

SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági
Szakosztályának lapja

Szerkeszti

MARTOS BÉLA

Társszerkesztők:

ANDORKA RUDOLF, BOD PÉTER, IFJ KREKÓ BÉLA, PONGRÁCZ TIBOR

Szerkesztőbizottság:

AUGUSTINOVICS MÁRIA, BÉKÉSI GÁBOR, BOD PÉTER, CSEPINSZKY ANDOR, ÉLTETŐ ÖDÖN, FORGÓ FERENC, HALABUK LÁSZLÓ, KELLE PÉTER, KORNAI JÁNOS, KREKÓ BÉLA, LIGETI ISTVÁN, MESZÉNA GYÖRGY, MORVA TAMÁS, ORMÓS ZSOLT, SIMON NÓRA, SIMONOVITS ANDRÁS, SÓLYOM CSABA, STAHL JÁNOS, SZAKOLCZAI GYÖRGY, SZÉP JENŐ (elnök), TARDOS MÁRTON, TÓTH JÓZSEF, ZALAI ERNŐ, ZIERMANN MARGIT

*

E szám szerzői:

ANDORKA RUDOLF, a Központi Statisztikai Hivatal munkatársa, BERDE ÉVA, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete előadója, DANYI PÁL, a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának docense, DORMÁNY MIHÁLY, a Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Matematikai Intézetének adjunktusa, FÉNYES TAMÁS kandidátus, az MTA Matematikai Kutató Intézet tudományos főmunkatársa, FORGÓ FERENC, az MKKE Matematikai és Számítástudományi Intézet munkatársa, KOMLÓSI SÁNDOR, a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának adjunktusa, SÁRI JÓZSEF, a Magyar Nemzeti Bank osztályigazgatója, STAHL JÁNOS kandidátus, a SZÁMKI tudományos tanácsadója, osztályvezető, SZEPESI GYÖRGY, az Országos Tervhivatal osztályvezetője, VELLAI GYÖRGYI, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete főelőadója, VÖRÖS JÓZSEF, a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának tanársegédje

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (PKHI 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKH 215–96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111–010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488, és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185–612. Előfizetési díj egy évre: 80,—Ft

Külföldön terjeszti a KULTÚRA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149

Kamatlábpolitika közgazdasági-matematikai modellel

A pénz, a hitel és a kamat a fejlett szocialista társadalom létező érték-kategóriái, és a tervgazdálkodás folyamatában a gazdasági vezetés, irányítás és a közgazdasági szabályozás eszközei. A gazdaságirányítás jelenlegi rendszerében véleményünk szerint a kamat csak abban az esetben töltheti be a közgazdasági szabályozó szerepét, ha felhasználható a gazdasági egyensúly javítására, a hitelkereslet és -kínálat összehangolására. Feladatunknak ezért azt tekintjük, hogy bemutassuk az állami központi és jegybank szerepét a kamatpolitika tudatos alakításában egy piacorientált szocialista tervgazdaságban. A jelen cikkben először a kamat szerepével foglalkozunk a közgazdasági szabályozó rendszerben, majd matematikailag megfogalmazzuk és megoldjuk a felvetett problémát, és végül számszerű példával mutatjuk be az általunk javasolt kamatmechanizmus működését.

I. A kamat a közgazdasági szabályozó rendszerben

A népgazdasági terv- és mérlegrendszer részét képező országos hitelmérleg prognózis változatában mennyiségileg irányozzák elő a forgalom lebonyolításához indokolt pénz állományát, a gazdálkodás zavartalan folytatásához, a bővített újratermelés eszközszükségletéhez folyósítandó hitelvolumen nagyságát. A szocialista országokban a kamatnak bizonyos mértékig kisebb a jelentősége, mint a többi érték-kategóriának, s így közgazdasági szabályozó-ként is csak más kategóriákkal együttesen, azok kiegészítőjeként fejtheti ki hatását a vállalatok gazdálkodásában; ahol jórészt arra szolgál, hogy kifejezze a saját és a kölcsönbeszerezők közötti minőségi különbséget és biztosítsa a pénzintézetek költségfedezetét.

A kamat lényege gazdasági tartalmát kifejező legáltalánosabban használt fogalmából következik, amelyet a *hitel igénybevételeért fizetett díjnak* tekinthetnek. A kamat azonban ennél több, és nemcsak hitelkamat, hanem betét-kamat is létezik a szocializmusban; emellett tágabb értelemben kamatnak tekinthető a kölcsönadott pénzeszközök vagy a saját forrásokból eszközölt befektetések tiszta hozadéka is. Ennek megfelelően a *fogalom*, amely kifejezi a kamat helyét és szerepét a szocialista népgazdaságban, a következőképpen határozható meg [1]:

— a *hitelkamat* a kölcsön használatáért fizetett díj, amely a társadalom tiszta jövedelmének része, annak egyik sajátos, a pénzintézetek útján történő elvonási formája; minimális hatékonysági elvárás a központosított pénzalapok újraelosztásában hitelen keresztül részesülő gazdálkodó szervekkel szemben;

— a *betétkamat* a bankoknál (takarékpénztárnál) elhelyezett, többnyire meghatározott időtartamra lekötött pénzeszközök után fizetett díj a termelő-eszközök vagy fogyasztási cikkek iránti időlegesen vagy tartósan elhalasztott kereslet miatt; egyben a jövedelemújraelosztás egyik eleme;

— a *tőkekamat* a gazdaságban lekötött álló- és forgóeszközök tiszta hozadéka, a különböző vállalati tervvariánsok közötti választás eszköze; összehasonlító mutatószám a jelenleg felhasználható erőforrás és a jövőben várható termelési érték és jövedelem nagysága között.

A kamat fentiekben meghatározott jellemzőiből következik, hogy az a szocializmusban nem csupán a jövedelemújraelosztás mechanizmusában működő eszköz, hanem a jelenbeni eslekvés egyik döntési paramétere, a jövőbeni várakozások, elvárások rangsorolási mércéje. Így lesz a *kamatláb* a kamat nagyságát az időegység függvényében kifejező olyan jellemző és orientáló mutatószám, amely eligazítást ad a tervszerű, arányos fejlődés feltételeinek biztosítására, valamint a piacgazdálkodásban érvényesülő keresleti-kínálati lehetőségek számunkra jobb, előnyösebb kihasználására.

1. A kamatláb fogalma és nagysága

A *kamat* a kölcsön használatáért fizetett díj, tehát *jövedelem*; a *kamatláb* viszont a kölcsöntőke 100 egysége után egységnyi időszak (többnyire egy év) alatti használatért fizetett díj mértéke, vagyis a *kölcsöntőke jövedelmezőségét kifejező mutatószám*.

Az egyszerű kamatszámítás tényezői közötti összefüggés:

$$K = p t H, \quad (1)$$

azaz a kamat (K) egyenlő a kamatláb (p) $\times$ idő (t) $\times$ hitel- (betét-) összeg (H).

Ebből a kamatláb:

$$p = \frac{K}{tH}.$$

(A p kamatlábat a cikkben együtthatós formában, 1,— Ft-ra értelmezzük.)

A szocialista államok tervgazdaságára a tudatosság a jellemző; vannak azonban a tőkésországokban is — és az utóbbi évtizedekben ez általános gyakorlattá vált — olyan időszakok, amikor a piaci kamatlábat *jegybanki beavatkozással* igyekeznek módosítani. Ennek alapvetően két oka lehet: az első — és a jegybankok szempontjából a fontosabb — az *infláció elleni küzdelem*, ami a növekedés felé mozdítja el a kamatszintet, miközben a reálkamatláb (a névleges kamatláb osztva az árindexszel) nagyjából változatlan marad; a második viszont az, hogy a *foglalkoztatottság növelése* érdekében az egyes kormányok élénkíteni igyekeznek a beruházási és ezáltal a termelési kedvet, amit az olcsóbb pénz politikájával szándékoznak elősegíteni. Másfél-két évszázad tapasztalata szerint rövid vagy akár közép távon átmenetileg növekedhet ugyan a kamatláb, hosszú időszak tendenciájában azonban csökkenő. Marx ennek fő okát a profitráta süllyedő tendenciájában jelölte meg, emellett oka az is, hogy a kölcsöntőke kínálata gyorsabban nő, mint a kereslet. A kamatláb azonban *nem lehet zérus*, mert ingyen a tőkés nem kölcsönzi ki pénzét.

A szocialista gazdaságban is pozitív érték a kölcsönkamatláb, mivel a hitel-források megszerzése bizonyos ráfordításokkal, áldozatvállalással jár a nép-

gazdaság, közvetlenül pedig a bankok részéről. A hitelkamatnak népgazdasági szinten fedezetet kell nyújtania a betétek és a külföldről bevont devizaforrások kamataira, valamint az összes költségjellegű ráfordításokra. A kamatlábnak fontos szerepe van az *önálló elszámolást folytató vállalatok* döntéseiben is, mert a jelenlegi megtakarítás és felhalmozás racionális voltát az igazolja, és hozza összhangba a jövőbeni termeléssel, az abból várható hozadékkal, jövedelemmel.

A tőkés szakirodalomban találkozhatunk olyan számításokkal, amelyek arról tájékoztatnak, milyen *rugalmasan alkalmazkodik a kamatláb a kölcsönök keresletéhez és kínálatához*. A vizsgálatok célja kettős: egyrészt annak meghatározása, hogy mennyi idő telik el, amíg a kamatlábban tükröződnek a pénzpiac állapotát jellemző arányok és változások, másrészt az, hogy milyen rugalmassággal reagál a keresletre és a kínálatra a kamatláb. Ebben a tárgyban *J. J. Laffont* és *R. Garcia* [2] széleskörű vizsgálatot végeztek, s az erről írt cikkükben megállapítják, hogy Kanadában a kereskedelmi bankok 1%-os hiteltúlkéréslet esetén 1/4%-kal növelték az általuk kiválasztott időszakban (1973-ban) a kamatlábat, míg túlkínálat esetén az 1%-os többletchez a kamatláb 1/8-ad %-os csökkenése kapcsolódott.

Felvetődik a kérdés, hogyan alakul, ill. milyen tényezők határozzák meg a hitel- és a betétkamatláb nagyságát a *szocializmusban*. Nálunk a tapasztalatok azt mutatják, hogy a hitelkamatláb hosszabb időn át azonos névleges értékben terheli az adósságot, illetve a betétkamatláb független a fogyasztói árszínvonal alakulásától. A kereslet-kínálat befolyásoló szerepe alig érvényesül, hiszen a jegybank által alkalmazott hitel- és betétkamatlábat nem érinti a forgalom vagy a hitel- és a pénzállomány nagysága, de nem függ a teljes és a kielégíthető hitelkereslettől sem. Hiteltúlkínálat viszont csak kivételes jelenség a szocialista gazdaságban, ahol az állami bank a központi akarat kifejezője. Ebből következik, hogy a mi feltételeink között a *hitelkamatláb* központilag meghatározott olyan érték, amely bizonyos mértékig képes betölteni a kölcsönöztek minimális *hatékonysági elvárását* kifejező mutatószám szerepét, és ugyanakkor fedezetet képez a kölcsönforrások megszerzésének költségeire.

2. A hitelkamatláb alsó és felső határa

A kölcsönkamatláb nagyságára tett megállapítás lényegében a *hitelalap-kamatlábra*, a vállalatokkal szemben támasztható általános, minimális jövedelmezőségi elvárást kifejező mércére vonatkozik, amittől a konkrét tételek természetesen felfelé és lefelé is eltérhetnek. (A továbbiakban — ha külön nem jelezzük, — kamatlábon mindig hitel-alapkamatlábat értünk.) A marxi álláspontra helyezkedve úgy fogalmazhatnánk, hogy a hitelkamatláb

— *minimális mértéke* a hitelforrások bekerülési költséghányada,

— *maximális értéke* pedig az átlagos vállalati eszközarányos nyereség-hányad.

Amíg az alsó határ népgazdaságilag indokolt mértéke jórészt a pénzintézetek gazdasági adottságaitól és a nemzetközi pénzpiacokon kialakult kamatfeltételektől függ, addig a felső határ a gazdaságpolitika és ezen belül az ár- és jövedelempolitika feltételrendszerében meghatározott érték. Alakulásában erősen közrejátszik az árrendszer, a ténylegesen alkalmazott árak rugalmassága, a jövedelemszabályozó rendszer, a népgazdaság fejlettségi színvonala, fejlődésének üteme. A pénzintézeti szakágazat ráfordításai között döntő

súllyal szerepel a belföldi lekötött (tartós) betétek után fizetett kamat (a lakosságnál túlnyomórészt 5%, a vállalatoknál 8%), valamint a külföldi kölcsönök kamata. Emellett a pénzintézetek egyrészt saját alapokat képezhetnek, másrészt teljesíteniük kell a szocialista állam elvárásának megfelelő nyereségbefizetést a költségvetésbe. Ily módon a 70-es években a *hitelalapkamatláb alsó határa* 6,1–7,5% között alakult. A kamatláb felső határának általában az átlagos vállalati jövedelmezőség tekinthető. Az V. ötéves terv eddig eltelt éveiben a vállalatok átlagos eszközarányos nyereséghányadának figyelembevételével a *hitelkamatláb felső határa* 11–12%. Az 1980-as termelői árrendezés következtében megváltozott a vállalatok jövedelmezősége. Az I. félévi — és véglegesnek még nem tekinthető — eszközarányos nyereséghányad a vállalati gazdálkodást folytató szervezetek összességére vonatkozóan kb. 9,5–10,0% lesz éves szintre vetítve.

A vállalat elsősorban a saját jövedelmezősége és nem az átlagos ágazati szóródás szerint értékeli a kamatterhet. Emellett a vállalati kalkulációban leértékelődik a kamatláb az eszközök meghitelezési arányában (hitelsáv). A *hitelsávnak* — amely a bankrendszerrel szembeni eladósodás mérőszáma — annyiban van szerepe a kamatterhet értékelésénél, hogy a vállalat tevékenysége egészére mutatja ki a jövedelmezőséget, illetve a teljes termelésére, áru kibocsátására készít kalkulációt a ráfordításokról. Nem hagyható viszont figyelmen kívül az, hogy a hitel a végső eszközforrás, s így az utolsó 1,— Ft pótlólagos befektetés lényegét tekintve mindig hitelből történik, ami azt jelenti, hogy a *határon* minden esetben a kamatláb teljes értéke terheli a vállalati költségeket, illetve csökkenti a nyereséget.

3. A hitelkamatláb és a tőkekamatláb közötti kapcsolat

A kamatláb felső határánál abból indultunk ki, hogy az a népgazdaság általános, átlagos feltételeitől meghatározott, mert a hiteleszközökre nézve is számol a vállalatok jövedelmezőségével. Az új befektetéseknél azonban ennél nagyobb hatékonysági elvárást kell megkövetelni. Ebből következik, hogy ez a többlet már nem fejezhető ki a vállalatok átlagos jövedelmezőségével, hanem valamilyen más népgazdasági mutatóval közelíthetjük azt. Ez a jellemző a tőkekamattal, illetve annak rátájával. Nézzük meg ezért közelebbről, mit jelent ez a fogalom a szocialista gazdaságban. Szerintünk a *tőkekamattal* a népgazdaság termelő tevékenységének eredménye, a termelésben (és forgalomban) lekötött összes *anyagi eszközeinek tiszta hozadéka; rátája* pedig e hozadéknak az eszközök között viszonyított százalékos aránya. (Az V. ötéves terv éveiben 26–27,5% között mozgott.) Feltételezzük, hogy a vállalati gazdálkodást folytató szervezetek által létrehozott tiszta jövedelemből három szerv részesedik; mégpedig:

- a termelőeszközök tulajdonosa az állam, ill. az állami költségvetés;
- a gazdasági tevékenységet folytató szervezetek, vagyis a vállalatok, a szövetkezetek és egyes költségvetési szervek; valamint
- a kölcsönöket nyújtó pénzintézet.

A társadalmi tiszta jövedelmet a fenti *három tulajdonos* között a következőképpen osztjuk fel:

- a vállalaté a nyereség (R),
- a költségvetésé a tiszta jövedelem nyereségen kívüli (felüli) központosított része (A),

— a banké a kamat (K).

Ennek megfelelően a társadalmi tiszta jövedelem értéke:

$$J = R + A + K. \quad (2)$$

Ha a nyereséget, a központosított tiszta jövedelmet és a kamatot a lekötött eszközökhöz viszonyított hányadokban fejezzük ki, akkor

— a nyereséghányad

$$r = \frac{R}{E},$$

— a költségvetés által központosított nyereségen kívüli tiszta jövedelem hányada

$$a = \frac{A}{E},$$

— és a kamathányad $= \frac{K}{E}$.

Mivel az egy évi kamat összege kifejezhető az átlagos éves kamatláb (p) és a hitelállományok (H) szorzataként is (pH), továbbá a hitel- és az eszközállományok hányadosa (H/E) a hitelsáv (s), ezért az eszközértékre vonatkoztatott kamathányad a hitelsáv és a kamatláb szorzatával egyenlő. Azaz: $ps = K/E$.

Ily módon a tőkekamrat rátájára felírható az alábbi összefüggés:

$$k = r + a + ps, \quad (3)$$

amiből a hitelkamatláb

$$p = \frac{k - (r + a)}{s}. \quad (3a)$$

A hitelkamatláb és a tőkekamrat rátája közötti összefüggés lényegében olyan átlagos elvárást tartalmaz, amely közelítően az általános (minden vállalatra és valamennyi hitelfajtára) egységes alapkamatlábát fejezi ki. Ehhez mérten lehet azután a kamatláb differenciálását a hitelpolitikai céloktól függően végrehajtani.

4. A hitelsáv és a kamatláb közötti összefüggés

A kamat a társadalmi tiszta jövedelem része. A (3)-ban megadott feltételrendszerben a három jövedelemtulajdonos közötti osztozkodás dönti el nagyságát, s így a kamatláb mértékét is. Ez a követelményrendszer azonban nem fejezi ki azt az elvárást, hogy a kamatlábpolitika akkor fejtheti ki igazi hatását, ha összhangban van a vállalatokkal szemben felállított jövedelmezőség várható mértékével. A számításoknál mindenek előtt feltételezzük, hogy egy vállalatnál az eszközbefektetés minden egysége ugyanakkora nyereséget hoz (r). Ebből pedig következik, hogy a hiteleszközök annyihoz hoznak kevesebb nyereséget a saját eszközöknél, mint amennyi az egységnyi eszközre jutó kamatfizetési kötelezettség (p). Ha tehát a vállalat saját eszközökkel (S) és hiteleszközökkel (H) dolgozik, és az egységnyi saját eszközre jutó nyereség-

hányad r_s , akkor a vállalat eszközarányos nyereséghányadára érvényes az alábbi összefüggés:

$$r = \frac{r_s \cdot S + (r_s - p) \cdot H}{S + H}. \quad (4)$$

Mivel $S + H = E$, vagyis az összes lekötött eszközök értéke, a hitelsáv (s) pedig a hitel- és eszközállományok hányadosa, ezért a fenti összefüggés a következőképpen is felírható:

$$r = r_s - p \cdot s.$$

A gyakorlatban az eszközöket általában egyszerre bővítik saját- és a hitel-eszközökből. Tegyük fel, hogy a vállalat eszközeinek növekedése E_X , és legyen az eszköznövekedés utáni nyereséghányad r_X . Ha az eredeti (4) összefüggésre térünk vissza, akkor az eszközarányos nyereséghányad a fejlesztés során bővített eszközökre vonatkozóan a következő lesz:

$$r' = \frac{r_s S + (r_s - p) H + r_{SX} S_X + (r_{SX} \cdot p) H_X}{E + E_X},$$

ahol r_{SX} jelöli az új beruházások (felhalmozások) saját eszközökre vonatkozó nyereséghányadát. Az összefüggésből egyben az is megállapítható, hogy a hitel volumenének változása az új hitelsáv mutatójában jut kifejezésre. Az s tehát időben változó tényező. A felírt összefüggés mind vállalati, mind népgazdasági szinten értelmezhető mutató, és ez utóbbi esetén a kamatlábra felírható, hogy

$$p(t) = \frac{r_s(t) - r(t)}{s(t)}. \quad (5)$$

A hitelsáv nagyságára — miután az a bankkölesőnek az összes eszköz-értékben való részaránymutatója — érvényes, hogy a $[0, 1]$ intervallumban helyezkedik el. Ha tehát a vállalati eszközök bővítésekor a hitel részvétele pl. rendkívüli mértékben megnő, vagyis a *végtelenhez tart*, akkor a *hitelsáv* mutatója közeledik az 1-hez. Ha az újonnan kibocsátott hitelek volumene csökkenő a lekötött összes eszköz értékéhez képest, akkor a bővített újratermelés finanszírozásában a *hitel* aránya a *zérushoz tart*, következésképpen az *új hitelsáv közelíti a régi nagyságát*, vagyis $s' \rightarrow s$ -hez. Ily módon az (5)-ből azt kapjuk, hogy

— ha a hitelkibocsátás *expanzív* (kínálati) jellegű, azaz a hitel minden határon túl nő, s így $s' \rightarrow 1$ -hez, akkor az *új kamattétel* határa a saját eszközök és a teljes eszközállomány átlagos jövedelmezőségének a különbsége lesz;

— ha viszont a hitelpolitika *restriktív* (keresleti), akkor a hitelsáv csökkenő ($s' \rightarrow s$ -hez), és ekkor az *új kamatláb* a saját eszközök és az összes eszközök jövedelmezőségének különbsége osztva a hitelsávval.

Számszerű levezetéssel igazolható, hogy az eredeti formájában felírt (5) összefüggés olyan *expanziós* hitelpolitikát tételez fel, amikor a *hitelkínálati bőség miatt csökken a kamatláb*, vagyis kifejezésre jut a piaci kamatlábnál érvényesülő törvényszerűség. Ha viszont a szükséglet feltételeit úgy akarjuk szabályozni, hogy az *erőteljes hitelkereslet miatt* a hitelsáv növekedésével párhuzamosan *növekedjék a kamatláb is*, akkor az előző feltételhez képest a fenti (5) egyenlőségben egy olyan *korrigált hitelsáv mutatóval célszerű osztani*, ahol

a bázisidőszakban érvényes hitelsávot csökkentjük a meghitelezési arány növekedésének értékével. Az elmondottak jobb megértése érdekében nézzük meg közelebbről a módosítás lehetőségét. Az expanziós hitelpolitika *növekvő hitelkínálat* és *csökkenő kamatlábat* eredményez. Ezért a tényleges hitelsáv az osztó szerepében így értelmezhető:

$$s' = s + \Delta s', \quad (6)$$

ahol: s = az eredeti (bázis) hitelsáv mutatója,

Δ = a változás jele.

Miután $\Delta s'$ pozitív érték, ezért növekedése esetén az I -hez közeledő mind nagyobb számmal osztunk, tehát valóban csökken a kamatláb az eredeti állapothoz képest. Ezzel szemben, ha a hitelkeresletet a kamatpolitikával is fékezni kívánjuk, akkor növekvő kamatlábat indokolt alkalmazni. Ezt úgy érjük el, ha a (6)-ban a $\Delta s'$ értékét levonjuk a bázisban érvényes hitelsáv nagyságából. Azaz:

$$s' = s - \Delta s'. \quad (6a)$$

A $\Delta s'$ jelen esetben is pozitív, ezért az osztóként használt s' kisebb lesz, mint a bázisban érvényes s , következésképpen nő a kamatláb. A javasolt összefüggésben a kamatlábra vonatkozó *hitelkeresleti-kínálati egyensúly az s -hitelsávnál van*. Ebben az a követelmény jut kifejezésre, hogy *a saját erő arányosan változzék a hitellel*. A hitelalapkamatláb optimális mértékének meghatározásához az s hitelsáv figyelembevétele szükséges, de nem elégséges feltétel. A kamatlábpolitika tudatos vitéléhez szerintünk elengedhetetlen a hitel illetve a kamat hatékonyságát jellemző rugalmassági mutatószám felhasználása is.

5. Kamatérzékenység és kamathatékonyság

A nyereség abszolút nagysága a termékkibocsátás volumenétől és összetételétől, a termékek árától és azok önköltségétől függ elsősorban. A közgazdasági kutatások eredményei alapján függvnyszerűen is kimutatható, hogy valamely árucikk kínálatának növekedésével — egy bizonyos határon túl — csökken az egységár, sőt telítettség esetén eladhatatlanná válnak a termékek. A termékegységre eső költségek (önköltség) a termelés növelésével egy bizonyos mennyiség (az optimumig) csökkennek, ettől kezdve pedig növekednek. Egyszerű módon bizonyítható az is, hogy pótlólagos hitelbefektetés esetén az *egységnyi hitelre jutó nyereség, vagyis a hiteljövedelmezőségi mutató — a kamatköltségek növekedése miatt — csökken*, ha a termékegységekben realizált jövedelmezőség változatlan marad. Ennek ellensúlyozása csak úgy lehetséges, ha a fejlesztés céljára kért hitel feltételeként nagyobb nyereségkövetelményt támaszt a bank az átlagosnál, illetve a beruházó vállalat jövedelmezőbb termékeket gyárt más gazdálkodó szervezeteknél.

Jelentse esetünkben a *hatékonyság az egységnyi hitelre jutó nyereség és kamatráfordítás hányadosát a határon*; azt, hogy 1%-os kamatnövekedésre hány % nyereség növekedés jut. A *hatékonyság* tehát lényegében olyan rugalmassági mutatószám, amely differencia-hányadosként értelmezve:

$$h = \frac{\Delta N}{\Delta K} : \frac{N}{K}. \quad (7)$$

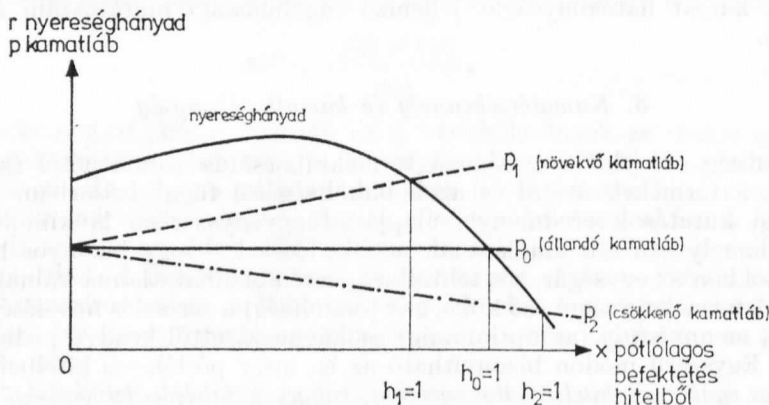
A fenti (7) kifejezést felírhatjuk az alábbi formában is, figyelemmel arra, hogy $N = rE$ és $K = pH$:

$$h = \frac{\Delta(rE)}{\Delta(pH)} : \frac{r}{ps},$$

mivel E/H az s hitelsáv reciprok értéke.

Az összefüggés szerint a hatékonysági mutató értéke akkor lehet nagyobb egynél, vagyis a vállalatnak (és végeredményben az egész népgazdaságnak) csak abban az esetben érdemes további bővítést végeznie, ha a *nyereség* gyorsabb ütemben nő a *kamat összegénél*. Ez azt jelenti, hogy a hitelből eszközölt új beruházásoknak jövedelmezőbbnek kell lenniök a meglevő összes, így a saját eszközeiknél is.

Az előzőekben állandónak tekintettük a kamatlábat, hiszen nagysága — a jelenlegi gyakorlatban — nem függ a hitel volumenétől. A kamatnak azonban bizonyos mértékig a kereslet-kínálat szabályozójának is kellene lennie, mint ahogyan az árak sem közömbösek a fizetőképes kereslet alakulására. Ha abból indulunk ki, hogy a pótlólagos befektetések növekedésével nő a meghitelezés aránya, s ebből következően a kamatteher, akkor ez a körülmény változatlan kamattétel mellett is viszonylagosan nagyobb terhet ró a vállalatra. Még inkább így van ez, ha a kamatláb is magasabb lesz a hitelkereslet növekedésével. A jelenségnek a hatékonysági mutatóra gyakorolt befolyását az alábbi ábrán mutatjuk be, ahol az ún. hiteljövedelmezőségi hányad és a kamatláb elméletileg lehetséges kapcsolatait szemléltetjük.



1. ábra

Az ábrából világosan látható, hogy az „olcsó” pénz (p_2) nagyobb befektetésekre ösztönöz, mint a „drágább” (p_1). Ez megmutatkozik egyértelműen a h_1 és a h_2 hatékonysági mutatók elhelyezkedésében. Az állítás igazolására induljunk ki a (7) összefüggésből. A kifejezésben a h értéke a H hitelállomány növekedésével — minden más körülmény változatlansága esetén — csökken. Ugyanakkor, ha a hitelkereslet növekedésével még a kamatláb is arányosan emelkednék, akkor *kamatérzékenyebbé válik a gazdaság*. A kamatérzékenységet a közgazdasági szakirodalomban egyszerűen a K/N hányaddal azonosítják [3], ami elsősorban *vállalati, üzemgazdasági mutató*, s kifejezi az egységnyi nyere-

ségre eső kamatterhet. A kamatérzékenység növekedéséből egyidejűleg következik a hitelbefektetések hatékonyságának csökkenése, hiszen minden egyes hitelből végzett pótlólagos befektetés mind rosszabb és rosszabb jövedelmezőségű területen helyezkedik el. A gyakorlat logikájából következik, hogy a hatékonysági mutató jellemezheti a kamatnak a *pénzkeresletre* gyakorolt befolyásoló szerepét is. Mennél nagyobb ugyanis a nyereséghányad és a kamatláb közötti arány, annál eredményesebb a vállalatok befektetése, annál nagyobb a hitel iránti kereslet, de ugyanilyen — ha nem gyorsuló mértékben — csökken a kamat szerepe a vállalatok döntéseiben, kalkulációjában; vagyis *érzéketlenné* válnak a kamatteherrel szemben.

6. A hitelkamatláb optimális nagysága

A kamatlábat a fentiekben ismertetett három összefüggésből kiindulva közelíthetjük meg; mégpedig:

- a társadalmi tiszta jövedelem (tőkekamatt),
- a vállalati jövedelmezőség (nyereség),
- a hitel- (kamatt-) hatékonyság oldaláról.

A társadalmi tiszta jövedelemből (3a) és a vállalati jövedelmezőségből (5) levezetett kamatláb lényegében azonosság. A társadalmi tiszta jövedelemből azonban célszerűbb kiindulni, mert így a gazdálkodó szervezetekkel szemben támasztott általános, átlagos és minimális jövedelmezőségi követelményt jellemző bankkamatláb a népgazdasági mérlegekben meghatározott feltételekre épülhet. Hasonlóan népgazdasági elvárást fejez ki a kamatt jövedelemrugalmassága, amit cikkünkben kamathatékonysági mutatónak nevezünk.

A hitel-alapkamatláb jövőbeni meghatározása szempontjából kitüntetett szerepe van a *hatékonysági (rugalmassági)* és a *hitelsáv* mutatóknak, mert ezek a hitellel szembeni követelményszerű részai, *döntési mutatók*. A bővített újratermelés növekvő eszközszükséglete *ti. csökkenő eszközhatékonysággal* párosul. A fejlesztések hitellel való támogatásánál ezért éppen az a feladat, hogy a befektetett egységnyi eszköz tiszta hozadéka ne legyen kisebb, mint az előző időszak(ok)ban volt. Ezért a $h(t) = 1$ érték mint *követelmény* fejezi ki azt a hatékonysági minimumot, ami fenntartja a már elért eredményt, s ugyanakkor megszabja a hitelalapkamatláb *optimális* mértékét. A *hitelsáv* a hitelprognózisból meghatározott érték, s mivel nagysága tendenciaszerűen növekvő, ezért — változatlan kamatláb mellett — fokozódó kamatterhet eredményez. Egyidejűleg a hitelkiterjesztés mind kisebb jövedelmezőségű eszközök felhalmozását finanszírozza, s így a hitelsáv növekedésére ható tényezők — változatlan nyereséghányad esetén — szükségszerűen csökkenően befolyásolják a hatékonyságot. A hitelkereslet túlzott növekedésének fékezése érdekében a kamatlábnak viszont éppen azt a feladatot szánhatjuk, hogy tartsa egyensúlyban azt a kínálattal. Ennek feltétele a (6) illetve (6a) egyenlőség közgazdaságilag mérlegelt alkalmazása.

A $p(t)$ *optimumra* fenn kell állnia, hogy a közgazdasági követelményként megfogalmazott alsó és felső határ közé essék. Azaz nem lehet kisebb a hitelforrások ráfordítási hányadánál (z), és nem lehet nagyobb a vállalatok átlagos eszközarányos nyereséghányadánál (r). Ezért érvényes:

$$z(t) < p_{opt}(t) < r(t). \quad (8)$$

Az eddigiekben a jövedelem oldaláról közelítettük a hitel-alapkamatlábát. A (8)-ból következik azonban, hogy az *optimum* nem lehet az alsó határ alatt, vagyis figyelembe kell vennünk a hitelforrások megszerzésének népgazdasági költségeit is. Annak megállapítása, hogy az optimális kamatláb biztosítja-e a hitelforrások költségfedezetét, és ugyanakkor a pénzintézeti ágazat is elfogadható jövedelmezőséggel (kamatréssal) dolgozik, olyan kombinált index alkalmazásával történhet, amely a $z(t)$ várható nagyságának kiszámításánál — a belföldi változásokon túlmenően — figyelembe veszi a nemzetközi pénzpiacra érvényes kamatlábak módosító hatását is a külföldi tartozások arányában.

II. Az optimális hitelkamatláb matematikai meghatározása

A jelen fejezetben bemutatunk egy folytonos és egy diszkrét modellt az optimális hitelkamatláb meghatározására. Ehhez azonban előbb definiálnunk kell az egyes közgazdasági kategóriákat, amelyeket az idő $-T \leq t < \infty$; $T > 0$ tartományában vizsgálunk. Megjegyezzük, hogy a folytonos modell esetén $-T \leq t \leq 0$ időszakot, diszkrét modell esetén pedig a $-T \leq t \leq -1$ időszakot tekintjük bázisnak, ahol a kategóriák múltbeli adatait ismertnek tételezzük fel.

Jelölések és definíciók:

- $N(t)$ a $[-T, t]$ időszakban létrejött teljes nyereség; a modellben exogén kategória,
- $H(t)$ a teljes hitelállomány mint az idő függvénye; a modellben exogén kategória,
- $p(t)$ a kamatláb; folytonos esetben reciprok idő dimenziójú,
- $K(t)$ a $[-T, t]$ időszakban fizetett teljes kamat,
- $h(t)$ a kamat hatékonysága mint az idő függvénye; népgazdasági elvárásban megadott exogén változó, amelynek definícióját a folytonos és diszkrét esetben külön-külön fogjuk megadni.

1. Folytonos modell

A kamat hatékonyságát a (7) összefüggésben adott meghatározással analóg módon a

$$h(t) = \frac{N'(t)}{K'(t)} : \frac{N(t)}{K(t)} \quad (9)$$

kifejezéssel definiáljuk, ahol a ' az idő szerinti deriválást jelöli.

Nyilvánvaló, hogy népgazdasági szinten $h(t) > 0$. A $p(t)$ kamatláb optimális, ha (9) jobb oldala $t \geq 0$ -ra, vagyis a jövőre nézve előállítja a népgazdasági elvárásban előírt $h(t)$ kamathatékonyságot. Határozzuk meg az optimális $p(t)$ kamatlábát. (9)-ből adódik, hogy

$$K'(t) - \frac{N'(t)}{N(t) h(t)} K(t) = 0 \quad t \geq 0. \quad (10)$$

A kapott kifejezés egy egyszerű, a kamatra vonatkozó *differentiálegyenlet*, amely könnyen megoldható. A megoldás

$$K(t) = K(0) \exp \left[\int_0^t \frac{N'(\tau)}{h(\tau) N(\tau)} d\tau \right], \quad t \geq 0, \quad (11)$$

ahol $K(0)$ a bázis időszakban fizetett kamat. Kiindulva a gyakorlatban ismert és alkalmazott (1) összefüggésből, azt általánosítva, a $K(t)$ kamatra nézve felírható, hogy

$$\begin{aligned} K(t) &= \int_{-T}^t p(\tau) H(\tau - 1) d\tau = \int_{-T}^0 p(\tau) H(\tau - 1) d\tau + \int_0^t p(\tau) H(\tau - 1) d\tau = \\ &= K(0) + \int_0^t p(\tau) H(\tau - 1) d\tau, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

ahol a $H(t - 1)$ az egy időszakkal előbb fennálló teljes átlagos hitelállomány értéke, mivel a kamatot utólag fizetik.

A (11)-ből és a (12)-ből következik, hogy

$$K'(t) = \frac{K(0) N'(t)}{h(t) N(t)} \exp \left[\int_0^t \frac{N'(\tau)}{h(\tau) N(\tau)} d\tau \right], \quad t \geq 0 \quad (13)$$

$$K'(t) = p(t) H(t - 1) \quad t \geq 0 \quad (14)$$

és így az *optimális kamatláb*

$$p_{\text{opt}}(t) = \frac{K(0) N'(t)}{H(t - 1) h(t) N(t)} \exp \left[\int_0^t \frac{N'(\tau)}{h(\tau) N(\tau)} d\tau \right], \quad t \geq 0 \quad (15)$$

A (15) egyenlőségéből látható, hogy nagyobb hatékonysághoz kisebb kamatláb tartozik és fordítva. Abban a speciális esetben, amikor a hatékonyság az időtől független állandó, azaz $h(t) = h = \text{konstans}$, kapjuk, hogy

$$\int_0^t \frac{N'(\tau)}{N(\tau)} d\tau = \log \frac{N(t)}{N(0)}, \quad t \geq 0$$

ahol $N(0)$ a bázisban megtermelt teljes nyereség. Így az optimális kamatlábra (15)-ből az alábbi egyszerű összefüggést nyerjük:

$$p_{\text{opt}}(t) = K(0) \frac{N'(t)}{h H(t - 1) N(t)} \left[\frac{N(t)}{N(0)} \right]^{\frac{1}{h}} \quad (16)$$

Abban a speciális esetben, ha a $h \equiv 1$, akkor

$$p_{\text{opt}}(t) = \frac{K(0) N'(t)}{N(0) H(t - 1)} \quad (17)$$

A folytonos modell előnye a szemléletesség, a gyakorlati igényekre való tekintettel azonban kidolgoztunk egy diszkrét modellt is.

2. Diszkrét modell

Diszkrét esetben a kamat hatékonyságát a

$$h(t) = \frac{\Delta N(t)}{\Delta K(t)} : \frac{N(t-1)}{K(t-1)} \quad (18)$$

kifejezéssel definiáljuk — egyezően a (7) képlettel, ahol a tetszőleges $f(t)$ függvényre nézve $\Delta f(t) = f(t) - f(t-1)$.

Az $N(t)$ és a $K(t)$ definíciójából a diszkrét esetben is nyilvánvaló, hogy $h(t) > 0$. A $p(t)$ kamatláb optimális, ha (18) jobb oldala $t \geq 0$ -ra, vagyis a jövőre nézve előállítja a népgazdasági elvárásban előírt $h(t)$ kamathatékonyságot. Határozzuk meg az optimális kamatlábat. A (18)-ból adódik, hogy

$$\Delta K(t) - \frac{\Delta N(t)}{h(t) N(t-1)} K(t-1) = 0. \quad (19)$$

A kapott kifejezés egy egyszerű, a kamatra vonatkozó *differenciaegyenlet*. A megoldás:

$$K(t) = K(-1) \prod_{i=0}^t \left[1 + \frac{\Delta N(i)}{h(i) N(i-1)} \right], \quad t \geq 0 \quad (20)$$

ahol $K(-1)$ a bázis időszakban fizetett teljes kamat. Másrészt a $K(t)$ kamatra felírható, hogy

$$\begin{aligned} K(t) &= \sum_{\tau=-T}^t p(\tau) H(\tau-1) = \sum_{\tau=-T}^{-1} p(\tau) H(\tau-1) + \sum_{\tau=0}^t p(\tau) H(\tau-1) = \\ &= K(-1) + \sum_{\tau=0}^t p(\tau) H(\tau-1), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

A (20) és a (21) alapján:

$$\Delta K(t) = K(-1) \frac{\Delta N(t)}{\Delta N(t) + h(t) N(t-1)} \prod_{i=0}^t \left[1 + \frac{\Delta N(i)}{h(i) N(i-1)} \right], \quad t \geq 0 \quad (22)$$

$$\Delta K(t) = p(t) H(t-1), \quad t \geq 0. \quad (23)$$

A (22) és a (23) kifejezéseket egyenlővé téve, az *optimális kamatlábra* nézve kapjuk, hogy

$$p_{\text{opt}}(t) = \frac{K(-1) \Delta N(t)}{H(t-1) [\Delta N(t) + h(t) N(t-1)]} \prod_{i=0}^t \left[1 + \frac{\Delta N(i)}{h(i) N(i-1)} \right], \quad t \geq 0 \quad (24)$$

Vezessük be a $q(t)$ függvényt az alábbi definícióval

$$q(t) = \frac{\Delta N(t)}{h(t) N(t-1)}, \quad t \geq 0$$

Ekkor a (24)-et a produktum t -edik tagjának leválasztásával az egyszerűbb és áttekinthetőbb

$$p_{\text{opt}}(t) = K(-1) \frac{\varrho(t)}{H(t-1)} \prod_{i=0}^{t-1} [1 + \varrho(i)], \quad t \geq 0 \quad (25)$$

alakra hozhatjuk, ha megállapodunk abban, hogy

$$\prod_{i=0}^{-1} [1 + \varrho(i)] = 1.$$

Látható, hogy a diszkrét esetben is a nagyobb hatékonysághoz kisebb kamatláb tartozik és fordítva. A folyamatos esettel ellentétben viszont az időben állandó kamathatékonyság felvétele nem egyszerűsíti le a (25) kifejezést, kivéve, ha $h \equiv 1$. Abban az esetben, ha $h \equiv 1$, akkor elemi számolással kapjuk a (25)-ből, hogy

$$p_{\text{opt}}(t) = \frac{\Delta N(t) K(-1)}{H(t-1) N(-1)}, \quad t \geq 0, \quad (26)$$

amely analóg a folytonos modell tárgyalásakor ismertetett (17) összefüggéssel.

A gyakorlatban a nyereségre jó közelítéssel érvényes, hogy

$$N(t) = N(-1) (1 + \xi)^{t+1}, \quad t \geq -1, \quad (27)$$

ahol $N(-1)$ a bázisban megtermelt teljes nyereség, és

$$0 < \xi \ll 1.$$

Ekkor időben állandó h hatékonyságot feltételezve kapjuk, hogy

$$\varrho(t) = \frac{\Delta N(t)}{h N(t-1)} = \frac{N(-1) (1 + \xi)^{t+1} - N(-1) (1 + \xi)^t}{h N(-1) (1 + \xi)^t} = \frac{\xi}{h} = \text{konstans}, \quad (28)$$

és (25) alapján

$$p_{\text{opt}}(t) = \frac{K(-1) \xi}{H(t-1) h} \prod_{i=0}^{t-1} \left(1 + \frac{\xi}{h}\right) = \frac{K(-1) \xi}{H(t-1) h} \left(1 + \frac{\xi}{h}\right)^t, \quad t \geq 0. \quad (29)$$

Ha megköveteljük a minimálisan $h = 1$ kamathatékonyságot, akkor adódik, hogy

$$p_{\text{opt}}(t) = \frac{K(-1) \xi}{H(t-1)} (1 + \xi)^t, \quad t \geq 0. \quad (30)$$

A (30) összefüggés egyszerűségénél fogva különösen alkalmas lehet a gyakorlati közgazdászok számára, ennek feltétele azonban a kiegyensúlyozott, egyenletesen növekvő gazdaság.

Nyilvánvalóan igaz, hogy $\xi \ll h$. Mint érdekes kuriózumot említjük meg, hogy abban az esetben, ha $\xi = h$, vagyis ha a nyereség igen gyorsan növekedne, akkor (30)-ból azt kapjuk, hogy

$$p_{\text{opt}}(t) = \frac{K(-1)}{H(t-1)} 2^t, \quad t \geq 0. \quad (31)$$

Ideális esetben tekinthető az, amikor az optimális kamatláb az időtől független állandó. A (29) alapján világos, hogy ez akkor következik be, ha a teljes hitelállományra nézve fennáll, hogy

$$H(t) = \gamma \left(1 + \frac{\xi}{h} \right)^t,$$

ahol γ valamilyen pozitív szám. Így ha $h = 1$, akkor az optimális kamatláb állandósága azzal biztosítható, hogy a teljes hitelállomány és a teljes nyereség növekedési ütemei (ξ) megegyezzenek.

III. A modell gyakorlati alkalmazása

A matematikailag megfogalmazott diszkrét modell (26) összefüggését használjuk fel kiindulásként a gyakorlati számítások elvégzésekor. Ebben az egyenlőségben — feltételezve, hogy a kamat jövedelemrugalmasságát kifejező hatékonysági mutató értéke 1 — a hitelkamatláb két tényező változásától függ; mégpedig:

— a gazdálkodó szervek nyeresége és hitelállománya hányadosából képzett ún. hiteljövedelmezőségi mutató alakulásától, és

— a bázisul választott időszak kamat- és nyereségösszegeinek hányadosából képzett népgazdasági kamatérzékenységet jellemző mutatótól.

A számítások menetének bemutatása érdekében először ismertetjük a fenti mutatók közgazdasági tartalmát, majd a tapasztalati számok felhasználásával megadjuk a hitelkamatláb optimális értékeit. A (26) egyenlőség első tényezőjének számlálója a t -edik időszakban megtermelt nyereség összege, ami a már ismert (4) összefüggés alapján kifejezhető az eszközarányos nyereséghányad és az eszközök értékének a szorzataként is a következő módon:

$$N(t) = r(t) E(t - 1),$$

feltételezve, hogy a nyereséget az előzőleg már rendelkezésre álló eszközökkel hozzák létre.

Ha pedig a továbbiakban figyelembe vesszük a szóban forgó tényező nevezőjét is, akkor láthatjuk, hogy

$$\frac{E(t - 1)}{H(t - 1)}$$

hányadost is tartalmazza a kifejezés, ami nem más, mint a t -t megelőző időszak hitelsáv mutatójának a reciproké értéke. Így módon a hiteljövedelmezőségi mutató ténylegesen az eszközarányos nyereséghányad és a hitelsáv hányadosa. A fentiekben kapott összefüggések alapján megállapítható, hogy a kamatláb optimális nagysága

— egyenes arányban van a gazdálkodó szervek vizsgált időszakra jellemző eszközarányos nyereséghányadával, valamint a bázisul választott időszak népgazdasági szintű kamatérzékenységi mutatójával és

— fordítottan függ a vizsgált időszakot megelőző időszak hitelsáv mutatójától.

A modell eredményeképpen kapott összefüggés láthatatlan harmadik tényezője a kamat jövedelem-rugalmassági mutatója (h), amelynek az a feladata,

hogy megakadályozza a növekvő eszközbefektetésekkel párhuzamosan jelentkező csökkenő jövedelmezőséget. Lényegében olyan együtthatóról van szó, amely a hitelbefektetésekre érvényes „tőkekoefficiens” és az eszközarányos nyereséghányad között tartós, egyenesarányú összefüggést irányoz elő, ill. olyan nyereségszint fenntartását tételezi fel, amely egy, az átlagosnál magasabb mérce szerinti jövedelmezőséghez kapcsolja a kamatláb mértékét. A tényleges összefüggésekben azonban a gazdasági helyzettől adottan a hatékonysági mutató eltérhet 1-től, és ebből következően a jövőre vonatkozó döntéseknél is szükségszerűen el kell térni az elméletileg optimális értéktől. Ebben az esetben a hatékonyság a képlet látható tényezőjévé válik, amikor is a kamatláb fordítottan arányos vele. A közgazdaságilag megfogalmazott és matematikailag meghatározott optimálisnak tekintett kamatlábban érvényesülnek mindazok a követelmények, amelyeket célul tűztünk magunk elé, mert közvetlen összefüggésben áll a hitelkamatláb elméletileg érvényes felső határt képviselő vállalati jövedelmezőséggel és ugyanakkor a hitelsáv révén szabályozó szerepet játszik a hitelkereslet és a hitelkínálat között.

A (26) összefüggés második tényezőjének, a bázisidőszakra jellemző *kamatérzékenységi mutató*nak az a szerepe, hogy a jelen, illetve a jövő kamatlába ne szakadjon el teljesen a múltban kialakult arányoktól. Igaz ugyan, hogy ez a tényező bizonyos mértékű „konzerváló” szerepet játszik, nem szabad azonban figyelmen kívül hagynunk, hogy a szabályozásnak mindig egy meghatározott eredményből kell kiindulnia, és ahhoz képest kell érvényesíteni a szándékokat, figyelembe véve azokat a változásokat, amelyeket a jövőben várunk vagy célszerűen megvalósítani kívánunk.

A számításokhoz a következő mutatókkal rendelkezünk:

t	r	s	$\frac{K(-1)^{**}}{N(-1)}$
1975	.	0,223	0,119
1976	0,113	0,220	0,129
1977	0,127	0,238	0,136
1978	0,117	0,244	0,149
1979	0,114	0,256	0,165
1980*	0,098	0,258	0,186
1981*	0,100	.	.

* várható

** a t időszakot megelőző 5 évből alkotott bázis

A felírt adatokból a (26) egyenlőség felhasználásával a kamatláb optimális nagyságára az alábbi számsort kapjuk:

	1976	77	78	79	80*	81*
$p_{opt}(t)$	0,0603	0,0744	0,0669	0,0696	0,0627	0,0722

A kamatláb ingadozására elsődlegesen az eszközarányos nyereséghányad hat, ami azzal magyarázható, hogy az V. ötéves terv eddig eltelt időszakában az 1977-es év volt a többihez képest kiugró jövedelmezőségű, míg 1980 várható

értékében a január 1-ével érvényesülő szabályozó rendszer intézkedései hatnak csökkentően. Ha ezeket az adatokat összehasonlítjuk a tényleges, átlagos hitelkamatlábakkal (1980-ra várható érték):

	1976	77	78	79	80*	81*
$p(t)$	0,0847	0,0844	0,0861	0,0871	0,0852	.

akkor azt állapíthatjuk meg, hogy azok az általunk számított optimálisnál lényegesen magasabbak. Ez két okkal magyarázható: a gyakorlati kamatpolitika érzékenyen reagál a hitelforrások költségeire, és ugyanakkor csak részben van tekintettel a gazdálkodó szervezetek jövedelmezőségére, a hatékonyságot kifejező értékekre; vagyis a kamatpolitika rugalmatlan a vállalati, de érzékeny a pénzintézeti jövedelmezőségre. Az V. ötéves terv folyamán a vállalati jövedelmezőséget csökkentette az 1976. évi termelői árrendezés (az 1975. évi 14,7 %-ról 11,3 %-ra), ugyanakkor a kamatláb szintje lényegében változatlan maradt. Következik a két számsorból az is, hogy a kamathatékonysági mutató ilyen körülmények között nem lehet 1, hanem annál lényegesen kisebb. A h -mutatók értékét az alábbiakban közöljük:

	1976	1977	1978	1979
$h(t)$	0,72	0,82	0,76	0,76

Az adott számsorból megállapítható, hogy az V. ötéves terv eddig eltelt időszakában megnövekedett a beruházási kedv, amit a hitelrendszer külföldi kölcsönök felvételével is messzemenően támogatott, ugyanakkor a világpiacra erős verseny keletkezett a nemzetközi gazdasági helyzet általános pangása és bizonyos diszkriminációk miatt. A nyereséghányad csökkenésével egyidejűleg viszont már csak azért sem lehetett a hitelkamatlábakat csökkenteni, mert időközben a nemzetközi pénz- és tőkepiacokon megnövekedett a kölcsönözök díja, és az kedvezőtlenül befolyásolta a hazai ráfordításokat is.

Mindezek figyelembevételével a fentiekben megadott számsorból úgy látjuk, hogy a kamathatékonyság értékét a hitelkamatláb optimális mértékének meghatározásánál legfeljebb 0,8-ben lehet felhasználni. Ha ezt figyelembe vesszük, akkor — tekintettel arra, hogy a kamatláb a kamathatékonysággal fordítottan arányos — az $\frac{1}{h(t)}$ szorzattal az optimális kamatlábra az alábbi korrigált eredményeket kapjuk:

	1976	77	78	79	80	81
$p_{opt}(t)$ korr.	0,0754	0,0907	0,0836	0,0870	0,0785	0,0903

A következő lépésben azt tesszük vizsgálat tárgyává, vajon az így meghatározott kamatláb az elméletileg elfogadható alsó és felső határ közé esik-e. A felső határ az eszközarányos nyereséghányad, amelyet a fentiekben már

közöltünk, és összehasonlítva az itt kapott értékekkel, látható, hogy a korrigált optimum belül van ezeken az értékeken; tehát ebből a szempontból elvileg helyes a kamatláb. Kérdés, hogyan viszonylanak a fentiekben megadott kamatlábak a hitelforrások bekerülési költségeihez, vagyis a pénzintézetek ráfordítási hányadához. Ez az érték — a pénzintézetek alapképzési igényét is figyelembe véve — az V. ötéves terv időszakában a következő:

	1976	77	78	79	80*	81*
$z(t)$	0,0613	0,0586	0,0627	0,0741	0,0750	0,0800

Az idősorból egyértelműen megállapítható, hogy a ráfordítási hányad 1977-től állandóan nő, és így a kamatláb optimális nagysága 1980-ban már megközelíti a kritikus alsó határt. Mindazonáltal a korrigált optimális kamatláb nagyobb az elméletileg kijelölhető alsó határnál, tehát a modellel reális eredményre jutottunk még akkor is, ha az többé-kevésbé eltér a ténylegesen kialakult átlagos hitelkamatlábtól. Ennek oka elsősorban az, hogy a modell szerinti ráta rugalmas, a gyakorlatban érvényesülő pedig rugalmatlan a gazdálkodó szervek jövedelmezőségére és a hitelsávrá, illetve a hitelkereslet és -kínálat viszonyára. Emellett a tényleges, átlagos értékre befolyást gyakorol a kamatlábak differenciálása is. Végül megjegyezzük, hogy miután a kamat jövedelmezőségi rugalmassága közepes, ezért — a feltételek érdemi megváltozása nélkül — a jövőben sem várható, hogy a hitellel lényegesen nagyobb szelektálás érhető el; márpedig az általunk megfogalmazott modell szerinti kamatláb rendkívül érzékeny a gazdálkodó szervek jövedelmezőségének változására. Ez többek között megmutatkozik az 1976-ról 77-re, ill. az 1977-ről 78-ra végbement változásokban is. Használóan érdemi a változás 1980-ban 79-hez viszonyítva, amikor is az új szabályozó rendszer érvénybe lépése miatt alacsonyabb jövedelmezőségi szint alakul ki a vállalatoknál. A modell segítségével 1981-re kalkulált 9% átlagos hitelkamatláb mint *optimum*, lényegében kielégíti a gyakorlati kamatpolitika követelményeit is, mert

— figyelemmel van a ráfordítási költségek növekvő tendenciájára, aminek oka elsősorban a nemzetközi pénz- és tőkepiacok kamattételeinek nagyobb arányú emelkedése az utóbbi két évben,

— ezt a kamatterhet elbírja az átlagos jövedelmezőségű gazdaság, mert a határon minden 10,— Ft nyereséggel szemben 9,— Ft kamat áll, ami végeredményben minimális jövedelmezőséget biztosít még az utolsó egységnyi befektetett pénzeszközre is.

— a pénzintézetek hitelágazati jövedelmezősége összhangban van az előző években kialakult szinttel, ill. a kimutatott csökkenés arányos a mérsékeltebb vállalati jövedelmezőséggel.

(Beérkezett: 1980. szeptember 22-én.)

IRODALOM

1. SÁRI, J.: A kamatpolitika elméleti és módszertani alapjai. MNB Közleményei 87. sz., Budapest, 1979. június.
2. LAFFONT, J. J.—GARCIA, R.: Disequilibrium econometrics for business loans. *Econometrica*, 1977. július.
3. SKONIETZKY, H.—HOFFMANN, U.: Weiterentwicklung des Bankzinses in Wirtschaftssystem. *Deutsche Finanzwirtschaft* 16/1968. sz.

INTEREST POLICY MAKING WITH ECONOMIC-MATHEMATICAL MODEL

The article is aimed at presenting the role of central state bank and issuing bank in the conscious development of interest policy in a market-oriented socialist planned economy. The authors make distinction between credit interest (fee paid for using a loan), interest on deposits (fee paid for money assets deposited for a determined period), and interest on capital (net returns on fixed and circulating assets tied up in the economy). For the rate of credit interest a lower and an upper bound are designated where the minimum is the input costs ratio of credit sources, while the maximum is the average ratio of profits to assets. The connection between the rate of credit interest and the rate of interest on capital can be deduced from the distribution of net income among its 3 owners (profits belong to the enterprise, the centralized part of net income over profits is drawn away by the budget, while the bank receives the interest). The connections revealed indicate that from the viewpoint of interest sensitivity of the enterprises the credit zone (proportion of credits in assets) and profit's ratio to assets have some part over and beyond the rate of interest. The efficiency of interest is defined by the increment of profit ratio per 1 percent raise in interest.

The optimum size of the interest rate on credit is mathematically determined starting from the efficiency indicator by means of a continuous and a discrete model. In case if the efficiency of interest as a future requirement is l , then the interest rate on credit will depend on the so-called credit profitability indicator, formed from the ratio of profits of economic agents and the volume of credit as well as on the economy-wide interest sensitivity indicator, formed from the ratio of interest and profit sums of the basis period. Computations made with empirical data indicate that the interest rate on credit applied in Hungary was between the lower and upper limits in the 1970s though it was inelastic as regards both enterprise profitability and credit demand and supply (credit zone). The optimum 9 percent interest rate on credit forecasted for 1981 meets the basic requirements of practical interest policy, since it takes into consideration the upward trends in input costs of credit sources, the expected average profitability of enterprises as well as profitability of loans for the banks.

ПОЛИТИКА ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК С ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛЮ

Цель данной статьи заключается в показе роли государственного центрального и эмиссионного банка в сознательном формировании политики процентных ставок в сориентированном на рынок плановом социалистическом хозяйстве. Авторы подразделяют процент на кредит (оплата за использование кредита), проценты на вклады (плата за денежные средства, помещаемые на определенное время), процент на капитал (чистые поступления за счет основных и оборотных средств, имеющих в хозяйстве). В отношении процентной ставки на кредит указывается нижний и верхний предел, когда минимальным шагом является стоимость использования кредитных источников, а максимальным — доля прибыли, пропорциональная средней по предприятиям. Связь между процентной ставкой на кредит и процентом на капитал может выводиться на основании распределения чистого дохода между тремя владельцами (предприятие получает прибыль, бюджет — централизованную часть чистого дохода сверх прибыли, банк — процент). Выявляемые зависимости показывают, что с точки зрения чувствительности предприятий на процентную ставку определенную роль играет диапазон кредита сверх процентной ставки (соотношение кредитования средств) и доля прибыли, пропорциональная средствам. Авторы дают определение эффективности процентной ставки посредством доли увеличения прибыли из расчета на 1 процент роста процентной ставки.

Величина оптимальной процентной ставки математически определяется на основании показателя эффективности с помощью непрерывной и дискретной модели. В том случае, если эффективность процентов в качестве требования будущего составляет λ , то проценты на кредит зависят от показателя народнохозяйственной чувствительности кредита, образованного на основании частного суммы процента в период, избранный в качестве базисного и т. н. показателя рентабельности кредита, образованного из частного прибыли хозяйственных организаций и объема кредита. В соответствии с моделью расчеты, проводимые на основании опытных данных показывают, что в Венгрии используемая процентная ставка на кредит в 70-х годах находилась между нижней и верхней границей, хотя она не являлась гибкой ни в отношении рентабельности предприятий, ни в аспекте спроса и предложения кредита (кредитный диапазон). Оптимальная процентная ставка на кредит, запланированная на 1981 г. в пределах 9 процентов по существу удовлетворяет требованиям практической политики, проводимой относительно процентов, т. к. принимает во внимание тенденцию роста затрат по источникам кредитования, предполагаемую, среднюю рентабельность предприятий, а также рентабельность кредитной системы финансовых учреждений.

Többállomásos termelés-tervezés konkáv és lineáris költségfüggvénnyel

1. Az egyállomásos termelés-tervezési probléma

Tekintsünk egy vállalatot, mely egy terméket sorozatokban gyárt, valamint egy tervidőszakot, melyet T periódusra osztunk fel. A termék iránti fogyasztói keresletet adottnak tételezzük fel, s célunk annak meghatározása, hogy mely periódusokban milyen nagysággal indítsunk sorozatot annak érdekében, hogy minimális költség mellett a fogyasztói keresletet kielégítsük.

Az első megközelítésben eltekintünk a termelési folyamat részletezésétől, ami azt jelenti, hogy csak a késztermék termelési szintjével jellemezzük a termelési folyamatot. Azt a modellt, melyben nem követjük nyomon a félkésztermékek késztermékké alakulásának folyamatát, egyállomás termelés-tervezési modellnek nevezzük. Egy állomáshoz a termelési folyamat és a termelési folyamat outputját tartalmazó raktár tartozik. A raktározás lehetővé teszi, hogy esetleg nem kell minden periódusban sorozatot indítani, és így a t -edik periódus ($t = 2, 3, \dots, T$) igényét egy korábbi periódusban termelik meg, a terméket pedig raktározzák a t -edik periódusig. A periódusok közötti kapcsolatot így a raktározás teremti meg. ($T = 3$ -ra lásd az 1. ábrát.)

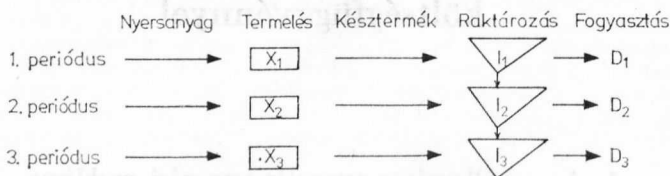
Az elmondottak értelmében problémánkat a következő programozási feladat fogalmazza meg:

$$\begin{aligned} \text{MIN } & \left\{ \sum_{t=1}^T K_t(X_t, I_t) \right\} \\ I_{t-1} + X_t &= D_t + I_t; & t = 1, \dots, T \\ I_0 &= I_T = 0, \\ I_t \geq 0, X_t &\geq 0; & t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (1)$$

ahol D_t = a t -edik periódusban a termék iránti kereslet,
 X_t = a t -edik periódusban termelt termék mennyisége,
 I_t = a t -edik periódus végén raktáron levő termék mennyisége,
 K_t = a t -edik periódusban az X_t és I_t szintekhez tartozó költség.

Legyen a K_t függvény konkáv X_t és I_t -ben. Ismert, hogy az (1) alatti feladattípus esetén konkáv függvény a minimumát egy extrémális pontban veszi fel, s minden extrémális pont kölcsönösen és egyértelműen meghatároz egy bázismegoldást. (1) alatti feladatunk bázismegoldásában legfeljebb T nem zéró bázisváltozó lehet. Legyen most $D_t > 0$, $t = 1, 2, \dots, T$. Mivel egy bázismegoldásban legfeljebb T nem zéró bázisváltozó lehet, következik, hogy egy bázismegoldásban az I_{t-1} és X_t változók közül az egyik pozitív, a másik zéró ($t = 1, 2, \dots, T$). Ha $D_t = 0$ néhány t -re, akkor könnyen belátható, hogy van olyan bázis, hogy a hozzá tartozó bázismegoldásban az I_{t-1} és X_t

változók közül az ilyen t -kre is legfeljebb az egyik lehet pozitív. Ezek szerint egy bázismegoldás esetén a t -edik periódusban csak akkor folyik termelés, ha $I_{t-1} = 0$, s X_t -ről azt kell eldönteni, hogy hány $(t-1)$ utáni periódus



1. ábra

igényével legyen egyenlő. Azon t pontokat, ahol $I_t = 0$, regenerációs pontoknak nevezzük. Problémánkat tehát a regenerációs pontok megkeresésére vezettük vissza. Az (1) alatti problémát Wagner és Within [3]-ban vetette fel először és Veinott [2]-ben a fenti gondolatmenet alapján egy dinamikus programozási algoritmust adott.

Zangwill [5]-ben úgy általánosította az (1) alatti problémát, hogy az I_t változókat előjelkötetlenné tette. Ez a gyakorlatban annyit jelent, hogy megengedjük a fogyasztói igények késleltetett kielégítését (pl. előjegyzéses rendszer). Problémánkat ekkor az alábbi programozási feladat írja le:

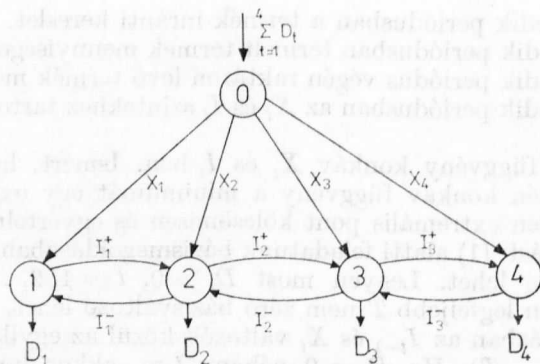
$$\text{MIN} \left\{ \sum_{t=1}^T [C_t(X_t) + H_t^+(I_t^+) + H_t^-(I_t^-)] \right\}$$

$$I_{t-1} + X_t = D_t + I_t; \quad t = 1, \dots, T \quad (2)$$

$$I_0 = T_T = 0$$

$$I_t^+ - I_t^- = I_t, \quad I_t^+ \geq 0, \quad I_t^- \geq 0, \quad X_t \geq 0; \quad t = 1, \dots, T$$

ahol C_t , H_t^+ és H_t^- a megfelelő költségfüggvények, melyek konkávak. Zangwill bizonyítja, hogy az optimális megoldásban az I_{t-1}^+ , I_{t-1}^- és X_t , $t = 1, 2, \dots, T$, változók közül legfeljebb egy lehet pozitív. Zangwill [7]-ben (2)-nek egy hálózatot feleltet meg, s gráfelméleti alapon ugyanerre az összefüggésre jut. A (2)-nek megfelelő hálót $T = 4$ -re a 2. ábra mutatja.



2. ábra

2. A többállomásos termelés-tervezési probléma

Tekintsük az (1) alatti problémának egy olyan általánosítását, melyben a félkésztermékek termelési szintjeit nem a késztermék termelési szintjeiből vezetjük le közvetlenül, hanem az egyes megmunkálási fázisokhoz külön változót rendelünk: X_{jt} jelentse, hogy a t -edik időszakban hány terméken fejeztük be a j -edik, ($j = 1, 2, \dots, M$) megmunkálási fázisnak megfelelő műveleteket. Azokat a termelés-tervezési modelleket, melyekben nyomon követjük a félkésztermékek késztermékké alakulásának folyamatát, többállomásos termelés-tervezési modelleknek nevezzük.

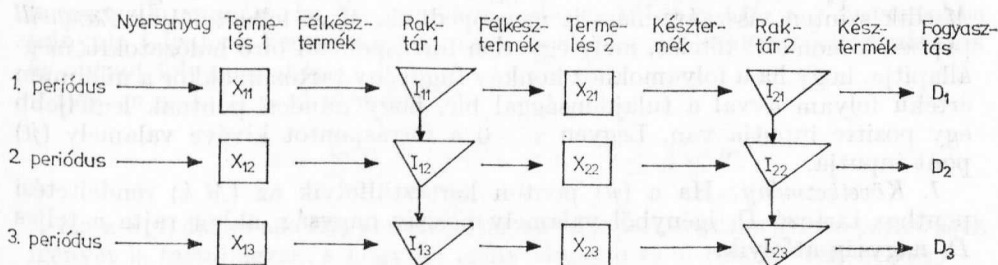
A j -edik állomás a j -edik megmunkálási szakasznak megfelelő munkafolyamatokat és ezen munkafolyamaton átesett termékek raktárát foglalja magában. Így a j -edik állomás termelési szintje nem determinálja egyértelműen a $j + 1$ -edik állomás termelési szintjét. Az utolsó állomáson — az M -ediken — készül el a késztermék, melyet az M -edik raktárban raktározunk. Az egyes periódusokat ismét a raktározás köti össze. (Lásd 3. ábrát $T = 3$ és $M = 2$ esetre).

Problémánkat az alábbi programozási feladat fogalmazza meg:

$$\begin{aligned} \text{MIN } & \left\{ \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^M [C_{jt}(X_{jt}) + H_{jt}(I_{jt})] \right\} \\ I_{j,t-1} + X_{jt} &= I_{jt} + X_{j+1,t}; \quad j = 1 \dots M-1, \quad t = 1, \dots, T \\ I_{M,t-1} + X_{Mt} &= I_{Mt} + D_t; \quad t = 1, \dots, T \quad (3) \\ X_{jt} \geq 0, I_{jt} &\geq 0; \quad j = 1, \dots, M, \quad t = 1, \dots, T \\ I_{j0} = I_{jT} &= 0; \quad j = 1, \dots, M \end{aligned}$$

ahol I_{jt} a t -edik periódus végén a j -edik raktár szintjét jelöli.

Zangwill ugyancsak [7]-ben (3)-nak egy hálózatot feleltet meg, s dinamikus programozási algoritmust ad arra az esetre, amikor a költségfüggvények konkávak. Cikkünkben ezen utóbbi modellt általánosítjuk oly módon, hogy az utolsó állomáson, a késztermékek szintjén, megengedjük a kereslet közelített kielégítését. Konkáv költségeket feltételezve dinamikus programozási algoritmust adunk, lineáris költségeket feltételezve pedig problémánkat egy speciális típusú szállítási feladatra vezetjük vissza.



3. ábra

3. A többállomásos termelési folyamat jellemzése a kereslet késleltetett kielégítése esetén konkáv költségfüggvény mellett

Mivel a késztermék raktári szintje negatív is lehet (az utolsó perióduskivételeével), ez azt jelenti, hogy a tervperiódus alatt a fogyasztói igényeket kielégítjük, de nem biztos, hogy ez részperiódusonként is megvalósul. Értelemszerűen, egyetlen félkésztermék raktári szintje sem lehet negatív a tervperiódus alatt. Legyen ismét ismert a fogyasztói kereslet, s az X termelési és I^+ , I^- raktározási szintekhez tartozzon ismét konkáv függvény. Feladatunk, hogy állomásonként és periódusonként meghatározzuk azokat a termelési és raktározási szinteket, melyekhez tartozó költség minimális a fogyasztói kereslet kielégítése esetén.

Modellünknek az alábbi programozási feladat felel meg:

$$\begin{aligned} \text{MIN } & \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^T C_{jt}(X_{jt}) + \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{t=1}^T H_{jt}(I_{jt}) + \sum_{t=1}^T [H_{Mt}^+(I_{Mt}^+) + H_{Mt}^-(I_{Mt}^-)] \right\} \\ & I_{j,t-1} + X_{jt} = I_{jt} + X_{j+1,t}; \quad j = 1, \dots, M-1, t = 1, \dots, T \\ & I_{M,t-1} + X_{Mt} = I_{Mt} + D_t; \quad t = 1, \dots, T \\ & X_{jt} \geq 0; \quad j = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \\ & I_{jt} \geq 0; \quad j = 1, \dots, M-1, t = 1, \dots, T \\ & I_{Mt} = I_{Mt}^+ - I_{Mt}^-; \quad I_{Mt}^+ \geq 0; \quad I_{Mt}^- \geq 0; \quad t = 1, \dots, T \\ & I_{j,0} = I_{jT} = 0; \quad j = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (4)$$

ahol: X_{jt} = a j -edik állomás termelési szintje a t -edik periódusban,
 I_{jt} = a j -edik raktár szintje a t -edik periódus végén,
 C_{jt} = termelési költségfüggvény, mely nemnegatív és konkáv,
 H_{jt}^+ , H_{Mt}^+ , H_{Mt}^- = raktározási költségfüggvények, melyek nemnegatívak és konkávak.

A (4) feladat feltételrendszere úgy is reprezentálható, mint egy egyetlen forrásponttal bíró hálózat, melynek formáját a 4. ábra mutatja, $T = 3$, $M = 3$ esetre.

A (00) forráspontból kiindulva a $\sum_{t=1}^T D_t$ folyamatot kell a rendeltetési állomásokra eljuttatni minimális költséggel. Feltételezésünknek megfelelően az M -edik szinten visszaáramlást is megengedünk. Most felhasználjuk Zangwill [4]-ben kimondott tételét, mely egyetlen forrásponttal bíró hálózatokra megállapítja, hogy ha a folyamatokhoz konkáv függvény tartozik, akkor a minimum értékű folyam avval a tulajdonsággal bír, hogy minden pontnak legfeljebb egy pozitív inputja van. Legyen $z > 0$ a forráspontot kivéve valamely (jt) pont inputja.

1. *Következmény:* Ha a (jt) ponton keresztülfolyik az (Mk) rendeltetési ponthoz tartozó D_k igényből valamely pozitív nagyság, akkor rajta a teljes D_k nagyság átfolyik.

Ellenkező esetben legalább egy, a (jt) -től különböző és vele kapcsolatban nem álló $(j't')$ pontnak kellene lennie, melyen a D_k igény hiányzó része átfolyik, s ezen folyamatoknak legkésőbb az M -edik szinten egyesülniök kellene.

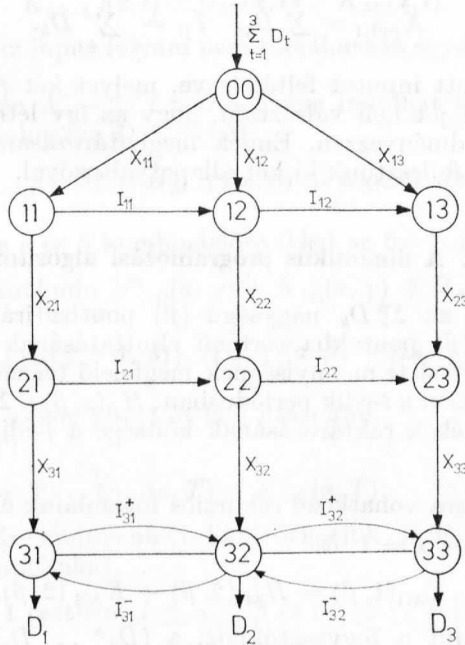
Ekkor azonban legalább egy pontnak biztosan két pozitív inputja volna, ami tételünknek ellentmond.

2. *Következmény:* Ha z , mint a (jt) pont inputja tartalmazza D_k -t; $k < t$, akkor tartalmazza D_t -t is. Másként az (Mt) pontnak két pozitív inputja lenne.

3. *Következmény:* Ha z a (jt) pont inputja, akkor

$$z = \sum_{k=\alpha}^{\beta} D_k; \quad 1 \leq \alpha \leq \beta, \quad t \leq \beta \leq T.$$

Tegyük fel, hogy (jt) z inputja tartalmazza D_α -t és $D_{\alpha+h}$ -t; $h \geq \max \{2, t-\alpha\}$ és $\alpha + h \leq T$, de nem tartalmazza $D_{\alpha+k}$ -t; $1 \leq k < h$, továbbá, hogy $(j't')$ z' inputja tartalmazza $D_{\alpha+k}$ -t; $1 \leq k < h$.



4. ábra. A többállomásos, dinamikus rendszer hálózata

Ha $t < t'$, akkor az $(M, \alpha + h)$ és $(M, \alpha + k)$ pontokba irányuló folyamatok keresztezik egymást, ha $t' < t$, akkor pedig az $(M\alpha)$ és $(M, \alpha + k)$ pontokba irányuló folyamatok keresztezik egymást. Ezek alapján könnyen jellemezhetjük az output folyamatokat is.

Legyen az (Mt) pont inputja

$$z = \sum_{k=\alpha}^{\beta} D_k; \quad 1 \leq \alpha \leq t, \quad t \leq \beta \leq T.$$

Ha $\alpha < t$, akkor az (Mt) pont inputja a t -edik periódust megelőző periódusok igényét is tartalmazza, s hogy az igény eljusson ezen rendeltetési helyre

$$I_{M,t-1}^- = \sum_{k=\alpha}^{t-1} D_k$$

kell legyen. Hasonlóan, ha $\beta > t$, akkor

$$I_{M,t}^+ = \sum_{k=t+1}^{\beta} D_k.$$

Amikor egy belső (jt) pont inputja

$$z = \sum_{k=\alpha}^{\beta} D_k; \quad 1 \leq \alpha \leq \beta, \quad t \leq \beta \leq T;$$

ezt a z folyamat szintén két részre kell osztani, hiszen a (jt) pontból csak a $(j+1, t)$ és $(j, t+1)$ pontokba irányul folyam. Mivel a (jt) pont output folyama ezen két pont input folyama, a 3. következmény azt diktálja, hogy

$$X_{j+1,t} = \sum_{k=\alpha}^{\gamma} D_k, \quad I_{jt} = \sum_{k=\gamma+1}^{\beta} D_k.$$

Egy pontban adott inputot feltételezve, melyet két paraméter, az α és β határoz meg, olyan γ -t kell választani, hogy az így létrejött felosztás minimális költséget eredményezzen. Ennek meghatározására dinamikus programozási algoritmust fejlesztünk ki két állapotváltozóval.

4. A dinamikus programozási algoritmus

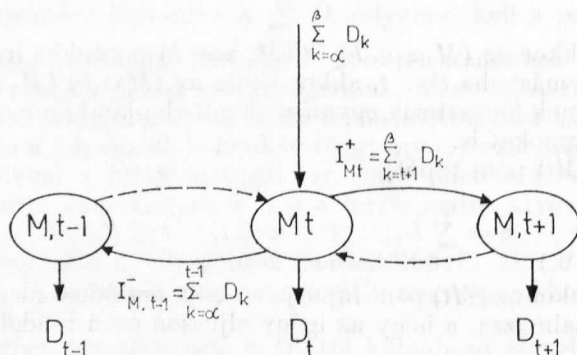
Legyen $K_{jt}(\alpha, \beta)$ az $\sum_{k=\alpha}^{\beta} D_k$ nagyságú (jt) pontba irányuló folyam $(M\alpha)$, $(M, \alpha+1)$, ..., $(M\beta)$ pontokba történő eljuttatásának minimális költsége; $C_{jt}(\alpha, \beta)$ a $\sum_{k=\alpha}^{\beta} D_k$ keresleti mennyiségnek megfelelő termék termelésének költsége a j -edik állomáson a t -edik periódusban; $H_{jt}(\alpha, \beta)$ a $\sum_{k=\alpha}^{\beta} D_k$ keresleti tömegnek megfelelő termékek raktározásának költsége a j -edik raktárban a t -edik periódusban.

I. Az utolsó állomásra vonatkozó rekurziós formuláink ekkor:

1. Ha $t = 1$, akkor $\alpha = 1$, és

$$K_{M1}(1, \beta) = H_{M1}^+(2, \beta) + K_{M2}(2, \beta),$$

mivel a D_1 eljut a fogyasztókhoz, a $(D_2^+ \dots D_{\beta})$ mennyiséget pedig az I_{M1}^+ szállítja.



4a. ábra. Az (Mt) ponthoz tartozó folyamatok

2. Ha $t = T$, akkor $\beta = T$, és

$$K_{Mt}(\alpha, T) = H_{M, T-1}(\alpha, T-1) + K_{M, T-1}(\alpha, T-1).$$

3. Minden más t -re (lásd 4. ábra):

$$K_{Mt}(\alpha, \beta) = H_{M, t-1}(\alpha, t-1) + K_{M, t-1}(\alpha, t-1) + H_{M, t+1}^+(t+1, \beta) + K_{M, t+1}(t+1, \beta).$$

II. $j = M-1$ esetben, $1 \leq \alpha \leq \beta$, $t \leq \beta \leq T$ kikötések mellett

1. $t < T$ -re, ha

1a. $\beta = t$;

$$K_{M-1, t}(\alpha, t) = C_{Mt}(\alpha, t) + K_{Mt}(\alpha, t),$$

ugyanis ez az input folyam nem tartalmazza egyetlen t utáni periódus igényét sem.

1b. $\alpha > t$ esetben $M-1$, t pontból nem indulhat folyam (Mt)-be, mert ez nem tartalmazza D_t -t. Tehát:

$$K_{M-1, t}(\alpha, \beta) = H_{M-1, t}(\alpha, \beta) + K_{M-1, t+1}(\alpha, \beta),$$

1c. minden más α és β kombinációra (lásd az 5–7. ábrákat):

$$K_{M-1, t}(\alpha, \beta) = \min \left\{ \min_{1 \leq \gamma \leq \beta} \{C_{Mt}(\alpha, \gamma) + K_{Mt}(\alpha, \gamma) + H_{M-1, t}(\gamma+1, \beta) + K_{M-1, t+1}(\gamma+1, \beta)\}, H_{M-1, t}(\alpha, \beta) + K_{M-1, t+1}(\alpha, \beta) \right\}$$

s ha $t = 1$, akkor $\alpha = 1$ -et kell használni.

2. $t = T$ -re $\beta = T$:

$$K_{M-1, T}(\alpha, T) = C_{MT}(\alpha, T) + K_{MT}(\alpha, T); \quad 1 \leq \alpha \leq T.$$

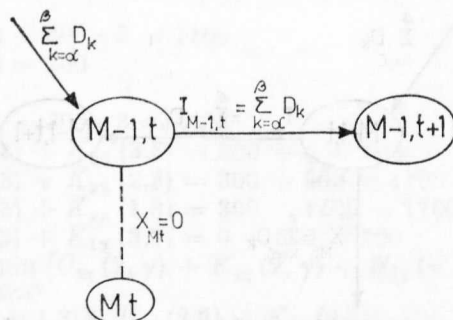
Ezek után már könnyebben határozhatjuk meg az alsóbb szintekre vonatkozó formuláinkat.

III. $1 \leq j < M-1$ esetben, $1 \leq \alpha \leq \beta$ és $t \leq \beta \leq T$ kikötés mellett

1. $t < T$ -re, ha

1a. $\beta = t$:

$$K_{jt}(\alpha, t) = C_{j+1, t}(\alpha, t) + K_{j+1, t}(\alpha, t),$$



5. ábra

1b. $\alpha > t$:

$$K_{jt}(\alpha, \beta) = \min_{\alpha-1 \leq \gamma \leq \beta} \{C_{j+1,t}(\alpha, \gamma) + K_{j+1,t}(\alpha, \gamma) + K_{j,t+1}(\gamma + 1, \beta)\};$$

$$C_{j+1,t}(\alpha, \alpha - 1) = K_{j+1,t}(\alpha, \alpha - 1) = 0,$$

1c. minden más α, β kombinációra:

$$K_{jt}(\alpha, \beta) = \min \left\{ \min_{t \leq \gamma \leq \beta} C_{j+1,t}(\alpha, \gamma) + K_{j+1,t}(\alpha, \gamma) + H_{jt}(\gamma + 1, \beta) + K_{j,t+1}(\gamma + 1, \beta) \right\}, H_{jt}(\alpha, \beta) + K_{j,t+1}(\alpha, \beta) \}.$$

Ha $t = 1$, akkor $\alpha = 1$ -et kell használni.

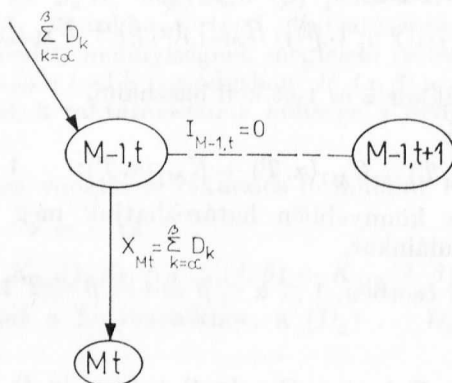
2. $t = T$ -re $\beta = T$:

$$K_{jT}(\alpha, T) = C_{j+1,T}(\alpha, T) + K_{j+1,T}(\alpha, T).$$

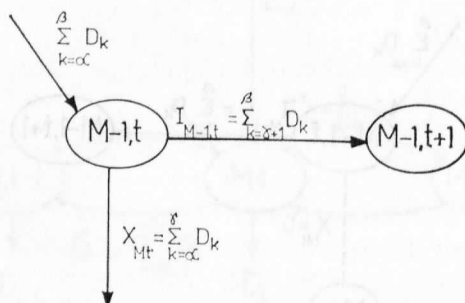
IV. Végül a forráspontra vonatkozó egyenleteket kell meghatározni. Ehhez bevezetjük a $K_{0t}(\alpha, T)$ jelölést ($1 \leq \alpha \leq T$), mely a $\sum_{k=\alpha}^T D_k$ keresleti tömeg $(M\alpha), (M, \alpha + 1), \dots, (MT)$ pontokba juttatásának minimális költségét jelenti a forráspontból kiindulva, és ezt a tömeget a $t, t + 1, \dots, T$ periódusokban termeljük meg.

1. Ha $T \geq \alpha > t, t \neq T$:

$$K_{0t}(\alpha, T) = \min_{\alpha-1 \leq \gamma \leq T} \{C_{1t}(\alpha, \gamma) + K_{1t}(\alpha, \gamma) + K_{0,t+1}(\gamma + 1, T)\}.$$



6. ábra



7. ábra. Az $(M - 1, t)$ pont egy output folyamata, amikor az input folyam csak egy részéből készül végtermék ($t \leq \gamma < \beta$)

2. Ha $1 \leq \alpha \leq t$, $t \neq T$:

$$K_{0t}(\alpha, T) = \min_{\{t \leq \gamma \leq T\}} \{C_{1t}(\alpha, \gamma) + K_{1t}(\alpha, \gamma) + K_{0, t+1}(\gamma + 1, T)\},$$

$$K_{0, t+1}(\alpha, T)\}.$$

3. Ha $t = T$, akkor

$$K_{0T}(\alpha, T) = C_{1T}(\alpha, T) + K_{1T}(\alpha, T); \quad 1 \leq \alpha \leq T.$$

Mivel algoritmusunk „visszafelé lépegető”, $K_{MT}(TT) = 0$ -val kezdünk és ha $K_{01}(1T)$ -hez érkeztünk, megadhatjuk az optimális megoldást.

Illusztrációként tekintsünk egy példát, melyben a költségfüggvények legyenek a következő típusúak:

$$C_{jt}(X_{jt}) = \begin{cases} 0 & \text{ha } X_{jt} = 0 \\ A_j + c_{jt} \cdot X_{jt} & \text{ha } X_{jt} > 0 \end{cases}$$

és

$$H_{jt}(I_{jt}) = h_{jt} \cdot I_{jt} \quad j = 1, \dots, M-1$$

$$H_{Mt}^+(I_{Mt}^+) = h_{Mt}^+ \cdot I_{Mt}^+$$

$$H_{Mt}^-(I_{Mt}^-) = \pi_{Mt}^- \cdot I_{Mt}^- \quad t = 1, \dots, T.$$

Legyen $M = 2$, $T = 3$, $D_1 = 100$, $D_2 = 200$, $D_3 = 300$, $A_1 = 400$, $A_2 = 300$; $c_{1t} = 20$, $c_{2t} = 30$, $t = 1, \dots, T$;

$h_{11} = 2$, $h_{12} = 0$, $h_{21} = 1$, $h_{22} = 3$; $\pi_{21} = 2$, $\pi_{22} = 4$.

Tekintve, hogy c_{1t} és c_{2t} minden t -re azonos, modellünk érzéketlen erre a költségnemre. Számításainknál ezeket nem vesszük figyelembe. Eljárásunkat az M -edik állomáson kezdjük.

$$K_{23}(3,3) = 0$$

$$K_{23}(2,3) = 200 \cdot 4 = 800$$

$$K_{23}(1,3) = 300 \cdot 4 + 100 \cdot 2 = 1400$$

$$K_{22}(2,2) = 0$$

$$K_{22}(2,3) = 300 \cdot 3 = 900.$$

Most azt a lehetőséget kell megvizsgálni, amikor a (2,2) pontba mind a három periódus igénye beérkezik. A D_2 mennyiség közvetlenül a fogyasztókhoz kerül, a D_1 mennyiség az I_1^- folyamán kerül a fogyasztókhoz, a D_3 pedig az I_2^+ folyamán keresztül.

Ennek alapján:

$$K_{22}(1,3) = 100 \cdot 2 + 300 \cdot 3 = 1100$$

$$K_{22}(1,2) = 100 \cdot 2 = 200$$

$$K_{21}(1,1) = 0$$

$$K_{21}(1,3) = 500 \cdot 1 + 300 \cdot 3 = 1400$$

$$K_{13}(3,3) = C_{23}(3,3) + K_{23}(3,3) = 300 + 0 = 300$$

$$K_{13}(2,3) = C_{23}(2,3) + K_{23}(2,3) = 300 + 800 = 1100$$

$$K_{13}(1,3) = C_{23}(1,3) + K_{23}(1,3) = 300 + 1400 = 1700$$

$$K_{12}(3,3) = H_{12}(3,3) + K_{13}(3,3) = 0 + 300 = 300$$

$$K_{12}(2,3) = \min_{\{2 \leq \gamma \leq 3\}} \{C_{22}(2, \gamma) + K_{22}(2, \gamma) + H_{12}(\gamma + 1, 3) + K_{13}(\gamma + 1, 3)\},$$

$$H_{12}(2,3) + K_{13}(2,3)\} =$$

$$= \min \{300 + 0 + 0 + 300, 300 + 900 + 0 + 0, 0 + 1100\} = 600; \gamma^* = 2$$

$$K_{12}(2,2) = C_{22}(2,2) + K_{22}(2,2) = 300$$

$$K_{12}(1,2) = C_{22}(1,2) + K_{22}(1,2) = 300 + 200 = 500$$

Amikor az (1,2) pont inputja ($D_1 + D_2 + D_3$)-mal egyenlő, az (1,2) pont outputjait tekintve az alábbi változatok lehetségesek:

- a második periódusban egyetlen készterméket sem termelünk, így a teljes input folyam I_{12} -n keresztül eljut az (1,3) pontba, tehát $I_{12} = (D_1 + D_2 + D_3)$,
- a második periódusban ($D_1 + D_2$) mennyiséget termelünk, a D_3 mennyiséget, mint félkészterméket még raktározzuk; tehát $X_{22} = (D_1 + D_2)$ és $I_{12} = D_3$,
- a második periódusban megtermeljük a tervidőszak alatt jelentkező teljes keresleti mennyiséget, tehát $X_{22} = (D_1 + D_2 + D_3)$ és $I_{12} = 0$.

$$K_{12}(1,3) = \min \left\{ \min_{2 \leq \gamma \leq 3} \{C_{22}(1, \gamma) + K_{22}(1, \gamma) + H_{12}(\gamma + 1, 3) + K_{13}(1, 3) + H_{12}(1, 3)\} \right\} = \min \{300 + 200 + 0 + 300 + 1100 + 0 + 0, 0 + 1700\} = 800; \gamma^* = 2$$

$$K_{11}(1,1) = C_{21}(1,1) + K_{21}(1,1) = 300 + 0 = 300$$

$$K_{11}(1,2) = \min \left\{ \min_{1 \leq \gamma \leq 2} \{C_{21}(1, \gamma) + K_{21}(1, \gamma) + H_{11}(\gamma + 1, 2) + K_{12}(\gamma + 1, 2)\}, H_{11}(1, 2) + K_{12}(1, 2) \right\} = \min \{300 + 0 + 400 + 300, 300 + 200 + 0 + 0, 600 + 550\} = 500; \gamma^* = 2$$

$$K_{11}(1,3) = \min \left\{ \min_{1 \leq \gamma \leq 3} \{C_{21}(1, \gamma) + K_{21}(1, \gamma) + H_{11}(\gamma + 1, 3) + K_{12}(\gamma + 1, 3), H_{11}(1, 3) + K_{12}(1, 3)\} \right\} = \min \{300 + 0 + 1000 + 600, 300 + 200 + 600 + 300, 300 + 1400 + 0 + 0, 1200 + 800\} = 1400; \gamma^* = 2.$$

S végül határozzuk meg a forráspontból kiinduló folyamatok értékét:

$$K_{03}(3,3) = 400 + 300 = 700$$

$$K_{03}(2,3) = 400 + 1100 = 1500$$

$$K_{03}(1,3) = 400 + 1700 = 2100$$

$$K_{02}(3,3) = \min_{2 \leq \gamma \leq 3} \{C_{12}(3, \gamma) + K_{12}(3, \gamma) + K_{03}(\gamma + 1, 3)\} =$$

$$= \min \{0 + 0 + 700, 400 + 300\} = 700; \gamma^* = 2, 3$$

$$K_{02}(2,3) = \min \left\{ \min_{2 \leq \gamma \leq 3} \{C_{12}(2, \gamma) + K_{12}(2, \gamma) + K_{03}(\gamma + 1, 3)\}, K_{03}(2, 3) \right\}$$

$$= \min \{400 + 300 + 700, 400 + 600 + 0, 1500\} = 1000; \gamma^* = 3$$

$$K_{02}(1,3) = \min \left\{ \min_{2 \leq \gamma \leq 3} \{C_{12}(1, \gamma) + K_{12}(1, \gamma) + K_{03}(\gamma + 1, 3)\}, K_{03}(1, 3) \right\}$$

$$= \min \{400 + 500 + 1500, 400 + 800 + 0, 2100\} = 1200; \gamma^* = 3$$

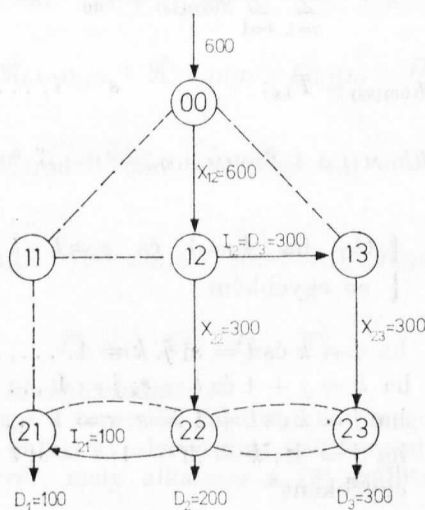
$$K_{01}(1,3) = \min \left\{ \min_{1 \leq \gamma \leq 3} \{C_{11}(1, \gamma) + K_{11}(1, \gamma) + K_{02}(\gamma + 1, 3)\}, K_{02}(1, 3) \right\}$$

$$= \min \{400 + 300 + 100, 400 + 500 + 700, 400 + 1400 + 0, 1200\} = 1200; X_{11} = 0$$

Mivel $K_{01}(1,3)$ minimumát $K_{02}(1,3)$ adta, ebből következik, hogy $X_{11} = 0$. $K_{02}(1,3)$ minimuma $\gamma^* = 3$ -nál van, tehát $X_{12} = (D_1 + D_2 + D_3)$. A (12) pontba irányuló folyam nagysága ezek szerint 600 egység, $K_{12}(1,3)$ minimuma pedig $\gamma^* = 2$ -nél van, tehát $X_{22} = D_1 + D_2$ és $I_{12} = D_3$. Innen pedig már következik, hogy $I_{11} = 100$, $X_{23} = D_3$ és az összes több változó értéke zero. A feladat optimális folyamát a 8. ábra mutatja. Az optimális megoldás költségei a következőképpen oszlanak meg:

- Az első termelési állomáson a második periódusban a fix költség 400
- Az első termelési állomáson a második periódusban D_3 -nak megfelelő félkésztermék raktározásának költsége 0
- A második termelési állomáson a második periódusban $D_1 + D_2$ mennyiség termelésének fix költsége 300
- A második termelési állomáson a harmadik periódusban D_3 termelésének fix költsége 300
- A második termelési állomáson az első periódus késleltetett keresletkielégítésének költsége 200

melyek összege természetesen megegyezik $K_{01}(1T)$ optimális értékével.



8. ábra. Az optimális folyam fa struktúrája

5. A lineáris eset

Tekintsük az alábbi termelés-tervezési problémát:

$$\text{MIN} \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^T (c_{jt} \cdot X_{jt} + h_{jt} \cdot I_{jt}) \right\}$$

$$I_{j,t-1} + X_{jt} = I_{jt} + X_{j+1,t}; \quad t = 1, \dots, T, \quad j = 1 \dots M$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^T X_{M+1,t} &= D & (5) \\
 \underline{D}_t &\leq X_{M+1,t} \leq \bar{D}_t; & t = 1, \dots, T \\
 X_{jt} &\geq 0, \quad I_{jt} \geq 0; & j = 1, \dots, M \\
 I_{j,0} &= I_{j,T} = 0; & j = 1, \dots, M
 \end{aligned}$$

ahol $X_{M+1,t}$ = a t -edik periódusban a fogyasztóknak kiszállított mennyiség.

(5) alatti modellünk megszünteti tehát a termelés-tervezési modellek azon hátrányos tulajdonságát, hogy a keresletet nem tudják a tervperióduson belül átrendezni.

Most tekintsük az alábbi szállítási feladatot:

$$\begin{aligned}
 \text{MIN} \quad & \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^T v_{(00)(ks)} y_{(00)(ks)} + \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^T v_{(jt)(ks)} \cdot y_{(jt)(ks)} \\
 & \sum_{k=1}^{M+1} \sum_{s=1}^T y_{(jt)(ks)} = r_{jt}; \quad t = 1, \dots, T, \quad j = 1, M \\
 & \sum_{k=1}^{M+1} \sum_{s=1}^T y_{(00)(ks)} = r_{00} & (6)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^T y_{(jt)(ks)} + y_{(00)(ks)} = P_{ks}; \quad s = 1, \dots, T, \quad k = 1, \dots, M$$

$$\underline{p}_{M+1,s} \leq \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^T y_{(jt)(M+1,s)} + y_{(00)(M+1,s)} \leq \bar{p}_{M+1,s}; \quad s = 1, \dots, T$$

ahol:

$$v_{(00)(ks)} = \begin{cases} C_{1t} & \text{ha } k=1 \text{ és } s=t; \quad t=1, \dots, T \\ \infty & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$v_{(jt)(ks)} = \begin{cases} 0 & \text{ha } j=k \text{ és } t=s; \quad j, k=1, \dots, M; \quad t, s=1 \dots T \\ c_{j+1}, & \text{ha } k=j+1 \text{ és } t=s; \quad j=1 \dots M-1; \quad t=1 \dots T \\ h_{jt} & \text{ha } j=k \text{ és } t+1=s; \quad s=1 \dots T-1; \quad j=1 \dots M \\ 0 & \text{ha } j=M; \quad k=M+1, \quad t=s; \quad t=1 \dots T \\ \infty & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$r_{00} = r_{jt} = p_{ks} = D; \quad j=1 \dots M; \quad t=1 \dots T; \quad k=1 \dots M; \quad s=1 \dots T;$$

$$\bar{p}_{M+1,s} = \bar{D}_s; \quad \underline{p}_{M+1,s} = \underline{D}_s.$$

1. tétel: Az (5) feladat minden lehetséges megoldásához hozzárendelhető a (6) feladatnak egy lehetséges megoldása, s a megoldáshoz tartozó célfüggvényértékek megegyeznek.

Bizonyítás: Legyen x_{jt}^0 ; $j=1, \dots, M+1$, $t=1 \dots T$ és I_{jt}^0 ; $j=1 \dots M$, $t=1 \dots T$ az (5) feladat egy lehetséges megoldása. Ekkor

$$I_{j,t-1}^0 + X_{jt}^0 = I_{jt}^0 + X_{j+1,t}^0$$

Ebből

$$I_{j,t-1}^0 + X_{jt}^0 + D - (I_{j,t-1}^0 + X_{jt}^0) = I_{jt}^0 + X_{j+1,t} + D - (I_{j,t-1}^0 + X_{jt}^0)$$

Legyen most

$$y_{(jt)(jt)}^0 = D - (I_{j,t-1}^0 + X_{jt}^0) = D - (I_{j,t}^0 + X_{j+1,t})$$

$$y_{(jt)(j,t+1)}^0 = I_{jt}^0; \quad y_{(j,t-1)(jt)}^0 = I_{j,t-1}^0$$

$$y_{(jt)(j+1,t)}^0 = X_{j+1,t}^0; \quad y_{(j-1,t)(jt)}^0 = X_{jt}^0,$$

valamint

$$y_{(jt)(ks)} = 0 \quad \text{és} \quad y_{(ks)(jt)} = 0$$

minden más k, s, j, t kombinációra.

Könnyen belátható, hogy ez megoldása az (5) feladatnak, s a megoldáshoz tartozó célfüggvényértékek egyenlőek.

2. tétel: A (6) és (5) alatti feladat optimális megoldásának halmazai között kölcsönös és egyértelmű leképezés létesíthető.

Bizonyítás: Elegendő megmutatni, hogy a (6) feladat optimális megoldása lehetséges megoldása az (5) feladatnak. Mivel a (6) feladat optimális megoldásához tartozó célfüggvényérték kisebb mint végtelen, minden $((jt), (jt))$ zéró elemére:

$$y_{(j,t-1)(jt)}^0 + y_{(j-1,t)(jt)}^0 + y_{(jt)(jt)}^0 = D$$

és

$$y_{(jt)(jt)}^0 + y_{(jt)(j,t+1)}^0 + y_{(jt)(j+1,t)}^0 = D.$$

Ezekből

$$y_{(j,t-1)(jt)}^0 + y_{(j-1,t)(jt)}^0 = y_{(jt)(j,t+1)}^0 + y_{(jt)(j+1,t)}^0,$$

és sorrendben az

$$I_{j,t-1}^0, \quad X_{jt}^0, \quad I_{jt}^0, \quad X_{j+1,t}^0$$

választással adódik a kívánt eredmény.

Ahhoz azonban, hogy a termelési feladatunkat megoldhassuk, a szállítási feladat megoldásához hatékony algoritmust kell keresni. Ehhez felhasználjuk az [1] cikk eredményét, mely alkalmas a (6) szállítási feladattípus megoldására.

Illusztrációként legyen:

$c_{11} = 20$	$D = 700$	$h_{11} = 2$
$c_{12} = 40$	$\underline{D}_1 = 100$	$h_{12} = 0$
$c_{13} = 30$	$\underline{D}_2 = 100$	$h_{13} = \infty$
$c_{21} = 50$	$\underline{D}_3 = 200$	$h_{21} = 1$
$c_{22} = 60$	$\bar{D}_1 = \infty$	$h_{22} = 3$
$c_{23} = 40$	$\bar{D}_2 = 300$	$h_{23} = \infty$
	$\bar{D}_3 = 200$	

A feladathoz tartozó disztribúciós táblát a 9. ábra, a 10. ábra pedig az optimális megoldást mutatja. Összehasonlításként most vegyük azt az esetet, amikor a keresletet a tervidőszak alatt nem tudja a modell átrendezni, azaz $\bar{D}_t = \bar{D}_t = D_t$. Ez esetben (6) alatti feladat egy standard szállítási feladattá válik. Legyen most továbbra is $D = 700$, de $D_1 = 200$, $D_2 = 300$, $D_3 = 200$.

	11	12	13	21	22	23	31	32	33	
00	20	40	30							700
11	0	2		50						700
12		0	0		60					700
13			0			40				700
21				0	1		0			700
22					0	3		0		700
23						0			0	700
	0 ⁰	0 ⁰	0 ⁰	0 ⁰	0 ⁰	0 ⁰	0 ⁸⁷⁰⁰	0 ²⁰⁰	0 ⁰	8600
	700	700	700	700	700	700	8800	300	200	

9. ábra. A szállítási feladat induló disztribúciós táblája

	11	12	13	21	22	23	31	32	33	
00	20 ⁷⁰⁰	40	30							
11	0 ⁰	2 ²⁰⁰		50 ⁵⁰⁰						
12		0 ⁵⁰⁰	0 ²⁰⁰		60					
13			0 ⁵⁰⁰			40 ²⁰⁰				
21				0 ²⁰⁰	1 ¹⁰⁰		0 ⁴⁰⁰			
22					0 ⁶⁰⁰	3		0 ¹⁰⁰		
23						0 ⁵⁰⁰			0 ²⁰⁰	
	0	0	0	0	0 ⁰	0 ⁰	0 ⁸⁴⁰⁰	0 ²⁰⁰	0 ⁰	

10. ábra. A szállítási feladat optimális megoldása

A feladat optimális megoldását a 11. ábra mutatja.

	11	12	13	21	22	23	31	32	33	
00	20 ⁷⁰⁰	40	30 ⁰							700
11	0	2 ²⁰⁰		50 ⁵⁰⁰						700
12		0 ⁵⁰⁰	0 ²⁰⁰		60					700
13			0 ⁵⁰⁰			40 ²⁰⁰				700
21				0 ²⁰⁰	1 ³⁰⁰		0 ²⁰⁰			700
22					0 ⁴⁰⁰	3		0 ³⁰⁰		700
23						0 ⁵⁰⁰			0 ²⁰⁰	700
	700	700	700	700	700	700	200	300	200	

11. ábra. A standard szállítási feladat optimális megoldása

A 10. ábra alapján az optimális megoldás: $X_{11} = 700$, $I_{11} = 200$, $X_{21} = 500$, $I_{12} = 200$, $X_{23} = 200$, $I_{21} = 100$, $X_{31} = 400$, $X_{32} = 100$, $X_{33} = 200$ és $Z = 47\,500$.

A 11. ábra alapján: $X_{11} = 700$, $I_{11} = 200$, $X_{21} = 500$, $I_{21} = 300$, $X_{23} = 200$ és $Z = 47\,600$.

Mivel az előző optimális célfüggvényérték száz egységgel kisebb, ez is igazolja, hogy az (5) alatti modellünk annak révén, hogy a keresleteket intervallumba szorítja, hatékonyabb eredményt ér el.

(Beérkezett: 1980. május 21-én.)

IRODALOM

1. DANYI, P.—KOMLÓSI, S.: Megjegyzés a szállítási feladat egy változatához. *Sigma*. E számban.
2. VEINOTT, JR. A. F.: Unpublished notes, Stanford University, California, 1963.
3. WAGNER, H. M. and WHITHIN, T. M.: Dynamic version of the economic lot size model, *Management Science*, Vol. 5. No. 1., Oct. 1959. pp. 89—96.
4. ZANGWILL, W. I.: Single and multi-commodity minimum concave cost flows in certain networks, Working paper No. 154., Center for Research in Management Science, University of California, Berkely, California, Febr. 1966.
5. ZANGWILL, W. I.: A deterministic multiperiod production scheduling model with backlogging, *Management Science*, Vol. 13. No. 1., Sept. 1966. pp. 105—119.
6. ZANGWILL, W. I.: A deterministic multi-product, multi-facility production and inventory system, *Operations Research*, Vol. 14. No. 3., May-June 1966. pp. 486—508.
7. ZANGWILL, W. I.: A backlogging model and a multi-echelon model of a dynamic economic lot size production system a network approach, *Management Science*, Vol. 15. No. 9., May, 1969. pp. 506—527.

MULTI-STAGE PRODUCTION PLANNING WITH CONCAVE AND LINEAR COST FUNCTIONS

Zangwill [7] gives a dynamic programming algorithm to the solution of a multi-stage production planning problem with concave cost function. The present study generalizes this model in such a way that at the level of finished products also negative stock levels are allowed and for this generalized case a dynamic programming algorithm is given, too. Besides a multi-stage production planning problem with linear cost function is presented where demands in a given period are considered not as a fixed quantity, but are confined to an interval. This case can be reduced to a generalized transportation problem.

МНОГОСТУПЕНЧАТОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВА С ПОМОЩЬЮ ВОГНУТЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАТРАТ

Зангвилл в (7) разработал алгоритм динамического программирования для решения многоступенчатой задачи планирования производства посредством вогнутой функции затрат. В данной работе эта модель обобщается так, что на уровне готового изделия допускаются также и отрицательные складские уровни и относительно этого обобщенного случая рассматривается алгоритм динамического программирования. Наряду с этим рассматривается такая проблема многоступенчатого планирования производства с помощью линейной функции затрат, в рамках которой спрос в каком-то периоде не фиксируется и ограничивается определенным интервалом. Этот случай может быть сведен к обобщенной транспортной задаче.

Megjegyzés a szállítási feladat egy változatához

Vörös József [2] alatti cikkében termelésprogramozási problémákkal foglalkozik, többek között egy lineáris célfüggvényű esettel, amelynek algebrai modelljéről (6) megmutatja, hogy olyan alakra transzformálható, amely a standard szállítási feladattól abban különbözik, hogy egyes feltételekben az egyenlőséggel helyett alsó és felső korlátok szerepelnek. Ez a feladattípus speciális esete a következőnek:

(A)-Probléma

Keressük a

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

költségfüggvény minimumát a következő feltételek mellett:

$$0 \leq a_i \leq \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq c_i < +\infty, \quad a_i \leq c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$0 \leq b_j \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq d_j < +\infty, \quad b_j \leq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ és } c_{ij} \geq 0.$$

A célunk az, hogy megvizsgáljuk e kétoldalról korlátozott szállítási modell kapcsolatát a szállítási feladatok néhány típusával. Legyenek

$$A = \sum_{i=1}^m a_i, \quad B = \sum_{j=1}^n b_j, \quad C = \sum_{i=1}^m c_i \quad \text{és} \quad D = \sum_{j=1}^n d_j.$$

Az (A)-Probléma megoldhatóságának nyilván szükséges feltétele, hogy $A \leq D$ és $B \leq C$ teljesüljön. Amennyiben $A = D$ vagy $B = C$ teljesül, akkor egy standard szállítási feladatot kapunk. $A = D$ esetén a következőt:

$$a_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$d_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ és } c_{ij} \geq 0,$$

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}.$$

Az (A)-Problémához rendeljük hozzá a következő, részben felsőkorlátos szállítási feladatot:

(B)-Probléma

Keressük a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

költségfüggvény minimumát a következő feltételek mellett:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} + x_{i,n+1} = c_i \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} + x_{m+1,j} = d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$0 \leq x_{i,n+1} \leq c_i - a_i \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$0 \leq x_{m+1,j} \leq d_j - b_j \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ és } c_{ij} \geq 0.$$

A (B)-Probléma ekvivalens az (A)-Problémával olyan értelemben, hogy az egyik feladat minden lehetséges megoldásának kölcsönösen és egyértelműen megfeleltethető a másik feladat egy lehetséges megoldása, és az egymásnak megfelelő megoldásokhoz az egyes feladatokban egyenlő célfüggvényértékek tartoznak. A (B)-Probléma felsőkorlátos disztribúciós módszerrel megoldható, ha megoldáshalmaza nem üres.

Módosítsuk az (A)-Problémát úgy, hogy a $c_i < +\infty$, illetve $d_j < +\infty$ feltételeket $c_i \leq +\infty$, ill. $d_j \leq +\infty$ feltételekre változtatjuk. Nevezzük (A') -Problémának az előbbieken megfogalmazott problémát. Ez a probléma általában nem írható át ekvivalens felsőkorlátos disztribúciós feladattá, mint azt a következő egyszerű példa is mutatja.

Példa:

Keressük a

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

költségfüggvény minimumát a következő feltételek mellett:

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \geq 0,$$

$$1 \leq x_{11} + x_{12},$$

$$1 \leq x_{21} + x_{22},$$

$$1 \leq x_{11} + x_{21},$$

$$1 \leq x_{12} + x_{22},$$

és a költségmátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A problémának optimális megoldásai lesznek a következők:

$$x_{12} = x_{21} = 0, \quad x_{11} \geq 1 \text{ és } x_{22} \geq 1.$$

Ez a példa azt is mutatja, hogy általában az (A')-Probléma nem redukálható olyan (A)-Problémává, hogy a két probléma optimális megoldásai megegyezzenek. Egy, a gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos esetben azonban hasznos megállapítást tehetünk. Abban az esetben, amikor minden fajlagos szállítási költség pozitív, igaz a következő:

Lemma: A

$$\begin{aligned} 0 \leq a_i \leq \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq c_i \leq +\infty, & \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ 0 \leq b_j \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq d_j \leq +\infty, & \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad c_{ij} > 0,$$

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

szállítási feladatnak minden optimális $x = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn}]^*$ megoldására teljesülnek a következő feltételek:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq \max(a_i, B), & i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\leq \max(b_j, A), & j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Bizonyítás:

Legyen $x = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn}]^*$ optimális megoldása (1)-nek. Tegyük fel, hogy van olyan g index, amelyre

$$\sum_{j=1}^n x_{gj} > \max(a_g, B).$$

Jelölje J a következő indexhalmazt:

$$J = \{j \mid 1 \leq j \leq n \text{ és } x_{gj} > 0\}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{j \in J} \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq \sum_{j \in J} x_{gj} > B,$$

ezért található olyan $h \in J$, hogy

$$\sum_{i=1}^m x_{ih} > b_h.$$

Legyen

$$a'_g = \sum_{j=1}^n x_{gj}, \quad b'_h = \sum_{i=1}^m x_{ih}.$$

Feltevésünk szerint $a'_g > a_g$ és $b'_h > b_h$. Legyen δ egy olyan pozitív szám, amelyre

$$0 < \delta \leq \min \{a'_g - a_g, b'_h - b_h, x_{gh}\}.$$

Legyen $\hat{x}_{ij} = x_{ij}$, ha $i \neq g$ vagy $j \neq h$ és legyen

$$\hat{x}_{gh} = x_{gh} - \delta.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor az $\hat{x} = [\hat{x}_{11}, \dots, \hat{x}_{mn}]^*$ vektor lehetséges megoldása az (1) feladatnak, és a hozzá tartozó célfüggvényérték $\delta \cdot c_{gh} > 0$ értékkel kisebb, mint az $\hat{x}$ megoldáshoz tartozó célfüggvényérték. Vagyis x feltevésünkkel ellentétben nem optimális megoldás. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy a (2) egyenlőtlenségeknek szükségképpen teljesülniük kell.

A most bizonyított Lemmából következik az

1. Tétel:

Tekintsük a Lemmában megfogalmazott (1) feladatot. Módosítsuk azt a következőképpen:

$$\begin{aligned} 0 \leq a_i &\leq \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq c'_i & i = 1, 2, \dots, m \\ 0 \leq b_j &\leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq d'_j & j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad c_{ij} > 0,$$

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

ahol:

$$c'_i = \begin{cases} c_i, & \text{ha } c_i < +\infty \\ \max(a_i, B) & \text{egyébként} \end{cases}$$

és

$$d'_j = \begin{cases} d_j, & \text{ha } d_j < +\infty \\ \max(b_j, A) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor a (3) és az (1) feladat optimális megoldásainak halmaza egyenlő.

Bizonyítás:

Az nyilvánvaló, hogy a (3) feladat optimális megoldásai lehetséges megoldásokat szolgáltatnak az (1) feladat számára. Jelölje z_2 , ill. z_1 a (3), ill. (1) feladat optimális megoldásaihoz tartozó célfüggvényértéket. Nyilvánvaló, hogy $z_1 \leq z_2$.

A Lemma állításából következik, hogy (1) minden optimális megoldása megvalósítható megoldása (3)-nak, következésképpen $z_2 \leq z_1$, és ennél fogva $z_1 = z_2$. Emiatt (3) optimális megoldásai (1)-nek is optimális megoldásai és a Lemmára való tekintettel (1) minden optimális megoldása optimális megoldása (3)-nak is.

Az 1. Tétel alapján tehát az (1) feladatot redukálhatjuk a (3) feladatra, az pedig — lévén típusát tekintve (A)-Probléma — redukálható egy (B)-Problémává, azaz egy felsőkorlátos szállítási feladattá.

Mielőtt rátérnénk az 1. Tételből adódó egy további következmény tárgyalására, néhány megjegyzést kell tennünk.

Ha a Lemmában a költségmátrixra vonatkozó pozitivitási feltevést nem-negativitási feltevésre módosítjuk (vagyis, ha csak azt feltételezzük, hogy $c_{ij} \geq 0$), akkor a Lemma állítása már nem lesz igaz, ami pl. a cikk elején közölt egyszerű példa alapján nyilvánvaló. Viszont a Lemma bizonyításában felhasznált gondolatmenet segítségével ebben az esetben is igazolható a következő:

2. Tétel: A

$$\begin{aligned} 0 \leq a_i \leq \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq c_i \leq +\infty & \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ 0 \leq b_j \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq d_j \leq +\infty & \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ x_{ij} \geq 0, \quad c_{ij} \geq 0, \\ \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \end{aligned} \quad (4)$$

szállítási feladatnak van olyan optimális megoldása, melyre teljesülnek a Lemma (2) feltételei.

A 2. Tételből következik a

3. Tétel:

Módosítsuk a 2. Tételben megfogalmazott (4) feladatot a következőképpen:

$$\begin{aligned} 0 \leq a_i \leq \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq c'_i & \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ 0 \leq b_j \leq \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq d'_j & \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ x_{ij} \geq 0, \quad c_{ij} \geq 0, \\ \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \end{aligned} \quad (5)$$

ahol

$$c'_i = \begin{cases} c_i, & \text{ha } c_i < +\infty \\ \max(a_i, B) & \text{egyébként} \end{cases}$$

és

$$d'_j = \begin{cases} d_j, & \text{ha } d_j < +\infty \\ \max(b_j, A) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor az (5) feladat minden optimális megoldása egyúttal a (4) feladatnak is optimális megoldása.

Ennek alapján tehát a (4) feladat bizonyos optimális megoldásait (de általában nem mindegyiket) megkapjuk az (5) feladat megoldása útján, amely viszont már ekvivalens egy felsőkorlátos szállítási feladattal.

Ezek után vizsgáljuk meg a következő problémát:

Legyenek I_1, I_2, I_3 és J_1, J_2, J_3 páronként diszjunkt indexhalmazok, amelyekre $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, 2, \dots, m\}$, $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = \{1, 2, \dots, n\}$. Minimalizálendő

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij},$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \alpha_i &\geq \sum_{j=1}^n x_{ij}, & i \in I_1, \\ \alpha_i &= \sum_{j=1}^n x_{ij}, & i \in I_2, \\ \alpha_i &\leq \sum_{j=1}^n x_{ij}, & i \in I_3, \\ \beta_j &\geq \sum_{i=1}^m x_{ij}, & j \in J_1, \\ \beta_j &= \sum_{i=1}^m x_{ij}, & j \in J_2, \\ \beta_j &\leq \sum_{i=1}^m x_{ij}, & j \in J_3, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad \beta_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad c_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

	$i \in I_1$	$i \in I_2$	$i \in I_3$
$a_i :=$	0	α_i	α_i
$c_i :=$	α_i	α_i	$+\infty$
	$j \in J_1$	$j \in J_2$	$j \in J_3$
$b_j :=$	0	β_j	β_j
$d_j :=$	β_j	β_j	$+\infty$

Nyilvánvaló, hogy a (6) feltételrendszer azonos az

$$\begin{aligned} a_i &\leq \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq c_i, & i = 1, \dots, m \\ a_i &\leq \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq d_j, & j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

feltételrendszerrel. Ennek következtében tehát a (6) probléma egy (A')-Probléma, melynek megoldása részben vagy egészben visszavezethető egy felsőkorlátos szállítási probléma ((B)-Probléma) megoldására.

(Beérkezett: 1980. május 21-én.)

IRODALOM

1. KREKÓ, B.: Lineáris programozás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1966.
2. VÖRÖS, J.: Többállomásos termelés-tervezés konkáv és lineáris költségfüggvénnyel. Szigma. E számban.

REMARKS ON A VARIANT OF THE TRANSPORTATION PROBLEM

In the constraint system of a standard transportation problem let us replace equality signs by lower and upper limits (Problem A). This problem is equivalent to a transportation problem with upper bound (Problem B). The article is aimed at examining the relationship of Problem A and B, respectively, to some types of transportation problems. If in Problem A some of the upper bounds are omitted then in case of positive objective coefficients all optimum solutions of the new problem and, in general, some of its optimum solutions can be determined by solving a transportation problem with upper bound. Finally, let the standard problem be modified so that in the constraint system instead of the equality sign the relations $\leq$ and $\geq$ are also allowed. The solution of this model can also be reduced to problem B.

ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОМУ ИЗ ВИДОВ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Заменяем в системе ограничений стандартной транспортной задачи знаки равенства с нижними и верхними пределами (проблема «А»). Эта задача эквивалентна транспортной задаче с верхним пределом (проблема «Б»). Цель данной статьи заключается в том, чтобы рассмотреть взаимосвязи проблем «А» и «Б» с некоторыми типами транспортных задач. Если в проблеме «А» из числа верхних пределов c_{ij} и d_j некоторые будут упущены, то в случае $c_{ij} > 0$ любое оптимальное решение новой задачи а в общем случае некоторые оптимальные решения могут быть определены путем решения транспортной задачи с верхним пределом. В заключении стандартная задача может быть изменена так, что системе ограничений вместо знака равенства будет допускать также и отношения $\leq$ и $\geq$. Такое решение также может быть сведено к проблеме «Б».

Parametrikus módszer az indefinit kvadratikus programozási feladatok megoldására

1. Bevezetés

Adott az

$$L = \{x \mid x \geq 0, Ax \leq b\} \subset \mathbb{R}^n$$

nemüres, korlátos konvex poliéder, és az n -változós

$$F(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T D x$$

kvadratikus függvény. (A feladatban szereplő állandók valamennyien valós értékek.) A

$$\max_{x \in L} F(x) \quad (1)$$

feladatot kvadratikus programozási (a továbbiakban: QP) feladatnak nevezük. A D mátrix legyen (célszerűen, de nem szükségszerűen) szimmetrikus; a feladat legspeciálisabb eseteként (amikor $D = 0$) a lineáris programozási feladatot nyerjük.

Az (1) feladat megoldására kidolgozott módszerek közül legismertebbek a lokális Kuhn–Tucker–Lagrange feltételekre épülő szimplex algoritmus különböző variánsai (pl. [17], [19]), de más lokális — elsősorban a hatékony irány módszerekre épülő — módszerek is használatosak. (Murray [14] pl. az aktív feltételek lépésenkénti szisztematikus változtatásával kombinálja kvázi-Newton módszerét.) A lokális módszerekkel azonban csak lokális maximum nyerhető, így ezekkel a módszerekkel teljes sikerre csak akkor számíthatunk, ha D negatív (szemi)definit (konvex QP), ugyanis ilyenkor a lokális maximum egyúttal globális maximum is.

Speciális az az eset is, amikor D pozitív (szemi)definit (konkáv QP) — ekkor a megoldást az L halmaz csúspontjai között kell keresnünk. Kis méretű feladatok esetén jól használható a csúspontok teljes leszámllálása; nagyobb, méretek esetén részleges leszámllálások (pl. Cabot, Francis [3]), vagy a lokális optimumpontból kiinduló metszősík módszerek (Forgó [6], Tui [16]) vezetnek eredményre.

A konvex, ill. konkáv QP megoldási módszerei — Martos [11], [12] vizsgálatai nyomán — könnyen kiterjeszthetők kvázikonvex, ill. kvázikonkáv feladatokra is. Ennél általánosabb indefinit QP feladatok azonban már eléggé nehezen kezelhetők. Pl. Ritter [4], [15] a metszősík módszert fejleszti tovább, Mueller [13] pedig a gradiens projekció módszerére építi fel több pontból indított heurisztikus algoritmusát. Forgó [8] ugyancsak metszősík módszert alkalmaz egy „ ε -optimális” megoldás felkutatására.

Az ismert *paraméteres* módszerek lényege, hogy a változók egy részét paraméterként kezelve csökkentett méretű multiparametrikus konvex kvadratikuss vagy lineáris programozási feladatok sorozatát állíthatjuk elő (*Van De Panne* [17], *Forgó* [7], [8]).

A dolgozat egy új paraméterezési lehetőségre hívja fel a figyelmet; részletesen foglalkozik a primál-duál multiparametrikus lineáris programozással, és megmutatja, hogy a „szétválasztás és korlátozás” módszerével hogyan növelhető az algoritmus hatékonysága.

2. Visszavezetés redukált méretű QP feladatokra paraméterezéssel

Az indefinit mátrixokra jellemző, hogy már eleve tartalmaznak (vagy — amint azt az 5. pontban látni fogjuk — célszerű lineáris transzformációkkal mindig elérhető, hogy tartalmazzanak) egy $\mathbf{0}$ főminor-mátrixot.

Tegyük tehát fel, hogy egy $(n - p)$ -edrendű $\mathbf{0}$ főminor blokk áll — ha kell, a sorok és oszlopok célszerű, azonos permutációja után — a bal felső sarokban, azaz legyen

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{12}^T & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}$$

Ha az x és a c vektort is a $\mathbf{D}$ mátrix particiójának megfelelően particionáljuk, akkor az (1) feladat célfüggvénye az

$$F(x) = F(x_1, x_2) = [c_1^T, c_2^T] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [x_1^T, x_2^T] \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{12}^T & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

alakot ölti. Végezzük el a szorzásokat, és vezessük be az $x_2 = t$ jelölést:

$$\begin{aligned} F(x_1, t) &= c_1^T x_1 + c_2^T t + \frac{1}{2} t^T \mathbf{D}_{12}^T x_1 + \frac{1}{2} x_1^T \mathbf{D}_{12} t + \frac{1}{2} t^T \mathbf{D}_{22} t = \\ &= c_2^T t + \frac{1}{2} t^T \mathbf{D}_{22} t + (c_1 + \mathbf{D}_{12} t)^T x_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Az $\mathbf{A}x \leq b$ feltételt ugyanígy felbontva kapjuk, hogy

$$[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ t \end{bmatrix} \leq b,$$

azaz

$$\mathbf{A}_1 x_1 \leq b - \mathbf{A}_2 t.$$

Ha a p komponensű t vektorváltozót *paraméterként* kezeljük, akkor a (2) célfüggvénnyel felírt

$$f(t) = \max_{x_1} \{ F(x_1, t) \mid x_1 \geq 0, \mathbf{A}_1 x_1 \leq b - \mathbf{A}_2 t, t \geq 0 \} \quad (3)$$

feladat csak annyiban tér el a 4. pontban tárgyalandó „szokványos” primál-duál parametrikus lineáris programozási feladattól, hogy az $F(x_1, t)$ célfüggvényben egy, a t paramétertől kvadratikusan függő $c_2^T t + \frac{1}{2} t^T \mathbf{D}_{22} t$ rész is szerepel. Ez azonban semmi nehézséget nem jelent, mivel a primál-duál

feladat megoldásában az $f(t)$ függvénynek az $L_1, \dots, L_k, \dots, L_s$ karakterisztikus tartományok feletti $f_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, s$ része mindenképpen kvadrátikus. Írhatjuk tehát, hogy

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{ha } t \in L_1, \\ \vdots \\ f_k(t), & \text{ha } t \in L_k, \\ \vdots \\ f_s(t), & \text{ha } t \in L_s, \end{cases}$$

ahol

$$f_k(t) = c^{(k)T}t + \frac{1}{2}t^T \mathbf{D}^{(k)}t, \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

Mivel nyilvánvaló, hogy

$$\max_{x \in L} F(x) = \max_{1 \leq k \leq s} \left\{ \max_{t \in L_k} f_k(t) \right\},$$

ezért az (1) feladat megoldása s számú — csökkentett dimenziójú — QP feladat megoldására vezethető vissza, ugyanis a

$$\max_{t \in L_k} f_k(t) = \max_{t \in L_k} \left\{ c^{(k)T}t + \frac{1}{2}t^T \mathbf{D}^{(k)}t \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (4)$$

feladat formailag azonos az (1) feladattal, csupán $t \in R^p$ ($p < n$).

A (4) feladat — amennyiben $\mathbf{D}^{(k)}$ indefinit mátrix — hasonló probléma elé állít bennünket, mint az (1) feladat: a t változót most már *programváltozóként* kezelve megismételjük a paraméterezést, tovább csökkentve ezzel a részfeladatok dimenzióját.

Ha pedig $\mathbf{D}^{(k)}$ (szemi)definit, akkor a $\max_{t \in L_k} f_k(t) = f_k^0$ értéket a konvex vagy a konkáv QP bármely ismert eszközével meghatározhatjuk.

A definit QP feladatok megoldására szolgáló részprogramokat szubrutinként kell kezelnünk, mert az adott esetben egymásba skatulyázott, egyre csökkenő dimenziójú indefinit QP feladatok sorát mindig egy definit QP feladat megoldása zárja. A felbontás során ugyanis célfüggvényként előbb vagy utóbb mindig egy (szemi)definit kvadrátikus függvényt (extrém esetben — az egyváltozós szintre jutva — egy parabolát) kapunk.

Az összes, tovább már nem bontott karakterisztikus tartományon kiszámítván a definit QP feladat optimumát, e részoptimumok maximuma az (1) feladat megoldását szolgáltatja.

3. Megoldás a szétválasztás és korlátozás módszerével

Az előző pontban ismertetett algoritmus tulajdonképpen egy *teljes leszámolás*, mivel minden karakterisztikus tartomány vizsgálatára explicite szükségünk van. Az algoritmus hatékonysága azonban a szétválasztás és korlátozás módszerével nagyban növelhető, az alábbiak szerint.

Az $\frac{1}{2} \mathbf{D}^{(k)}$ mátrix oszloponkénti particiója legyen

$$\frac{1}{2} \mathbf{D}^{(k)} = [d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_p^{(k)}];$$

az L_k karakterisztikus tartományon érvényes célfüggvény ezzel

$$f_k(t) = c^{(k)T}t + \frac{1}{2} t^T \mathbf{D}^{(k)}t = \sum_{j=1}^p c_j^{(k)} t_j + \sum_{j=1}^p (t^T d_j^{(k)}) t_j = \sum_{j=1}^p (c_j^{(k)} + t^T d_j^{(k)}) t_j.$$

Mivel

$$\max_{t \in L_k} f_k(t) = \max_{t \in L_k} \sum_{j=1}^p (c_j^{(k)} + t^T d_j^{(k)}) t_j \leq \max_{t \in L_k} \sum_{j=1}^p (c_j^{(k)} + \max_{t \in L_k} t^T d_j^{(k)}) t_j,$$

ezért a

$$\max_{t \in L_k} t^T d_j^{(k)} = h_j^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (5)$$

lineáris programozási feladatsor megoldása után az $f_k(t)$ függvényre — egy újabb lineáris programozási feladat megoldásával — jól használható felső korlátot nyerhetünk:

$$\max_{t \in L_k} f_k(t) \leq \max_{t \in L_k} \sum_{j=1}^p (c_j^{(k)} + h_j^{(k)}) t_j = \max_{t \in L_k} (c^{(k)} + h^{(k)})^T t = \bar{f}_k. \quad (6)$$

Az (5) feladatsor megoldása — mivel csak a célfüggvények különbözőek, a feltételek nem — nem okoz nehézséget.

A teljes leszámplálási algoritmusunkat célszerű tehát úgy módosítani, hogy minden karakterisztikus tartományhoz hozzárendeljük a célfüggvény (6) szerinti felső korlátját, és csak a mindenkor legkedvezőbb korláttal rendelkező karakterisztikus tartományt vesszük részletes vizsgálat alá. Algoritmusunkat a szétválasztás és korlátozás szabályai szerint addig folytatjuk, amíg a fa-gráf valamelyik aktuális végpontján meg nem jelenik egy domináns, effektív célfüggvényérték.

4. A primál-duál parametrikus lineáris programozásról

A primál-duál feladat általános alakja

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}x &= b + \Delta t \\ x &\geq 0, \quad t \in T \\ f(t) &= \max_x (c + \mathbf{\Gamma}t)^T x, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ahol a

$$T = \{t \mid \mathbf{R}t = r\} \subset \mathbf{R}^p$$

konvex poliéder a p -komponensű vektorparaméter értelmezési tartománya.

A (7) feladat az

$$\begin{aligned} \mathbf{A}x &= b \\ x &\geq 0, \quad t \in T \\ f(t) &= \max_x (c + \mathbf{\Gamma}t)^T x \end{aligned}$$

primális, és az

$$Ax = b + \Delta t$$

$$x \geq 0, t \in T$$

$$f(t) = \max_x c^T x$$

duális feladat egyfajta általánosításának tekinthető. (A (7) feladatnak azzal a speciális esetével, amikor a célvektorban és a kapacitásvektorban más-más paraméterek szerepelnek, vagyis a célvektor $c + \Gamma t$, a kapacitásvektor pedig $b + \Delta t$ alakú, Weinert [18] foglalkozik.)

Bizonyítható (lásd pl. [5]), hogy a primális (ill. a duális) feladatnál a T értelmezési tartomány felbontható összefüggő, szeparált $L_1, L_2, \dots, L_s$ konvex poliéderek (karakterisztikus tartományok) rendszerére, amely rendszer felett a feladat $f(t)$ megoldása tartományonként lineáris, folytonos konvex (ill. konkáv) függvény.

A primál-duál feladat a — pl. [9]-ben részletesen tárgyalt — primális, ill. duális feladattól elsősorban abban tér el, hogy

- az $f(t)$ függvény továbbra is folytonos, de tartományonként nem lineáris, hanem kvadratikus,
- a karakterisztikus tartományoknak egy-egy határlapján nemcsak egy, hanem több szomszédos tartományba is átléphetünk, mivel a mindenkori szűk keresztmetszet (és így az átlépést realizáló transzformáció generáló eleme is) függ a vektorparamétertől.

A (7) feladat adatait az alábbi táblába rendezhetjük:

	x^T	
	A	$b + \Delta t$
$f(t)$	$-(c + \Gamma t)^T$	0

Ha az A mátrix mérete $m \times r$, akkor — feltéve, hogy A sorai lineárisan függetlenek — a lehetséges bázisok száma $\binom{r}{m}$. Egy B bázishoz (vagyis egy B bázismátrixhoz) tartozó rövid szimplex tábla (amikor is a bázisváltozók csak a bal szegélyen szerepelnek) az alábbi:

	$(x^N)^T$	
x^B	A'	$b'(t)$
$f(t)$	$[c'(t)]^T$	$(c + \Gamma t)_B^T b'(t)$

ahol x^B tartalmazza a bázisváltozókat,
 x^N tartalmazza a nembázis változókat,

$$A' = B^{-1} A,$$

$$b'(t) = B^{-1} (b + \Delta t),$$

$$[c'(t)]^T = (c + \Gamma t)_B^T A' - (c + \Gamma t)_N^T.$$

(Itt $(c + \Gamma t)_B^T$ és $(c + \Gamma t)_N^T$ jelöli a célvektornak a bázis, ill. nembázis változókra vonatkozó részét.)

A B bázis *optimális*, ha a

$$\left. \begin{array}{l} b'(t) \geq 0 \\ c'(t) \geq 0 \\ t \in T \end{array} \right\} \quad (8)$$

rendszer konzisztens. A konzisztens (8) egyenlőtlenségrendszer megoldásaként nyert

$$L_B = \{t \mid t \in T, b'(t) \geq 0, c'(t) \geq 0\} \neq \emptyset$$

konvex poliéder a B bázishoz tartozó karakterisztikus tartomány. Az L_B karakterisztikus tartomány felett

$$\left. \begin{array}{l} x^B(t) = b'(t) \\ x^N = 0 \end{array} \right\}$$

az optimális program, és $f(t) = (c + \Gamma t)_B^T b'(t)$.

Ha nem teljes leszámhlálással dolgozunk (azaz, ha nem akarjuk valamennyi bázist explicite megvizsgálni; — ez nagy méretű feladatok esetén túl sok munkát jelentene), akkor két alapvető kérdésre kell választ adnunk:

1. Hogyan határozhatunk meg egy optimális bázist (vagyis egy karakterisztikus tartományt), és
2. hogyan határozhatjuk meg az összes többi optimális bázist (ill. karakterisztikus tartományt).

ad. 1. Az első kérdést könnyen megválaszolhatjuk. Ha ugyanis ismerünk egy $t_0 \in T$ vektorparamétert, akkor a

$$\max \{(c + \Gamma t_0)^T x \mid x \geq 0, Ax = b + \Delta t_0\} \quad (9)$$

paraméter nélküli („közönséges”) LP feladat megoldásához tartozó B_1 bázis lesz az első optimális bázis, és a (8) rendszer megoldása az L_1 karakterisztikus tartomány.

ad. 2. Ismeretes, hogy ha a *primális* feladat megoldása során szomszédos tartományba akarunk átlépni, akkor egy *nemredundáns* (aktivizálható) feltételnek megfelelő *oszlopban* kell *pozitív* generáló elemet választanunk a szűk keresztmetszetben. A *duális* feladatnál is hasonló a helyzet, csak ott *negatív* generáló elemet kell választanunk a megfelelő *sor* szűk keresztmetszetében. (Meg kell jegyeznünk, hogy a degeneráció ezeknél a feladatoknál, csakúgy, mint a primál-duál feladatnál, komplikációkat okozhat.)

A primál-duál feladatnál is szükségünk van a nemredundáns feltételekre. Legyen a (8) rendszer aktivizálható feltételeinek indexhalmaza

$$I_0 = \{i \mid a_i'(t) \geq 0 \text{ feltétel nem redundáns, } i = 1, 2, \dots, m\},$$

és

$$J_0 = \{j \mid a_j'(t) \geq 0 \text{ feltétel nem redundáns, } j = 1, 2, \dots, r\}.$$

Most is a nemredundáns feltételeknek megfelelő oszlopban, ill. sorban kell pozitív, ill. negatív generáló elemet választani a szűk keresztmetszetben.

Mivel azonban itt a szűk keresztmetszet is függ a paramétertől, csak további nehézségek árán (pl. a karakterisztikus tartományok valamennyi csúcának meghatározásával) tudnánk kijelölni a szomszédos tartományokba átvezető generáló elemeket.

Sokkal egyszerűbb, ha valamennyi $a'_{kj} < 0$, $k \in I_0$ és $a'_{il} > 0$, $l \in J_0$ elemet számon tartjuk, mint *potenciális generáló elemet*. Ezek közül az elemek közül azonban csak azok lesznek tényleges generáló elemek, amelyekkel végrehajtott transzformáció konzisztens feltételi rendszerhez vezet.

A primál-duál feladat specialitásaként az is előfordulhat, hogy szomszédos bázishoz geometriailag nem szomszédos karakterisztikus tartomány tartozik. Ez azonban semmi problémát nem jelent, mert a tényleges geometriai viszonyoknak nincs jelentőségük abban az *algoritmusban*, melyet — vázlatosan — alább ismertetünk.

1. A (9) feladat megoldásával meghatározzuk az első szimplex táblát, majd kijelöljük a potenciális generáló elemeket.
2. Megnézzük, hogy a táblán van-e olyan potenciális generáló elem, amelyik eddig még nem vizsgált B bázist generál. Ha nincs, térjünk rá a 4. lépésre. Egyébként
3. a B bázist vegyük fel a vizsgálat alá vett bázisok listájára, majd nézzük meg, hogy a megfelelő (8) rendszer konzisztens-e. Ha a (8) rendszer inkonzisztens, térjünk vissza a 2. lépésre. Ha viszont a (8) rendszer konzisztens, számítsuk ki az A' mátrixot — így egy új szimplex táblát nyerünk, melyet a még nem vizsgált szimplex táblák közé sorolunk. A célszerűség kedvéért a konzisztencia-vizsgálattal együtt itt határozzuk meg a nemredundáns feltételek I_0 és J_0 indexhalmazát is. Térjünk vissza a 2. lépésre.
4. Van-e még nem vizsgált szimplex tábla? Ha nincs, megoldottuk a primál-duál programozási feladatot. Ha van, akkor kiválasztjuk a következő táblát, és
 - kiíratjuk a legfontosabb adatokat (L_k , $x^k(t)$, $f_k(t)$, stb.),
 - meghatározzuk a potenciális generáló elemeket.
 Térjünk vissza a 2. lépésre.

[5. A 0 főminor előállításáról

A fődiagonálisban előállítható O blokk méreteinek lehetséges határait a *őrtengelytranszformáció* segítségével vizsgálhatjuk.

Ismeretes, hogy ha D egy n -edrendű szimmetrikus mátrix, akkor a célfüggvény $\frac{1}{2} x^T D x$ kvadratikus része $\sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{x}_j^2$ alakra transzformálható, ahol a λ_j együtthatók a D mátrix sajátértékei. Ha a pozitív sajátértékek száma w (indefinit mátrixról lévén szó $0 < w < n$), akkor a sajátértékek közül kiválasztható legfeljebb $z = \min \{w, n - w\}$ számú $\lambda_k > 0$, $\lambda_l < 0$ pár. Bevezetve az

$$\hat{x}_k = \sqrt{\lambda_k} \hat{x}_k + \sqrt{-\lambda_l} \hat{x}_l,$$

$$\hat{x}_l = \sqrt{\lambda_k} \hat{x}_k - \sqrt{-\lambda_l} \hat{x}_l$$

új változókat, azt kapjuk, hogy $\lambda_k \hat{x}_k + \lambda_l \hat{x}_l^2 = \hat{x}_k \hat{x}_l$, vagyis minden ilyen párhoz megjelentethető egy

$$\hat{\mathbf{D}}(k, l) = \begin{bmatrix} \hat{x}_k & \hat{x}_l \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

főminor. Mivel az így előállítható másodrendű főminorok maximális száma z , ezért $\hat{\mathbf{D}}$ vonalainak célszerű permutációjával legfeljebb z -edrendű $\mathbf{0}$ főminor nyerhető.

Nézzük most a (3) feladatot! Mivel $t \in R^p$ és $x_1 \in R^{n-p}$, ezért a $\mathbf{0}$ főminor méreteinek növelésével az $\mathbf{A}_1$ mátrix mérete (és ezzel a karakterisztikus tartományok száma) növekszik, csökken viszont a p paraméterszám (és ezzel együtt az egyes karakterisztikus tartományokon megoldandó részfeladatok dimenziója). Számítástechnikai tapasztalatok hiányában a $\mathbf{0}$ főminor méreteinek növelése látszik célszerűnek.

Mindenesetre, ha csupán egyetlen zérust akarunk előállítani, akkor ehhez elegendő a főátlóban kiválasztani egyetlen pozitív-negatív elempárt, sőt, elég egy olyan másodrendű főminort találni, amelynek determinánsa negatív. Ugyanis, ha

$$\det \mathbf{D}(i, j) = \begin{vmatrix} d_{ii} & d_{ij} \\ d_{ij} & d_{jj} \end{vmatrix} < 0,$$

akkor a megfelelő kvadratikus rész szorzattá alakítható az

$$\frac{1}{2} d_{ii} x_i^2 + d_{ij} x_i x_j + \frac{1}{2} d_{jj} x_j^2 = \frac{1}{2} d_{ii} (x_i + \alpha x_j) (x_i + \beta x_j) = \frac{1}{2} d_{ii} \hat{x}_i \hat{x}_j$$

összefüggésnek megfelelően, ahol

$$\alpha = \frac{d_{ij} + \sqrt{-\det \mathbf{D}(i, j)}}{d_{ii}},$$

$$\beta = \frac{d_{ij} - \sqrt{-\det \mathbf{D}(i, j)}}{d_{ii}}.$$

Ha nagyobb $\mathbf{0}$ blokkot akarunk előállítani, akkor a főtengelytranszformáció mellett (amelynek itt inkább csak elvi szerepe van) a *diagonizáló* eljárást is sikerrel alkalmazhatjuk. (A kvadratikus formák diagonizáló transzformációja abban különbözik a lineáris bázistranszformációtól, hogy a diagonális generáló elem sora és oszlopa — a generáló elemet leszámítva — zérussá változik. Erről a transzformációs eljárásról bővebben pl. [10]-ben vagy [17]-ben olvashatunk.)

A diagonizáló transzformációs egyenleteket $\mathbf{D}$ transzformált alakjainak segítségével írhatjuk fel. Az első lépésben pl. a $\mathbf{D}$ mátrix első sorát használhatjuk fel az

$$\hat{x}_1 = d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1n}x_n$$

új változó bevezetésére. ($\hat{x}_1$ előjelkötetlen vagy előjelkötött, a $d_{11}, \dots, d_{1n}$ állandók előjelétől függően.) Innen

$$x_1 = \frac{1}{d_{11}} (\hat{x}_1 - d_{12}x_2 - \dots - d_{1n}x_n) \geq 0.$$

Ekkor d_{11} a generáló elem, és $\mathbf{D}$ transzformáltja

$$\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \frac{1}{d_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} - \frac{d_{12}^2}{d_{11}} & \dots & d_{2n} - \frac{d_{12}d_{1n}}{d_{11}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & d_{2n} - \frac{d_{12}d_{1n}}{d_{11}} & \dots & d_{nn} - \frac{d_{1n}^2}{d_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d'_{22} & d'_{23} & \dots & d'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & d'_{2n} & d'_{3n} & \dots & d'_{nn} \end{pmatrix}$$

A második lépésben az

$$\hat{x}_2 = d'_{22}x_2 + d'_{23}x_3 + \dots + d'_{2n}x_n$$

transzformációt alkalmazzuk. Az új $\mathbf{D}''$ mátrixot a d'_{22} generáló elemmel nyerjük, stb.

Például legyen

$$f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + \frac{117}{40}x_3^2 - 3x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_3,$$

így

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & \frac{117}{20} \end{bmatrix}.$$

Az első új változó

$$\hat{x}_1 = 4x_1 - 3x_2 + 3x_3,$$

$\mathbf{D}$ transzformáltja

$$\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{21}{4} \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{18}{5} \end{pmatrix}$$

A második új változó

$$\hat{x}_2 = \frac{15}{4}x_2 + \frac{21}{4}x_3,$$

ezzel

$$D'' = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & x_3 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{4} \end{pmatrix},$$

és $f(x)$ második transzformáltja

$$f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, x_3) = \frac{1}{8} \hat{x}_1^2 + \frac{2}{15} \hat{x}_2^2 - \frac{15}{8} x_3^2.$$

Természetesen, bármelyik transzformációt alkalmazzuk, az új változókat nemcsak a célfüggvénybe, hanem a feltételi rendszer minden egyes feltételébe is (a nemnegativitási feltételeket is beleértve) be kell vezetnünk.

6. Mintafeladat

Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &+ x_4 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &\leq 12 \\ 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$F(x) = x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_2x_4 + 3x_3^2 + \frac{9}{4}x_4^2 - 4x_1 - 2x_2 + 3x_4 = \max.$$

feladatot!

Mivel x_1^2 mellett x_1x_2 és x_1x_3 tag is hiányzik a célfüggvényből, a **0** főminor rendjét az

$$x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2 = (x_2 + x_3)(x_2 + 3x_3) = \hat{x}_2\hat{x}_3,$$

azaz

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}(3\hat{x}_2 - \hat{x}_3) \geq 0 \\ x_3 &= \frac{1}{2}(\hat{x}_3 - \hat{x}_2) \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

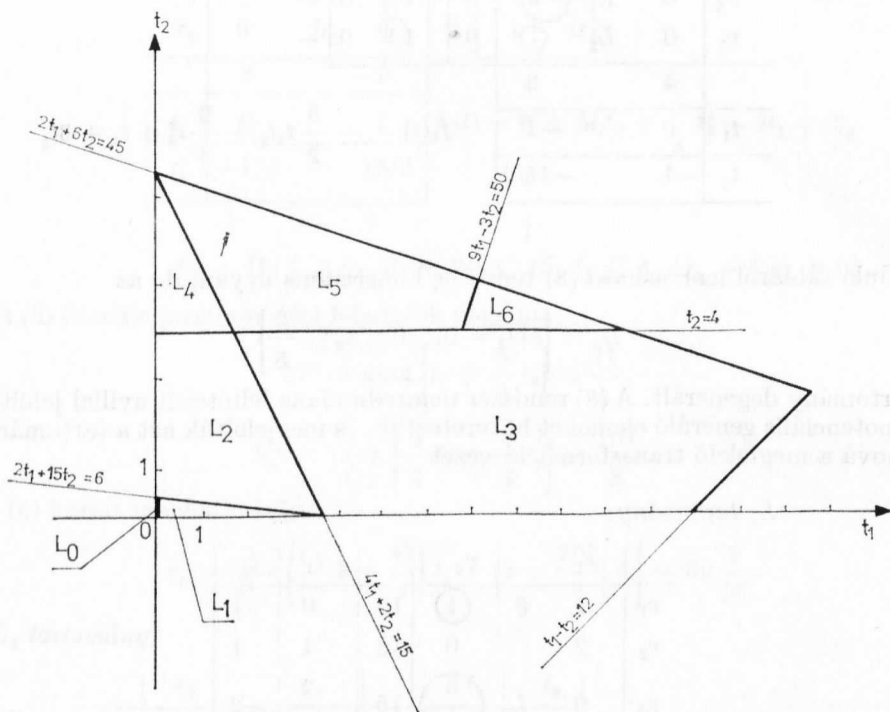
transzformáció felhasználásával növelhetjük.

Az új változókat bevezetve a feltételi rendszerbe és a célfüggvénybe, az alábbi feladatot nyerjük (most $\hat{x}_2$ és $\hat{x}_3$ is előjelkötött):

$$\begin{aligned} x_1 + 3\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + x_4 &\leq 10 \\ 2x_1 &+ \hat{x}_3 - x_4 \leq 12 \\ 5\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + 2x_4 &\leq 15 \\ -3\hat{x}_2 + \hat{x}_3 &\leq 0 \\ \hat{x}_2 - \hat{x}_3 &\leq 0 \\ x_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$x_1 x_4 + \hat{x}_2 \hat{x}_3 + \frac{15}{2} \hat{x}_2 x_4 - \frac{5}{2} \hat{x}_3 x_4 + \frac{9}{4} x_4^2 - 4x_1 - 3\hat{x}_2 + \hat{x}_3 + 3x_4 = \max.$$

$\hat{x}_3 = t_1, x_4 = t_2$ paraméterezéssel az alábbi kétparaméteres feladathoz jutunk, melynek karakterisztikus tartományai az 1. ábrán láthatók:



1. ábra

$$x_1 + 3\hat{x}_2 \leq 10 + t_1 - t_2$$

$$2x_1 \leq 12 - t_1 + t_2$$

$$5\hat{x}_2 \leq 15 + t_1 - 2t_2$$

$$-3\hat{x}_2 \leq -t_1$$

$$\hat{x}_2 \leq t_1$$

$$x_1, \hat{x}_2, t_1, t_2 \geq 0$$

$$x_1(t_2 - 4) + \hat{x}_2 \left(t_1 + \frac{15}{2} t_2 - 3 \right) - \frac{5}{2} t_1 t_2 + \frac{9}{4} t_2^2 + t_1 + 3t_2 = \max.$$

Az

	x_1	$\hat{x}_2$		t_1	t_2
v_1	1	0	③	10	1 -1
v_2	2		0	12	-1 1
v_3	0	L_3	⑤	15	1 -2
v_4	0	L_1	③	0	-1 0 ←
v_5	0	L_2	①	0	1 0 ←
	4	3			
t_1	0	-1		$f_0(t) = -\frac{5}{2}$	
t_2	-1	-15/2			

↑

induló tábláról leolvasható (8) rendszer konzisztens ugyan, de az

$$L_0 = \left\{ t \mid t_1 = 0, \quad 0 \leq t_2 \leq \frac{2}{5} \right\}$$

tartomány degenerált. A (8) rendszer nemredundáns feltételeit nyíllal jelöltük; a potenciális generáló elemeket bekereteztük, és megjelöltük azt a tartományt, ahová a megfelelő transzformáció vezet

L_1 tartomány:

	x_1	v_4		t_1	t_2	
v_1	1	0	①	10	0	-1
v_2	2		0	12	-1	1
v_3	0	L_3	⑤ ③	15	$-\frac{2}{3}$	-2
$\hat{x}_2$	0	$-\frac{1}{3}$		0	$\frac{1}{3}$	0
v_5	0	L_2	① ③	0	$\frac{2}{3}$	0
	4	1				
t_1	0	-1/3		$f_1(t) = \frac{1}{3}t_1^2 + \frac{9}{4}t_2^2 + 3t_2$		
t_2	-1	-5/2				

↑

$$L_1 = \{ t \mid t \geq 0, \quad 2t_1 + 15t_2 \leq 6 \}.$$

Mivel $f_1(t)$ konvex függvény, és az L_1 tartománynak mindössze 3 csúcsa van, teljes leszámplálással kapjuk, hogy $f_1^0 = \max_{t \in L_1} f_1(t) = 3$.

L_2 tartomány:

	x_1	v_5		t_1	t_2
v_1	① L_4	-3	10	-2	-1
v_2	② $\emptyset$	0	12	-1	1
v_3	0	L_3 ⑤	15	-4	-2
v_4	0	L_1 ③	0	2	0
$\hat{x}_2$	0	L_0 ①	0	1	0
	4	-3	$f_2(t) = t_1^2 + 5t_1t_2 + \frac{9}{4}t_2^2 - 2t_1 + 3t_2$		
t_1	0	1			
t_2	-1	15/2			

$$L_2 = \{t \mid t \geq 0, 4t_1 + 2t_2 \leq 15, t_2 \leq 4, 2t_1 + 15t_2 \geq 6\}.$$

Az (5) lineáris programozási feladatok megoldása:

$$h_1^{(2)} = \max_{t \in L_2} \left\{ t_1 + \frac{5}{2}t_2 \right\} = \frac{47}{4},$$

$$h_2^{(2)} = \max_{t \in L_2} \left\{ \frac{5}{2}t_1 + \frac{9}{4}t_2 \right\} = \frac{107}{8}.$$

A (6) korlát meghatározása:

$$\bar{f}_2 = \max_{t \in L_2} \left\{ \left(-2 + \frac{47}{4} \right) t_1 + \left(3 + \frac{107}{8} \right) t_2 \right\} = 82 \frac{9}{16}.$$

 L_3 tartomány:

	x_1	v_3		t_1	t_2
v_1	① L_5	-3	1	2	1
		5		5	5
v_2	② L_6	0	12	-1	1
$\hat{x}_2$	0	1	3	1	2
		5		5	5
v_4	0	3	9	2	6
		5		5	5
v_5	0	L_2 ①	-3	4	2
		5		5	5
	4	-3/5	$f_3(t) = \frac{1}{5}t_1^2 - \frac{7}{5}t_1t_2 - \frac{3}{4}t_2^2 + \frac{17}{5}t_1 + \frac{267}{10}t_2 - 9$		
t_1	0	1/5			
t_2	-1	3/2			

$$L_3 = \{t \mid t \geq 0, t_1 - t_2 \leq 12, 2t_1 + 6t_2 \leq 45, 4t_1 + 2t_2 \geq 15, t_2 \leq 4\}.$$

$$h_1^{(3)} = \max_{t \in L_3} \left\{ \frac{1}{5} t_1 - \frac{7}{10} t_2 \right\} = \frac{12}{5}, \quad h_2^{(3)} = \max_{t \in L_3} \left\{ -\frac{7}{10} t_1 - \frac{3}{4} t_2 \right\} = -\frac{21}{8},$$

$$\bar{f}_3 = \max_{t \in L_3} \left\{ \frac{29}{5} t_1 + \frac{963}{40} t_2 - 9 \right\} = 148,2.$$

L_4 tartomány:

	v_1	v_5		t_1	t_2
x_1	① L_2	-3	10	-2	-1
v_2	-2	6	-8	3	3
v_3	0	L_5 ⑤	15	-4	-2
v_4	0	3	0	2	0
$\hat{x}_2$	0	1	0	1	0

	-4	9
t_1	0	1
t_2	1	9/2

$$f_4(t) = t_1^2 + 3t_1 t_2 + \frac{5}{4} t_2^2 + 6t_1 + 17t_2 - 40$$

$$L_4 = \{t \mid t \geq 0, 4t_1 + 2t_2 \leq 15, t_2 \geq 4\}.$$

$$h_1^{(4)} = \max_{t \in L_4} \left\{ t_1 + \frac{3}{2} t_2 \right\} = \frac{45}{4}, \quad h_2^{(4)} = \max_{t \in L_4} \left\{ \frac{3}{2} t_1 + \frac{5}{4} t_2 \right\} = \frac{75}{8},$$

$$\bar{f}_4 = \max_{t \in L_4} \left\{ \frac{69}{4} t_1 + \frac{211}{8} t_2 - 40 \right\} = 157 \frac{13}{16}$$

L_5 tartomány:

	v_1	v_3		t_1	t_2
x_1	① L_3	- $\frac{3}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
v_2	② L_6	$\frac{6}{5}$	10	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\hat{x}_2$	0	$\frac{1}{5}$	3	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
v_4	0	$\frac{3}{5}$	9	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$
v_5	0	L_4 ① $\frac{1}{5}$	-3	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$

	-4	9/5
t_1	0	1/5
t_2	1	9/10

$$f_5(t) = \frac{1}{5} t_1^2 - t_1 t_2 - \frac{11}{20} t_2^2 + \frac{9}{5} t_1 + \frac{269}{10} t_2 - 13$$

$$L_5 = \{t \mid t \geq 0, 9t_1 - 3t_2 \leq 50, 2t_1 + 6t_2 \leq 45, 4t_1 + 2t_2 \geq 15, t_2 \geq 4\}.$$

$$h_1^{(5)} = \max_{t \in L_5} \left\{ \frac{1}{5}t_1 - \frac{1}{2}t_2 \right\} = -\frac{28}{45}, \quad h_2^{(5)} = \max_{t \in L_5} \left\{ -\frac{1}{2}t_1 - \frac{11}{20}t_2 \right\} = -\frac{123}{40},$$

$$\bar{f}_5 = \max_{t \in L_5} \left\{ \frac{53}{45}t_1 + \frac{953}{40}t_2 - 13 \right\} = 165 \frac{11}{16}.$$

L_6 tartomány:

	v_2	v_3	t_1	t_2	
v_1	$\left(-\frac{1}{2} \right) L_5$	$\emptyset \left(\frac{3}{5} \right)$	-5	$\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$ ←
x_1	$\left(\frac{1}{2} \right) L_3$	0	6	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	0	$\frac{1}{5}$	3	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
v_4	0	$\frac{3}{5}$	9	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$ ←
v_5	0	$-\frac{1}{5}$	-3	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$
	-2	-3/5	$f_6(t) = \frac{1}{5}t_1^2 - \frac{19}{10}t_1t_2 - \frac{1}{4}t_2^2 + \frac{27}{5}t_1 + \frac{307}{10}t_2 - 33$		
t_1	0	1/5			
t_2	1/2	3/2			

↑

$$L_6 = \{t \mid t \geq 0, 9t_1 - 3t_2 \geq 50, 2t_1 + 6t_2 \leq 45, t_2 \geq 4\}.$$

$$h_1^{(6)} = \max_{t \in L_6} \left\{ \frac{1}{5}t_1 - \frac{19}{20}t_2 \right\} = -\frac{17}{10}, \quad h_2^{(6)} = \max_{t \in L_6} \left\{ -\frac{19}{20}t_1 - \frac{1}{4}t_2 \right\} = -\frac{679}{90},$$

$$\bar{f}_6 = \max_{t \in L_6} \left\{ \frac{37}{10}t_1 + \frac{1042}{45}t_2 - 33 \right\} = 111 \frac{115}{216}.$$

Mivel a $\max_{1 \leq k \leq 6} \bar{f}_k = 165 \frac{11}{16}$ érték $k = 5$ -re adódik, ezért az L_5 tartomány további vizsgálatára kerül sor. $f_5(t)$ egy indefinit kvadratikus függvény, ezért ismét egy dimenziócsökkentő paraméterezést kell végrehajtanunk.

Első lépésben $D^{(5)}$ főatlójában kell előállítanunk a zérust. Ezt az

$$\frac{1}{5}t_1^2 - t_1t_2 - \frac{11}{20}t_2^2 = \frac{1}{5} \left(t_1 - \frac{11}{2}t_2 \right) \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2 \right)$$

összefüggés felhasználásával tehetjük meg. Legyen

$$\hat{t}_1^* = t_1 - \frac{11}{2}t_2,$$

$$\hat{t}_2 = t_1 + \frac{1}{2}t_2 \geq 0,$$

innen

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{12}(\hat{t}_1^* + 11\hat{t}_2) \geq 0, \\ t_2 &= \frac{1}{6}(\hat{t}_2 - \hat{t}_1^*) \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

A transzformációs (11) egyenleteket behelyettesítve az L_5 tartomány feltételi rendszerébe és az $f_5(t)$ célfüggvénybe, az alábbi feladatot nyerjük:

$$5\hat{t}_1^* + 31\hat{t}_2 \leq 200$$

$$-5\hat{t}_1^* + 17\hat{t}_2 \leq 270$$

$$4\hat{t}_2 \geq 15$$

$$-\hat{t}_1^* + \hat{t}_2 \geq 24$$

$$\hat{t}_1^* + 11\hat{t}_2 \geq 0$$

$$\hat{t}_2 \geq 0$$

$$\frac{1}{5}\hat{t}_1^*\hat{t}_2 - \frac{13}{3}\hat{t}_1^* + \frac{92}{15}\hat{t}_2 - 13 = \max.$$

Legyen a paraméter $\hat{t}_2 = \tau$. Az induló szimplex tábla

	$\hat{t}_1^*$		τ
w_1	5	200	-31
w_2	-5	270	-17
w_3	0	-15	4
w_4	1	-24	1
w_5	-1	0	11
	13/3		
τ	-1/5	$f_{50}(\tau) = \frac{92}{15}\tau - 13$	

A bekeretezett helyen választva generáló elemet az előjelkötetlen $\hat{l}_1^*$ változót bevisszük a bázisba:

	w_2		τ	
w_1	1	470	-48	←
$\hat{l}_1^*$	$-\frac{1}{5}$	-54	$\frac{17}{5}$	
w_3	0	-15	4	←
w_4	$\frac{1}{5}$	30	$\frac{12}{5}$	
w_5	$-\frac{1}{5}$	-54	$\frac{72}{5}$	
$\frac{13}{15}$		$f_{51}(\tau) = \frac{17}{25}\tau^2 - \frac{97}{5}\tau + 221$		
τ	$-\frac{1}{25}$			

$$L_{51} = \left\{ \tau \mid \frac{15}{4} \leq \tau \leq \frac{235}{24} \right\}.$$

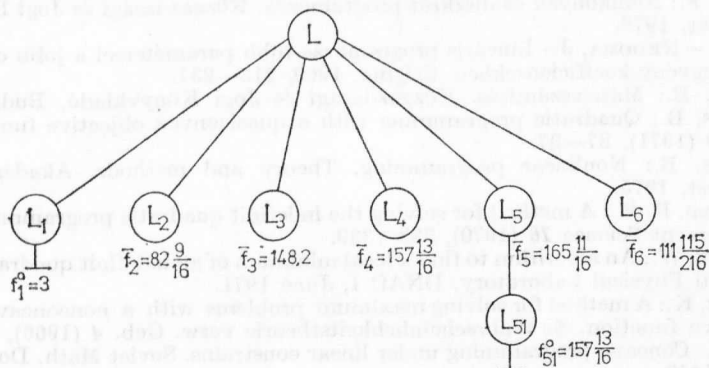
$f_{51}^0 = \max_{\tau \in L_{51}} f_{51}(\tau) = 157 \frac{13}{16}$, amit a függvény a $\tau^0 = \frac{15}{4}$ helyen vesz fel.

Mivel nincs több karakterisztikus intervallum, L_5 felbontása befejeződött.

Az $f_{51}^0 = 157 \frac{13}{16}$ érték a 2. ábrán látható fa-gráfon domináns effektív érték, tehát feladatunkat megoldottuk.

Az optimális program meghatározásához először is figyelembe kell vennünk, hogy $\hat{l}_2 = \tau^0 = \frac{15}{4}$, és az utolsó tábláról $\hat{l}_1^* = -54 + \frac{17}{5}\tau^0 = -\frac{165}{4}$. A (11) összefüggésből

$$\hat{x}_3 = t_1 = \frac{1}{12} \left(-\frac{165}{4} + \frac{165}{4} \right) = 0, \quad x_4 = t_2 = \frac{1}{6} \left(\frac{15}{4} + \frac{165}{4} \right) = \frac{180}{24} = \frac{15}{2},$$



2. ábra

az L_5 tartomány táblájából pedig

$$x_1 = 1 + \frac{2}{5}t_1 + \frac{1}{5}t_2 = \frac{5}{2}, \quad \hat{x}_2 = 3 + \frac{1}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_2 = 0.$$

Végül, a (10) összefüggésből

$$x_2 = \frac{1}{2}(3\hat{x}_2 - \hat{x}_3) = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}(\hat{x}_3 - \hat{x}_2) = 0.$$

Az optimális program e szerint $x^0 = \left[\frac{5}{2}, 0, 0, \frac{15}{2} \right]^T$.

Köszönetnyilvánítás. Végezetül szeretném megköszönni a lektoroknak, valamint Klafszyk Emil professzornak értékes megjegyzéseiket és tanácsait, melyek nélkül ez a dolgozat nem születhetett volna meg.

(Beérkezett: 1980. augusztus 15-én.)

IRODALOM

1. BALAS, E.: Nonconvex quadratic programming via generalized polars. Management Sciences Research Report. No. 278, G.S.I.A., Carnegie-Mellon University, October 1973.
2. BURDET, C. A.: General quadratic programming. Management Sciences Research Report. No. 299, G.S.I.A., Carnegie — Mellon University, November 1971.
3. CABOT, A. V.—FRANCIS, R. L.: Solving certain nonconvex quadratic minimization problems by ranking the extreme points. Opns. Res. 18 (1970), 82—86.
4. COTTLE, R. W.—MYLANDER, W. C.: Ritter's cutting plane method for nonconvex quadratic programming, in: Integer and nonlinear programming, ed. J. ABADIE, North-Holland, Amsterdam, 1970.
5. DINKELBACH, W.: Sensitivitätsanalysen und parametrische Programmierung. Springer V., 1969.
6. FORGÓ, F.: Cutting plane methods for solving nonconvex programming problems. Acta Cybernetica 1 (1972), 171—192.
7. FORGÓ, F.: Egy speciális kvadratikusan feladat megoldása. Szigma, 1975, 53—59.
8. FORGÓ, F.: Nemkonvex és diszkrét programozás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1978.
9. GÁL, T.—NEDOMA, J.: Lineáris programozás több paraméterrel a jobb oldalon vagy a célfüggvény-koefficiensekben. Szigma, 1969, 213—237.
10. KREKÓ, B.: Mátrixszámítás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1964.
11. MARTOS, B.: Quadratic programming with a quasiconvex objective function. Opns. Res. 19 (1971), 87—97.
12. MARTOS, B.: Nonlinear programming, Theory and methods. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
13. MUELLER, R. K.: A method for solving the indefinite quadratic programming problem. Management Science 16 (1970), 333—339.
14. MURRAY, W.: An algorithm to find a local minimum of an indefinite quadratic program. National Physical Laboratory, DNAC 1, June 1971.
15. RITTER, K.: A method for solving maximum problems with a nonconcave quadratic objective function. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 4 (1966), 340—351.
16. TUI, H.: Concave programming under linear constraints. Soviet Math. Dokl. 5 (1964), 1437—1440.

17. VAN DE PANNE, C.: Methods for linear and quadratic programming. North-Holland, Amsterdam, 1975.
18. WEINERT, H.: Solution of multiparametric linear programming problems, in: Studies on mathematical programming, ed. A. PRÉKOPÁ, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.
19. WOLFE, P.: The simplex method for quadratic programming. *Econometrica* 27 (1959), 382—398.

A PARAMETRIC METHOD FOR THE SOLUTION OF INDEFINITE QUADRATIC PROGRAMMING PROBLEMS

The solution of indefinite quadratic programming problems raises serious difficulties. *Parametric* methods yield a way of solution when a part of program variables are treated as parameters and a series of multiparametric convex quadratic or linear programming problems of reduced size can be formulated.

The procedure presented in this paper draws attention to a new possibility of parametrization making use of the minor matrices taken from the main diagonal of an indefinite matrix **D**. Primal-dual multiparametric linear programming is dealt with in detail, furthermore, it is shown how the efficiency of the algorithm can be raised by using Branch and Bound techniques.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решение неопределенной задачи квадратического программирования является серьезной проблемой. Одной из возможностей решения данной задачи являются параметрические методы, когда при рассмотрении части программных переменных в качестве параметров можем получить серию мультипараметрических выпуклых задач квадратичного или линейного программирования меньших размеров.

Метод, изложенный в данной работе обращает внимание на новые возможности параметрирования с использованием минорных матриц «O», которые могут быть расположены по основной диагонали неопределенных матриц «D»; детально рассматривается двойственная задача мультипараметричного линейного программирования и указывается, как с помощью метода ветвей и границ можно повысить эффективность алгоритма.

BRÓDY, A.: *Ciklus és szabályozás*. Budapest, 1980. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 271 o.

Élvezetes és izgalmas olvasmány Bródy András új könyve. Élvezetessé teszi klasszikus, „veretes” epigrammaszerű stílusa, ami egyben lehetővé teszi, hogy a rendkívül gazdag gondolati anyagot példás tömörséggel írja le. (Valóban a műben egyetlen felesleges, „túlmagyarázó” mondat sincs.) Izgalmassá teszi már maga a témaválasztás is: az egyensúlytalanság, a ciklusok ábrázolása, ami mostohagyerek mind a marxista, mind a polgári közgazdaságtan számára. Maga a szerző így ír erről: „A jelenlegi tanulmányírók inkább azt kutatják: mit kell feltenni a piac stabilitásának bizonyítására, semmint azt, hogy valójában mit művel a piac. Ha minden óvatosságuk ellenére mégis valahogy csillapítatlan ingadozással találkoznak az egyenletekben, azonnal vesztézarát vonnak a fertőzött pont körül, kijelentve, hogy az ilyen mozgásforma »zérus valószínűségű«, holott a tapasztalat elég világosan mutatja, hogy a piac állandóan ingadozik, és ezért tulajdonképpen az egyensúlyhoz való konvergencia a ritkán látott jelenség.”

Bródy módszere a régi, amit az *Érték és újratermelés* című művéből már alaposan megismerhetett az olvasó. E módszer látszatra a matematikai közgazdaságtan művelői közé sorolja Bródyt, a mélyebb olvasás azonban hitelesen meggyőzi az olvasót, hogy Bródy speciális helyet foglal el a táboron belül. Nála a matematikai módszerek valóban a gondolkodási segédeszközök funkcióját töltek be. Az elméleti alapok részben a klasszikus polgári közgazdászokban, és elsősorban Marxban gyökereznek, amiről Bródy a mű bevezetőjében a következőket írja: „Ez a felfogás jobban megfelel általános tapasztalataimnak, és a marx közgazdaságtannak is, amely mindig is meghatározta tudományos gondolkodásomat”, vagy egy más helyen, szintén a bevezetőben: „...más után kellett elindulnom, s munkámban, a modell felállításában tulajdonképpen régebbi szerzők, a klasszikusok, Smith, Ricardo és Marx

gondolatainak következetes végiggondolása vezetett.” A szilárd klasszikus és marxista elméleti alapok, az ennek mindig szigorúan alárendelt, korszerű, és emellett érthető, alapvetően matematikai ihletésű módszertani apparátus mellett Bródy munkájának egy további fontos jellemzője a gyakorlati alkalmazhatóságra való erőteljes törekvés. Nála valóban a gyakorlati, a tervezésbeni alkalmazhatóság az elmélet igazi értékelő kritériuma.

A mű tartalmi oldalát tekintve egy általános cikluselmélet megfogalmazására törekszik. Kiindulópontja az egyensúly, amelyben a politikai gazdaságtan alapvető kategóriái (érték, termelési arányok) a maguk klasszikus valóságában érvényesülnek. Ebben az ideális (absztrakt) állapotban kerül a legközelebb a gazdasági valóság fogalmi meghatározásához. Bródy rámutat a Leontief-féle modellel ábrázolt egyensúly alapvető ingatagságára. Ebből az ingatagságból (amit a polgári közgazdászok néhány jeles képviselője is felismert) még önmagában nem következik a gazdaság immanensen ciklikus mozgása.

A polgári közgazdaságtanban az egyensúly fogalmának speciális, kitüntetett funkciója van, mivel Smith láthatatlan keze nemcsak a gazdasági, hanem lényegében a társadalmi problémákat is orvosolja, ezért nem fejlesztette ki azt a fogalmi apparátust, amelynek segítségével az egyensúlyon (a „steady staten”) kívüli állapotok és folyamatok vizsgálhatók. Ezért a polgári iskolák által leírt gazdasági ciklusok zömében önhelyreállító jellegűek (akadnak kivételek is, amelyeket a szerző bemutat) abból kifolyólag, hogy az egyensúly, mint vonzási pont, és nem mint mozgáscentrum szerepel ezekben az elméletekben.

A szerző rámutat a Smith-féle „láthatatlan kéz” mechanizmuson alapuló, mindmáig magát fenntartó érvelés dimenziós hibájára, amit a verbális érvelés elrejt. A gyorsulás (a második derivált) bekapcsolása alapján könnyen kimutatható, hogy már az egyszerű piaci ciklus sem állapodhat meg az egyensúlyi értékeknél.

A piaci ciklus egy fontos jellemzője a kínálat és az ár mozgásának aszinkroni-

tása. A makroökonómiai jellegű ciklusokban alapvető szerepet játszik a termelés egyensúlyi üteme, illetve ennek a duális megfelelője, az átlagprofitráta. Ezek a változók közvetlenül nem figyelhetők meg, de szerepük alapvető a makroökonómiai ciklusok alakulásában. Ezek a ciklusok (szintén) az ár és a termelés (kínálat) most már szimmetrikus dualitásán alapulnak. Ha az aktuális profitráta az átlagprofitráta fölé kerül, akkor a termelés növekszik. A termelés növekedése az akcelerator hatásán keresztül a kereslet növekedését váltja ki, és ez növelőleg hat az árakra. Az árak növekedése viszont mérsékeli a termelés (kereslet) növekedését, mivel növelőleg hat a költségekre. Ha a költségek növekedése már az átlagprofitba „harap bele”, akkor a termelés elkezd csökkenni. Bródy duális egyenletei nagyjából ezt a mozgást írják le.

Értelmezi — és ez külön kiemelendő — az egyensúlytalanság állapotaihoz tartozó kategóriák (túlkereslet, átlagon felüli profit) mennyiségi viszonyait. Ehhez viszont be kell vinnie a reális folyamatokat leíró modellbe a tőkenyerés, illetve a pénz kategóriáját. Ezen monetarizálási törekvések ellenére a modell nem válik „monetáriszá”, mivel továbbra is a reálfolyamatoknak (beleértve az ezeken alapuló árképződést is) van meghatározó elsőbbségük. Az átlagon felüli profit, ami csak általános túlkereslet mellett léphet fel, éppen a naturalisan hiányzó termékvolumen tökéltetésével egyenlő, ami összességében meg egyezik a készletek ilyenkor fellépő konjunktorális értéknövekedésével.

Ezen a ponton lép be a képbe a keynesi és nem-keynesi, vagyis pontosabban az ún. monetáris felfogás közti vita. Az ún. „bibliai özevgyasszony korszója” tétellel kapcsolatban a szerző igen mértéktartóan foglal állást: „A mi levezetésünk alapján azonban az oksági kapcsolat ellentétes, és azt a könnyebben megérthető összefüggést fejezi ki csupán, hogy a tőkés elköltheti, és el is költi profitját. Előbb kell tehát realizálnia profitját, mint hogy elköltsi.”

Ez a vita (a két irányzat között) a későbbiekben explicitebb formában is előkerül. A keynesi gazdaságpolitikai „receptek” körüli vita értékelésénél a szerző rámutat, hogy mind az egyoldalú multiplikátor elmélet, mind annak monetarista kritikája lényegében az anticiklikus gazdaságpolitika egy-egy önmagában csak hamisan értelmezhető mozzanatát ragadja ki. Ugyanakkor a szerző kihagyta azt a lehetőséget, hogy ciklus-modellje segítségével annak mechanizmusai alapján elemezze az anticiklikus gazdaságpolitika szorosan

összekapcsolódó reál- és monetáris hatásait, melyek kombinációjukban a gazdasági ciklus egyfajta tükörképét adják.

A pénz bekapcsolása már a modell elemi egyenleteinek feltárásakor megtörténik. Az aranypénz (pénzáru) még nem sérti a bővített újratermelés ábrázoló modell közgazdasági értelmezhetőségét; a papírpénz viszont megszünteti a modell irreducibilitását, és ezáltal unicitását.

A pénznek a ciklusra gyakorolt hatását elemezve sem áll meg a szerző a formális mozzanatok bemutatásánál. Rendkívül plasztikusan érzékelteti a pénztőke és az ipari tőke eltérő értékesülési fázisait a konjunktúra ciklusok menetében és ennek történelmi következményeit: a finánetőke kialakulását és megerősödését.

Bródy könyvének legizgalmasabb, legtöbb újdonsággal szolgáló része a szabályozással foglalkozó harmadik rész, annak ellenére, hogy ezen a területen — ahogy maga a szerző is többször előrebozsítja — még nincsenek befejezett, kiértékelési kutatási eredményei.

A ciklus tulajdonképpeni okai a gazdaság legmélyebb fejlődéstörvényeiben rejlenek. A nem a szűkös erőforrásokból kiinduló hosszútávú dinamikus szemlélet számára az egyensúlyi növekedési ütemből fakadó korlát nehezen felismerhető, különösen a szocialista gazdaságban, ahol a gazdaságpolitika stratégiai céljai között kiemelkedő jelentőséggel bír a növekedési ütem. Az egyensúlyi ütem meghaladása pillanatnyilag nem okoz problémákat, sőt bizonyos társadalmi-gazdasági gondok megoldását felgyorsíthatja. Hosszabb távon azonban éppen az ütem túlfeszítése vezet kényszerű lassításhoz, és így kialakulnak a ciklusok.

A gazdaság szabályozása Bródy szerint nem irányulhat magára a növekedési ütemre, mivel az előzetes döntések eredményeként alakul ki. Viszont szabályozható a ciklus a növekedést megalapozó beruházásokon keresztül, mely utóbbiak lényegében a gazdaság gyorsulásával arányosak.

A könyv befejező része a hosszútávú gazdasági fejlődés néhány vitatott problémájával foglalkozik: a szerves összetétel és az ütem kapcsolatával, az ún. „reswitching” (váltás vagy visszaváltás) problémával, és a gazdasági rendszerek hasonlóságának kvantitatív jellemzőivel.

A művet függelék egészíti ki, amely a bemutatott modell egy változatával végzett számítások adatait és számítógépi programját tartalmazza.

AUGUSTINOVICS, M. (szerk.): *Népgazdasági modellek a távlati tervezésben*. Budapest 1979. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 448 o.

A könyvet az teszi a tervező és a kutató számára rendkívül érdekessé, hogy a szerzők pontosan és részletesen leírják, hogyan alkalmaztak különböző matematikai közgazdaságtani modelleket a távlati tervezésben, milyen nehézségeik, problémáik és tapasztalataik voltak, és (bár rövidebben) milyen eredményeket kaptak. A matematikai közgazdaságtannak a távlati tervezésben történő ilyen felhasználására, tudomásom szerint, eddig csak Magyarországon került sor. Ezért a szerzők munkája a maga nemében egyedülálló a világirodalomban és nemcsak a magyar, hanem a külföldi közgazdászok számára is új ismereteket ad.

Az öt éves tervek kidolgozásával összefüggésben már korábban is alkalmaztak Magyarországon matematikai programozási modelleket. A tízenöt éves távlati tervezés azonban csak 1968-ban kezdődött meg Magyarországon. Kézenfekvő volt az a gondolat, hogy a távlati tervezési munkában is felhasználják a matematikai közgazdaságtan által kínált lehetőségeket. A távlati tervezésben természetesen másfajta modellek felhasználása látszott előnyösebbnek, mint a középtávú tervezésben.

Az első három fejezetben *Augustinovics Mária* a távlati tervezés általános kérdéseivel és modellek alkalmazásának elvi problémáival foglalkozik. Tárgyalja a statisztikai adatbázissal összefüggésben felmerült nehézségeket. A távlati tervezésnek szükségképpen erősebben kell a statisztikai adatbázisra támaszkodnia, mint az éves és az öt éves tervezésnek. Az utóbbi fajta tervezési munkában ugyanis az elmúlt egy vagy néhány év térszámait mellett a folyamatban levő év vagy öt éves időszak hátralevő részének gazdasági eredményeit is figyelembe kell venni, ilyeneket a statisztika természetesen nem szolgáltat, ezért a tervezők megszokták, hogy a bázisul szolgáló várható adatot maguk becsülik meg. Ez lényeges bizonytalanságot visz be a tervekbe. A távlati tervezésben ez az út nem járható, hosszabb múltbeli időszak elemzéséből kell kiindulni, annak statisztikai adatait kell felhasználni. Ez azonban a szerző szerint a következő nehézségekbe ütközik: 1. a népgazdasági mérlegrendszer és a szakstatisztikák között nem volt teljes az összhang, 2. az egyes évekre vonatkozó statisztikai adatok nem hasonlíthatók össze minden további nélkül, mert a statisztika folyamatosan fejlesztí módszereit, 3. a tövidebb távú tervezésben alkalmazott mutatószámrendszer

nem teljesen azonos a statisztika mutatószámrendszerével, 4. a távlati tervezési időszakban olyan új jelenségek fognak lényeges szerepet játszani, amelyeket a múltban a statisztika nem figyelt meg. A távlati tervezők kezdetben arra törekedtek, hogy 30–40 ágazatra vonatkozó hosszú adatbázist alakítsanak ki az 1959, 1961, 1965 és 1968. évi nagyméretű ágazati kapcsolati mérlegek alapján. Az 1968-tól kezdve bevezetett új népgazdasági mérlegrendszer azonban olyan változtatásokat hozott néhány fontos aggregált mutatóban, amelyeket a korábbi nagyméretű ágazati kapcsolati mérlegeken nem tudtak visszamenőleg átvezetni. Ezért a magyar input-output statisztika korai, nemzetközi összehasonlításban is kiemelkedő eredményeit a távlati tervezésben nem használták fel. Viszont az új népgazdasági mérlegrendszernek és a hozzá csatlakozó, kisméretű ágazati kapcsolati mérlegnek az idősorait a KSH 1960-ig visszamenőleg publikálta és évről évre összehasonlítható formában kiegészíti azokat. Ez nagy lépés abban az irányban, hogy lassanként kialakuljon a távlati tervezéshez szükséges adatbázis.

Összefoglalóan ismerteti azt a három modell-típust, amelyet a távlati tervezésben alkalmaztak. Ezek: 1. a HOVA modellek, 2. a DINAMIKUS modellek, 3. a KÉSLELTETŐ modellek. Mindegyik modell sokszektoros népgazdasági modell, intertemporális összefüggéseket tartalmaz (a beruházás és a termelés között), dinamikai korlátok szerepelnek bennük (amelyek ugyanazon tevékenységnek időben egymást követő értékeit kapcsolják össze) és optimalizálhatók. A gyakorlati tervezésműveletekben elsősorban a HOVA modelleket használták, a többi modell főleg módszertani tanulságokat szolgáltatott és a HOVA által felderített tartomány további elemzését tette lehetővé.

Augustinovics Mária rámutat a modellek hiányosságaira. Ilyen elsősorban az a tény, hogy a külkereskedelem alakulását nagyon leegyszerűsítve kezelik. Nagyon kevés külkereskedelmi korlátozó feltételt tudtak megfogalmazni és a modellbe beépíteni, ezért némelyik megoldás közgazdasági értelemben elfogadhatatlan. A másik problémátikus pont a gazdasági fejlődés társadalmi összefüggéseinek ábrázolása: hiányzik a fogyasztásnak társadalmi, jövedelmi, lakóhelyi csoportok szerinti felbontása; időszakonként egyetlen munkaerő korlát szerepel a modellekben, képzettség stb. szerinti részletezés nélkül; hiányzik a modellekből a lakossági jövedelmek elosztása és újraelosztása; nem-megfelelő a termelőszféra és a nem-anyagi szolgáltatások

(oktatás, egészségügy, lakásellátás) közötti kapcsolatot kidolgozása.

Nagyon helyesen felhívja a figyelmet a modellezéssel kapcsolatos három téves illúzióra: 1. a népgazdasági modellezés megvalósítása még nem jelenti azt, hogy népgazdasági tervezés folyik, más szóval a néhány tőkés országban végzett színvonalas modellezést nem helyes a tervezéssel azonosítani, 2. a tervezés nemcsak modellezésből áll, a modellek sohasem fogják a mai értelemben vett tervezést helyettesíteni, mert a tervezésnek nemcsak technológiája van, hanem szociológiája is, 3. a modellezés nem jelent szükségképpen idő- és munkamegtakarítást.

A 4. és 5. fejezetben *Krekóné Kupa Illdikó* a HOVA modellt és a kapott eredményeket mutatja be. A modell első megfogalmazása abból indult ki, hogy a különböző részterületek fejlesztését előzőleg variánsokban megtervezik, a modell feladata a részvariánsok közötti válogatás olyan módon, hogy a részvariánsok struktúrája és dinamikája nem változik meg, csak a megvalósulás színvonala módosul csekély mértékben. Variánsok hiányában azonban a modellt ebben a válogató formában nem működtették. A szerző részletesen foglalkozik a külkereskedelem kezelésével. Valóban ez a modell egyik kritikus pontja. Ezt érzékelteti például a modellszámításoknak az az eredménye, hogy a létszám- és tőkeigenyes mezőgazdasági termékek tőkés exportja helyett a feldolgozóipari, elsősorban gépipari exportot célszerű előnyben részesíteni. Nyilvánvaló, hogy a modell megfogalmazott feltételei nem kellőképpen vették figyelembe a tőkés irányú gépxport nehézségeit.

A 6. fejezetben *Bod Péter* a DINAMIKUS modellt írja le. Ez a dinamizált, input-output elszámoláson alapuló, többperiódusos, többtechnológiás tervezési modellek családjába tartozik. A HOVA modelltől a részek és az egész közötti kapcsolat felfogásában tér el. Benne a kapacitások tervezésének meghatározó szerepe van. Az ágazati variánsokat elsősorban fejlesztési (beruházási) változatoknak tekintik. A távlati terv teljes időtartamára nézve nem változtatja meg az ágazati fejlesztési variánsok színvonalát, de nem tekinti megváltoztathatatlannak a beruházásoknak az ágazati variánsokban megtervezett időbeli ütemezését. Más szóval átesoportosíthatja a beruházásokat az egyes részütemezések között. Különböző társadalmi preferenciákat kifejező célfüggvényeket maximalizál, de elsősorban olyan megoldásokat keres, amelyek a fogyasztást optimalják.

A DINAMIKUS modellel kapott megoldások egyik jellemzője, hogy általában

erősen esőkkeníti a beruházásokat, vagyis kivételes esetektől eltekintve a kisebb beruházási teherrel járó megoldást választja. Optimistább képet ad a társadalmi szükségletek kielégítésének jövőbeli lehetőségeiről, mint a HOVA modell középső változata. A természetes mértékegységekben nyert külkereskedelmi egyenlegek is kedvezőbbek, mint a HOVA modell megoldása esetében. Bod Péter összefoglalásképpen egy olyan programozási modell kialakítását látja lehetségesnek, amely a HOVA és DINAMIKUS modellek előnyeit egyesítené.

Faur Tivadar a KÉSLELTETŐ modellel foglalkozik. Ez elsősorban abban különbözik az előző két modell típustól, hogy a beruházás és annak üzembe helyezése között időkülönbség, késés van. Ennek megfelelően nem ötvenes, hanem egyéves időszakokból tevődik össze. A beruházásoknak mind a megvalósítása (a beruházási teljesítmény), mind az üzembe helyezése több évre húzódik szét. Ezen összefüggések mellett szerepelnek a modellben ágazati termékmérlegek, állóeszközmérlegek, külkereskedelmi áruforgalmi mérlegek, fogyasztás-dinamikai feltételek és a népgazdasági munkaerőmérleg. A problematikus pont ebben a modellben is a külkereskedelem kezelése. Az export és az import mind a tőkés, mind a szocialista relációban kötött ágazati struktúrájú és a volumen is csak szűk tartományban mozoghat. A modellszámítások eredményei közül figyelmet érdemel, hogy a modell az 1976–77. évekre mind a termelés, mind a fogyasztás tekintetében megtorpanást jelzett, és ez az egész első öt éves időszak eredményeire hatott. 1980-tól azután egyensúly mutatkozik és dinamikus növekedés valósul meg a modell szerint.

A 8. fejezetben *Boda György* az egyes makrovariánsokhoz tartozó ágazati kapcsolati mérlegekkel végzett input-output elemzés eredményeit mutatja be. A külkereskedelem alakulását elemzi. A 9. fejezetben *Bánhidí Feren*c a volumenben elkészült variánsok ár-összefüggéseit vizsgálja egy ármódel segítségével. Bázis-árrendszerként az 1972-ben megfigyelt tényleges árakat használja fel és a ráfordítás-arányos árakat számítja ki a következő időszakokra. Így arra a kérdésre keres választ, hogy a bázisidőszak tényleges árai mennyiben fejezik ki a ráfordításokat. Míg az 1970-es években még a mezőgazdasági ráfordítások túlságosan alacsony értékelése volt az árrendszer fő aránytalansága, a jövőben, a modell szerint, a szolgáltatások alulértékelése válik a központi problémává. A 10. fejezetben *Ács Magda* az 1950 óta végbement fejlődést vizsgálja a modellek

segítségével, a 11. fejezetben *Haraszi Katalin* nyolc tőkések ország ágazati kapcsolati mérlegeivel hasonlíttja össze a modellek segítségével kapott eredményeket.

Végül a Függelékben *Pehertz Ferenc* és *Székelly Béla* a számítógépes tervezési rendszert írják le, *Krekóné Kupa Ildikó*, *Bod Péter* és *Faur Tivadar* pedig a döntési modellek formális leírását adják. Ez utóbbi különösen értékes azok számára, akik a modelleket alaposan meg akarják ismerni.

Az ismertető csak egyes részeket, problémákat tud kiragadni a rendkívül gazdag tartalmú könyvből. A szerzőknek minden egyes — itt idézett és meg sem említett — megállapítása tulajdonképpen alapos megvitátást érdemelne. Egyetlen hiányosságra szeretnék rámutatni, amelyet azonban nem lehet a szerzőknek felróni. Nincs szó a könyvben arról, hogy a modell számítások eredményeit hogyan használták fel a ténylegesen kidolgozott távlati tervben. Ennek oka azonban nyilvánvalóan az, hogy a világgazdasági változások, amelyeket a modellszámításoknak és a tervezési ciklusnak idején sem Magyarországon, sem külföldön senki sem látott előre, megzavarták magát a távlati tervet és a távlati tervezés egész folyamatát. Nem kétséges azonban, hogy távlati tervezésre szükség van, ezért a modellekkel szerzett tapasztalatok értékesen járultak hozzá annak tökéletesítéséhez.

ANDORKA RUDOLF

PRÉKOPA, A. (szerk.): *Studies on mathematical programming* (Tanulmányok a matematikai programozás tárgyköréből). Budapest, 1980. Akadémiai Kiadó.

Hosszú évek óta, egy-egy év kihagyással, a Magyar Tudományos Akadémia minden télen megrendezi Mátrafüreden a Matematikai Programozási Téli Iskolát. Ezen a tudományos összejövetelen a hazai résztvevők mellett a szakma világviszonylatban is kiemelkedő képviselői tartanak magasszínvonalú előadásokat, részt vesznek kerekasztal beszélgetéseken, amelyek egy-egy fontos téma izgalmas, átfogó kérdéseit vitatják meg. Ezeket a konferenciákat az előadások általában egyórásak és az előadók saját eredményeik ismertetése mellett áttekintik a vonatkozó nemzetközi irodalmat is.

A most kiadott tanulmánykötet az 1975-ben tartott konferencia előadásaiból készült és válogatott anyagot tartalmaz. A legtöbb cikk a szerző értékes új eredményeit prezentálja a megkövetelt áttekintés mellett. Ez alól kivétel egy-két cikk,

amelyek vagy csupán áttekintést adnak, vagy pedig a matematikai programozás egyes alkalmazási lehetőségeire koncentrálnak. A 15 tanulmány témák szerint a következőképpen csoportosítható (a csoportosítás kissé önkényes): lineáris és parametrikus programozás (4), nemlineáris programozás (3), egészértékű programozás (1), sztochasztikus programozás (2), programozás több célfüggvénnyel (1), általános matematikai programozási feladatok (2), alkalmazások (2).

A könyv megjelenését egyértelműen csak üdvözölni lehet. Alapvető érdeme, hogy sok értékes új eredményről számol be és a matematikai programozás bizonyos területeiről jó áttekintést ad. Főleg azoknak a könyvespolcáról nem hiányozhat, akik maguk is ezen a területen dolgoznak, ill. olyan alkalmazási problémákkal foglalkoznak, amelyek szorosan kapcsolódnak a matematikai programozási módszertanhoz. Külön érdeme a könyvnek, hogy végre felhívja a figyelmet arra a komoly tudomány-szervezési teljesítményre is, amelyet a mátrafüredi konferenciák megrendezése jelent.

Néhány kritikai észrevételt azért szeretnék tenni, amelyek azonban súlyukban messze elmaradnak a könyv érdemei mellett.

1. Legfőbb hiányosság, hogy a könyv igen nagy késéssel jelent meg (5 év!). Ez nagyban csökkenti az áttekintő cikkek aktualitását, legalábbis azokon a területeken, ahol az előrehaladás gyors.

2. A cikkek között részletességben, mélységben nagy a szórás. Egy kontraszt: *I. I. Yeremin—V. D. Mazurov* és *R. Deumlich—K.-H. Elster* cikke.

3. Helyenként sok a hivatkozás nehezen elérhető publikációkra. Ezeket az eredményeket röviden ismertetni lehetett volna, mivel a „working-paper”-ek beszerzése gondot jelenthet az érdeklődőknek.

4. Jó lett volna, ha minden cikk elején van egy összefoglaló. Ez párszor szerepel, de nem mindenütt.

5. Igazi, konkrét gyakorlati alkalmazás nem szerepel a gyűjteményben.

6. Feltehető, hogy nem készült minden egyes év terméséből egy kötet. Mivel az átfutási idő így is hosszú, talán jobb lett volna több év terméséből összeállítani a könyvet.

A könyv tartalmi ismertetésére csak tartalomjegyzék szintjén vállalkozhatok, esetenként egy-egy mondat magyarázattal megtoldva. Az egyes tanulmányok a következők:

1. *D. E. Bell*: Az egészértékű programozási feladat csoportelméleti megközelítése: a legújabb fejlemények áttekintése.

2. *R. Deumlich—K.-H. Elster*: A konjugált függvények elméletéről.
3. *J. Dupačová*: A sztochasztikus programozás minimax döntési elve. (A sztochasztikus programozási feladatban a valószínűségi változók eloszlása ismeretlen és a játékelméletből ismert minimax döntési elvet alkalmazzuk. Ezt a megközelítési módot a szerző javasolta először.)
4. *I. I. Yeremin—V. D. Mazurov*: A matematikai programozás nemstacionárius folyamatainak szintézise alakfelismerés használatával. (A szerzők olyan optimalizációs folyamatokkal foglalkoznak, melyek információs komponense szegényes és időben változik.)
5. *J. Guddat*: Kvalitatív stabilitás a nemlineáris parametrikus programozásban és néhány alkalmazás. (A konvex kvadrátikus programozás lokális stabilitásával, valamint a vektorminimum probléma és a parametrikus programozás kapcsolatával foglalkozik.)
6. *H. Hollatz*: Minimax problémák szükséges feltételeinek egy analitikus-geometriai megközelítése. (Egy lemma segítségével számos nemlineáris programozási probléma szükséges optimalitási feltétele nyerhető egységes és egyszerű módon.)
7. *P. Huard*: A matematikai programozás módszereinek szintézise és aggregációja.
8. *W. S. Jewell*: Bevezetés az izotonikus becslésbe. (A hálózati folyamatok módszertanát használja optimális paraméterbecslésre.)
9. *G. Kéri*: Egy táblázatkitöltési probléma és alkalmazási lehetősége mátrix invertálásra. (Ritka mátrixok invertálásánál generálóelem választási stratégiákat vizsgál.)
10. *L. Lovász*: Hatékony algoritmusok: formális logikai megközelítés. (Algoritmusok komplexitásának vizsgálatára egy új megközelítési módot tárgyal.)
11. *A. Prékopa*: Dinamikus sztochasztikus programozási modellek. (Áttekinti a gyakorlati alkalmazási szempontból legfontosabb dinamikus típusú sztochasztikus programozási modelleket.)
12. *H. Weinert*: Bizonyos több-paraméteres lineáris programozási feladatok megoldásáról. (Azokkal a parametrikus lineáris programozási feladatokkal foglalkozik, amelyekben a paraméter csak a célfüggvényben és a jobb oldalon szerepel, továbbá a függőség lineáris.)
13. *C. Winkler*: Blokk-szerkezetű lineáris programok bázis faktorizációja. (Blokk-szerkezetű lineáris programozási feladatok bázisának szerkezetét vizsgálja és egységesen kezel számos ismert dekompozíciós algoritmust.)
14. *K. Zimmermann*: Néhány optimumfeladat megoldása extrémális algebraikon. (Bizonyos algebrai struktúrákon definiált speciális optimumfeladatokat vizsgál.)
15. *S. Zions—J. Wallenius*: Tetszőleges vektorhalmaz efficiens részalmazának meghatározásáról. (Egy új módszert ismertet efficiens vektorok meghatározására.)

Minden cikk után külön bibliográfia található. Az 1975-ös mátrafüredi konferencia résztvevőinek névsora és egy előző teszteljessé a kötetet.

FORGÓ FERENC

TUDOMÁNYOS ÉLET

A X. Magyar Operációkutatási Konferencia ajánlásai

A Debreceni Agrártudományi Egyetemen 1980. szeptember 9–11-én rendezett X. Magyar Operációkutatási Konferencia közel 400 résztvevője a megnyitó plenáris ülés és a 4 szekcióban 100-nál több előadás elