részesedési alap és a tröszti nemzetközi fizetési mérlegek maximalizálása. Ezen felül elemezni kívánunk olyan extremális tulajdonságú megoldásokat, amelyek a fenti mutatók értékeinek bizonyos előre rögzített szintje mellett minimális mennyiségű beruházást, illetve minimális munkaerő mennyiséget kívánnak.

Mint láthatják, modellünket nem valamiféle tervezőautomatának szánjuk, hanem a gazdasági elemzés többé-kevésbé megbízható eszközének. A különböző extremális megoldások között keresünk józan kompromisszumokat. Ezek a kompromisszumos megoldások lépnek majd be — a többi ágazat tervjavaslataival együtt — a népgazdasági szintézist szolgáló központi modellrendszerbe. A szintetizáló számítások keretei között az ágazati tervjavaslatok koordinálódnak és kialakulnak az ágazatokkal szembeni igények, valamint az ágazatok lehetőségei erőforrások igénybevételére. Modellünk nyelvén szólva: a szintetizáló számítások új értékeket adnak a külső változóknak.

A külső változókra nyert új információk alapján a modell tröszti szintű számításait meg kell ismételni és a megismételt számítások alapján új kompromisszumos tervjavaslatok generálódnak a központi számítások céljaira. Ilyen módon szolgálja majd a modell a hosszútávú tervezési folyamatban lezajló kölcsönös információcsere algoritmizálását.

(Beérkezett: 1980. február 29-én.)

STRATEGIC DECISIONS ON DEVELOPING ALUMINIUM INDUSTRY

Experts of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences and of the Hungarian Aluminium Trust have collaborated for a long time on a mathematical programming type model for the preparation of structural decisions concerning the long run development of the Hungarian aluminium industry.

The model construction was finished under completely specified form in 1979. The quantification of the parameters is in progress and the first experimental computations are expected in 1980.

The basic ideas of the model are expounded. The role and place of the model in the system of Hungarian long-run national planning is outlined.

The long-run economic and technological interdependences prevailing in the aluminium industry are highly non-linear and often non-convex. It is shown how we try to describe these in the framework of a large scale, multiperiodic, mixed-integer linear programming system.

СТРАТЕГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ О РАЗВИТИИ АЛЮМИНИЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Специалисты Научно-исследовательского института математики ВАН и Треста алюминиевой промышленности уже несколько лет работают над разработкой такой системы моделей математического программирования, которам приемлема для обоснования с помощью расчетов таких структурных решений, которые связаны с долгосрочным развитием алюминиевой промышленности.

Спецификация модели завершена. Идет подготовка цифрового материала. Первые экспериментальные расчеты проведены в 1980 г.

Представляется главная идея модели. Описывается ее место и роль в системе долгосрочного народнохозяйственного планирования.

Долгосрочные экономические и технологические соотношения в значительной степени являются не только нелинейными, но даже и не выпуклыми. В статье показывается, каким образом можно выразить эти большие и многоступенчатые соотношения с помощью системы смешанного целочисленного линейного программирования.

Beluszky Pál—Sikos T. Tamás

Hatásarány-analízis a területi kutatásokban

Az encsi járás demográfiai vizsgálata

A hatásarány (Shift and Share)

A módszer első alkalmazója Daniel B. Cramer volt 1942-ben. Ezután a módszer egy időre feledésbe merült, hasonlóan a faktor- és clusteranalízishez; újbóli felfedezése Dunn (1960) nevéhez fűződik.

Valójában a módszer széles körű felhasználása csak az 1960-as évek végén, illetve az 1970-es évek elején indult meg. Ezen időszak legjelentősebb alkalmazói: Ashby (1964), Boudville (1966), Thirwall, Steed, Maddox és Liebhavsky (1967), Brown és Stilwell (1969), Randall (1973).

Hazánkban először Nemes Nagy József a regionális gazdaságnövekedés vizsgálatára (1977), Lackó László pedig a szocialista iparban foglalkoztatottak számának területi elemzésére (1978) alkalmazta az eljárást. Mint az eddigi nemzetközi és hazai alkalmazásokból kitűnik, a hatásarány-analízis eredményesen felhasználható a nemzeti jövedelem területi differenciálódásának, illetve a foglalkozási szerkezet változásának elemzéséhez. Az analízis viszonylag egyszerű strukturális felépítettsége, illetve könnyű kezelhetősége megteremti a széles körű alkalmazás lehetőségét a területi kutatásokban is.

A módszer rövid leírása

A hatásarány-analízis, mint arra az elnevezés is utal, tulajdonképpen egy változás elemzési módszer, amelynek segítségével arra kaphatunk választ, hogy a vizsgált gazdasági szerkezeteket, mutatókat a területi, illetve a strukturális tényezők milyen mértékben alakítják. A módszert leggyakrabban a foglalkoztatottak számának területi és strukturális vizsgálatához használják, ezért mutatjuk be az alapmodellt erre az esetre. Legyen

$i = 1, \ldots n$ az ágazatok száma,
$j = 1, \ldots m$ a területi egységek száma,
k_{ij} = az i-edik ágazat foglalkoztatottainak száma a j-edik területi egységben.

A modell két időszakot hasonlít össze — általában —, ezért vezessük be a bázis időszak jelölésére felső indexként a 0-t, a másik időpontéra pedig az 1-et. Az alapmodell két mátrixból áll, K^0-ból és K^1-ből, melyek tartalmazzák a két időpontban a foglalkoztatottak számát ágazatonként, illetve területi egységenként.

$K_j = \sum_{i=1}^{n} k_{ij}$ = az összes foglalkoztatottak száma a j-edik területi egységben;

$H_i = \sum_{j=1}^{m} k_{ij}$ = a népgazdaság i-edik ágazatában foglalkoztatottak számat.

A népgazdaságban az összes foglalkoztatott száma a következőképpen számítható:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} k_{ij}$$

$V_j = K_j^0 - K_j^1$ = az összes foglalkoztatott számának változása a bázisidőszakról a beszámolási időszakra a j-edik területi egységben.

A modell egyes tényezőit a következő formulákban fogalmazhatjuk meg:
A területi tényezők hatása:

$$T_j = K_j^0 - K_j^1 \frac{H^1}{H^0};$$

A strukturális tényezők hatása:

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} k_{ij}^0 \cdot \left(\frac{H_i^1}{H_i^0} - \frac{H^1}{H^0} \right).$$

A két egymást korlátozó (kompetitív) tényező hatása:

$$C_j = \sum_{i=1}^{n} \left[k_{ij}^1 - k_{ij}^0 \left(\frac{H_i^1}{H_i^0} \right) \right].$$

A nettó relatív változást a területi tényező (T) és a strukturális tényező (S) összege adja:

$$N = T + S.$$

A kompetitív hatás, illetve a nettó relatív változás között az a különbség, hogy míg a kompetitív hatás a területi tényező hatásának és a strukturális tényező hatásának különbsége, addig a nettó relatív változás a kettő összege.

A módszer nemcsak két időpont összehasonlítását teszi lehetővé, hanem segítségével vizsgálható olyan probléma is, mint pl. a munkatermelékenység területi változása. Ebben az esetben a két időpontot a munkatermelékenységi mutató két komponensével, a termelés nagyságrendjével, pontosabban az adott iparág termelési értékével, illetve az ipari foglalkoztatottak számával kell helyettesíteni. A módszerből adódik egyfajta egyszerű területi osztályozás is. Az egyes területi típusok BOUDVILLE (1966) nyomán a következőképpen határozhatók meg (hasonlóan WEBBnek a népmozgalmi típusok kijelölésére alkalmazott eljárásához):

1. területi típus: Mind a strukturális (S), mind a területi tényező értéke (T) pozitív, de a strukturális tényező értéke nagyobb a területi tényező értékénél.

2. területi típus: Mind a strukturális (S), mind a területi tényező értéke (T) pozitív, de a strukturális tényező értéke kisebb, mint a területi tényező értéke.
3. területi típus: A pozitív strukturális tényező értéke (S) nagyobb a negatív területi tényező abszolút értékénél ($-T$).
4. területi típus: A pozitív területi tényező értéke (T) nagyobb a negatív strukturális tényező abszolút értékénél ($-S$).
5. területi típus: A pozitív területi tényező értékénél (T) nagyobb a negatív strukturális tényező abszolút értéke ($-S$).
6. területi típus: A pozitív strukturális tényező értékénél (S) nagyobb a negatív területi tényező abszolút értéke ($-T$).
7. területi típus: Mind a strukturális tényező értéke (S), mind a területi tényező értéke (T) negatív, de a strukturális tényező abszolút értéke ($-S$) nagyobb, mint a területi tényező abszolút értéke ($-T$).
8. területi típus: Mind a strukturális tényező értéke (S), mind a területi tényező értéke (T) negatív, de a strukturális tényező abszolút értéke ($-S$) kisebb, mint a területi tényező abszolút értéke ($-T$).

Az első négy területi típusba tartozó megfigyelési egységekre az átlagosnál gyorsabb növekedés a jellemző, míg a második négy területi típus megfigyelési egységei az átlagos fejlődéstől elmaradnak. Természetesen az osztályozás másképpen is elvégezhető, pl. STILWELL mindössze 6 területi típust különböztet meg, az 1-es és 2-es típust, továbbá a 7-es és 8-as típust egy-egy típusba vonja össze. Ez az összevonás azért tehető meg, mert e típusok egymástól alig-alig különböznek.

Az osztályozásnak másfajta megoldását jelenti az, ha a hatásrány-analízist összekapcsoljuk clusteranalízissel. Ebben az esetben a típusokat a területi tényezők értékének és a strukturális tényezők értékének clusterezése révén kapjuk. A típusalkotás elvégezhető kartográfiai úton is (lásd részletesebben az encsi járás demográfiai eredményeinek értékelésénél).

A módszer eredményeinek jósága szempontjából igen fontos, hogy helyesen válasszuk ki a vizsgálathoz:

— a tanulmányozandó időintervallumot,
— a bázisévet, illetve
— az egyes területi egységek aggregáltsági szintjét.

A hatásarány-analízissel végzett eddigi vizsgálatainkból arra a következtetésre jutottunk, hogy e módszer sikeresen alkalmazható — a fentiek analógiájára — a népesség korcsoportonkénti megoszlásának, illetve foglalkozási szerkezete változásának elemzéséhez.

A vizsgált terület megválasztása és jellemzése

Számításainkat az encsi járás 82 községére végeztük. A járás Borsod-Abaúj-Zemplén megye kedvezőtlen természeti adottságú, iparilag fejletlen, agrár jellegű, aprófalvas térsége. A körzet 1960–70 közötti népesedési folyamatainak jellegzetességeit kívántuk feltárni az elemzés során. Ahhoz, hogy ezt megválaszolhassuk és egyben magyarázatot adjunk arra, hogy miért e térségre esett a választásunk, röviden át kell tekintenünk 1960-ig a térség népesedési folyamatait.

Népesedési folyamatok az I. világháborúig

A járásban kialakuló demográfiai folyamatokat az I. világháborúig a belső adottságok, a terület eltartóképessége, a — többnyire szűkös — adottságokra kialakított, községről községre is változó közösségi reagálások (kivándorlás, vándormunka, születéskorlátozás stb.) szabták meg.

Miután a járás keresőinek négyötöde a mezőgazdaságból élt, első renden a mezőgazdaság eltartóképessége alakította a népesedési folyamatokat. A járás hegy- és dombvidéki tájainak agrár-eltartóképessége már a múlt század közepén telítődött. Ekkor az ökológiai adottságok és a mezőgazdaság szerkezete közötti összhang is megbomlott.

A század második felében a gabonakonjunktúra, a kedvező piaclehetőségek (a vasúthálózat kiépülése előtt a járás községei a Felvidék piacain előnyben voltak az Alfölddel szemben), s nem utolsó sorban a növekvő lakosság igénye a legelők, rétek feltörését, a még meglevő erdőterületek további irtását, a szántónak az ökológiai adottságokhoz képest túlzott terjeszkedését eredményezte, s ez nem párosult a mezőgazdaság általános korszerűsödésével, belterjesedésével. Így a járás népességszáma a termőterület növekedése ellenére már a múlt század végén elérte a mezőgazdaság eltartóképességének felső határát.

A Miskolc—Kassa vasútvonal megnyitása (1860) fokozta a Hernádvölgy forgalmi szerepét, ugyanakkor a Zempléni-hegység lábán futó útvonal veszített jelentőségéből. Ebben az időszakban a járásban számottevő gyáripar nem alakult ki.

A fenti okok következtében a magas természetes szaporodás ellenére a körzet *népességszáma* 1870 és 1910 között stagnált (1%-kal csökkent).

E stagnáló népességszám mögött már olyan jelenségek húzódtak meg, melyek kihatásai máig érződnek, sőt felerősödve napjainpban súlyos demográfiai (társadalmi-gazdasági) *egyensúlyzavarhoz vezettek.*

A járáson belül a területi egyenlőtlenségek kialakulása, felerősödése a demográfiai folyamatok terén is jelentkezik, illetve tükröződik már. 1870 és 1910 között különösen a *Zempléni-hegység falvaiból nagyarányú az elvándorlás;* a népesség száma 15%-kal csökkent; a Cserehátön alig változott (a csökkenés mindössze 0,4%), a kedvezőbb ökológiai adottságú, forgalmilag feltárt Hernádvölgy falvaiban viszont némiképp növekedett a lakosság száma (4%-kal), különösen a jobbparti, vasúti fővonalhoz jutott, a völgysíkon gazdálkodó falvakban (itt a növekedés majd 12%). A Hernádvölgy községeiben a növekedés meglehetősen egyenletes volt, míg a Cserehátön a kép mozaikszerű; a kis- és középparaszti falvakban a népesség számottevően vagy nagymértékben csökkent, a mezőgazdasági cselédek, napszámosok által lakott falvak népességszáma (gyakran erősen hullámozva ugyan) általában emelkedett.

A járásban a kivándorlás ellenére *agrártúlnépesedés lépett fel,* s jelentkeztek *ennek következményei, a paraszti birtok elaprózódása, az élet- és versenyképes parasztgazdaságok csekély száma, elszegényedés.*

Az elvándorlás s egyes falvak népességszámának csökkenése ellenére *a demográfiai struktúra kevéssé torzult.* A magas természetes szaporodás következtében a *korstruktúra fiatalosabb volt az országos átlagnál.* Az elvándorlás szelektivitása sem érvényesült olyan mértékben, mint a későbbi évtizedekben, a gazdálkodás alacsony termeléstechnikai szintjén pedig a helybenmaradók képzettsége, ismeretei, vállalkozókedve stb. nem játszott különösebb szerepet.

Népesedési folyamatok a két világháború között

A járás népesedési folyamatainak irányai, jellege keveset változott a század első évtizedeiben. Teljesen *változatlan maradt a járás gazdasági struktúrája s ennek következtében a népesség foglalkozási szerkezete.* Még 1949-ben is a községek négyötödében 70% felett volt a mezőgazdasági keresők aránya.

Ez a szinte megbontatlan agrártársadalom súlyos demográfiai (s természetesen gazdasági) *egyensúlyzavarokat, problémákat hordozott. Az egyensúlyzavar mindenekelőtt a terület eltartóképessége s az itt élő lakosság száma közötti eltérések növekedésében mutatkozott.* A népesség száma — több évtizedes stagnálás után — a körzet egészében növekedett, a foglalkozási átrétegződés híján növekedett a mezőgazdaságból élők száma is.

1910 és 1949 között a járás lakossága 64 649 főről 72 983 főre emelkedett (12,9%-os növekedés). *A népességnövekedés* nem a belső erőforrások bővülésének, a munkaalkalmak gyarapodásának volt a következménye, hanem *kényszerítő körülmények hatására történt.* Az I. világháború után a tömeges kivándorlás lehetőségei megszűntek, Miskolc, Diósgyőr s a kialakuló sajóvölgyi iparvidék népességfelvevő-képessége korlátozott volt, így a népességnövekménynek csak egy része tudott elvándorolni.

A visszafogott elvándorlás következtében *a demográfiai struktúra* ugyan *kiegyenlített maradt, ám a gazdasági bázis és a demográfiai felépítmény közötti egyensúly egyre inkább megbomlott.* 1949-ben a járás agrárkereső-sűrűsége 20,9 fő/km² volt; becslések szerint a két világhoború között a mezőgazdasági munkaerő harmadát-kétötödét nem igényelte volna a gazdálkodás.

Népesedési folyamatok 1949—1960 *között*

Az 1949. évi népszámlálás a két világháború közötti időszakhoz viszonyítva még szinte változatlan állapotokat rögzített. (Az újjáépítés évei alatt a termelőerők területi elhelyezkedése nem változott, a földosztás átmenetileg rögzítette az agrártársadalmat.) A népszámlálás utáni hónapokban azonban a demográfiai folyamatok, a demográfiai struktúra átalakulása hihetetlenül felgyorsultak. *A járás demográfiai feszültségeinek megoldási lehetőségei találkoztak az ország igényeivel.*

1949 után Borsod-Abaúj-Zemplén megye nem mezőgazdasági munkahelyeinek száma is ugrásszerűen növekedett; 1949-ben az ipari létszám 62 ezer fő, 1955-ben 89 ezer fő, 1962-ben 112 ezer fő volt. A létszámnövekedés — a megye iparának merev térszerkezete következtében — az Ózd—Sajóvidék—Miskolc tengelyre szorítkozott ugyan, de az itt fellelhető munkaerőtartalékokat már az ötvenes évek elejére felemésztette, s az iparvidék vonzása a megye távolabbi területeire is kiterjedt.

Ugyanakkor a járásban évtizedek folyamán kialakult agrártúlnépesedést a szövetkezeti gazdálkodás térhódítása nyilvánvalóvá tette, a felgyülemlett agrárnép-felesleg kevéssé kötődött a földhöz. A közlekedési lehetőségek gyors megváltozása (1949-ben a körzet 39 községe rendelkezett tömegközlekedési kapcsolattal, 1955-ben már 77) lehetővé tette a napi munkábajárást.

Mivel a munkaerőt vonzó központok a járás határain kívül, a községek többségétől egy-másfél-két órányira helyezkednek el, a foglalkozási átrétegződés szükségszerűen támogatja az elvándorlást. Az ötvenes években azonban *fékezte az elvándorlást*

— *az iparvidékek korlátozott fogadóképessége* (kisvolumenű s néhány településre koncentrált állami lakásépítés),
— a saját erőből történő áttelepülés ekkor még többnyire hiányzó anyagi eszközei,
— s az a tény, hogy a lakóhelyükön kívül munkát vállalók zöme korábban a mezőgazdaságban dolgozott, így érthetően jobban kötődött lakóhelyéhez, a „kétlaki" életformához.

1. *táblázat*

A foglalkozási átrétegeződés alakulása az encsi járásban
1949–1970

Népgazdasági ág	1949		1960		1970	
	keresők száma	összes keresők %-ában	keresők száma	összes keresők %-ában	keresők száma	összes keresők %-ában
Ipar, építőipar	3 038	9,20	6 268	16,92	8 261	30,6
Mezőgazdaság	24 959	75,68	22 311	60,22	11 796	43,7
Szállítás	794	2,40	2 437	6,58	2 665	9,9
Kereskedelem	540	1,64	1 359	3,67	1 402	5,2
Egyéb	3 694	11,18	4 674	12,61	2 878	10,6
Összesen	33 025	100,00	37 049	100,00	27 002	100,00

1949 és 1960 között még növekedett az encsi járás lélekszáma, 72 983 főről 74 996 főre (2,8%-kal). A népességgyarapodás mögött azonban már egyre fokozódó mérvű elvándorlás húzódott meg. A ellentétes hatások eredőjeként 9000 főnyi vándorlási veszteség érte a járást. Az elvándorlók többsége az iparvidékek közelében fekvő községekbe vándorolt. Tapasztalható, de nem vált tömegessé a körzeten belüli vándorlás: a Hernádvölgy jobb forgalmi fekvésű községeiből az elvándorlók helyébe a forgalmilag elzárt cserehát, zempléni községek lakói húzódtak. *Az ingázás miatt fokozott jelentőségűvé válik a forgalmi fekvés, s már ekkor megindul a falvak közötti erőteljes differenciálódás.*

A községek népmozgalmát a közepes vagy nagymérvű természetes szaporodás és a közepes vagy nagymérvű elvándorlás jellemzi. A magas természetes szaporodás s a fokozódó elvándorlás eredőjeként a falvak változatlan lakosságszámot jelző „nívófelület" közelében helyezkednek el. A kiegyenlített vándorlási egyenleggel vagy vándorlási nyereséggel rendelkező mintegy tucatnyi község többsége a Hernádvölgy déli szakaszán helyezkedett el. A Cserehát községeinek legtöbbje (36 faluból 18) 15–20%-os vándorlási veszteséget szenvedett.

A járás községeinek népmozgalmi típusai még nem tükrözik egyértelműen a meginduló demográfiai eróziót. Ez mindenekelőtt az országos átlagot messze meghaladó természetes szaporodásnak köszönhető.

Az encsi járást a korábbi évtizedekben is jellemezte a magas természetes szaporodás és a fiatalos korstruktúra. Még az ötvenes években is az országos átlagot messze meghaladó volt a születési gyakoriság és így a járás *a borsodi* *iparvidék* (és részben távolabbi városok, iparvidékek) *egyik legfontosabb munkaerőutánpótló területévé vált. E szerepkör sajátossága, hogy miután ezekben az években az ipartelepítés nem volt munkaerőre orientált, az ipar, építőipar munkaerő-ellátása nagytávú ingázással, illetve kényszerű elköltözéssel járt együtt a körzetben.*

Az elvándorlás a korábban felgyülemlett egyensúlyzavarok, demográfiai feszültségek levezetéséhez járult hozzá, noha a fokozódó gyorsaságú elvándorlás potenciálisan már magában rejtette a későbbi egyensúlyzavar kialakulását. (Önmagában a korstruktúra változása is egyre kevésbé tette lehetővé a következő években az igen magas születésszám fenntartását.) Annak ellenére, hogy az elvándorlás bizonyos demográfiai egyensúlyzavarok mérsékléséhez vezetett, *az ötvenes évek végére korántsem alakult ki egyensúlyi állapot, sőt egyidejűleg több egyensúlyzavar-típus alakult ki.*

1. Az elvándorlás, a foglalkozási átrétegződés, illetve ingázás ellenére még *korántsem állt helyre a munkaerőkínálat és igény egyensúlya. A gazdasági aktivitás alacsony,* a mezőgazdasági keresők foglalkoztatottsága alacsony szintű, a gazdálkodás adott struktúrája mellett továbbra is *agrártúlnépesedés tapasztalható* a körzet legnagyobb részében. *Mindez indokolja a további elvándorlást.*

2. Az ingázás — mivel az ingázók céltelepülései a körzeten kívül esnek — nem járult hozzá a körzet egészében a munkaerőkínálat és szükséglet egyensúlyának helyreállításához. Ennek egyrészt gazdasági következményei lettek, másrészt a nagyfokú ingázás újabb feszültségek forrása lett; *növelte az elvándorlási kedvet, túlzott terheket rótt a munkavállalókra,* s a körzetben lakó, de a körzeten kívül dolgozó munkavállalók lakóhelyei nem részesültek a szükséges infrastrukturális beruházásokban sem.

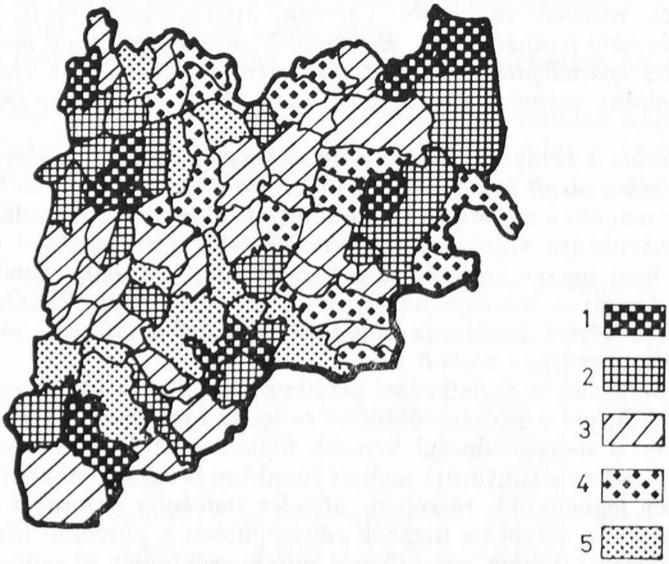
3. Még csak korlátozott területen, főképp a Cserehát magjának néhány községében alakultak ki *a népesség struktúrájában egyensúlyzavarok* (rohamos elvándorlás, elöregedés, a születések számának nagyfokú csökkenése stb.). Az encsi járásban kialakult sajátos és területileg is differenciált demográfiai folyamatok is indokolják e térség elemzését.

Az encsi járás 1960—1970 közötti demográfiai folyamatának vizsgálata hatásarány-analízissel

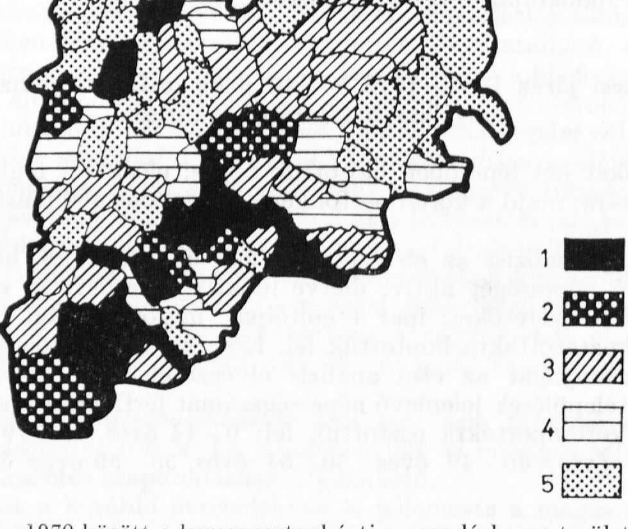
Vizsgálatunkat két lépcsőben hajtottuk végre: először a foglalkozási szerkezet változására, majd a korcsoportonkénti megoszlás alakulására végeztünk elemzést.[1]

A hatásarány-analízist az első esetben úgy építettük fel, hogy a települések jelenlevő népességét aktív, illetve inaktív keresőkre és eltartottjaikra továbbá az aktív keresőket: ipar + építőipar, mezőgazdasági és tercier ágazatban foglalkoztatottakra bontottuk fel. Ezek az alapadatok képezték vizsgálatunk bázisanyagát az első analízis elvégzéséhez. A korcsoportonkénti elemzéshez a települések jelenlevő népességszámát férfiakra és nőkre, továbbá a következő korcsoportokra osztottuk fel: 0—14 éves, 15—19 éves, 20—29 éves, 30—39 éves, 40—49 éves, 50—54 éves, 55—59 éves és 60—évesre.

[1] A számításokat az MTA SZTAKI CDC 3300-as típusú számítógépén végeztük. A program kipróbált formában az érdeklődők rendelkezésére áll.



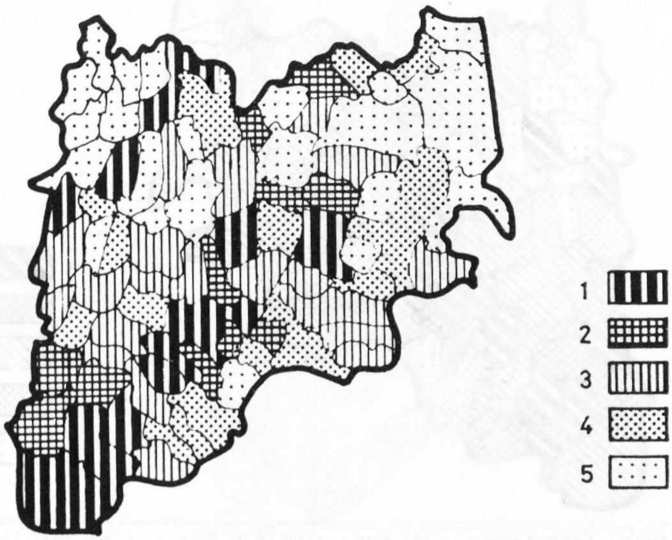
1. *ábra*. Az 1960–1970 között a korcsoportonkénti megoszlásban bekövetkezett strukturális változás iránya. 1 = 1,0 felett, 2 = 1–0,4, 3 = 0,3–(–0,3), 4 = –0,3–(–1,0), 5 = – 0,1 alatt



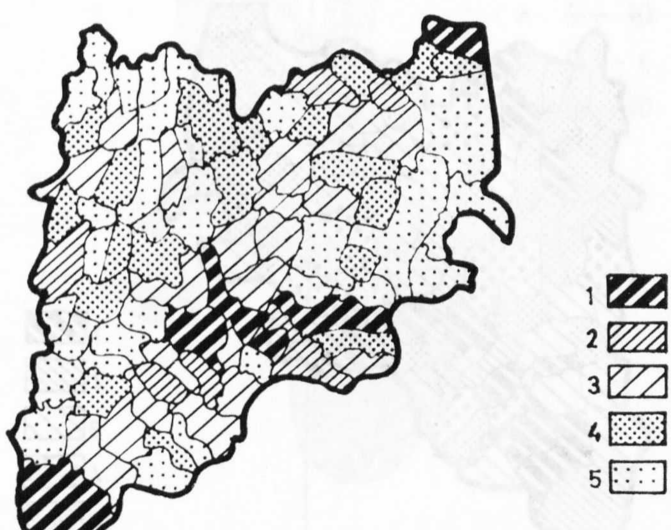
2. *ábra*. Az 1960–1970 között a korcsoportonkénti megoszlásban a területi hatás iránya. 1 = 10,1 felett, 2 = 5,1–10,0, 3 = 5,0–(–5,0), 4 = –5,1–(–10,0), 5 = –10,1 alatt

Erre a részletes korcsoportonkénti felosztásra azért volt szükség, hogy ezzel is precízebbé tegyük a számításainkat.

Ezek után elvégeztük a két hatásarány-analízist és a 2. táblázatba foglalt eredményekhez jutottunk.

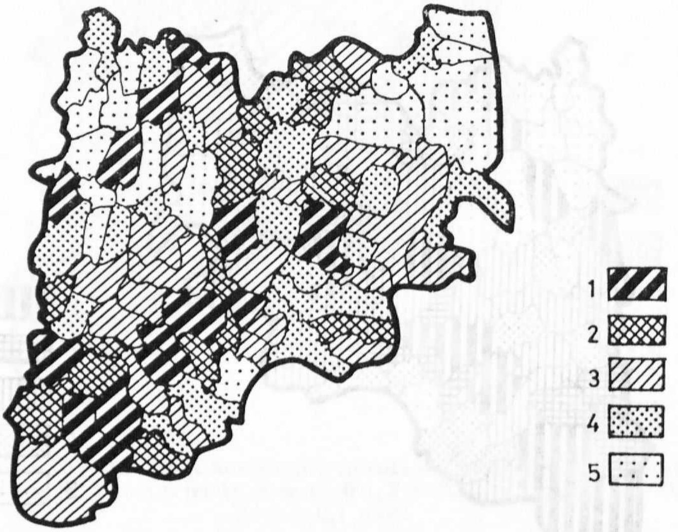


3. *ábra.* Az 1960—1970 között a foglalkozási szerkezet változásában a területi tényező hatása. 1 = 10,1 felett, 2 = 4,1—10,0, 3 = 4,0— (—4,0), 4 = —4,1— (—10,0), 5 = —10,1 alatt

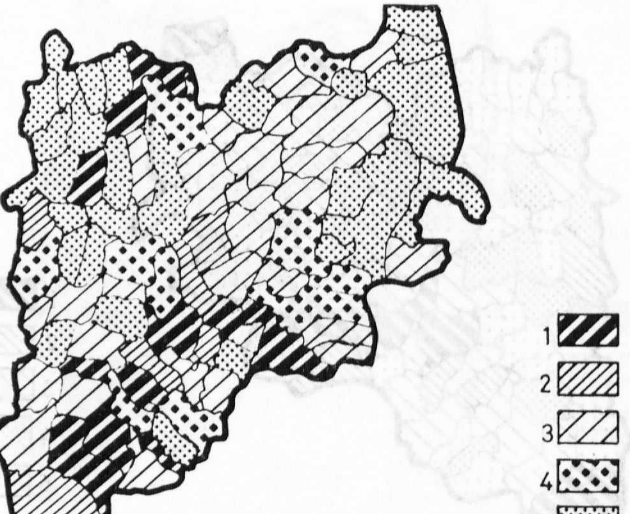


4. *ábra.* Az 1960—1970 között a foglalkozási szerkezet változásában a strukturális tényező hatása. 1 = 3,1 felett, 2 = 1,1—3,0, 3 = 1,0— (—1,0), 4 = — (—1,1—3,0), 5 = —3,1 alatt

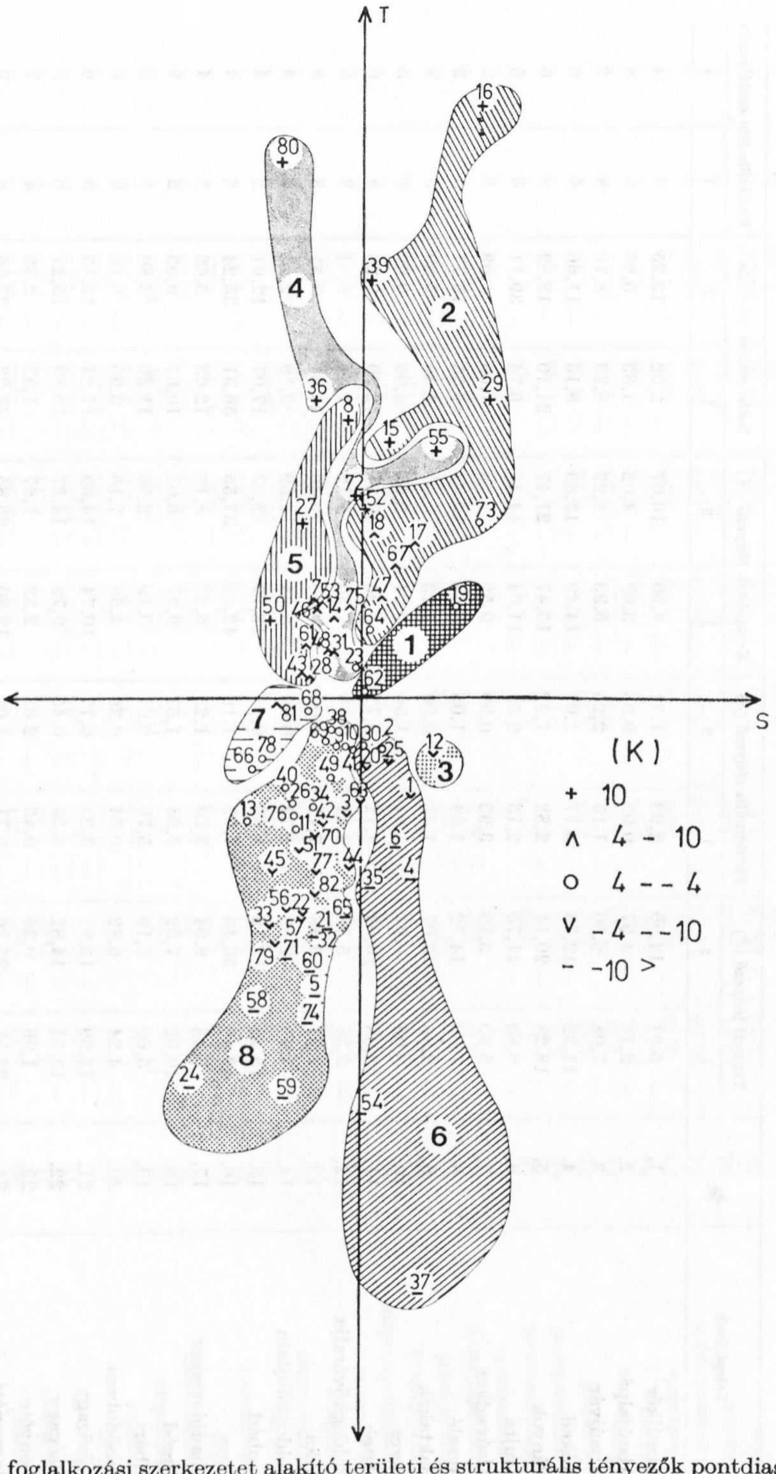
Az összefoglaló tábla adatainak kiértékeléséhez felhasználtuk a kartográfiai módszereket is. A területi, strukturális és kompetitív tényezőket mindkét vizsgálat esetén kartografáltuk (1–6. ábra), illetve pontdiagramokban ábrázoltuk (7–8. ábra).



5. *ábra.* Az 1960–1970 között a foglalkozási szerkezetben bekövetkezett kompetitív változás tendenciája. 1 = 10,1 felett, 2 = 4,1–10,0, 3 = 4,0–(–4,0), 4 = –4,1–(–10,0), 5 = –10,1 alatt



6. *ábra.* Az 1960–1970 között a korcsoportonkénti megoszlásban a két tényező együttes változásának (kompetitív) hatása. 1 = 10,1 felett, 2 = 5,0–10,0, 3 = 5,0–(–5,0), 4 = 5,1–(–10,0), 5 = –10,1 alatt



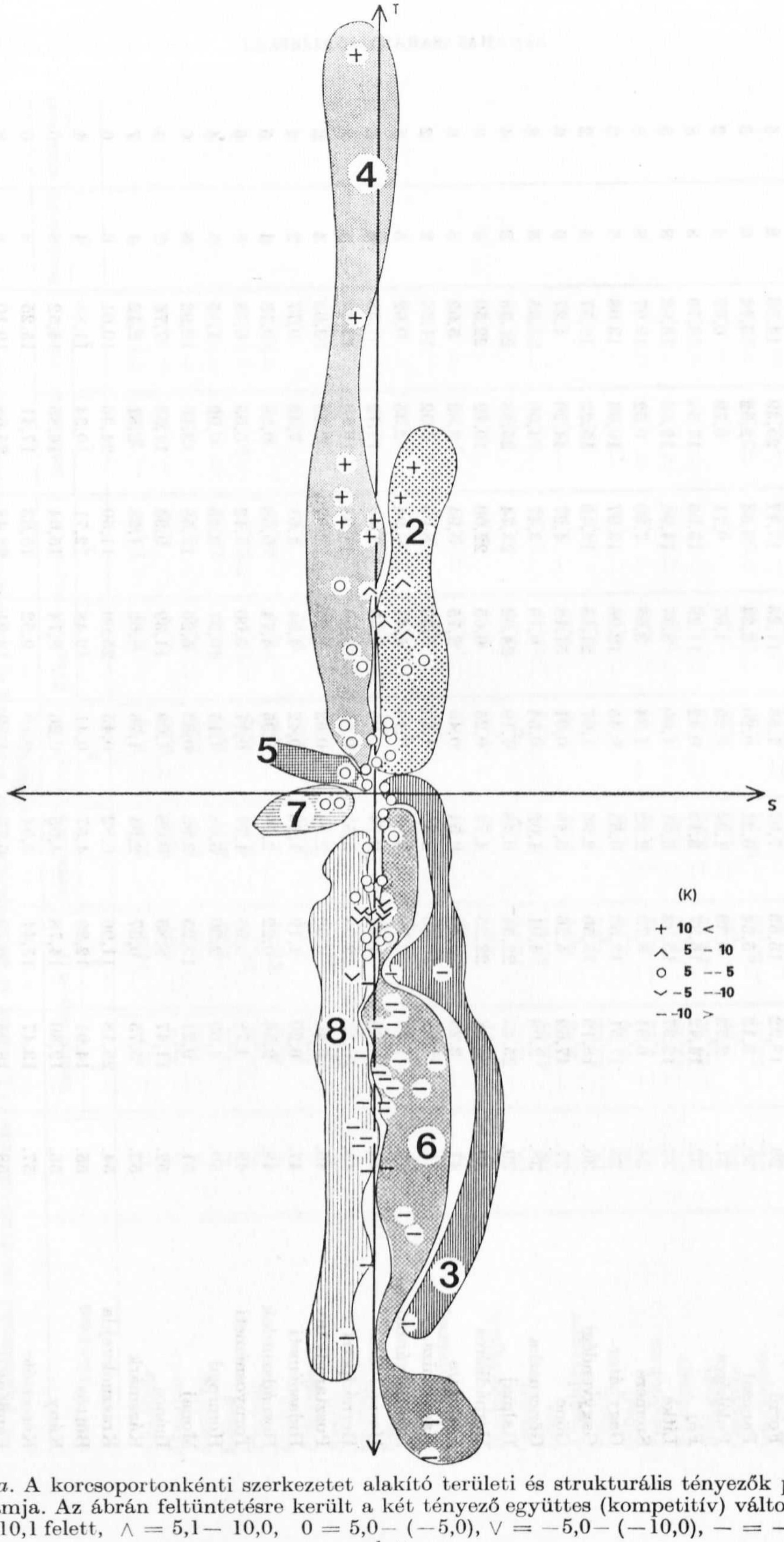
7. *ábra.* A foglalkozási szerkezetet alakító területi és strukturális tényezők pontdiagramja. Az ábrán feltüntetésre került a két tényező együttes (kompetitív) változása + = 10,1 felett, ∧ = 4,1—10,0, 0 = 4,0— (—4,0), ∨ = —4,1— (—10,0), — = —10,1 alatt

2. táblázat

A foglalkozási szerkezet-változás (1), illetve a korcsoportonkénti változás (2) hatásarány-analízisének eredményei az 1960–1970-es időszakra

Települések		Területi tényező (*T*)		Strukturális tényező (*S*)		Kompetitív tényező (*K*)		Nettó relatív változás		Boudville-féle osztályozás	
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Abaújkér	1.	– 5,91	14,96	2,99	– 1,71	– 8,90	16,67	– 2,92	13,25	6	4
Abaújalpár	2.	– 2,76	– 4,97	0,93	– 9,96	– 3,69	– 4,02	– 1,83	– 5,93	6	8
Abaújvár	3.	– 7,08	6,50	– 1,15	2,26	– 5,93	4,23	– 8,23	8,76	8	2
Kéked	4.	–11,32	–12,73	3,17	1,07	–14,49	–13,80	– 8,15	–11,66	6	6
Pányok	5.	–18,28	–20,14	– 2,82	1,32	–15,47	–21,47	–21,10	–18,82	8	6
Zsujta	6.	– 8,89	–41,76	2,15	2,65	–11,04	–44,41	– 6,74	–39,11	6	6
Alsóvadász	7.	5,59	3,19	– 3,93	0,90	9,52	2,28	1,66	1,09	5	2
Aszaló	8.	17,39	14,72	– 1,04	1,05	18,44	13,67	16,35	15,77	5	2
Baktakék	9.	– 2,86	– 5,07	– 1,63	0,00	– 1,23	– 5,07	– 4,49	– 5,00	8	8
Beret	10.	– 3,05	0,94	– 1,01	– 1,56	– 2,04	2,50	– 4,06	– 0,62	8	5
Detek	11.	– 8,08	–10,03	– 4,12	0,77	– 3,96	–10,81	–12,20	– 9,26	8	6
Boldogkőváralja	12.	– 3,38	– 5,58	4,42	– 0,46	– 7,80	– 5,12	1,04	– 6,04	3	8
Arka	13.	– 7,37	– 9,48	– 7,17	– 0,03	– 0,20	– 9,46	–14,54	– 9,51	8	8
Boldogkőújfalu	14.	4,91	2,53	– 1,72	– 0,06	6,64	2,59	3,19	2,47	4	4
Csobád	15.	15,42	12,79	1,65	– 0,18	13,77	12,97	17,07	12,61	2	4
Encs	16.	49,48	36,40	7,03	– 1,16	42,45	37,55	56,51	35,24	2	4
Abaújdevecser	17.	9,43	6,94	3,20	– 1,25	6,23	8,19	12,63	5,69	2	4
Fügöd	18.	10,02	7,52	0,65	1,51	9,37	6,01	10,67	9,03	2	2
Gibárt	19.	5,60	3,19	5,79	0,61	– 0,19	2,58	11,39	3,80	1	2
Felsődobsza	20.	– 4,24	– 6,82	0,34	0,36	– 4,58	– 7,18	– 3,90	– 6,46	6	6
Felsőgagy	21.	–13,99	–13,92	– 3,25	0,77	–10,74	–14,69	–17,24	–13,15	8	6
Alsógagy	22.	–13,34	–14,82	– 3,55	– 0,45	– 9,79	–14,37	–16,89	–15,27	8	8
Csenyéte	23.	1,96	– 0,36	– 0,43	– 2,03	2,39	1,67	1,53	– 2,39	4	7
Gagyapáti	24.	–23,51	–25,26	–10,71	1,60	–12,80	–26,85	–34,22	–23,66	8	3
Felsővadász	25.	– 3,76	– 5,95	1,60	– 0,11	– 5,36	– 5,84	– 2,16	– 6,06	6	8
Abaújlak	26.	– 6,44	– 8,57	– 4,18	3,15	– 2,26	–11,72	10,62	– 5,42	8	3
Gadna	27.	10,76	8,24	– 3,09	0,44	13,86	7,80	7,67	8,68	4	2

Kupa	28.	1,41	−0,90	−3,31	0,29	4,72	−1,19	−1,90	−0,61	5	6
Forró	29.	18,32	15,63	7,07	−1,55	11,25	17,17	25,39	14,08	2	4
Fancsal	30.	−3,13	−5,34	0,21	0,20	−3,34	−5,54	−2,92	−5,14	6	3
Fulókércs	31.	2,73	0,39	−1,94	0,29	4,67	0,11	0,79	0,67	4	2
Fáj	32.	−14,42	−16,37	−3,13	−0,42	−11,29	−15,95	−17,58	−16,79	8	8
Litke	33.	−13,97	−15,93	−5,61	−1,00	−8,37	−14,94	−19,58	−16,93	8	8
Szemere	34.	−6,61	−8,73	−2,92	−1,34	−3,68	−7,39	−9,52	−10,07	8	8
Gagybátor	35.	−11,51	−13,53	0,55	0,45	−12,06	−13,97	−10,96	−13,08	6	3
Gagyvendégi	36.	18,19	15,50	−2,96	1,07	21,15	14,43	15,23	16,57	4	2
Gönc	37.	−47,69	−4,26	3,49	0,01	−51,18	−4,27	−44,20	−4,27	6	6
Göncruszka	38.	−2,08	−4,01	−1,02	−0,54	−0,16	−3,47	−4,00	−4,55	8	8
Halmaj	39.	25,40	22,54	0,48	−1,19	24,92	23,74	25,88	21,35	2	4
Hernádkércs	40.	−5,38	−22,25	−4,74	−0,25	−0,65	−22,00	−10,12	−22,50	8	8
Kiskinizs	41.	−3,29	−5,49	−0,54	0,45	−2,75	−5,94	−3,83	−5,03	8	6
Nagykinizs	42.	−7,62	10,16	−2,30	1,20	−5,33	8,95	−9,92	11,36	8	2
Szentistvánbaksa	43.	1,53	−0,78	−3,88	0,16	5,41	−0,94	−2,35	−0,62	5	6
Hernádvécse	44.	−10,38	1,53	−0,74	0,05	−9,65	1,48	−11,12	1,58	8	2
Hernádpetri	45.	−10,55	−12,58	−5,55	−0,62	−5,00	−11,96	−16,10	13,20	8	8
Pusztaradvány	46.	5,40	3,00	−2,94	0,63	8,25	2,37	2,53	3,63	4	2
Hidasnémeti	47.	6,20	1,19	1,26	−0,42	4,94	1,61	7,46	0,77	2	4
Hernádszurdok	48.	2,56	0,22	−2,18	−0,35	4,74	0,58	0,38	−0,13	4	5
Tornyosnémeti	49.	−4,78	−6,95	−1,77	0,17	−3,00	−7,12	−6,55	−6,78	8	6
Homrogd	50.	4,69	2,30	−5,68	−1,15	10,37	3,45	−0,99	−1,15	5	4
Monaj	51.	−9,21	−13,25	−3,95	0,33	−5,26	−13,58	−13,16	−12,92	8	6
Ináncs	52.	11,47	8,85	0,08	−1,09	11,39	9,94	11,55	7,76	2	4
Kázsmárk	53.	5,75	−0,37	−2,94	−1,75	8,69	1,38	2,81	−2,12	4	7
Krasznokvajda	54.	−25,18	−11,06	0,82	0,45	−25,00	−11,50	−24,36	−10,61	6	6
Büttös	55.	14,91	12,29	−4,57	−0,41	19,48	12,71	10,34	11,88	4	4
Kány	56.	−12,80	−14,78	−4,05	0,26	−8,74	−15,04	−16,85	−14,52	8	6
Keresztéte	57.	−13,47	−15,44	−3,94	0,19	−9,52	−15,63	−17,41	−15,25	8	6
Pamlény	58.	−18,95	−20,79	−6,73	1,69	−12,21	−22,48	−25,68	−19,10	8	8
Perecse	59.	−24,13	−25,85	−4,81	−1,39	−19,32	−24,46	−28,94	−27,24	8	8



8. *ábra.* A korcsoportonkénti szerkezetet alakító területi és strukturális tényezők pontdiagramja. Az ábrán feltüntetésre került a két tényező együttes (kompetitív) változása. + = 10,1 felett, ∧ = 5,1– 10,0, 0 = 5,0– (–5,0), ∨ = –5,0– (–10,0), — = –10,1 alatt

2. *táblázat folytatása*

Települések		Területi tényező (*T*)		Strukturális tényező (*S*)		Kompetetív tényező (*K*)		Nettó relatív változás		Boudville-féle osztályozás	
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Szászfa	60.	–16,64	–17,79	– 3,02	0,50	–13,62	–18,28	–19,66	–17,29	8	6
Léh	61.	3,13	12,95	– 3,51	– 1,84	6,64	14,79	– 0,38	11,11	5	4
Méra	62.	0,28	– 2,00	1,02	0,79	– 0,74	– 2,79	1,30	– 1,21	1	6
Novajidrány	63.	– 6,30	5,54	– 0,01	– 0 66	– 6,29	6,20	– 6,31	4,88	8	4
Garadna	64.	4,18	1,81	0,50	0,23	3,68	1,58	4,68	2,04	2	2
Pere	65.	–13,21	– 0,34	– 1,03	0,57	–12,18	– 0,91	–14,24	0,23	8	3
Hernádbüd	66.	– 4,25	–29,74	– 6,83	2,79	2,58	–32,52	–11,08	–26,95	7	6
Hernádszentandrás	67.	7,92	5,88	1,94	1,14	5,97	4,74	9,86	7,02	2	2
Rásonysápberencs	68.	– 0,81	– 4,48	– 3,29	– 0,27	2,48	– 4,21	– 4,10	– 4,75	7	8
Selyeb	69.	– 2,70	– 4,91	– 2,10	– 0,13	– 0,60	– 4,78	– 4,80	– 5,04	8	8
Abaújszolnok	70.	– 8,27	–10,36	– 2,97	0,92	– 5,30	–11,28	–11,24	– 9,44	8	6
Nyésta	71.	–15,89	–17,81	– 4,56	– 0,24	–11,33	–17,57	–20,45	–18,05	8	8
Szalaszend	72.	12,30	9,74	– 0,53	– 0,24	12,83	9,99	+11,77	9,50	4	4
Szikszó	73.	10,73	8,16	7,27	0,23	3,46	7,93	18,00	8,39	2	2
Telkibánya	74.	–19,68	–13,61	– 3,48	0,83	–16,20	–14,44	–23,52	–12,78	8	6
Vilmány	75.	5,54	3,14	– 0,68	– 1,49	6,23	4,63	4,86	1,65	4	4
Fony	76.	– 7,31	–10,47	– 4,16	0,48	– 3,15	–10,95	–11,47	– 9,99	8	6
Hejce	77.	–10,59	–12,62	– 2,93	2,90	– 7,65	–15,52	–13,52	9,72	8	6
Mogyoróska	78.	– 3,60	– 5,80	– 6,38	– 0,89	2,77	– 4,91	–10,04	– 6,69	7	8
Regéc	79.	–14,95	–16,89	– 5,34	– 0,82	– 9,61	–16,07	–20,29	–17,71	8	8
Vizsoly	80.	32,70	– 5,74	– 5,29	– 0,23	37,99	– 5,51	27,41	– 5,97	4	8
Hernádcéce	81.	– 0,32	– 2,59	– 5,24	– 0,33	4,92	– 2,26	– 5,56	– 2,92	7	8
Korlát	82.	–11,85	–13,86	– 2,96	0,96	– 8,89	–14,82	–14,81	–12,90	8	

A térképek készítésével azt kívántuk elérni, hogy az egyes tényezőkben kialakuló fő tendenciákat, változási irányokat szemléltetni tudjuk. Az egyes ábrákon magas értékkel azok a települések szerepelnek, melyeknél a változás iránya az adott tényező esetében igen pozitív volt. Az alacsony értékkel az igen kedvezőtlen irányú változásokat jelöltük. A településeknél a foglalkozási szerkezetben, illetve a korcsoportonkénti megoszlásban a stagnáló térségeket a 3-as kategóriák jelzik. Az ábrákról az olvasható le, hogy a foglalkozási szerkezetben bekövetkezett változások ütemének területi differenciálódását a korcsoportonkénti megoszlásban bekövetkezett területi, strukturális és kompetitív változások üteme követi.

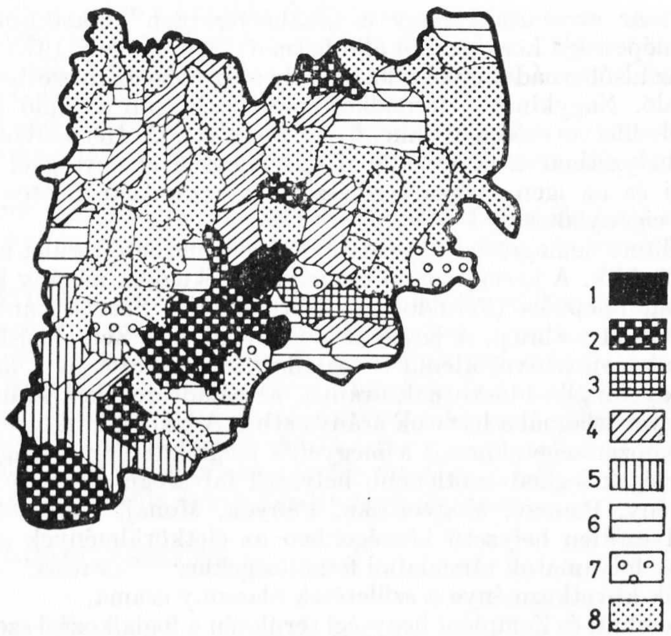
Az encsi járás foglalkozási szerkezetében és korcsoportonkénti megoszlásában a pozitív értékek a Hernádvölgyében találhatók. A Hernádvölgyben a lassan növekvő, vagy stagnáló népességű települések élesen elhatárolódó tengelyt alkotnak. Ez összefügg azzal, hogy e területnek jó közelekedéi kapcsolatai vannak a miskolc–hidasnémeti vasútvonal és a közút révén a Miskolc környéki iparvidékkel. Az életkörülmények szempontjából is a Hernádvölgye van a legkedvezőbb helyzetben. Ez az oka többek között annak, hogy ebbe az irányba is megindult az áttelepülés a térség kedvezőtlen adottságú területeiről, a Cserehát és a Zempléni hegyvidék térségeiből. Ezt tükrözi e térségben a korcsoportonkénti megoszlás kedvezőtlen irányú elmozdulása is.

Az elvándorlás folyamata oly mértékben felgyorsult a fentebb jelzett térségekben, hogy ma már kiszabadult a belső és külső szabályozhatóság alól (a népesség belső egyensúlyra való törekvése, társadalmi befolyásolás, a lakóhely munkaerő-kínálata, az életkörülmények színvonala, s sajátos törvényszerűséget – „szabadesés" – alakított ki. Az elköltözés a közösségek – család, község – elvárásává vált, különösen a fiatalokkal, az először munkábalépőkkel szemben. Épp ezért ma már sok községben, községkörzetben az egyébként hatékony beavatkozás – a termelőszövetkezeti gazdálkodás jövedelmezőségének fokozása, a munkakörülmények javítása, a munkaalkalmak választékának bővítése, az életkörülmények javulása – sem hozza meg a várt eredményt. A vándormozgalom demográfiai következményei – mint a demográfiai struktúra torzulása, a természetes szaporodás visszaesése – elszabadultak a kiváltó okoktól, s a járás e területein visszafordíthatatlan folyamattá váltak. (Legalábbis a pillanatnyilag rendelkezésünkre álló eszközökkel nem lehetne e demográfiai folyamatokat alapvetően befolyásolni.)

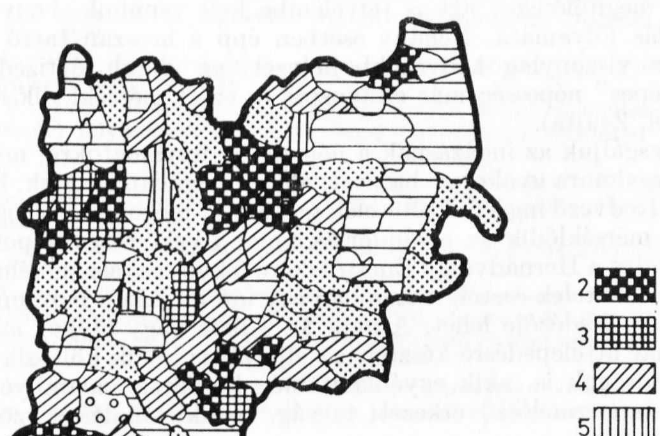
Az elvándorlás méretei olymérvű egyensúlyzavarokra, demográfiai torzulásokra vezettek, amelyek kérdésessé teszik e térségek falvainak fennmaradását, illetve fenntarthatóságát.

A továbbiakban vizsgáljuk meg részletesebben a hatásarány-analízisből nyert foglalkozási szerkezet változásának, illetve a korcsoportonkénti megoszlás változásának területi típusait (lásd 9. és 10. ábra). A típusok kialakításához a korábban már leírt Boudville-féle osztályozást használtuk fel.

A 9. ábrából az olvasható le, hogy az 1960–1970 közötti időszakban a foglalkozási szerkezet és változásának üteme a legkedvezőbben a Hernádvölgyében alakult. E területet az átlagnál gyorsabb fejlődés jellemzi. A Hernádvölgy alsó szakaszát Szikszótól Méráig az 1-es (Gibárt, Méra) és a 2-es (Szikszó, Encs, Fügöd, Forró, Ináncs stb.) területi típus községei alkotják. A Hernádvölgyének felső szakaszát a 4-es (Fulókércs, Szalaszend, Pusztaradvány, Vilmány, Vizsoly, Hernádszurdok) területi típus községei adják. A Hernádvölgyében a két fő típus, az alsó és felső szakasz, elhatárolhatósága a vizsgált



9. *ábra.* Boudville-féle osztályozás az encsi járás foglalkozási szerkezetére. A típusok elhatárolását lásd a szövegben



10. *ábra.* Boudville-féle osztályozás az encsi járás korcsoportonkénti megoszlására. A típusok elhatárolását lásd a szövegben

időszakban már arra utalt, hogy a „szabályszerűen" kialakított stagnáló – növekvő népességű községekből álló hernádvölgyi tengely 1970 után összezsugorodik az alsóhernádvölgyi szakaszra, de még ebbe az övezetbe is beékelődik pl. Aszaló, Nagykinizs, Hernádkércs kedvezőtlenül alakuló foglalkozási szerkezetével, illetve erősen csökkenő népességével. A Hernádvölgyön kívül kedvezőbb helyzetben csak az állami gazdasági üzemegységgel rendelkező Gagyvendégi és az igen magas természetes szaporodású Büttös, Gadna és Csenyéte – cigánylakosság! – van.

A kiegyenlített demográfiai folyamatokkal jellemezhető terület is a Hernádvölgyében húzódik. A hernádvölgyi tengelybe beékelődik néhány kedvezőtlen kormegoszlású település (Felsődobsza, Hernádkércs, Szentistvánbaksa, Kiskinizs stb. [lásd 10. ábra]). A járásban a Cserehát és a Zempléni-hegység falvaiban alakul igen kedvezőtlenül a foglalkozási szerkezet és a korstruktúra (magas az egyedülálló időskorúak aránya, a családtöredékek aránya, alacsonyabb a megyei átlagnál a házasok aránya stb.). A lakosság iskolai végzettsége és szakmai képzettsége elmarad a megyei, s méginkább az országos átlagtól. Épp e térségek legkedvezőtlenebb helyzetű falvaiban alacsony a születésszám (Pamlény, Perecse, Mogyoróska, Pányok, Monaj, Keresztéte, Szászfa stb.). A kedvezőtlen helyzetű községekben az életkörülmények alakulása és a demográfiai folyamatok társadalmi feszültségekhez – „stressz" – vezettek, s ennek egyik következménye a születések alacsony száma.

A járás csereháti és Zempléni-hegységi területén a foglalkozási szerkezet kedvezőtlen alakulását a korcsoportonkénti megoszlás kedvezőtlen változása is követi, de a korcsoportonkénti változás üteme lassúbb. Az említett térségekből az áttelepülés csak fokozatosan valósul meg.

Az 5., 6., 7. és 8. területi típus községeit az elnéptelenedő települések közé kell sorolni. Népesedési folyamataik aligha fordíthatók vissza. A települések helyzetének megítélésekor azt is figyelembe kell vennünk, hogy mióta tart az elvándorlás folyamata. Néhány esetben épp a hosszan tartó elvándorlás eredménye a viszonylag kedvezőbb helyzet, az elmúlt évtizedek során a „vándorlásképes" népesség már eltávozott és ezért mérséklődik az elvándorlás üteme (pl. Zsujta).

Ha megvizsgáljuk az ingázásnak a népesedési folyamatokra, mindenekelőtt a vándormozgalomra gyakorolt hatását, akkor megállapíthatjuk, hogy az nem egyértelmű. Kedvező ingázási feltételek mellett – megoldván a foglalkoztatási gondokat – mérséklődik az elvándorlás, vagy a beköltözés célpontjává válik a település (mint a Hernádvölgy Encstől délre fekvő szakaszán néhány község). Kedvezőtlen feltételek esetében azonban egy idő múltán a napi munkábajárás az elvándorlás előidézője lehet. A napi 3–4 órás vagy olykor még hosszabb idő csakhamar áttelepedésre készteti az eljárókat; velük költözik a család is, azok a családtagok is, akik egyébként még kötődtek valamilyen formában lakóhelyükhöz (termelőszövetkezeti tagság, munkavállalás a szövetkezetben stb.).

Ez a folyamat zajlik napjainkban a Hernádvölgy északi községeiben, a domb- és hegyvidék peremein (Felsővadász, Kupa, Baktakék stb.), itt új „stressz-övezet" van alakulóban.

A foglalkozási átrétegeződés forrása ma már elsősorban nem a foglalkozásváltás, hanem az, hogy a mezőgazdaságból nyugdíjba menők helyét nem lehet betölteni, az újonnan munkába lépők az iparban vagy a tercier szektorban helyezkednek el. Márpedig az újonnan munkába lépők kevésbé kötődnek a lakóhelyükhöz, mint a korábbi foglalkozásváltoztatók. Itt ismételten megemlítjük, hogy az elvándorlás bizonyos arányokon felül önmagát erősítő folyamattá válik, s meghaladhatja azt a mértéket is, amely a fenti tényezők alapján indokolt lenne.

Végezetül pedig vizsgálatunk alapján az encsi középfokú körzetben tapasztalható jelenlegi demográfiai egyensúlyzavarok a következőkben foglalhatók össze.

1. A viharos gyorsaságú, szelektív és fékezhetetlen elvándorlást a népesség reprodukciója nem tudja ellensúlyozni; *a népesség struktúrája erősen torzul.*
2. *Nem állt helyre a termelés igényei és a munkaerő közötti egyensúly sem;* egyes területek munkaerőfeleslege a napi-heti ingázással egyenlítődik ki; de mutatkozik munkaerőhiány is (elsősorban a kvalifikált munkaerő terén a járás egészében, a mezőgazdaság munkaerőhiánya egyes községekben).
3. *A körzeten belüli különbségek fokozódása szintén egyensúlyzavarokra vezetett.* A munkaerő kínálata és kereslete közti egyensúlytalanság megoldásának egyik módja, az ingázás maga is feszültségek forrásává vált (elsősorban a kedvezőtlen körülmények között ingázók körében).

(Beérkezett: 1980. április 25-én.)

IRODALOM

1. Ashby, L. D.: 1968. The shift and share analysis. Southern Economic Journal 34. 423–425. o.
2. Barta Gy.–Beluszky P.–Berényi I.: 1975. A hátrányos helyzetű területek vizsgálata Borsod-Abaúj-Zemplén megyében. Földrajzi Értesítő, 24. 299–390. o.
3. Beaudry, R. and Martin, F.: 1979. Shift-share analysis revisited: The allocation effect and the stability of regional structure, a comment. Journal of Regional Science 19. 389–392. o.
4. Beluszky P.: 1977. Krasznokvajda — egy alsófokú központ (?) gondjai a Cserehátou. Földrajzi Értesítő, 26. 349–386. o.
5. Beluszky P.: 1979. Borsod-Abaúj-Zemplén megye falusi településeinek típusai (Településformáló folyamatok a megye falusi térségeiben). Földrajzi Értesítő, 28. 339–370. o.
6. Beluszky P.–Sikos T. T.: 1979. A faktor- és clusteranalízis alkalmazása a területi kutatásokban (Borsod-Abaúj-Zemplén megye falusi települései tipizálásának példáján). Szigma, 12. 191–209. o.
7. Berzeg, K.: 1978. The empirical content of shift-share analysis. Journal of Regional Science 18. 463–470. o.
8. Edwards, A. J.: 1976. Industrial structure and regional change: A shift-share analysis of the British Columbian economy 1961–1970. Regional Studies 10. 307–317. o.
9. Floyd, C. F. and Sirmans, C. F.: 1973. Shift and share projections revisited. Journal of Regional Science 13. 115–120. o.
10. Herzog, H. W. and Olsen, R. J.: 1977. Shift-share analysis revisited: the allocation effect and the stability of Regional structure. Journal of Regional Science 17. 441–454. o.
11. Herzog, H. V. and Olsen, R. J.: 1979. Shift-share analysis revisited: The allocation effect and the stability of regional structure, a reply. Journal of Regional Science 19. 393–396. o.
12. James, F. and Hughes, H.: 1973. A test of shift and share analysis as a predictive device. Journal of Regional Science 13. 223–231. o.
13. Kalbacher, J. Z.: 1979. Shift-share analysis: A modified approach. Agricultural Economics Research 31. 12–25. o.
14. Lackó László: 1978. A „shift and share" eljárás alkalmazási lehetőségeiről. Területrendezés, 3. sz. 67–71. o.

15. LUKÁCS J.: 1975. Kölcsönhatások az aprófalvas körzetek és a gazdaságilag elmaradott területek között Borsod-Abaúj-Zemplén megyében. Területi Statisztika 25. 422–429. o.
16. MALÉZIA, E.: 1978. Standardized share analysis. Journal of Regional Science 18. 283–292. o.
17. NEMES NAGY J. (szerk.): 1977. Regionális gazdaság-földrajzi gyakorlatok. ELTE TTK jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 221. o.
18. NOVÁK Z.: 1973. Az aprófalvak demográfiai helyzete és perspektívái „A településhálózat demográfiai vizsgálatának néhány kérdése" c. kötetben, Budapest 76–84. o.
19. RICHARDSON, H. W.: 1978. The state of regional economics: A survey article. International Regional Science Review 3. 1–48. o.
20. SHAFFER, R.: 1979. Determinants of the competitive share in Wisconsin counties, 1962–1972: The role of government policy. The Annals of Regional Science 13. 67–80. o.
21. STILWELL, F. J. B.: 1969. Regional growth and structural adaptation. Urban Studies 6. 162–178. o.
22. ZIMMERMAN, R.: 1975. A variant of the shift and share projection formulation. Journal of Regional Science 15. 29–38. o.

„SHIFT AND SHARE" ANALYSIS IN REGIONAL RESEARCH

Shift analysis has been applied in Hungary in two fields until now; in the examination of regional economic growth on the one hand and in the regional analysis of employment in the socialist industry on the other. In regional research the possibility of wide-range application is provided by the relatively simple structure and easy manageability of the method. In the present study the method itself, as well as application possibilities in regional researches, furthermore, a concrete regional application are presented.

Computation were made for 82 villages of the Encs district. Analysis of this district was justified by specific and regionally differentiated demographical processes. The district is a less industrialized, agricultural region of the county Borsod-Abaúj-Zemplén with many small villages and unfavourable natural endowments. Through our examinations we wished to reveal the characteristics of demographical processes in the district between 1960 and 1970. Computations were made in two steps: firstly changes in the occupational structure, then the distribution by age groups were analyzed.

For an evaluation of the results cartographical methods were utilized, too. Present disturbances in the demographical equilibrium in the Encsi district can be summed up as follows:

1. Very fast and selective migration over which there is no longer control, cannot be compensated by the reproduction of the population; the *structure of the population is becoming strongly distorted.*
2. *Balance between demands of production and supply of the labour force has not been reestablished either;* labour surpluses of individual areas are levelled out by daily or weekly commuting; but, on the other hand, also labour shortage is appearing (first of all that of qualified labour in the whole district and of agricultural labour in some villages).
3. *Increasing differences within the area have led to balance disturbances as well.* Commuting being one of the ways to solve disequilibrium between labour supply and demand has also become a source of tensions (first of all among those commuting under unfavourable conditions).

«SHIFT AND SHARE» АНАЛИЗ В ОБЛАСТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Шифт-анализ в нашей стране до настоящего времени использовался в двух областях; с одной стороны, при изучении роста региональной экономики и, с другой стороны, при территориальном анализе количества занятых в социалистической промышленности. Возможность широкого использования в рамках территориальных исследований обеспечивается благодаря относительно простого структурного построения данного метода и легкости в работе с ним. В данной разработке дается изложение самого метода и, далее, возможностей его использования в территориальных исследованиях на примере конкретного территориального обследования.

Расчиты проводились по 82 селам уезда Энч. Анализ положения, сложившегося в этом уезде обосновывался наличием специфических и территориально дифференцированных демографических процессов. Данный уезд представляет собой индустриально отсталый, по своему характеру аграрный регион области Боршод-Абауй-Земплен с мелкими селами и неблагоприятными природными особенностями. Посредством обследования намечалось выявление специфики демографических процессов уезда в период 1960—1970 гг. Расчеты проводились в два этапа: в начале анализировались изменения в структуре занятости, а потом формирование занятости по возростным группам.

При оценке результатов обследования использовались также и возможности, заложенные в картографических методах. Нарушения демографического равновесия в уезде Энч в настоящее время могут быть сформулированы следующим образом:

1. Исключительно быстрый, селективный и неконтролируемый отлив населения не смогла уравновесить рапродукция населения; структура населения чрезвычайно исказилась.
2. Не восстановилось равновесие между потребностями производства и рабочей силой; избыточная рабочая сила отдельных местностей выразнивается посредством ежедневных и еженедельных маятниковых поездок; но подмечается также и нехватка рабочей силы (по всему уезду, в первую очередь, в отношении квалифицированной рабочей силы, дефецит рабочей силы по сельскому хозяйству в отдельных селах).
3. Усугубление различий в рамках региона также приводило к нарушению равновесия. Одним из методов решения проблемы несбалансированности спроса и предложения рабочей силы является маятниковое движение, но и оно стало одним из причин напряженности. (В первую очередь, среди участников такого движения, условия которого являются неудовлетворительными.)

Otto Knoll—Pavel Ondrčka

A fogyasztás empirikus elemzése a családi kiadások statisztikája alapján*

A fogyasztás elemzéséhez egyaránt felhasználhatunk makroökonómiai idősorokat és keresztmetszeti statisztikai adatokat. A makroszintű fogyasztási adatok idősorait vizsgálva meghatározhatjuk a trendeket. Az időbeli változások ismeretében becsléseket adhatunk a fogyasztás és a fogyasztást befolyásoló tényezők közötti kapcsolatokat leíró paraméterekre. Bizonyos feltételek mellett meghatározható például a fogyasztás telítettségi szintje, a lakossági készletek nagysága egyes cikkekből, a fogyasztás hosszútávú szintje stb. A fogyasztás makroszintű idősorait elsősorban előrejelzés céljából vizsgálják, önmagukban azonban ehhez nem elégségesek. Kívánatos, hogy az eredményeket keresztmetszeti adatokból kapott trendekkel is összevessük.

A családi kiadások statisztikája — amely tulajdonképpen egyfajta statisztikai minta — az összeíráson alapuló felmérések mellett a csehszlovák családok fogyasztásának nagyságára és szerkezetére vonatkozó információk legfontosabb forrása. Mivel nemcsak a fogyasztásról tartalmaz adatokat, hanem a jövedelmi szerkezetről és a háztartások felszereltségéről is, ezért sokkal inkább megfelel a fogyasztási struktúra elemzésére, mint a makroszintű fogyasztási idősorok.

Az ilyen statisztikából származó keresztmetszeti adatok vizsgálata megfelelő módszertani eszközök kidolgozását kívánja meg, amelyek segítségével lehetővé válik a fogyasztást befolyásoló gazdasági, szociális, demográfiai és regionális tényezők megkülönböztetett hatásainak az elemzése.

A családi kiadási statisztikában szereplő mutatókat, mint adatbázist használtuk fel a gazdasági, szociális, demográfiai és regionális tényezőknek a háztartási kiadásokra gyakorolt bonyolult hatásainak vizsgálatánál, magát a mintafelmérés megszervezésének módját azonban dolgozatunkban nem vizsgáljuk.

Az elemzés módszeréül a kvantitatív és kvalitatív változók vegyes regresszióját választottuk.

Kvalitatív változókat tartalmazó regressziós egyenlet

A családok személyes kiadásait befolyásoló tényezők mélyreható elemzéséhez nélkülözhetetlen a kapcsolataiknak az ismerete és elméleti feldolgozása. A tényezők sokféleségéből és a közöttük fennálló hatások bonyolultságából fakadóan nehéz őket elfogadhatóan jól osztályba sorolni. Ennek ellenére a következőkben egy rövid áttekintést adunk róluk:

* *Muszély György fordítása.*

*

a) A gazdasági hatásokat a szerzők [1, 2, 3], valamint több külföldi dolgozat [4–7] a fogyasztást befolyásoló legfontosabb tényezőkként tünteti fel. Elsők között sorolhatók ide: a háztartások teljes jövedelme, a lakossági adók és illetékek, a megtakarítások, a fogyasztási cikkek kiskereskedelmi árszintje, valamint a természetbeni fogyasztás. Azonban a kiadások nagyságára olyan más tényezők is hatnak, mint a lakossági ellátás szintje, a háztartások felszereltsége tartós fogyasztási cikkekkel, a vásárlási kölcsönök nagysága, a lakosság fizetőereje, valamint a foglalkoztatottsággal kapcsolatos hatóerők.

b) A demográfiai tényezők lényegesen befolyásolhatják a különböző típusú háztartások kiadásaiban jelentkező különbségeket. A demográfiai tényezők közé tartozik: a közös háztartásban élők száma, a gyermekek, az alkalmazásban levők és egyéb családtagok száma, a háztartás életkor és nem szerinti szerkezete, a házasságban eltöltött idő hossza, a népsűrűség, valamint a városiak és falusiak szerinti megoszlás.

c) A legfontosabb szociális tényezők közé sorolhatók: a közös háztartásban élők iskolázottsági szintje, kulturális színvonala, a családnak valamilyen szociális-gazdasági csoporthoz való tartozása, lakással és egyéb életszükségletekkel való ellátottsági helyzete.

d) Az egyéb tényezők közül kiemelhetjük a regionális, szociológiai, pszichológiai és élettani hatásokat, ezenkívül a nemzeti, kulturális és szociális jellegű fogyasztási szokásokat.

Mindezek a tényezők nem határolhatók el tisztán egymástól, gyakran egymáshoz kapcsolódva lépnek fel. Ily módon a kiadások egyidejűleg mindig több hatástól függnek, ez a tény jelentősen megnehezíti a hatékony elemzést. Bár a felsorolt ható tényezők egy része minőségileg mérhető változó, mégis jelentős azok száma, amelyek csak nehezen, több-kevesebb hibával mérhetők.

A fentiekből következik, hogy a fogyasztás kvantitatív és kvalitatív változók hatásának eredményeként alakul. Ezzel kapcsolatban meg kell vizsgálnunk kvalitatív változónak regressziós egyenletekben való szerepeltetésének a kérdését.

Az egyik lehetséges mód arra, hogy kvalitatív változónak valamilyen vizsgált jelenségre való hatását leírjuk, hogy 0 és 1 értékű változót alkalmazzunk. Ily módon eljárást kapunk arra, hogy kvalitatív változót kvantifikálni tudjunk. Az ilyen típusú változó két értéket, nullát és egyet vehet fel, amely értékek valamilyen tulajdonság meglétét vagy hiányát jelölik, függetlenül attól, hogy alternatív vagy többszörösen kvalitatív változóról van szó.

A következőkben először az olyan típusú regressziós feladat megoldását ismertetjük, amelyben a magyarázó változók között egyaránt szerepel kvantitatív és kvalitatív változó. Ezután a kapott eredmények lehetséges értelmezését mutatjuk be.

Legyen az Y kvantitatív függő változó (pl. a fogyasztás) egyrészt két kvalitatív változó függvénye, amelyek közül az egyik legyen alternatív (nem), a másik többszörös (társadalmi csoport: munkás, szövetkezeti paraszt, alkalmazott); másrészt függjön Y egy kvantitatív változótól (pl. a jövedelemtől) is:

$$Y = c_0 + c_{A1}A_1 + c_{A2}A_2 + c_{B1}B_1 + c_{B2}B_2 + c_{B3}B_3 + c_3X + e\,, \tag{1}$$

ahol

az A_i változók a nembeli hovatartozást ($i = 1, 2$),

a B_j változók a szociális csoportot ($j = 1, 2, 3$) jelölik,

X egy kvantitatív magyarázó változó,

c_{Ai} az A_i alternatív kvalitatív változó együtthatója ($i = 1, 2$),
c_{Bj} a B_j többszörös kvalitatív változó együtthatója ($j = 1, 2, 3$),
c_0 az ismeretlen állandó,
e a véletlen hibát jelöli.

A legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával hét normálegyenletből álló rendszert nyerünk. D. B. Suits [8] megmutatta, hogy ez a rendszer kifejezhető az n_{Ai} és n_{Bj} csoport-gyakoriságokkal, valamint az $n_{Ai,\,Bj}$ részcsoport-gyakoriságokkal. Az ily módon felírt egyenletrendszernek akkor van egyértelmű megoldása, ha

1. úgy hagyunk el két egyenletet, hogy a megmaradó egyenletek kölcsönösen függetlenek,
2. $c_{A1} = 0$, $c_{B1} = 0$.

Azonban az (1) egyenlet becsléssel kapott regressziós együtthatói nem értelmezhetőek egyértelműen és tisztán. Ezért megpróbáljuk úgy módosítani a regressziós függvényt, hogy könnyebben értelmezhető paramétereket kapjunk. Induljunk ki az (1) egyenlet egy olyan alakjából, ahol a kvantitatív magyarázó változót az átlagától való eltérésével helyettesítettük:

$$Y = c_0 + c_{A1}A_1 + c_{A2}A_2 + c_{B1}B_1 + c_{B2}B_2 + c_{B3}B_3 + c_3(X - \bar{X}) + e \qquad (2)$$

Tegyük fel, hogy (2)-ben $c_{A1} = 0$, $c_{B1} = 0$. Becsüljük a $c_0, c_{A2}, c_{B2}, c_{B3}$ és c_3 paramétereket a közönséges legkisebb négyzetek módszerével. A következő lépésben definiáljuk az úgynevezett „módosított" C_{Ai}, C_{Bj} paramétereket. Ezt oly módon tesszük, hogy a becsléssel kapott $\hat{c}_{Ai}$ és $\hat{c}_{Bj}$ paraméterekhez rendre hozzáadjuk az alábbiakban definiálandó Q_A és Q_B értékeket, azaz

$$C_{Ai} = \hat{c}_{Ai} + Q_A \quad \text{és} \quad C_{Bj} = \hat{c}_{Bj} + Q_B\,, \qquad (3)$$

ahol Q_A és Q_B a következő összefüggésekből kaphatók meg:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} f_{Ai}(\hat{c}_{Ai} + Q_A) &= 0\,, \\ \sum_{j=1}^{3} f_{Bj}(\hat{c}_{Bj} + Q_B) &= 0\,. \end{aligned} \qquad (4)$$

Itt f_{Ai} és f_{Bj} az A, illetve B jellemzők egyes változatainak relatív gyakoriságai. A becsléssel kapott paraméterek itt leírt módosítása után (2) a következőképpen alakítható:

$$\begin{aligned} Y = (\hat{c}_0 - Q_A - Q_B) + Q_A A_1 + (\hat{c}_{A2} + Q_A)A_2 + Q_B B_1 + \\ + (\hat{c}_{B2} + Q_B)B_2 + (\hat{c}_{B3} + Q_B)B_3 + c_3(X - \bar{X}) + e\,. \end{aligned} \qquad (5)$$

Ekkor

$$c_0 - Q_A - Q_B = C_0 = \bar{Y}. \qquad (6)$$

Az (5) alakú fogyasztási függvény módosított paraméterei reprezentálják az egyes csoportokban a fogyasztás eltérését a teljes átlagos fogyasztástól. Ily módon a regressziós paraméterek egyszerű és világos értelmezését kaptuk.

Befejezésül felhívjuk a figyelmet arra, hogy a bemutatott eljárással kapott paramétereknek ugyanolyan tulajdonságai vannak, mint amikor a szokásos módon végezzük a becslést (bizonyos feltételek kikötése mellett). Következésképpen a kapott becsléseket statisztikai próba alá vethetjük és tetszőleges szignifikancia szinten dönthetünk megbízhatóságukról.

Tapasztalati eredmények

Az ismertetett módszertani apparátus segítségével megpróbáljuk a legfontosabb gazdasági, szocio-demográfiai és regionális tényezőknek a háztartási kiadások szintjére és struktúrájára tett hatását számszerűsíteni az élelmiszerek, italok és a házonkívüli étkezés kiadásaira vonatkozóan. A feladat megoldásához ismernünk kell minden egyes beszámolási egység (háztartás) jövedelmi, kiadási, családszerkezeti, valamint a természetbeni fogyasztásra vonatkozó adatait. Ilyen jellegű adatok találhatók a szlovák háztartásstatisztika 1974. évi felmérésében (674 munkásháztartás).

A fenti fogyasztási cikkek háztartási kiadásainál a (2) egyenletben a következő változók hatását vettük figyelembe:

1. Nettó pénzjövedelem — X.

A nettó pénzjövedelem az adókkal, illetékekkel és bírságokkal csökkentett teljes családi bruttó pénzjövedelmet jelenti.

2. Természetbeni élelmiszerfogyasztás — N.
3. Az alkalmazásban álló személyek száma — E.
4. Az eltartott gyermekek száma — F.
5. A háztartás egyéb tagjainak száma — G.
6. A szociális-gazdasági csoport — A.
7. A régió, amelyben a család lakik — B.

Az első két változót explicit módon, mint mennyiségi változót szerepeltettük a regressziós egyenletben. A harmadik, negyedik és ötödik változót azonban — annak ellenére, hogy kvantitatív változók — nem közvetlenül számszerűsítettük. Ugyanis a vizsgált tényezőket azok minden egyes megjelenési formájában külön akartuk vizsgálni. Nemcsak arra voltunk kíváncsiak, hogy az a tény, hogy a háztartásban vannak gyerekek, hogyan hat a fogyasztásra, hanem azt is tudni akartuk, hogyan alakul a fogyasztás a gyermektelen, egy-, két- vagy többgyermekes családoknál. A háztartás típusát jellemző ilyen kvantitatív változókat a regresszios egyenletben 0—1 típusú változókkal számszerűsítettük. Ez azonban azt jelenti, hogy a vizsgált tényezők minden egyes változatának külön magyarázó változó felel meg az egyenletben. Az egyes magyarázó változóknál a következő változatokat vettük figyelembe:

Az alkalmazásban álló személyek száma — E,
— háztartások egy alkalmazásban álló személlyel — E_1,
— háztartások két alkalmazásban álló személlyel — E_2,
— háztartások három v. több alkalmazásban álló személlyel — E_3.

Az eltartott gyermekek száma — F,
— gyermektelen háztartások — F_1,
— egygyermekes háztartások — F_2,
— kétgyermekes háztartások — F_3,
— háromgyermekes háztartások — F_4,
— négygyermekes háztartások — F_5,
— öt- vagy többgyermekes háztartások — F_6.

A háztartás egyéb tagjainak száma — G,

– háztartás egy „egyéb" személlyel – G_1,
– háztartás két „egyéb" személlyel – G_2,
– háztartás három vagy több „egyéb" személlyel – G_3.

A szociális-gazdasági csoport, amelyikhez a háztartás tartozik, valamint a lakóhely minőségi jellemzők. Hatásukat a regressziós egyenletekben csak 0–1 változókkal számszerűsíthetjük.

A „szociális-gazdasági csoportnak" (A) a következő változatai vannak:

– munkásháztartások – A_1,
– termelőszövetkezeti dolgozók háztartása – A_2,
– alkalmazotti háztartások – A_3.

A lakóhelynek a fogyasztásra gyakorolt hatását leíró tényezőnek (B) négy változata van:

– Bratislavában élő családok – B_1,
– Nyugat-Szlovákiában élő családok – B_2,
– Közép-Szlovákiában élő családok – B_3,
– Kelet-Szlovákiában élő családok – B_4.

A kiadások elemzéséhez felhasznált adatbázisban mindenegyes családot, mint önálló beszámolási egységet vettünk számításba, ugyanis a háztartások bármilyen osztályozása információ-veszteséget okozott volna. Minél nagyobb a választott osztályozási intervallum, annál nagyobb az okozott információveszteség. Hasonló okokból sem a háztartások kiadásait, sem a jövedelmet nem számítottuk át egy főre, hogy elkerüljük az egy főre eső jövedelem és a háztartási struktúrát meghatározó változók között az erős korrelációt.

A regressziós egyenletek típusának a kiválasztásánál azokból a hipotézisekből indultunk ki, amelyek ismertek voltak az élelmiszerek, italok és a házonkívüli étkezés, valamint az őket meghatározó tényezők közötti kapcsolatokról. Előnyben részesítettük a tapasztalati úton már igazolt feltételezéseket. Bizonyos számú görbe közül mindig a legjobbat választottuk, azaz azt, amelyik legjobban megfelelt a választott hipotézisnek.

Mivel az A-val jelölt változóról bebizonyosodott, hogy statisztikai értelemben nem szignifikáns, ezért az élelmiszerek, italok és házonkívüli étkezés kiadásait a következő tényezőkkel magyaráztuk:

$$Y = f(\ln X, N, E, B, F, G) + e \tag{7}$$

A regressziós függvénynek ezt a formáját a következő meggondolások alapján írtuk fel:

1. Várható, hogy a nettó pénzjövedelem növekedése esetén a fogyasztók a jövedelem növekményének egyre kisebb részét fordítják az élelmiszerekre. Következésképpen a vizsgált cikkcsoportnál a nettó pénzjövedelem növekedésével a kiadások hányada csökkenni fog.
2. A háztartások jövedelmének növekedésével a jövedelem-elaszticitás csökkenni szokott.

A loglineáris függvény megfelel ennek a hipotézisnek. Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy az inverz és az inverzlogaritmus függvény szintén kielégíti az említett hipotézist. Az elemzésnek azonban nemcsak az a célja, hogy becslést adjon a regressziós együtthatókra, hanem elsősorban az, hogy a paramétereket egyszerűen tudjuk értelmezni. Mivel a módosított paramétereket, mint a függő változó átlagától való eltéréseket akarjuk interpretálni (ez az értelmezés tiszta és egyszerű) ezért el kell tekintenünk az inverz és az inverz-logaritmus függvény használatától, hiszen az inverz értékek átlagának nem adható közgazdasági értelmezés.

A (7) függvény paramétereinek becslésekor kapott eredmények az 1. táblázat 1. oszlopában találhatók.

Az összes paramétert egyidejűleg alávetettük az F próbának (1. táblázat 3. oszlop) 5%-os szignifikancia szint mellett ($F_{0,05(1;632)} = 3{,}850$). Az 1. táblázat szerint a B_2, B_3 és E_2 változók paramétereit kivéve az összes együttható magas szinten szignifikáns. Fontos jellemző a determinációs együttható,

1. *táblázat*

Munkások

Az élelmiszerek, italok és a házonkívüli étkezés kiadásai

Tényezők *a*	Változatok *b*	Paraméterek $\hat{c}$ 1	Standard hiba 2	$F_{\hat{c}}$ 3	Rel. gyak. 4	Módosított param. 5	Eltérés $\bar{Y}$-tól (%) 6
	B_1	0	0	0	0,156	609,693	3,20
B	B_2	−306,337	519,239	0,348	0,301	303,356	1,58
	B_3	−489,942	517,567	0,896	0,275	119,751	0,62
	B_4	−1428,187	531,402	7,223	0,268	−818,487	−4,25
	E_1	0	0	0	0,255	−1256,08	−6,53
E	E_2	1076,534	561,954	3,670	0,635	−179,546	−0,93
	E_3	5204,373	799,373	42,387	0,110	3948,292	20,51
	F_1	0	0	0	0,261	−2642,754	−13,73
	F_2	1365,083	509,829	7,169	0,216	−1277,671	−6,64
F	F_3	3002,471	503,362	35,579	0,309	359,717	1,87
	F_4	5663,665	620,395	83,341	0,138	3020,911	15,70
	F_5	8074,276	837,842	92,872	0,056	5431,522	28,22
	F_6	9319,348	1283,434	52,726	0,020	6676,594	34,69
	G_1	0	0	0	0,700	−677,380	−3,50
G	G_2	2130,708	427,952	24,789	0,278	1453,328	7,60
	G_3	3865,607	1133,410	11,632	0,022	3188,227	16,60
$\ln X_1 - \overline{\ln X_1}$		9533,927	669,977	202,500			
$N - \bar{N}$		−0,616	0,076	65,384			

Statisztikai jellemzők $R^2 = 0{,}680$, $E_X = 0{,}495$, $F_{e(14;632)} = 96{,}012$, $\bar{Y} = 19246{,}3$.

amelyre $R^2 = 0{,}680$ értéket kaptunk, valamint az ennek szignifikanciáját jellemző $F_{e(14;632)} = 96{,}012$ érték. Az F próba táblázatából $F_{0,05(14;632)} = 1{,}171$ adódik, ami azt jelenti, hogy, egyrészt a determinációs együttható magas szinten szignifikáns, másrészt a (10) regressziós egyenletben szereplő változók az élelmiszerek cikkcsoportjának kiadásaiban jelentkező szórást 68%-ban magyarázzák.

Azon az információn kívül, hogy az élelmiszer-kiadások szórása a (7) egyenlet segítségével mekkora részben magyarázható, az is érdekes, hogy az egyes tényezők milyen mértékben járulnak hozzá a cikkcsoport szórásához. Ezzel kapcsolatban a következő két kérdés merül fel:

1. Mi a tényezők sorrendje a kiadások szórásához való hozzájárulás mértékében? Ezt a sorrendet úgy állapítottuk meg, hogy egyenként elhagytuk az egyes változókat és megnéztük, hogy a 0,680 értékű determinációs együttható mekkora ΔR^2 értékkel csökken.
2. Abból a célból, hogy információt kapjunk az egyes magyarázó változók közötti korrelációról, kiszámítottuk a η_Y^2 kölcsönös determinációs együtthatót Y-ra és a vizsgált változóra.

E számítások eredményeit a 2. táblázat összegezi, amelyben az egyes változókat már olyan sorrendben közöltük, amely sorrendben hozzájárulnak a kiadások szórásához. Mint várható volt, az élelmiszer-kiadások legszignifikánsabb magyarázó változója a háztartások nettó jövedelme. Ez a jövedelem az egyetlen forrás, amely az élelmiszer-kiadásokat megszabja.

2. *táblázat*

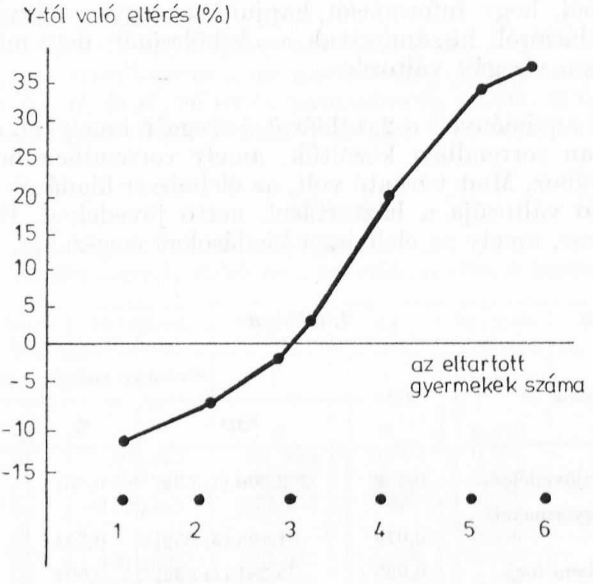
Szoc. csoport	Változók	ΔR^2	Statisztikai mutatók és próbák		
			$F_{\Delta R^2}$	η_Y^2	F_{η^2}
Munkások	Nettó pénzjövedelem	0,102	202,500 (1; 632)	0,551	791,498 (1; 645)
	Eltartott gyermekek száma	0,079	31,198 (5; 632)	0,334	64,196 (5; 641)
	Természetbeni fogy.	0,033	65,381 (1; 632)	0,001	0,602 (1; 645)
	Alkalmazásban állók száma	0,029	28,476 (2; 632)	0,192	76,522 (2; 644)
	Egyéb személyek	0,015	15,386 (2; 632)	0,021	6,942 (2; 644)
	Lakóhely	0,005	3,255 (3; 632)	0,068	1,459 (3; 643)

Mint a 2. táblázatból látható, az élelmiszerek, italok és a nyilvános étkezés kiadásai leginkább a nettó pénzjövedelemtől függenek. Ez a tényező a kiadások szórását körülbelül 10%-ban magyarázza. A szignifikancia próbák értéke is magas ($F_{0,05(1;632)} = 3,850$).
A jövedelemnek a vizsgált cikkcsoportra való hatása két részre osztható:
a) a jövedelem közvetlen hatása (tiszta jövedelmi hatás);
b) mivel a jövedelem más magyarázó változókkal is korrelált, ezeken a változókon keresztül is hat a kiadásokra (a jövedelem kevert hatása).

Az $E_x = 0,495$ jövedelem-rugalmasság fejezi ki a jövedelemnek a kiadásokra tett tiszta hatását.

A módszertani részben kimutattuk, hogy a módosított regressziós együtthatók (1. táblázat, 5. oszlop) úgy értelmezhetők, mint az összes munkásháztartások átlagos kiadása és a megfelelő háztartáscsoport kiadásai közötti különbségek. A módosított paramétereknek ez az interpretációja jól szemléltethető grafikusan. A következőkben az F változónak az eltartott gyermekek számától függő változataira kapott paramétereket fogjuk grafikusan szemléltetni, ugyanis az R^2 növekedése a családstruktúra jellemzői közül ennél a változónál a legnagyobb (majdnem 8%), amint erről a 2. táblázatból meggyőződhetünk.

A grafikonon ábrázolt görbe az átlagos kiadásoktól való százalékos eltérést, ábrázolja az F változónak az eltartott gyermekek számától függő egyes eseteiben. Mint ahogy az 1. táblázat 6. oszlopából és az ábrából is látható,



a kiadások százalékos növekedése nem arányos a gyermekek számának változásával. A gyermekszám okozta kiadásváltozások mérésére vezessük be a

$$\Delta^2 Y = (Y_i - Y_{i-1}) - (Y_{i-1} - Y_{i-2}) \tag{8}$$

második differenciát, ahol Y_i a kiadások százalékos eltérése az átlagostól az i-edik háztartáscsoport esetén. A növekedési differencia értékeit a 3. táblázatban közöljük.

3. *táblázat*

Mutatók / F változó	$\bar{Y}$-tól való eltérés (%)	ΔY	$\Delta^2 Y$
0	−13,73	–	–
1	− 6,64	7,09	
2	1,87	8,51	1,42
3	15,70	13,83	5,32
4	28,22	12,52	−1,31
5 v. több	34,69	6,47	−6,05

Az a tény, hogy nincs eltartott gyermek a családban, azt eredményezi, hogy az élelmiszerek, italok és a házonkívüli étkezés átlagos kiadásai 13,73%-kal alacsonyabbak, mint az egész munkásréteg átlagos fogyasztása. Az első gyermek megjelenése a kiadások növekedését eredményezi. A növekedési különbség az élelmiszer-kiadások esetében nem állandó, hanem – mint a 3. táblázatból kiderül – a háromgyermekes háztartásokig növekszik. A négy- és ennél többgyermekes háztartások esetében a kiadások növekedése csökken. Ennek a következő okai vannak:

1. Az eltartott gyermekek száma befolyásolja a háztartások jövedelmét. A gyermekek számának növekedésével az egy főre eső jövedelem csökken. Hasonlóan csökken a háztartásra jutó keresők száma is.
2. A háztartások élelmiszerfogyasztására a „közös gazdálkodás" jellemző. Ilyen háztartásvezetés mellett a nagyobb gyermekszámú családok az élelmiszerfogyasztásban viszonylagos megtakarítást érhetnek el.
3. Megfigyelhető, hogy az eltartott gyermekek számának növekedésével egyidejűleg csökken a keresők száma. A gyermekek óvodai elhelyezése nehéz. Emiatt az alkalmazásban álló nők száma időlegesen csökken, ami a jövedelem és végső soron az élelmiszerfogyasztás csökkenését is eredményezi.

A B, E és G jellemzők különböző változatainak megfelelő módosított paraméterek hasonlóan értelmezhetők.

Befejezésül hangsúlyozzuk, hogy az ismertetett eljárást a fogyasztásban levő különbségek kiinduló elemzésének tekintjük. A felhasznált statisztikai anyag nem tette lehetővé olyan további tényezők vizsgálatát, amelyek valószínűleg szignifikánsak. Ilyen tényezők a családfő életkora, a gyermekek életkora, a lakóhely nagysága, valamint a családfő iskolázottsági foka. Ezeknek a mutatóknak a felhasználása a családi kiadások statisztikáján alapuló fogyasztás-elemzés továbbfejlesztéséhez vezethet.

(Beérkezett: 1979. julius 3-án.)

IRODALOM

1. Bezouška, J.–Vytlašil, J.–Walter, J.: Zjišťovaní spotřeby a poptávky u obyvatelstva, SNTL, Praha 1962.
2. Rendoš, L.: Osobná spotreba a súčasnosť, Pravda, 1974.
3. Rendoš, L.: Osobná spotreba je obrazom rozvoja človeka a spoločnosti, Epocha 1969.
4. Gollnick, H.: Ausgaben und Verbrauch in Abhängigkeit von Einkommen und Haushaltsstruktur, Alfred Strohe Verlag, Hannover, 1955.
5. Mynarski, S.: Wplyv skladu os obowego rodziny na strukture jej wydatkow, Przeglad Statystyczny, T 11/12, 1964.
6. Konig, E.: Aufbau eines statistischen Einkommens und Verbrauchsmodells im Perspektivzeitraum 1971 bis 1975, Statistische Praxis 3/1971.
7. Buračas, A.: Modelirovanije licsnüh raszhodov v razvitüh kapitalisztícseszkih sztranah, Izdatelsztvo „Nauka", Moszkva 1975.
8. Suits, D. B.: Use of Dummy Variables in Regression Equations. Journal of the American Statistical Association, 52, 1957.

EMPIRICAL ANALYSIS OF CONSUMPTION ACCORDING TO FAMILY BUDGET DATA

In the paper a classification of the most important factors that influence the consumption is presented. The qualitative factors can be expressed by zero-one variables in the consumption equations. The estimation of the parameters can be given by means of least squares. The paper presents the way of interpreting the estimated parameters.

The impact of the most important economic, social, demografic and regional factors on the level of expenses on food, beverages and public catering is estimated on the basis of cross-sectional data of household budgets in Slovakia for the year 1974. The order of factors according to the extent of their contribution to the explanation of the variance is also investigated.

ЭМПИРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОТРЕБЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ СЕМЕЙНЫХ БЮДЖЕТОВ

В настоящей статье приведена классификация важнейших факторов, которые повлияют на потребление. Качественные факторы могут быть выражены с помощью переменных «0 – 1» в функциях потребления. Оценка параметров может быть проведена методом наименьших квадратов. В статье дается пояснение полученным параметрам.

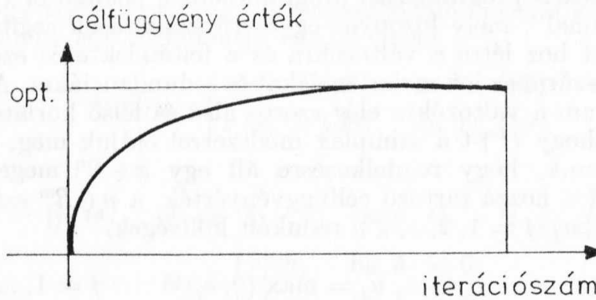
Влияние важнейших экономических, социальных, демографических и региональных факторов на расходы на продовольствие, напитки и общественное питание оценивается на основе региональных данных семейных бюджетов Словакии за 1974 г. Анализируется также очередность факторов по размеру их вклада в обьяснение дисперсии.

Somos Endre

Felső korlát az optimális megoldásra a szimplex módszernél és a Dantzig-Wolfe dekompozíciós algoritmusnál

Nagyméretű lineáris programozási feladatok szimplex módszerrel történő megoldásakor gyakran a következő jelenség figyelhető meg: bár az aktuális megoldáshoz tartozó célfüggvény érték már az optimum közelébe került, még igen sok iterációt kell végrehajtani addig, míg az algoritmus eléri az optimumot (1. ábra).

A gyakorlatban ez ellen az egyik védekezési mód az, hogy nem várják meg, míg az algoritmus optimális megoldást ad, hanem megelégszenek egy olyan



1. *ábra*

megengedett megoldással, amelyhez tartozó célfüggvény érték várhatóan már az optimum közelében van. A szimplex módszer azonban közvetlenül nem ad arra becslést, hogy ilyen módon mekkora hibát követünk el. Így általában azt is nehéz megállapitani, mikor kaptunk az optimumhoz elég közeli megoldást, vagyis mikor érdemes megállni. Ezért lényeges, hogy az optimumértékre egy aránylag jó felső becslés álljon rendelkezésre.

A továbbiakban először a [3]-ban leírt módszert ismertetjük, mely az általános lineáris programozási feladatra ad egy egyszerű, és egy ennél jobb, módosított felső korlátot, majd ezt az elvet alkalmazva a Dantzig—Wolfe dekompozíciós algoritmus egy olyan változatát állítjuk elő, mely némi többletmunka árán az eddig ismertnél jobb felső korlátot ad.

Egy egyszerű felső korlát

Tekintsük a következő általános lineáris programozási feladatot:

$$\begin{aligned}(\mathrm{P})\ \max\ & cx\\ Ax &= b,\\ x &\geq 0,\end{aligned}$$

ahol $c, x \in R^n$, $b \in R^m$ és $A \in R^{m\times n}$. Legyen ennek optimumértéke $v(P)$. Egészítsük ki a feladatot az

$$s \leq x \leq t$$

feltételekkel, ahol t komponensei nem feltétlenül végesek. A kiegészített feladatot nevezzük $P(s, t)$-nek, és tegyük fel, hogy

$$v(P) = v\big(P(s, t)\big),$$

vagyis s és t olyan korlátok, amelyek nem befolyásolják a feladat optimumértékét.

Megjegyzendő, hogy ilyen korlátok nem mindig állnak rendelkezésre, viszont a feltételekből és az esetleg meglevő korlátokból előállíthatók [1]. (A LIPROS lineáris programozási programcsomag például el van látva olyan „előtétprogrammal", mely bizonyos egyszerű számítások segítségével alsó és felső korlátokat hoz létre a változókra és a feltételekre és ezek segítségével megpróbálja kiszűrni az inkonzisztenciákat és redundanciákat. A tapasztalatok szerint a program a változókra elég szoros alsó és felső korlátokat ad.)

Tegyük fel, hogy (P)-t a szimplex módszerrel oldjuk meg, és a megoldás során ott tartunk, hogy rendelkezésre áll egy $\bar{x} \in R^n$ megengedett bázismegoldás, $\bar{z} \in R$ a hozzá tartozó célfüggvényérték, a $\bar{p} \in R^m$ szimplex szorzók és a $\bar{c}_j = c_j - \bar{p}a_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ redukált költségek.

Legyen

$$\bar{u}_j = \max\{0, \bar{c}_j\} \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$-\bar{v}_j = \min\{0, \bar{c}_j\} \qquad j = 1, \ldots, n$$

Ekkor

$$\bar{z} \leq v(P) = v\big(P(s, t)\big) \leq \bar{p}b + \bar{u}t - \bar{v}s$$

mivel $(\bar{p}, \bar{u}, \bar{v})$ a $P(s, t)$ feladat duálisának egy megengedett megoldása.

Módosított felső korlát

Az optimális célfüggvény érték egyszerű felső korlátja úgy keletkezett, hogy a $P(s, t)$ feladat duálisának egy megengedett megoldását határoztuk meg. Módosított felső korlátot úgy fogunk kapni, hogy a duális feladat megengedett tartományát úgy szűkítjük le, hogy egy könnyen megoldható feladatot kapjunk.

A $P(s, t)$ feladat duálja a következő:

$$\begin{aligned}(D)\ \min\ & pb + ut - vs\\ pA + u - v &\geq c\\ u, v &\geq 0\end{aligned}$$

A (D) feladatban azzal a megkötéssel élünk, hogy adott $g, d \in R^m$ mellett

$$p \in \{p \in R^m \mid p = g + \Theta d, \Theta \in R\}$$

(g és d választására később még visszatérünk).

Ezt (D)-be helyettesítve a következő feladatot kapjuk:

$$(RD) \ \min K + r\Theta + ut - vs$$

$$h\Theta + u - v \geqslant c^*$$

$$u, v \geqslant 0$$

ahol $K = gb, r = db, h = dA, c^* = c - gA$.

Az (RD) feladat könnyen megoldható, ugyanis optimális megoldása a Θ függvényében explicit módon felírható. Ennek érdekében először rögzítsük Θ-t, így (RD) n darab kisebb feladatra esik szét:

$$\big(j(\Theta)\big) \ \min u_j t_j - v_j s_j$$

$$u_j - v_j \geqslant c_j^* - h_j\Theta$$

$$u_j, v_j \geqslant 0$$

Belátható, hogy $v\big(j(\Theta)\big)j = 1, \ldots, n$ szakaszonként lineáris konvex függvény, melynek legfeljebb egy töréspontja van (2. ábra).

$$v\big(j(\Theta)\big) = \begin{cases} t_j(c_j^* - h_j\Theta), & \text{ha } j \in I(\Theta) \\ s_j(c_j^* - h_j\Theta), & \text{ha } j \notin I(\Theta) \end{cases}$$

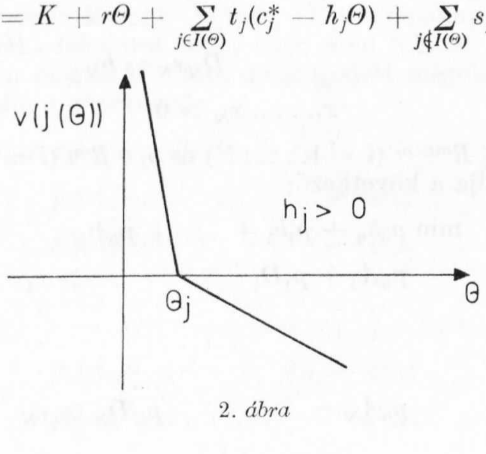
ahol

$$I(\Theta) = \{j \mid \Theta_j \leqslant \Theta \ \text{ és } \ h_j < 0 \ \text{ vagy } \ \Theta_j > \Theta \ \text{ és } \ h_j \geqslant 0\}$$

$$\Theta_j = \begin{cases} c_j^*/h_j, & \text{ha } h_j \neq 0 \\ +\infty, & \text{ha } h_j = 0 \end{cases}$$

Ezen függvények segítségével felírható az (RD) feladat optimumértéke, mely Θ függvényében szintén szakaszonként lineáris és konvex lesz, töréspontjai pedig a $\Theta = \Theta_j$, $(j = 1, \ldots, n)$ pontokban adódnak.

$$v\big(RD(\Theta)\big) = K + r\Theta + \sum_{j \in I(\Theta)} t_j(c_j^* - h_j\Theta) + \sum_{j \notin I(\Theta)} s_j(c_j^* - h_j\Theta)$$



2. *ábra*

Mivel ebből könnyen felírható a $v(RD(\Theta))$ függvény akár jobb, akár bal oldali deriváltja, $v(RD) = \min_\Theta v(RD(\Theta))$ egyszerű kereséssel meghatározható.

Hátravan még g és d megválasztása. Elvileg természetesen tetszőlegesen választhatók, tekintetbe kell azonban venni, hogy szükség van a $h = dA$ és a $c^* = c - gA$ mennyiségekre, melyeknek kiszámítása igen munkaigényes lehet, hiszen az egész A mátrixszal kell szorozni. Ezért érdemes úgy választani őket, hogy a gA és dA mennyiségek a korábbi számításokból rendelkezésre álljanak. d és g-nek két — ezen szempontokat figyelembe vevő — lehetséges választása a következő:

a) $d = \bar{p}, g = 0$.

Ebben az esetben a $h = \bar{p}A$ vektort a szimplex módszer során amúgy is meg kell határozni, gA pedig a nullvektor lesz. Ezzel a választással $v(RD(\Theta))$ a $\Theta = 1$ helyen az egyszerű felső korlátot adja, tehát Θ szerint minimalizálva ennél rosszabb eredményt nem kaphatunk.

b) Tegyük fel, hogy az előző iterációban d' és g' választással a minimum $\Theta = \bar{\Theta}$-nál adódott. Legyen

$$d = \bar{p},\ g = g' + \bar{\Theta} d'$$

Ebben az esetben $h = \bar{p}A$ az előzőhöz hasonlóan a szimplex módszerből, gA pedig az előző iteráció adataiból áll rendelkezésre. Mivel $v(RD(\Theta))$ a $\Theta = 0$ választással az előző iterációban kapott korlátot adja, az ilyen módon meghatározott felső korlátok monoton csökkenő sorozatot alkotnak.

Egyszerű felső korlát a Dantzig—Wolfe-algoritmus esetén

Legyen a megoldandó feladat a következő:

$$(Q)\qquad \begin{aligned} \max\ & c_1x_1 + \ldots + c_Nx_N \\ & A_1x_1 + \ldots + A_Nx_N = b_0 \\ & D_1x_1 \qquad\qquad\quad\ = b_1 \\ & \qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ & \qquad\qquad D_Nx_N = b_N \\ & x_1, \ldots, x_N \geqq 0 \end{aligned}$$

ahol $c_i, x_i \in R^{n_i}$, $A_i \in R^{m_i \times n_i}$ $(i = 1, \ldots, N)$ és $b_i \in R^{m_i}$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$.

A (Q) feladat duálja a következő:

$$(QD)\qquad \begin{aligned} \min\ & p_0b_0 + p_1b_1 + \ldots + p_N\mathrm{b}_N \\ & p_0A_1 + p_1D_1 \qquad\qquad \geqq c_1 \\ & \quad \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\quad \vdots \\ & p_0A_N + \qquad\quad p_ND_N \geqq c_N \end{aligned}$$

Legyen $\mathfrak{D}_i = \{x_i \in R^{n_i} \mid D_i x_i = b_i,\ x_i \geqslant 0\} \neq \emptyset$, $\bar{x}_{ij}$, $j \in J_i$ a $\mathfrak{D}_i$ halmaz extremális pontjai, $\bar{\bar{x}}_{ik}$, $k \in K_i$ pedig $\mathfrak{D}_i$ extremális irányai. Ezek felhasználásával (Q) átírható egy ekvivalens alakba, melyet extremális feladatnak nevezünk.

$$(E) \qquad \max \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{j \in J_i} \lambda_{ij}(c_i \bar{x}_{ij}) + \sum_{k \in K_i} \mu_{ik}(c_i \bar{\bar{x}}_{ik}) \Big)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{j \in J_i} \lambda_{ij}(A_i \bar{x}_{ij}) + \sum_{k \in K_i} \mu_{ik}(A_i \bar{\bar{x}}_{ik}) \Big) = b_0$$

$$\sum_{j \in J_i} \lambda_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

$$\lambda_{ij} \geqslant 0 \qquad i = 1, \ldots, N\ j \in J_i$$

$$\mu_{ij} \geqslant 0 \qquad i = 1, \ldots, N\ k \in K_i$$

Mivel az összes extremális pont és irány explicit módon való előállítása túl nagy munkát igényelne, az algoritmus során általában (E)-nek csak egy olyan része áll rendelkezésre, mely nem tartalmaz minden oszlopot. Egy iterációban először ezt a szűkebb feladatot oldjuk meg. Ennek optimális duál megoldása $(\bar{p}_0, \bar{r})$, ahol $\bar{p}_0 \in R^{m_0}$, $\bar{r} \in R^N$. További oszlopokat ezután az alábbi részfeladatokból kaphatunk:

$$(S_i) \qquad \max\ (c_i - \bar{p}_0 A_i) x_i$$

$$D_i x_i = b_i$$

$$x_i \geqslant 0$$

Ha mindegyik (S_i) feladat megoldása korlátos, az optimális duál megoldásokat jelöljük $\bar{p}_i$-vel. Ekkor

$$v(Q) \leqslant \bar{p}_0 b_0 + \bar{p}_1 b_1 + \ldots + \bar{p}_N b_N .$$

Mivel könnyen látható, hogy $(\bar{p}_0, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_N)$ kielégíti (QD) feltételeit, tehát egy duál-megengedett megoldás. Természetesen ha valamely i-re (S_i) megoldása nem korlátos, végtelen felső korlát adódik.

Módosított felső korlát a Dantzig—Wolfe-algoritmus esetén

A módosított felső korlátot hasonló ötlettel lehet megkonstruálni, mint a szimplex módszer esetén. Mivel a Dantzig—Wolfe dekompozíciós algoritmus valójában az extremális feladatot oldja meg, ezen feladat duáljának fogjuk egy aránylag könnyen meghatározható megengedett megoldását megkeresni.

Az (E) feladat duálja a következő:

$$
\begin{array}{llll}
(ED) & \min p_0 b_0 + r_1 + \cdots + r_N & & \\
 & p_0(A_1 \bar{x}_{1j}) + r_1 & \geqslant c_1 \bar{x}_{1j} & j \in J_1 \\
 & p_0(A_1 \bar{\bar{x}}_{1k}) & \geqslant c_1 \bar{\bar{x}}_{1k} & k \in K_1 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & p_0(A_N \bar{x}_{Nj}) + \quad r_N & \geqslant c_N \bar{x}_{Nj} & j \in J_N \\
 & p_0(A_N \bar{\bar{x}}_{Nk}) & \geqslant c_N \bar{\bar{x}}_{Nk} & k \in K_N
\end{array}
$$

Az (ED) feladatban azzal a megkötéssel élünk, hogy adott $g, d \in R^{m_0}$ esetén

$$p_0 \in \{p_0 \in R^{m_0} \mid p_0 = g + \Theta d, \Theta \in R\}$$

Ha a $p_0 = g + \Theta d$ képletet behelyettesítjük (ED)-be és Θ-t rögzítjük, (ED) N darab kisebb feladatra esik szét:

$$\begin{aligned} &(i(\Theta)) \ \min r_i \\ &r_i \geqslant \big(c_i - (g + \Theta d)A_i\big)\bar{x}_{ij} \qquad && j \in J_i \\ &0 \geqslant \big(c_i - (g + \Theta d)A_i\big)\bar{\bar{x}}_{ik} && k \in K_i \end{aligned}$$

Ez a következő ekvivalens alakba írható:

$$\begin{aligned} &r_i = \max_{j \in J_i} \big(c_i - (g + \Theta d)A_i\big)\bar{x}_{ij} \\ &\big(c_i - (g + \Theta d)A_i\big)\bar{\bar{x}}_{ij} \leqslant 0 \qquad k \in K_i \end{aligned}$$

E feladat feltételei azt jelentik, hogy a $\mathfrak{D}$ halmaznak ne legyen olyan extremális iránya, amelynek mentén a $c_i - (g + \Theta d)A_i$ függvény növekszik. Ha ilyen van, felső korlátként végtelent kapunk. Ha ilyen nincs, vagyis erre a célfüggvényre nézve a $\mathfrak{D}$ halmaz korlátos, $\big(i(\Theta)\big)$ optimális célfüggvényértéke (r_i) nem változik, ha a feladatot a következő alakba írjuk:

$$\begin{aligned} &(i'(\Theta)) \ r_i = \max \big(c_i - (g + \Theta d)A_i\big)x_i \\ &D_i x_i = b_i \\ &x_i \geqslant 0 \end{aligned}$$

Legyen $g = \bar{p}_0$, ahol $\bar{p}_0$ az algoritmus során utoljára megoldott extremális feladat optimális duál megoldása. Ekkor $\Theta = 0$-ra ezt a feladatot amúgy is meg kell oldani, majd parametrikus programozással meghatározható, hogy r_i hogyan változik a Θ függvényében.

Könnyen belátható, hogy $r_i(\Theta)$ szakaszonként lineáris, konvex függvény, melynek töréspontjait, és ezen töréspontokban a függvényértékeket a parametrikus programozás szolgáltatja. Ezekből viszont explicit módon felírható az $r_i(\Theta)$ függvény.

Mivel

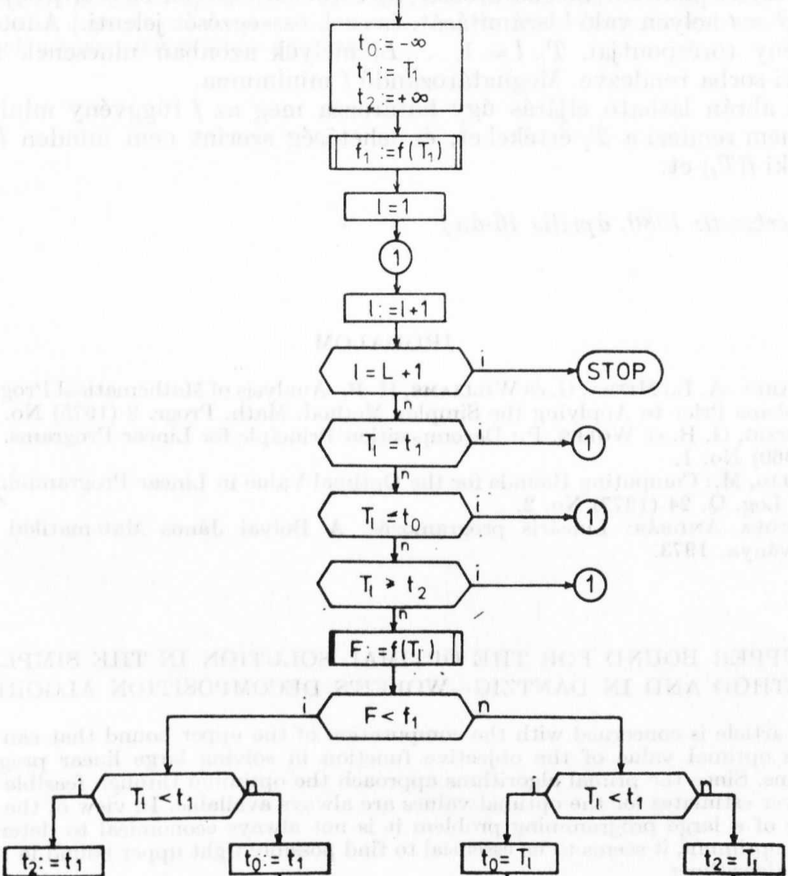
$$v\big(ED(\Theta)\big) = (g + \Theta d)\,b_0 + \sum_{i=1}^{N} r_i(\Theta),$$

vagyis szakaszonként lineáris konvex függvények összege, ezért a $v\big(ED(\Theta)\big)$ függvény maga is szakaszonként lineáris és konvex lesz, és töréspontjai is megegyeznek az $r_i(\Theta)$ függvények töréspontjaival. Így e pontok kiértékelésével a $v\big(ED(\Theta)\big)$ függvény minimuma meghatározható (lásd a Függelékben).

Amint várható is volt, a Dantzig—Wolfe dekompozíciós algoritmusra a módosított felső korlát kiszámítása lényegesen nagyobb munkát igényel, mint az egyszerű lineáris programozási feladat esetén, hiszen a parametrikus programozás is, és a $v\big(ED(\Theta)\big)$ függvény minimumának meghatározása is elég sok számítást igényelhet.

Ezért a módosított felső korlátot nem érdemes minden iterációban kiszámítani, hanem csak időnként, esetleg adaptív módon, az algoritmus részeredményeitől függően. Egy lehetőség például, hogy ezt a számítást csak akkor végezzük el, mikor bizonyos egyéb kritériumok (pl. a célfüggvény növekedési ütemének csökkenése) alapján úgy tűnik, hogy nem érdemes további iterációkat végezni, a jelenleg rendelkezésre álló megengedett megoldás már „elég jó" célfüggvényértéket ad.

Ha a felső korlát számítását sűrűbben kívánjuk elvégezni, további számításokat lehet megtakarítani azáltal, hogy a $v(ED(\Theta))$ függvény minimumának csak egy közelítésével dolgozunk. Például a parameterikus programozást



3. *ábra*

csak egy $S \leq \Theta \leq T$ intervallumban végezzük, vagy a $v(ED(\Theta))$ függvény minimumának meghatározásakor nem veszünk figyelembe minden töréspontot. (Esetleg csak azokat, amelyeknél az egyes $r_i(\Theta)$ függvények minimuma volt.)

Függelék

A $v(ED(\Theta))$ függvény minimumának meghatározására szolgáló rutinnak a következő feladatot kell megoldania: tudjuk, hogy az f: $R \to R$ függvény szakaszonként lineáris, konvex, és rendelkezésre áll egy olyan rutin, mely tetszőleges t pontban meghatározza $f(t)$-t. (Jelen esetben ez a $v(r_i(\Theta))$ függvények $\Theta = t$ helyen való kiszámítását, és ezek összegzését jelenti.) Adottak az f függvény töréspontjai, T_l, $l = 1, \ldots, L$, melyek azonban nincsenek nagyság szerinti sorba rendezve. Meghatározandó f minimuma.

A 3. ábrán látható eljárás úgy határozza meg az f függvény minimumát, hogy nem rendezi a T_l értékeket, és lehetőség szerint nem minden l-re számítja ki $f(T_l)$-et.

(Beérkezett: 1980. április 16-án)

IRODALOM

1. Brearly, A. L., Mitra, G. és Williams, H. P.: Analysis of Mathematical Programming Problems Prior to Applying the Simplex Method. Math. Progr. 8 (1975) No. 1.
2. Dantzig, G. B. és Wolfe, P.: Decomposition Principle for Linear Programs. Op. Res. 8 (1960) No. 1.
3. Kallio, M.: Computing Bounds for the Optimal Value in Linear Programming. Naval Res. Log. Q. 24 (1977) No. 2.
4. Prékopa András: Lineáris programozás. A Bolyai János Matematikai Társulat kiadványa. 1973.

UPPER BOUND FOR THE OPTIMAL SOLUTION IN THE SIMPLEX METHOD AND IN DANTZIG—WOLFE'S DECOMPOSITION ALGORITHM

The article is concerned with the computation of the upper bound that can be given for the optimal value of the objective function in solving large linear programming problems. Since the primal algorithms approach the optimum through feasible solutions the lower estimates for the optimal values are always available. In view of the fact that in case of a large programming problem it is not always economical to determine the precise optimum, it seems to be essential to find possibly tight upper bound in the course of the algorithms.

The article discusses the simplex method and Dantzig—Wolfe's decomposition algorithm. It presents for the simplex method — assuming the variables to be bounded both from above and from below — a simpler procedure and a more complicated one, that provides for a better bound. In the case of Danzig—Wolfe's algorithm — relying on the above idea — a procedure is suggested which gives a better upper bound than these applied so far.

In both cases the underlying procedure is that a feasible solution of the dual program is determined for a more restricted set.

ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ У СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДА И ДЕКОМПОЗИЦИОННОГО АЛГОРИТМА ДАНЦИГА-ВОЛЬФА

Настоящая статья занимается вычислением верхнего предела целевой функции оптимального решения в случае задач линейного программирования больших размеров. Так как алгоритмы прямого решения приближаются к оптимуму через допустимые решения, всегда имеется оценка нижнего предела оптимума. Имея в виду, что при решении задач большого размера часто не экономично определять точной оптимум, определение верхнего предела как можно точнее кажется очень важным в алгоритмах.

В статье подробно обсуждаются симплексный метод и декомпозиционный алгоритм Данцига-Вольфа. Предполагая, что для отдельных переменных известны верхние и нижние пределы, в статье дается один простой и один более сложный метод, которые обеспечивают лучшие пределы. Для алгоритма Данцига-Вольфа на основе вышеупомянутой идеи излагается метод, который определяет верхний предел лучше, чем раньше.

В обоих случаях основной идеей является то, что определяется допустимое решение обратной задачи в более узком интервале.

KÖNYVEKRŐL

Arrow, K. J.: *Egyensúly és döntés.* (Válogatott tanulmányok) Budapest, 1979. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó 410 o.

Ismét értékes kiadvánnyal lepte meg a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó a matematikai-közgazdaságtannal foglalkozó hazai szakemberek egyre népesebb táborát, amikor a Nobel-díjas közgazdászok kiadványsorozatában megjelentette Arrow sokoldalú munkásságát bemutató válogatott tanulmánykötetét. A kitűnő válogatás *Kornai* János érdeme, aki annak ellenére, hogy az általános egyensúlyelmélet egy legnagyobb kritizálója, elfogulatlanul és baráti tisztellet teljesítette feladatát.

Szinte minden hasonló kiadvány megjelentetése alkalmával hangsúlyozzuk, mennyire hasznos, tudatformáló hatása lehet a hazai szakemberekre egy-egy ilyen könyvnek. Ma már örvendetesen, egyre több matematikus és közgazdász foglalkozik a matematikai közgazdaságtan, az ökonometria legkülönfélébb területeivel és módszereivel. Hosszú ideig a kutatók és egyetemi hallgatók csak ezek bírálatával találkoztak a magyar nyelvű szakirodalomban; az egyes elméleteket, módszereket jól-rosszul megírt összefoglalókból, az eredeti gondolatrendszerből kiragadva ismerhették meg. Ez mindenképpen hátráltatta az alapos megértést, sok esetben az alapvető összefüggések feltárását. Ezért üdvözölendő minden ehhez hasonló könyv magyar nyelvű megjelentetése; ezáltal megszűnnek a nyelvi korlátok, egyetemi hallgatók és kutatók tömegesen olvashatják az eredeti tanulmányokat, vitázhatnak, megalapozottabban fogadhatják a polgári közgazdaságtan kritikáját, esetleg sokukat konstruktív továbbgondolásra késztet.

A tanulmánykötet bevezetőjét Kornai János a hagyományostól eltérően írta meg: a szellemes, érdeklődést felcsigázó előszó valószínűleg minden olvasó „olvasás-szomját" csak tovább fokozza.

A tanulmánykötet négy fejezetből áll. Az *első fejezet* tanulmányai az *egyensúly és piac* kérdéskörébe tartoznak. Messzemenően egyetértek Kornai János azon megállapításával, miszerint az általános egyensúlyelméletet és a társadalmi választás elméletét felölelő tanulmányok Arrow egész munkásságát szimbolizáló „hegyláncból is óriás csúcsokként emelkednek ki". Kétségtelen, hogy az axiomatikus módszer a matematika tudományos vizsgálatának a legfejlettebb módszere (még az ismert Gödel-tétel ellenére is). Ahogyan Eukleidesz Elemek című munkájában lefektette a síkgeometria axiómarendszerét Arrow (Debreu-val közösen) az egyensúlyelmélet axiómarendszerét alkotta meg, az általános egyensúlyelmélet „kanonikus modelljét" dolgozta ki.

Az egyensúly létezése a versenygazdaságban c. tanulmányban a szerzők (társszerző *Debreu, G.)* a Walras által megfogalmazott, a gazdasági rendszer állapotát leíró modellből indulnak ki, amely a fogyasztói kereslet és a termelői kínálat egyenlőségét szimultán egyenletek segítségével írja le. A fogyasztók hasznosságuk, a termelők nyereségük maximalizálására törekednek, az eladási és beszerzési árakat saját döntéseiktől függetleneknek tekintik (tökéletes verseny). Walras azonban nem adott bizonyítást az egzisztenciára, ami fontos mind a leíró, mind a normatív közgazdaságtan szempontjából. A kérdés tanulmányozásához a szerzők először is precízen megadják a versenygazdaság feltételeit, majd két tételben meglehetősen általános feltételek mellett bizonyítást adnak az egyensúly létezésére. Az első tétel azt állítja, hogy ha a fogyasztók és termlők mindegyike valamennyi áruból pozitív kiinduló készlettel rendelkezik, akkor létezik versenyegyensúly. A második tétel is a versenyegyensúly létezését mondja ki, ha a gazdaságban van néhány olyan munkafajta, amely kielégíti a következő két feltételt: 1. minden egyén legalább az egyik ilyen munkafajtából képes pozitív mennyiséget kínálni; és 2. minden ilyen munkafajtának pozitív a hasznossága a keresett áruk termelésében. Ismeretes, hogy a Walras-modell továbbfejlesztésével *Wald* is foglalkozott. Arrowék feltevései azonban számos szempontból gyengébbek és így közelebb állnak a valósághoz. A leírt modell magába foglalja mind a termelési, mind a fogyasztási szférát, valamint figyelembe veszi a jövedelmek körkörös áramlását is.

A gazdasági egyensúly c. tanulmányában az általános egyensúly közgazdaságtudományban használatos fogalmát, illetve az egyensúllyal kapcsolatos kérdéseket világítja meg a szerző. Rövid történeti áttekintést is ad *Adam Smith*nek a „láthatatlan kéz" egyensúlyt teremtő rendszerétől kiindulva; *Ricardo*t, *Mill*t és *Marx*ot az általános egyensúlyelmélet előfutárainak tekinti. Elismeri, hogy Marx — néhány vonatkozásban — formájában közelebb került a modern egyensúlyi elmélethez, mint bármelyik klasszikus közgazdász. Rámutat, hogy a klasszikusoknál nem szerepeltek a keresleti viszonyok, nem rendelkeztek valódi erőforrás-elosztási elmélettel, mivel nem tanulmányozták az árak hatását a termelési volumenekre, a fordított hatást pedig egyenesen tagadták. A klasszikusokat követően *Cournot* és *Jenkin* elméleteit, majd a neoklasszikusok egyetlen piacra vonatkozó parciális egyensúlyi elemzéseit tárgyalja a szerző. Az általános egyensúly gondolatának teljes felismerése Walrasnak tulajdonítható. Tudománytörténeti szempontból is érdekes Wald szerepének, az egyensúlyelmélethez való hozzájárulásának feltárása. A tanulmány további részében példamutatóan világos megfogalmazásait kapjuk olyan fogalmaknak, mint a versenyegyensúly az optimalitás és a játék magva, a versenyegyensúly unicitása, stabilitás, komparatív statika, parciális egyensúly, stacionárius egyensúly.

Az erőforrás-elosztás decentralizálása és számítási eljárásai c. tanulmányban (társszerző *Hurwicz, L.)* a matematikai közgazdaságtan néhány, az erőforrások optimális elosztásával kapcsolatos eredményéről olvashatunk. Az optimális erőforráselosztás feladatát következőképpen fogalmazhatjuk meg: a termelési eljárások összes megengedett kombinációi közül annak kiválasztása, amelyik maximalizálja a gazdaság által elért hasznosságot. A tanulmány főbb célkitűzései: a piaci mechanizmus dinamikus rendszerének a korábbiaknál pontosabb leírása; olyan feltételek megfogalmazása, amelyek mellett a meghatározott erőforrás-elosztás konvergál az optimálishoz, ahol az optimalitást az egész gazdaságban egyetlen hasznossági függvény definiálja; a piaci mechanizmus olyan módosításai, amelyek azokban az esetekben is megőrzik a decentralizáltság valamilyen fokát, amikor bizonyos feltételek nem teljesülnek.

A társadalmi optimum dinamikus megközelítésének problémáját Walrastól kezdődően vizsgálja. Részletesen kitér az erőforrás-allokáló modell megoldására felhasználható különböző matematikai eszközök bemutatására: mindenekelőtt a gradiensmódszerre, a feltételes szélsőértékek és a nyeregpontok kapcsolatára. Befejezésül a nemnövekvő hozadék melletti termelés és a szigorúan konkáv hasznossági függvény esetét tanulmányozza, majd a növekvő hozadék esetére végez elemzéseket.

Az *Általános gazdasági egyensúly: cél, vizsgálati módszerek, kollektív választás* c. tanulmány a szerzőnek a Nobel-díj átadása alkalmából tartott előadása. Részben az egyensúlyelméleti kutatások rendkívül színvonalas összefoglalása, részben a továbbfejlesztés főbb irányainak felvázolása. A továbbfejlesztéssel kapcsolatban külön is kihangsúlyozza: csak a hicksi rendszer alapjain lehetséges. Itt most csak a „legmeglepőbbeket" említeném meg: a transzformációs felületnek bizonyos nagyon plauzibilis feltételek mellett nem kell szükségképpen differenciálhatónak lennie; további kutatások szükségesek még a Pareto hatékony allokációk és a versenyegyensúly közötti összefüggések feltárására; kérdés, hogy vajon a keresletnek és a kínálatnak szükségképpen egyenlőnek kell-e lennie.

A tanulmánykötet *második fejezetében* a *növekedéssel és az intertemporális problémákkal* kapcsolatos tanulmányokat találjuk.

A közületi beruházás hozama és az optimális költségvetési politika c. tanulmány (társszerző: *Kurz, M.)* a társadalmi diszkontláb és a piaci kamatláb azonosításának három alapvető problémáját tárgyalja: 1. a piaci értékek és a piaci viselkedések között eltérések vannak, mivel a részvénytársasági jövedelemadó következtében a tőkepiacok tökéletlenek; 2. nem egyezik meg az állami beruházási javak társadalmi értéke és magánköltsége; 3. a jövőt illetően eltérések vannak a társadalmi és a magánértékek között is. A társadalmi diszkontláb kérdésének tanulmányozását a beruházási politika vizsgálatára vezetik vissza a szerzők. A jelenlegi és a jövőbeli beruházások egyidejű, egymással összhangban levő optimalizálása olyan matematikai technikák alkalmazását követeli meg, amelyek a szakirodalomban dina mikus programozásként és optimális szabályozásként ismertek. Vizsgálataik eredményeként arra a következtetésre jutnak, hogy a beruházások optimális szintjét elsősorban nem a kamatláb, hanem a saját jövőbeli változásai határozzák meg. A következő részben az ún. közösség számára optimális politika szabályozhatóságával foglalkoznak, amely a magánpiac működésétől és az állam számára rendelkezésre álló eszközállománytól függ.

Az igazságos megtakarítás Rawls-féle elve c. tanulmány az igazságosság kérdését vizsgálja az erőforrások elosztásában. Igazságos vagy optimális elosztásról beszél a szerző, ha az, az egyének hasznossági függvényeinek összegét maximalizálja adott erőforrások, technológia stb. mellett. Az igazságosság egyik lényeges ismérve az időbeliség. Milyen az áruk igazságos elosztása a különböző nemzedékek egyénei között? E kérdés megválaszolását egy meglehetősen egyszerű termelési modell felhasználásával végzi el a szerző, majd elemzi Rawls ismérvének következményeit is, miszerint az egyének ésszerűen nem a hasznosságösszegben fognak megegyezni, hanem a társadalom legrosszabb helyzetű tagja jólétének maximalizálásában.

Az *Optimális készletpolitika* c. tanulmányban a szerzők (társszerzők: *Harris, T.*, *Marschak, J.*) az optimális készletezést egy olyan egyszerű modellből vezetik le, amelyben ismert a jövőbeli (állandó) kereslet, a rendelési költség stb. Vizsgálataikat a bizonytalansági modellek (egy statikus és egy dinamikus) elemzésével folytatják, amelyekben a kereslet ismert eloszlású valószínűségi változó. A legjobb maximális készletet és a legjobb újrarendelési pontot a kereslet eloszlásának, a rendelési költségnek, illetve a hiány okozta kárnak függvényében határozzák meg.

Az egyetemi oktatás rostáló szerepe c. tanulmány a felsőoktatás gazdasági szerepének modelljét vázolja fel, amely lényegesen különbözik feltételeiben a ma már hagyományos „emberi tőke" nézetektől. Célkitűzése: formalizált alakban leírni néhány szociológus azon nézetét, amely szerint a diploma nem annyira az elsajátított szakmai ismeretek bizonyítéka, hanem inkább a teljesítőképesség közelítő mérésére szolgál. A szerző a felsőoktatásnak a termeléshez való hozzájárulását tárgyalja, az oktatás ún. szűrési elméletét a gazdasági rendszer és annak egyensúlyával foglalkozó átfogóbb elmélet részeként tekinti.

A *harmadik fejezet* a *termelés és technikai haladás* tárgykörébe tartozó tanulmányokat tartalmazza.

A *Helyettesítés a tőke és a munka között és a gazdasági hatékonyság* c. tanulmány (társszerzők: *Chenery, H. B.*, *Minhas, B. S.*, *Solow, R. M.*) kiinduló pontja az az empirikus megfigyelés, hogy egy adott iparágban az egységnyi munkára jutó hozzáadott érték az országok között a bérszinttel együtt változik. Ennek az összefüggésnek alátámasztására elvégzett, 24 iparágat és 19 országot felölelő vizsgálat eredményeként arra a következtetésre jutottak a szerzők, hogy a munkatermelékenységnek a bérszintre vonatkozó regressziója erősen szignifikáns korrelációt, valamint a regressziós koefficiensekben jelentős szóródást mutat valamennyi iparágban. Eme eredmények alapján egy olyan termelési függvényt javasolnak, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: homogén, állandó a munka és a tőke közötti helyettesítési rugalmasság; a különböző iparágakban a rugalmassági együtthatók különbözőek lehetnek. Megmutatják, hogy van ilyen termelési függvény, s ez speciális esetekben megegyezik mind a Leontief-, mind a Cobb—Douglas-féle termelési függvényekkel. A további részekben ennek az állandó heyettesítési rugamasságú (CES) termelési függvénynek a segítségével végzett elemzéseket találunk: elsőként Japán és az USA tényezőfelhasználásának és relatív tényezőárainak vizsgálatát, majd az USA össztermelésének idősoros elemzését.

A gazdasági jólét és a feltalálást szolgáló erőfsrrások elosztása c. tanulmány középpontjából a jóléti gazdaságtan egyik klasszikus kérdése áll: milyen mértékben vezet a tökéletes verseny az erőforrások optimális elosztásához. A szakirodalomban általában három okot sorolnak fel arra, hogy a tökéletes verseny miért nem képes az erőforrások elosztásának optimalitását elérni: oszthatatlanságok, eltulajdoníthatatlanság és bizonytalanság. Az első ok a határköltség alapján történő árképzés kapcsán tanulmányozható, a második pedig a társadalmi és egyéni haszon (vagy költség) eltéréseként. Míg e két okot elég sokan tanulmányozták, addig a bizonytalanság melletti optimális erőforrás-elosztás elméletének valamivel kevesebb figyelmet szenteltek. A szerző röviden összefoglalja a formális elméleteket, majd megmutatja az információ szerepének fontosságát a bizonytalansággal összefüggésben. Megvizsgálja az információ, mint áru gazdasági jellemzőit, valamint a feltalálói folyamat, mint információ-termelő folyamat sajátosságait. Megmutatja, hogy a fenti okok mindegyike — amelyek miatt a versenyrendszernek nem sikerül optimális erőforrás-elosztást megvalósítania — érvényes a feltalálás esetére is.

A termeléssel szerzett tudás jelentősége a gazdasági elmélet számára c. tanulmányban a szerző egy elméletet javasol azokra a tudásbeli változásokra, amelyek a termelési függvények időbeli és országok közötti eltolódásait eredményezik. Véleménye szerint a technikai haladás általában a tapasztalat következménye. Ennek alátámasztására egy meglehetősen egyszerű modellen végez vizsgálatokat: a profit a technikai változás eredménye, a szabad vállalkozás rendszerében a beruházás aránya kisebb az optimálisnál, a nettó beruházás és a tőkeállomány másodlagos fogalmakká válnak: a vezető szerep a bruttó beruházásé.

A *termelési függvény a gépjavítási feladathoz* c. tanulmány (társszerzők: *Levhan, D., Sheshinski, E.*) a gépjavítási feladatot a termelési elmélet oldaláról vizsgálja. Röviden a probléma: adott m db egyforma automata gép, amelyek egymástól függetlenül működnek. Meghibásodásuk exponenciális valószínűségi eloszlást követ. Feltételezzük továbbá, hogy r számú szerelőnk van, egy szerelő egy időpontban egy gép javítására képes: a javítási idő szintén exponenciális eloszlású. Ha r-nél kevesebb gép áll javítás alatt, egy újabb hibás gép javításához nyomban hozzá lehet kezdeni. Ugyanakkor, ha r gép már javítás alatt van, akkor a továbbiakban meghibásodott gépek sorba állnak a javításért. A sorbanállási szabály megköveteli, hogy valamennyi szerelő dolgozzék, ha van javításra váró gép, egyébként a kiszolgálás sorrendje tetszőleges. Ha $x(t)$ a t időpontban a termelés, akkor $x(t)$ a t időpontban működő gépek $n(t)$ számával arányos, amely egy sztochasztikus születési-halálozási folyamatot követ. A tanulmány célkitűzése: $x(t)$ aszimptotikus viselkedésének tanulmányozása. Bizonyítást kapunk arra, hogy amint a gépek és a szerelők száma nő, a várható termelés vagy a szerelők, vagy a gépek számával arányos, attól függően, hogy a szerelő/gép-arány egy bizonyos érték alatt van, vagy meghaladja azt.

Az *utolsó fejezetben* a *bizonytalanság, információ és organizáció* összefüggéseivel kapcsolatos tanulmányokat találjuk.

A *Döntés kockázat vállalásával; a különböző elméleti irányzatok* c. tanulmányban a szerző kísérletet tesz a bizonytalan kimenetelű alternatívák közötti választás közgazdasági, filozófiai, matematikai és statisztikai irodalmának áttekintésére. A feldolgozás döntéselméleti szempontú: a bizonytalanság különböző leírási módjait, valamint a racionális és a tényleges egyéni magatartásokat elemzi.

Az *Információ és gazdasági viselkedés* c. tanulmány tárgya az információ szerepének feltárása a bizonytalanság csökkentésében. Érdekes, hogy a szerző nem ért egyet az információ mérésével. Véleménye szerint az információ jól ismert Shannon-féle mértéke nem megfelelő a gazdasági elemzés céljára.

A *Napirendi kérdések a szervezetekben* c. tanulmány a szerző szavaival élve „egy rendkívül spekulatív esszé", amely az egyének és a különféle szervezetek szerepét elemzi a döntéshozásban.

A tanulmánykötet végén Arrow műveinek bibliográfiája is megtalálható.

Összegezésül elmondhatjuk, hogy mind az egyetemi oktatásban, mind a különböző elméleti kutatásokban nagyon jól felhasználható kiadvánnyal gazdagodott hazai szakirodalmunk.

Móczár József

Hegedüs Miklós—Zalai Ernő: *Fixpont és egyensúly a gazdasági modellekben* Budapest, 1978. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 400 o.

Hegedüs Miklós és Zalai Ernő az egyik legjelentősebb magyar művet írták meg a matematikai közgazdaságtan területén. Könyvük 1978-ban jelent meg a KJK „Korszerű matematikai ismeretek gazdasági szakemberek számára" című sorozatában.

A könyv két részből áll. Az első rész, melynek szerzője Zalai Ernő, a matematikai közgazdaságtanban központi szerepet játszó általános egyensúlyelmélet főbb modelljeit tárgyalja. Ennek az alapvető jelentőségű elméletnek a hazai bemutatása mindenképpen időszerű. Sem itthon, sem pedig külföldön nem szabad — tulajdonképpen nem is lehet — az egyensúlyelméletről komolyan vitatkozni egzakt matematikai modelljeinek alapos ismerete nélkül. Ugyanakkor éppen a felesleges vitákat megelőzendő, igen hasznos a szerzőnek az a törekvése, hogy az általános egyensúlyelméletet lehetőségeinek és korlátainak bemutatása, valamint történeti és kritikai elemzése révén elhelyezze a közgazdaságtanban. A könyv második része — Hegedüs Miklós munkája — az egyensúlyelmélet matematikai apparátusában központi helyen álló technikát, a fixponttételeket tárgyalja. Amellett, hogy az első rész megértéséhez nélkülözhetetlenül szükséges matematikai alapfogalmakat és tételeket megismerteti az olvasóval, a szakirodalomban úttörő jelentőségű monográfia is egyben.

Szerencsés gondolat volt egy könyvben kiadni a két önmagában is jelentős művet. Az első rész feldolgozásához segítséget nyújt a könyv második része, a második rész absztrakt tételei pedig az első részben találnak alkalmazásra. Ez az egymást kiegészítő jelleg egyben támpontot nyújtott ahhoz, hogy a két terület kötetekre rúgó irodalmából mely témakörök feldolgozása kerüljön bele a könyvbe és melyek maradjanak ki. Az első rész így csak az egyensúly létezésének kérdésével foglalkozik, kimaradt az unicitás, a stabilitás és a komparatív statikai elemzés. A fixponttételek között nem szerepel pl. az *Eilenberg—Montgomery* és a rendezett terekre vonatkozó tételkör. A két rész mind témáját, mind pedig feldolgozásmódját tekintve egységes szemléletet tükröz.

A gazdasági egyensúly modelljei című rész három fejezetből áll. Az első fejezetben a szerző egy absztrakt gazdaság leírásán mutatja be az általános egyensúlyelmélet alapfogalmait. Részletes elemzését kapjuk a mögöttük meghúzódó absztrakcióknak és azok közgazdasági vonatkozásainak. A statikus és determinisztikus szemléletű alapfeltevések leírása mindenképpen hasznos, hiszen ismeretük elengedhetetlen az elmélet újabb fejlődési irányzatainak megértéséhez. A továbbiakban a szerző a sajátos részkérdéseket vizsgáló stacioner növekedési modellek feltevéseit elemzi, majd az egyensúlyelmélet történeti fejlődésében fontosabb szerepet játszó modelleket mutatja be. A fejezet két didaktikailag igen értékes elemzéssel zárul: az egyensúly és fixpont összefüggését, valamint az egyensúly létezéséhez szükséges feltételeket ismerhetjük meg szemléletes ábrákkal illusztrálva. Itt válik érthetővé a konvex analízis és az egyensúlyelmélet szoros összefonódása. A pótlólagos feltevések közgazdasági vonatkozásainak alapos elemzése ugyanakkor szükséges a modellek korlátainak feltárásához.

A második fejezet már komolyabb matematikai ismereteket igényel, elolvasása előtt ajánlatos a könyv második részének első fejezetével megismerkedni. A fejezetben először a *Walras—Wald—Kuhn*-modell egyensúlyi állapotának létezését bizonyítja a szerző, felhasználva *Kakutani* fixponttételét. Ezután ismerjük meg a *Gale*, *Debreu* és *Nikaido* nevéhez fűződő Alaptételt, valamint *Uzawa* nyomán az Alaptétel és a *Brouwer* fixponttétel kölcsönös kapcsolatát. A továbbiakban az egyensúly létezésének bizonyításában szereplő fontosabb lépéseket tartalmazza a fejezet egyszerűbb feltételek, ún. mintagazdaság esetén. Az itt megismert technikával bizonyítja az *Arrow—Debreu*-modell egyensúlyát az általánosabb feltételek, a szűkös javakból történő aktív önellátás és a *McKenzie*-féle készletkapcsoltság mellett. A fejezet hátralevő részében a *Neumann*, *Gale*-, *Leontief*- és *Samuelson—Solow*-féle növekedési modellek megoldhatóságát bizonyítja a szerző.

A harmadik fejezet az egyensúlyi elemzések sajátos alkalmazásait tartalmazza. *Morishima* és *Bródy* elemzéseit összekapcsolva megismerjük a marxi érték- és újratermelési elmélet egyensúlyelméleti vonatkozásait. A népgazdasági tervezés programozási modelljéről is kiderül, hogy igen szoros rokonságban van az átalános egyensúlyelmélettel. Végül *Arrow* egy híres tétele kapcsán a hatékonyság és egyensúly kapcsolatáról olvashatunk. Ez a fejezet, főleg első két része, számot tarthat az egyensúlyelmélet irodalmát jól ismerő olvasó érdeklődésére is.

A könyv második részének első fejezete az n-dimenziós euklideszi tér fixponttételeit tárgyalja. Először a fontosabb tételek egydimenziós változatait ismerjük meg, szemléletes ábrákkal illusztrálva. Különösen értékes didaktikai szempontból a későbbi általánosítások alapjait képező bizonyítékok bemutatása, melyek tartalmazzák a bonyolultabb bizonyítások gondolatmenetének egyszerűsített változatait. A fejezetből az olvasó megismerheti az n-dimenziós vektortér szerkezetét, *Minkowski* funkcionálját, a *Brouwer*-tétel *Knaster—Kuratowski—Mazurkievicz*-féle bizonyítását. Hasznos és érdekes a továbbiakban a halmazok távolságára adható definíciók, a *Hausdorff*-metrika bemutatása, ezek alapján a ponthalmaz leképezések folytonossági tulajdonságainak részletes, többoldalú elemzése. A fejezet *Kakutani*, *Neumann* és *Ky Fan* tételeinek bizonyításával zárul.

A második fejezetben először a metrikus és *Banach* terek alapvető fogalmait tárgyalja a szerző. Részletesen jellemzi metrikus terek kompakt halmazait *Hausdorff*, *Cantor*, *Borel* és *Riesz* tételein keresztül. Az olvasó megismerkedhet az első fejezet tételeinek általánosításaival; *Schauder* első és második tételével, *Bohnenblust* és *Karlin* tételeivel, valamint a *Szadovszkij*-féle kondenzációs tétellel. A fejezetben megtalálhatók *Tyihonov*, *Kakutani* és *Ky Fan* lokálisan konvex topologikus vektorterekben kimondott fixponttételei is. Ezek bizonyítása normált lineáris térre redukálva, az eredeti gondolatmenetet megőrzi. Úgy gondolom, a lokálisan konvex topologikus vektortér alapfogalmainak ismertetése után az eredeti bizonyítások bemutatása terjedelemben nem sokkal, tartalom szempontjából viszont lényegesen több lett volna. A negyedik pont a *Banach—Caccioppoli*-tételkör kimerítő ismertetését tartalmazza. Szellemes a kontrakció-figalom általánosítása, és ez alapján az egzisztencia és unicitás mellett a fixpont megkeresésére hatékony eljárást nyújtó tételek részletes jellemzése. Megismerhetjük a ponthalmaz és lokális kontrakciókra, a kontraktív leképezésekre, valamint a leképezések közös fixpontjára vonatkozó tételeket is. A fejezet *Ryll—Nardzewski* és *Krasznoszelszkij* tételeivel zárul.

A második részben bemutatott tételek közül a matematikai közgazdaságtanban *Brouwer* és *Kakutani* tételein kívül már több is alkalmazásra került, a szélesebb körű felhasználást remélhetőleg elősegíti majd *Hegedüs Miklós* és *Zalai Ernő* munkája is. A könyv végén az érdeklődő olvasó bőséges irodalomjegyzéket talál, sajnálatos viszont, hogy név- és tárgymutató nem könnyíti meg a tájékozódást.

Lővei László

Tövissi, L.—Scarlat, E.—Tasnadi, Al.: *Metode si modele ale analizei economice structurale.* Bucuresti, 1979. Editura stiintifica si enciclopedica. 425 o.

A könyv a gazdasági rendszerek elemzésére és tervezésére szolgáló strukturális módszereknek és modelleknek a közgazdasági irodalomban kevésbé tárgyalt aspektusaival foglalkozik. A szerzők a könyv első részében felidézik a gazdasági rendszereket alkotó alrendszerek között fennálló összefüggéseket és kölcsönhatásokat. Utalnak arra, hogy valamely gazdasági rendszer működését, bizonyos időszak alatti viselkedését, a kitűzött gazdasági és társadalmi célok elérését a struktúra kialakításának a módja és az alrendszerek közötti kölcsönhatások dinamikája nagymértékben befolyásolja. Felhívják a figyelmet arra, hogy a gazdasági rendszerek strukturális aspektusainak, valamint a gazdasági rendszereknek a környezettel, a globális társadalmi rendszer más struktúráival való kölcsönhatásának a tanulmányozása értékes információkat nyújthat ezek működési módjáról. Az előzőekben definiált struktúrájú, működésű és viselkedésű rendszerek tervezésének előfeltételeit a strukturális elemzés és modellezés képezi. Így bizonyos kritériumok alapján optimális gazdasági struktúrával rendelkező rendszerek valósíthatók meg és meghatározhatók a strukturális változások azért, hogy a rendszer hatékonyabban működjön.

A könyv hét fejezetre tagolódik. Az *első fejezet* a rendszer és struktúra közötti viszonyt ismerteti. Bemutatja ez utóbbi fogalmának a fontosságát a gazdasági jelenségek és folyamatok elemzésében. A népgazdasági rendszert több struktúrájú rendszernek tekinti, amely tartalmazza a termelési, a szervezési és az irányítási struktúrát. Foglalkozik a gazdasági struktúra változásának folyamatával. Utal arra, hogy ebben a folyamatban jelentős a változások tényezőinek ismerete és ezeknek a gazdasági növekedésben való ésszerű és hatékony alkalmazása. Ez a struktúra-modernizálás képezi a népgazdaságok növekedésének egyik legfontosabb tényezőjét.

A *második fejezet* a gazdasági szerkezet elemzésével foglalkozik. Vizsgálata a struktúra fogalmából, valamint a strukturális módszer és a gazdasági szerkezet elemzésének a viszonyából indul ki azért, hogy e rendszerek jellemvonásainak és sajátos törvényeinek megismerésére szolgáló eszközt adjon. A struktúra, a működés és a viselkedés úgy tekinthető, mint ugyanannak az egésznek, az elemzett rendszernek a különböző aspektusai, amelyek között kölcsönhatások lépnek fel, amelyek meghatározzák a rendszer stabilitását és dinamikáját. Minden egyes gazdasági rendszer meghatározott módon struktúrált. Ennek alapján a rendszerben különböző struktúrákat különböztetnek meg, amelyek bizonyos funkciók megvalósítását tükrözik. Ezek a funkciók, amelyek mind a rendszer elemeit, mind pedig a rendszert, mint teljes egészet jellemzik, függenek a struktúrától és a gazdasági rendszerek esetében kifejezik ezeknek azokat a sajátosságait, hogy meghatározott emberi érdekeket és szükségleteket elégítsenek ki. A struktúra egy bizonyos rendezettséget, éspedig a rendszer elemeinek elrendezését jelenti. Ez az elemek közötti függőség egy bizonyos okozati összefüggését határozza meg, amelyet bizonyos célszerűség vezérel és amely működési szabályokon keresztül valósul meg. Így a gazdasági rendszerek szervezett rendszerek, következésképpen szervezeti struktúrával rendelkeznek.

Ez a fejezet végül a gazdasági rendszerek irányítási struktúrájának jellemzőivel foglalkozik. Hivatkozik arra, hogy az ilyen rendszereket bizonyos gazdasági vagy társadalmi célszerűségek jellemezik, amelyeket az említett rendszerek általános fejlődésének programjai határoznak meg. A célok megvalósítása függ a gazdasági rendszer alrendszereinek tevékenységétől, amelyet az egész rendszer szintjén össze kell hangolni. Ily módon valósul meg az irányítási struktúra. A strukturális elemzés széleskörűen alkalmazza a strukturális modelleket, amelyeknek alkalmazási lehetőségeit szintén e fejezet tartalmazza.

A *harmadik fejezet* a strukturális változások mennyiségi értékelésének legegyszerűbb módszereivel foglalkozik. E módszerek közül a szerzők szerint a vektoranalízis módszerei a leghozzáférhetőbbek. Ezeknek az alkalmazásánál a struktúra elemi definíciójából indulnak ki. Így megállapítják a részeket (csoportokat, osztályokat stb.), megszámlálják ezek alkotóelemeit, vagy ezen részek számára megállapítanak néhány számszerűen kifejezhető karakterisztikus értéket, amelyeket ún. leíró vagy deszkriptív vektor formájában írnak fel. A vektoranalízis módszereinek egész sorát használják fel a struktúra és a strukturális változtatások vizsgálatára. Definiálják a struktúra deszkriptív vektorának jellemzőit és ezek segítségével olyan mutatókat vezetnek be, amelyekkel értékelhetők a gazdasági folyamatok és jelenségek strukturális jellemzői.

A termelési rendszer struktúrájának komplex kérdéseire hasznos a mátrix- és a gráf-elmélet néhány eljárásának és módszerének az alkalmazása. A termelési rendszerhez hozzárendelt gráfból vagy mátrixból kiindulva meghatározhatók a rendszert alkotó alrendszerek, a szintek, amelyeken ezek az alrendszerek elhelyezkednek, az alrendszerek közötti kapcsolatoknak a száma, a rendszer struktúrájának a típusa stb. A *negyedik fejezet* egy sor algoritmust is bemutat, amelyekkel egy adott strukturális mátrix a kívánt formára hozható.

Az *ötödik fejezet* a gazdasági szerkezet információs elemzésének módszereit ismerteti. Központi témája az entrópia, amely a strukturális változások minőségi mértéke. A módszerek, amelyek az entrópiával kapcsolatos mennyiségeken alapszanak, lehetővé teszik e kapcsolatok intenzitásának a megállapítását, vagyis lehetővé teszik a struktúra minőségi elemzését, de főleg a strukturális változások elemzését. Ez a fejezet az entrópiával kapcsolatos mérések tulajdonságaival is foglalkozik. Ezek a mérések additíven szétválaszthatók, s ez lehetővé teszi a komplex struktúrájú rendszereknek, mint amilyenek a gazdsági rendszerek is az általánosítását. Az entrópia súlyozott mértékeinek felhasználásával a rendszer minden egyes állapotának ún. hatékonysági szintjei határozhatók meg, és így értékelhető a strukturális tökéletesítés dinamikája. Ez végül lehetővé teszi a strukturális változások optimális stratégiáinak a meghatározását. Az entrópia-módszer lehetővé teszi a gazdasági rendszerek azon sajátosságának az elemzését is, hogy változtatják belső struktúrájukat, valamint a környezetükben levő más rendszerekkel való kapcsolataikat. Így a struktúra általános fejlődésének folyamatában elkülönítik a belső struktúra megváltozásának tulajdonítható összetevőt a külső kölcsönhatások megváltozásától. Ez a két komponens a súlyozott relatív entrópia kifejezésében újra szerepel.

A *hatodik fejezetben* a statisztikai mutatószámok elméletén alapuló módszerek szerepelnek, amelyek lehetővé teszik a strukturális változások felbontását hatótényezőkre, valamint e változások prognosztizálását.

A *hetedik fejezet* a gazdasági struktúrák optimalizálását, valamint a gazdasági optimum a strukturális optimum viszonyát tárgyalja. Ismerteti a termelési, szervezeti és irányítási struktúrák optimalizálásának módszereit is.

L. Tövissi, E. Scarlat és Al. Tasnádi könyve a strukturális módszereknek és modelleknek a közgazdasági irodalomban kevésbé tárgyalt aspektusaival foglalkozik, ezért hiánypótló. Így értékes segédeszközként szolgálhat a gazdasági rendszerek elemzésével és tervezésével foglalkozó szakemberek számára.

KRISTÓ ZOLTÁN

KLIR, G. J. (szerk.): *Applied general systems research. Recent developments and trends.* New York—London, 1978. Plenum Press. 988 o.

A könyv az 1977-ben az *alkalmazott általános rendszerkutatás tárgykörében* rendezett nemzetközi konferencia válogatott anyagát tartalmazza.

A szerkesztő előszavában az általános rendszerkutatást úgy jellemzi, mint olyan mozgalmat, amely a *problémamegoldásnak* struktúrától és tartalomtól független jellemzőit tanulmányozza. Eszerint, interdiszciplináris természetű, és ebben az értelemben látszólag azonos a matematikával. Amíg azonban a tiszta matematika különböző axiomatikus elméletnek kifejlesztését tűzi ki célul, attól függetlenül, hogy van vagy nincs a valóságban értelmük, az alkalmazott matematika ezeknek az elméleteknek, mint potenciálisan hasznos módszertani eszközöknek az alkalmazhatóságát vizsgálja különböző problématerületeken. Ezzel ellentétben az általános rendszerkutatás inkább probléma-orientált, mint eszköz-orientált. Azaz a rendszerproblémák megoldására *eredeti módszereket* próbál kifejleszteni (pl. struktúra típustól és tartalomtól független rendszerproblémákra). Az „eredeti módszer" kifejezést abban az értelemben használjuk itt, mint olyan módszert, amely a problémához van „igazítva", nem pedig a probléma a módszerhez ennek alkalmazhatósága érdekében.

Így az általános rendszerkutatás olyan módszerek kifejlesztésére törekszik, amelyekkel a problémákat a lehető legkevesebb egyszerűsítő feltételezéssel lehet ábrázolni és megoldani. A fentiekből kitűnik, hogy a megoldásra használt eszközöknek másodlagos jelentőségük van, és ezek nemcsak matematikai módszerek lehetnek, hanem heurisztikus, kísérleti, matematikai, számítástechnika stb. eszközök sajátos kombinációi.

Az általános rendszerkutatás és feladatainak ez a megközelítése azon a felismerésen alapul, hogy az emberek előtt álló komplex problémák két részre bonthatók:

(1) egy tartalomtól függő részre, amelynek megoldásához egy speciális tudomány (diszciplína) ismeretanyagára van szükség,

(2) egy tartalomtól független (általános) részre, — amelyek a problémák egy csoportjában közös tulajdonságokkal rendelkeznek. Az általános rendszerkutatás a problémáknak ezeket az aspektusait vizsgálja, megoldási eszközöket próbál adni úgy, hogy a különböző tudományterületek *kutatóinak együttműködését* igyekszik biztosítani.

A megoldási eszközöket jelenleg még főként a különböző tudományokban kifejlesztett módszerek adják, de már léteznek az általános rendszerkutatás keretén belül kifejlesztett eszközök is (pl. különböző módszerek a nem kvantifikálható, vagy rosszul definiált tulajdonságokkal kapcsolatos adatok kezelésére). A kutatások legfontosabb területe napjainkban éppen ezeknek a módszereknek a továbbfejlesztése és újak létrehozása.

Ez a törekvés fejeződött ki a konferencián és kísérhető nyomon a könyv lapjain is, amely tartalmilag négy fő részre tagolódik. Az első részben az általános rendszerkutatás koncepcionális és módszertani alapjaival foglalkozó tanulmányok kaptak helyet. A második és harmadik rész a biológia és a társadalomtudományok területén való alkalmazásokat (alkalmazási kísérleteket) mutatja be.

A negyedik rész tartalmazza azokat a tanulmányokat, amelyek az általános rendszerkutatással kapcsolatban tesznek kritikai észrevételeket.

Az egyes fejezetek hosszabb lélegzetű, áttekintő tanulmánnyal kezdődnek. Az ezeket követő dolgozatok tömören, lényegre törően tárgyalják témájukat. Aki az egyes részterületeket bővebben akarja megismerni, azt a sokszor igen tekintélyes irodalomjegyzékek igazítják útba.

A könyv alapján hű képet nyerhetünk arról, hogy milyen napjainkban az általános rendszerkutatás fejlettsége. A módszertan területén igen erős a formalizálásra való törekvés. Ez a célok, a technikák és az alapfilozófiák széles skálájával párosul, ahogyan ezt *M. McLean* az általános rendszerkutatás korlátozásáról írt tanulmányában kifejti. (The Limitation of Applied Systems Research.) Egyelőre úgy tűnik, hogy a módszertani alapok kimunkálásának folyamata *divergens*, nem mutat egységes, átfogó módszertan kialakulása felé. A szintetizálásra tett kísérletek az általánosság olyan magas szintjén mozognak, amely kétségessé teszi a különböző részterületeken való közvetlen alkalmazásukat.

Véleményem szerint ehelyett hasznosabb, hogyha a különböző rendszerkoncepciók között fellelhető kapcsolatokat, a bennük található közös vonásokat tárjuk fel. Erre tett érdekes kísérletet *L. R. Troncalev* Kapcsolódási kilátások ötven alapvető rendszerkoncepció között című tanulmányában.

Az általános rendszerkutatást *összefogó keret* szükségességét bizonyítja *Cavallo* és *Klir* közös tanulmányában. Egy ilyen keretet alkothatnak az utóbbi évek kutatásaiként kidolgozott *ismeretelméleti szint kategóriák*, amelyek a különböző tudományterületek kutatási körébe tartozó alapvető rendszertípusok hierarchikus egymásraépülését ábrázolják. A további vizsgálódások során kiderült, hogy szükség van olyan módszertani eszköz kialakítására, amely kapcsolatban van a „szintekkel", és amely integrálja a célokat, a korlátokat és a speciális kutatásokkal kapcsolatos törekvéseket. Ezt az eszközt az ún. *általános rendszerprobléma megoldóban* (GSPS) vélik felfedezni. Ez részben kutatási program, részben rendszerproblémák megoldására alkalmas interaktív számítógépes rendszer. A módszer *Klir* általános rendszerelméletén alapul, egységes szemléletet és nyelvet ad a rendszer vizsgálatokhoz a különböző tudományterületek kutatóinak. Ezzel lehetővé válik, hogy egyes rendszerproblémák kutatásában elért eredmények az interaktív rendszer közreműködésével más problémák megoldásában is segítséget nyújtsanak.

Az általános rendszerkutatással, *mint egésszel* foglalkozó dolgozatok mellett az első részben helyet kaptak a rendszerstruktúrával és annak modellezésével, a kategória elmélettel, a fuzzy halmazelmélettel kapcsolatos tanulmányok is.

Külön érdeklődésre tarthat számot *P.M. Solzberg* munkája az általános rendszerek abszolút stabilitásáról, valamint a *H. Apel, W. Fassing, W. Meissner* szerzőhármas kísérlete a rendszerdinamika és ökonometria szintetizálására.

Az általános rendszerelmélet korai változatának kidolgozása egy biológus, *Bertalanffy* nevéhez fűződik. A rendszergondolat első alkalmazási területei a biológia és a társadalomtudományok voltak. Ezért lehet érdekes áttekinteni, hol tart ma ez a kutatás.

A második rész tanulmányainak jó része egészen speciális *biológiai problémákat* vizsgál, ennek ellenére néhányat a nem biológiai érdeklődésű szakembereknek is érdemes elolvasni. Ilyen lehet pl. *R. Rosen* áttekintése a biológia és a rendszerkutatás kapcsolatáról, valamint *G. S. Ladde* összehasonlítása a biológia, a fizika és a társadalomtudományok által vizsgált rendszerek stabilitásáról.

A *rendszergondolat társadalomtudományokban* való alkalmazásának széles skáláját mutatja be a harmadik rész. Ez a skála a problémamegoldás elméletétől a termeléstervezés rendszerdinamikáján át a rendszerszemléletű könyvtáranalízisig terjed.

Az alkalmazások ilyen gazdagsága az általános rendszerkutatás erejét bizonyítja. Ugyanakkor a tanulmányokból az is kitűnik, hogy a kutatás során egyre bonyolultabbá váló objektumok növekvő komplexitásának kezeléséhez igazából még nincsenek meg a megfelelő eszközök. Ennek hatása a modellezés területén úgy figyelhető meg, hogy a hatalmas méretű és szinte áttekinthetetlen modellektől a kutatók visszatérnek a kisebb, könnyebben kezelhető modellekhez.

Az utolsó rész *kritikai észrevételeiből* a következőket érdemes kiemelni (ezek véleményem szerint jogos kritikák az általános rendszerkutatással kapcsolatban):

(1) Az elméletek mindenáron való matematikai formalizálása sok esetben inkább egyfajta divat, mint szükségszerűség.
(2) A rendszerkutatókkal ellentétben a természettudományok művelői sokkal kevesebb energiát fordítottak a filozófia és a módszertan alapvető problémáira, inkább valós problémák megoldására koncentráltak.

A kritikákra való válaszadás a következő időszak feladata, amelyet — egy holland rendszerkutató terminológiájával élve — sokkal inkább a „gürcölés", mintsem a látványos eredmények fognak jellemezni.

A könyvvel kapcsolatban még a függelékre érdemes felhívni a figyelmet, amely egyrészt az abban a kiadványban meg nem jelent, de a konferencián elhangzott előadások felkutatásához ad bibliográfiát; másrészt egy vizsgálat eredményét közli arról, hogy a konferencián részt vevő tudósokra melyik más kutatók eredményei voltak hatással. Az eredmény érdekessége: *Ross Ashby* erős hatása az általános rendszerkutatásra.

Végső értékelést adva a könyvről:
— azoknak a számára, akik már foglalkoznak a rendszerelmélettel, jó áttekintést ad a kutatások legújabb fejleményeiről;
— azok számára, akik most kezdenek foglalkozni ezzel a „fiatal" tudományterülettel, egy másik tanulmánykötettel együtt (Klir, G. J.: Trends in general system theory, Wiley-Interscience 1972.) lehetőséget ad arra, hogy az elmélet alapelveivel és fejlődési irányaival megismerkedjenek.

Kiss Péter

TUDOMÁNYOS ÉLET

A Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Népgazdasági Tervezési Intézetének tudományos munkássága

A *Népgazdasági Tervezési Intézet* az Oktatási Minisztérium rendelkezése alapján a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Általános Közgazdasági Karán, a *Népgazdaság tervezése és irányítása tanszék* és a *Gazdaságpolitikai Kutatócsoport* összevonásával jött létre 1979. július 1-én. Az Intézeten belül a következő három osztály alakult:

- Tervezéselméleti és Gazdaságpolitikai Osztály;
- Jövőkutatási Osztály,
- Tervezésmódszertani Osztály.

Jelenleg 23 főállású és 3 mellékfoglalkozású oktató dolgozik az Intézetben. A Matematikai és Számítástudomány. Intézettel közösen szervezi a tervgazdasági szak képzését. Az egyes osztályok közvetlenül a különböző alternatív blokkokban folyó oktatás szervezéséért felelősek. A tantervi órákon túlmenően a megfelelően kapcsolódó témában szakszemináriumokkal és proszemináriumokkal, valamint a TDK patronálásával járul hozzá az egyetemi képzéshez. Az Intézet törekszik bevonni az egyetemi oktató munkába a különböző intézmények szakembereit is: az Országos Tervhivatalnak, az OT Tervgazdasági Intézetének, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének stb. számos munkatársa vesz részt az oktatásban.

A *kutatási témák* kijelölésében szorosan kapcsolódik a különböző intézmények – többek között az Országos Tervhivatal, az OT Tervgazdasági Intézete, az MTA Közgazdaságtudományi Intézete, az MTA Filozófiai Intézete – kutató munkájához. Közülük több intézettel szerződés alapján folyik a közös kutató tevékenység.

Az Intézet *nemzetközi kutatási kapcsolatai* is számottevőek. A *Jövőkutatási Osztály* munkatársai pl. részt vesznek a KGST országok közös kutatásaiban, elsősorban a tudomány és technika prognosztizálásának, a hosszú távlatú tervek célrendszerének, valamint a tervek és a prognózisok rendszere kapcsolatának vizsgálatában. Különösen kiemelkednek módszertani kutatásaik, ezek közül is legbehatóbban a heurisztika és a kvantifikálhatóság kérdéskörével foglalkoznak. A *Tervezésmódszertani Osztály* munkatársai közül néhányan a Nemzetközi Alkalmazott Rendszerelemzési Intézet (IIASA) egyes kutatásaiban (globális gazdasági modellezés; energia-modellrendszer) vesznek részt. A SZUTA Központi Gazdaságmatematikai Intézet által koordinált „Komplex programok a népgazdasági tervezésben" c. kutatásban is részt vállalt az osztály néhány munkatársa. A *Tervezéselméleti és Gazdaságpolitikai Osztály* többek között kapcsolódik a KGST Szocialista Világrendszer Kutató Intézet tevékenységéhez és részt vesz a moszkvai Plechanov Népgazdasági Főiskola által koordinált, az európai szocialista országok részvételével készülő tervezési tankönyv megírásában.

A továbbiakban az egyes osztályok oktatási-kutatási tevékenységét mutatjuk be azzal a megjegyzéssel, hogy egy-egy kutatási témakör eredményeit általában több tantárgy keretében oktatják az Intézet munkatársai.

A *Tervezéselméleti és Gazdaságpolitikai Osztály* feladata a Népgazdaság tervezése és irányítása c. tantárgy és ehhez kapcsolódóan speciális témájú gazdaságpolitikai kollégiumok oktatása és kutatása, különös tekintettel a tervezés és irányításelmélet, a tervgazdálkodás története és nemzetközi gyakorlata, a gazdasági növekedés tényezői, a gazdasági struktúra, a nemzetközi együttműködés, a terület- és infrastruktúra-fejlesztés, az életszínvonal, a gazdaságirányítás, a népgazdaság és vállalat kiemelt témaköreire. Az osztályon belül a kutatómunka négy témacsoportban folyik. (A témacsoport kutatási, szervezeti egység, egy-egy oktató, kutató több osztályon belüli vagy kívüli kutatási témacsoport munkájában is részt vehet.)

A *Tervezés- és irányításelmélet, tervezéstörténet* témacsoport jelenlegi főbb kutatási feladatai:

— a szocialista országok tervgazdálkodási gyakorlatának részletes elemzése;

— az 1980 őszén kezdődő, az OT Tervgazdasági Intézetével közösen szervezett tervezéselméleti kutató szemináriumsorozat előkészítése.

A *Gazdasági növekedés tényezőinek tervezése* témacsoport kutató tevékenysége

— az iparfejlesztés tervezésének módszertana,

— a KGST-országok gazdasági szerkezetének elemzése,

— területfejlesztési koncepciók témakörére irányul.

Az életkörülmények és az infrastrutúra tervezése témacsoport jelenlegi kutatási feladata:

— Budapest és az agglomerációs övezet infrastrukturális helyzetének elemzése, fejlesztési lehetőségeinek feltárása.

A *Gazdasági szabályozás* témacsoport kutatási témái:

— a gazdaságpolitikai célok és a gazdasági szabályozók összehangolása a magyar népgazdaságban;

— a népgazdasági és a vállalati tervezés összefüggései.

Ez utóbbi kutatás szorosan kapcsolódik a szocialista vállalati kutatási főirányhoz, melynek egyik részterületét (a népgazdaság és vállalat kapcsolatait) az Intézet irányítja, illetve koordinálja.

A *Jövőkutatási Osztály* feladata a jövőkutatás elméletének és módszertanának kutatása, rendszerbe foglalása, s természetesen az elért eredmények oktatása. Az Osztály kutatómunkája elsősorban „A nagytávlatú komplex jövőkép" kidolgozására irányul. Ennek során a társadalmi-gazdasági fejlettség és a különféle makro-struktúrák összefüggéseit vizsgálják a műszaki-gazdasági és a társadalmi tényezők kapcsolatára helyezve a hangsúlyt.

Makroszintű kutatásaikban a hazai urbanizációs tengelyeknek az ország egészét átfogó tengelyekhez való kapcsolódásait elemzik. Az elkészült előrejelzéseiket a különböző főhatóságok széles körben hasznosítják. Kutatási feladataik között elsődleges szerepet biztosítanak „A tudományos-technikai forradalom társadalmi feltételei és várható következményei a magyar társadalom fejlődésében" c. akadémiai tárcaszintű kutatási főirányban körvonalazott célkitűzéseknek. Az osztály bázisintézménye az akadémiai kutatási főirányhoz kapcsolódó „A nagy távlatú komplex jövőkutatás" c. témacsoportnak.

A *Tervezésmódszertani Osztály* alapvető oktatási-kutatási területe a népgazdasági tervezés módszertana, különös tekintettel a gazdasági folyamatok matematikai modellezésére, ezen belül is a tervezési modellek matematikai közgazdaságtani és ökonometria-elméleti alapjaira, valamint a matematikai-ökonometriai modellek tervezéselméleti és gyakorlati alkalmazásaira.

Tekintettel az Olvasók érdeklődési körére, valószínűleg hasznos lesz, ha az osztály oktatási-kutatási területét az előzőeknél valamivel részletesebben mutatjuk be.

A fentiekben elmondottak értelmében a kutatás két irányban folyik: a matematikai közgazdasági és az ökonometriai modellek elmélete és gyakorlata. Terjedelmi korlátok miatt az egyes témaköröknek csak tematikus ismertetésére van lehetőségünk.

A *matematikai közgazdaságtan* oktatása és kutatása az alábbi tematika szerint történik.

I. A matematikai közgazdaságtan tárgya és szerepe

A modellmódszer helye és szerepe a tudományos megismerésben és döntéselőkészítésben. A matematika közgazdasági alkalmazásának főbb területei és válfajai. A matematikai közgazdaságtan kialakulásának története, helye, szerepe a szocialista politikai gazdaságtanban és a polgári közgazdaságtanban. A matematika közgazdasági alkalmazása körül folyó viták természete és egyes polgári matematikai közgazdaságtani irányzatok bírálatának szempontjai. A matematikai-közgazdasági modellek osztályozásának főbb kritériumai, jellegzetes típusai.

II. A matematikai közgazdaságtani modellek alapelemei (termelés, beruházás, külkereskedelem, fogyasztás és a döntési kritériumok modellezése)

1. *Az input-output modell:* a zárt és nyílt; a statikus, stacioner és dinamikus input-output modellek jellemzői. A Leontief-inverz létezését és nemnegativitását biztosító feltételek (produktív négyzetes mátrixok és a sajátérték tételek, Neumann-sor, dekompozábilis és indekompozábilis struktúrák). A külkereskedelem szerepeltetésének eltérő lehetőségei. A dinamikus zárt modell stacioner megoldásai (arányos növekedés). Az input-output modellek alapján képezhető kalkulatív árrendszerek elméleti és módszertani alapjai.

2. *A lineáris tevékenységelemzési modell;* a tevékenységelemzési modell alapfogalmai; a hatékony (efficiens) tevékenységek fogalma, létezésük feltételei. A hatékony

tevékenységek geometriai jellemzői, a hatékonyság és a kalkulatív (hatékonysági) árakon mért gazdaságosság kapcsolatát jellemző alapvető tételek. A lineáris tevékenységelemzési modell és a matematikai programozás viszonya. A tevékenységelemzési és az input-output modellek kapcsolata. A lineáris tevékenységelemzési modell dinamizálása. A Neumann- és a Neumann—Leontief-féle technológia.

3. *Termelési függvények;* fogalma és alapvető jellemzői (egy termék — több termelési tényező, több termék — több termelési tényező, a termelési függvény által leírt tevékenységek hatékonysága, parciális helyettesítési és hozadéki ráták, volumen- és helyettesítési rugalmasság). Statikus és dinamikus termelési függvények. Adott árak melletti nyereségmaximálás (lokális és globális optimum) szükséges és elégséges feltételei és azok közgazdasági tartalma. Költségfüggvények. Kalkulatív árak meghatározása termelési függvények segítségével. Jellegzetes termelési függvénytípusok.

4. *Termelési (technológiai) halmazok;* a termelési lehetőségek halmaza, a termelési halmazokra szokásosan feltett tulajdonságok (konvexitás, kónusz-jelleg stb.) és azok közgazdasági következményei. A termelési halmaz, mint az előző termelési modellek általánosítása, hatékony tevékenységek és kalkulatív (hatékonysági) árak összefüggései.

5. *Fogyasztás és a döntési kritériumok modellezése;* a fogyasztás eltérő szerepeltetésének lehetőségei. Hasznossági (haszonindex) függvények. Adott költségkeret melletti hasznosságmaximálás marginális feltételei és azok közgazdasági tartalma. Keresleti függvények. A preferenciarendezés alapfogalmai (teljes, tranzitív, reflexív reláció), szokásosan feltételezett tulajdonságai (zártság, monotonitás, konvexitás) és ezek közgazdasági tartalma. A preferenciarendezés és a célfüggvény kapcsolata. Statikus és dinamikus célfüggvények, jellegzetes típusok.

III. Jellegzetes modellek és elemzési területek

1. A marxi érték-, ár- és újratermelési elmélet matematikai modelljei.

2. A részleges és általános gazdasági egyensúly statikus (egyidőszakos) modelljei: korai változatok, a neoklasszikus modell és az Arrow—Debreu-típusú modellek. Az egyensúly létezésének és stabilitásának elemzései.

3. Egy és több szektoros növekedési modellek. Stacioner és dinamikus változatok. Diszkrét és folytonos modellek. Egyensúly, hatékonyság, optimalitás, kalkulatív árak fogalmainak időbeli kiterjesztése. Arányos növekedési pályák és a turnpike elméletek. Jellegzetes (Leontief—Neumann-, neoklasszikus, Gale-) modellek és nemlineáris változataik mátrixalgebrai elemzése.

4. Közgazdasági szabályozáselmélet modelljei. Növekedési pályák vizsgálata a szabályozáselmélet segítségével, a növekedési és szabályozási folyamatok stabilitásának kritériumai, vegetatív szabályozási modellek.

5. Matematikai tervezéselméleti modellek. A decentralizált tervezés és irányítás modelljei: jóléti gazdaságtani tételek (Pareto-optimum és egyensúly) decentralizált tervezéselméleti interpretációi, a dekompoziciós módszereken alapuló decentralizált tervezési és irányítási elméletek, kalkulatív (árnyék-, egyensúlyi) árak, mint az optimális gazdasági szabályozás paraméterei.

IV. Matematikai-közgazdasági modellek gyakorlati alkalmazására irányuló kísérletek és azok tapasztalatai

1. Matematikai modellek gazdaságelemzési, előrejelzési és tervezési alkalmazásának főbb területei, jellegzetes típusai, tapasztalatai a nemzetközi és hazai kísérletek tükrében.

2. Az ágazati kapcsolati mérleghez (AKM) kapcsolódó ex post és ex ante elemzési lehetőségek. Az AKM felépítése és statisztikai számszerűsítése. AKM típusok. Közvetlen és közvetett ráfordítások különböző értelmezései és a velük végezhető elemzések. AKM-en alapuló ártípusszámítások.

3. Lineáris programozási modellek alkalmazása a gazdaságpolitikai és a tervezési döntések előkészítésében. A népgazdasági programozási modellek felépítése és számszerűsítése (elsősorban a hazai III. és IV. ötéves tervek modelljei alapján). Korlátok és célfüggvény szerepe, jellegzetes változó- és feltételcsoportok. Érzékenységi vizsgálatok és az árnyékárak. Egyidőszakos és többidőszakos programozási modellek. A hazai közép- és hosszú távú tervezés és az ártervezés keretében kidolgozott programozási modellek jellemzői és tapasztalatai.

4. A makro (népgazdasági és ágazati) termelési függvényekkel végezhető elemzések. A makro termelési függvények elméleti problémái és statisztikai becslésük nehézségei. Ex post és ex ante becslések. A főbb hazai kísérletek tapasztalatai.

A másik oktatási-kutatási irány, az *ökonometria* az alábbi tematikára épül.

I. Az ökonometria fogalma: alternatív-definíciók, ökonometria-elmélet, alkalmazott ökonometria. Az ökonometria fejlődéstörténete.

Modell és struktúra. Az ökonometriai modell és a struktúra alkotóelemei. Modelltípusok és modellformák.

Az ökonometriai modell megfogalmazása. A szimultán dinamikus lineáris modell strukturális formájának hipotézisei. A modell redukált és végső formája. Az identifikálhatóság problémája. Az egyes modellformák tartalma és szerepe a gazdaság működésének leírásában, elemzésében. Multiplikátor-elemzés, egyensúlyvizsgálat, az endogén változók idősövényének vizsgálata.

Nem-lineáris és autoregresszív modellek.

II. A számszerűsítés statisztikai adatbázisával összefüggő problémák. Az ökonometriai modell számszerűsítése. Becsléselméleti és hipotézisvizsgálati alapfogalmak. A strukturális paraméterek becslése szimultán dinamikus lineáris modell esetében: a legkisebb négyzetek módszerének általánosításai (a legkisebb négyzetek közvetett, két- és háromfokozatú módszere). Egyéb becslési módszerek (a maximum likelihood korlátozott és teljes információn alapuló módszerei). A felsorolt becslési módszerekkel nyerhető esztimátorok aszimptotikus és kisminta tulajdonságai és a specifikációs hibákkal szembeni érzékenysége (Monte-Carlo-kísérletek). A különböző becslési módszerek alkalmazásának lehetőségei és problémái speciális modelltípusokban.

Módszerosztályok; k- és *K*-mátrix osztályú esztimátorok. A predeterminált változók főkomponenseinek felhasználása a strukturális forma becslésénél. Az instrumentális változók módszere.

Hipotézisvizsgálatok; szignifikancia-vizsgálat (konfidenciaintervallumok), a determinációs együttható (többszörös korrelációs együttható) általánosításai, az autokorreláció mérése, a strukturális egyenletrendszer linearitásának és a struktúra stabilitásának vizsgálata, a multikollinearitás problémája. A redukált forma közvetlen és közvetett becslései. A végső forma becslése. Szignifikancia- és stabilitásvizsgálat.

III. Ökonometriai előrejelzések

Az előrejelzési modell alternatív megfogalmazásai: előrejelzés fix és sztochasztikus regresszorokkal. A struktúra stabilitásának vizsgálata (ex post prognózisok), a struktúraváltozás figyelembevételének lehetőségei. Az ex ante prognózisok megbízhatóságának jellemzése.

IV. Ökonometriai modellek a gazdaságpolitikai döntéselőkészítésben

A döntési modell megfogalmazása. Az optimális megoldás és az optimális megoldás becslése. A döntési hiba és a döntési veszteség valószínűségi jellemzése. Optimális döntéskorrekció. Általánosítások.

V. Alkalmazott ökonometria

A szocialista országok ökonometriai modelljeinek, modellezésének sajátosságai, e sajátosságok oka (adatproblémák, nagyfokú multikollinearitás, gazdaságpolitikai változások, azok figyelembevétele stb.). Ökonometriai modellek főbb alkotó blokkjai: fogyasztás (abszolút-, relatív és állandó jövedelem-hipotézis; életciklus-hipotézis); beruházás (a naiv és a rugalmas akcelerátor, a segítségükkel felírt beruházási függvények, a neoklasszikus beruházási függvény, a késleltetés és a pénzügyi változók szerepe a beruházási függvényekben), termelés (a Cobb—Douglas-, CES-, VES-, translog- és lineáris termelési függvények).

A gyakorlatban felmerülő problémák és azok kezelése: multikollinearitás; heteroszkedaszticitás, autokorreláció, autoregresszivitás, szimultaenitás-szimultaenitási hiba, aggregáció, aggregációs hiba, különböző típusú adatok (mikro-makro) eltérő sajátosságai.

Az osztály kutatási tevékenységéhez kapcsolódó *kutató-továbbképző szemináriumsorozatokat* szervez a matematikai-közgazdasági modellezés rendszeres és csoportos kutatására, tanulmányozására. Az 1979—80-as tanév folyamán három ilyen szemináriumsorozat indult be, melyben az alábbi előadások hangzottak el. (Egyes előadásokat külső meghívott előadók tartották.)

„Neumann-modellek" szemináriumsorozat előadásai;

1. Külkereskedelmileg nyílt Neumann-modellek.
2. (In)dekompozabilitás kiterjesztése a Leontief- és Neumann-modellben.
3. Dekompozábilis Neumann-modellek egyensúlyi megoldásainak meghatározása és a fogyasztási-felhalmozási felület.
4. Dekompozabilitás a marxi érték- és újratermelési elmélet matematikai modelljeiben.

„Sztochasztikus módszerek" szemináriumsorozat előadásai;

1. Dinamikus faktoranalízis.
2. Spline-interpolált idősorok.
3. Ökonometriai modellek a gazdaságpolitikai döntéselőkészítésben.

„Globális modellezés módszertana" szemináriumsorozat előadásai;

1. A rendszerdinamika alapelvei és alapelemei.
2. A rendszerdinamikai modellépítés munkafázisai egy vállalati példa tükrében.
3. Rendszerdinamika és a szimulációs módszerek.
4. Globális modellezés a rendszerdinamika alapján: World 3.
5. A rendszerdinamikai modell számítógépes realizációja.
6. A rendszerdinamikai modellezés módszertani kritikái.
7. A globális modellek közgazdaságtani, társadalmi, politológiai aspektusai és kritikái.

Móczár József

A kiadásét felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Marton Andor
A kézirat nyomdába érkezett: 1980. júl. 31. – Terjedelem: 10,5 (A/5) ív
80.8584 Akadémiai Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 15,— Ft
Előfizetés egy évre: 60,— Ft

INDEX: 26 793
ISSN 0039—8128

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST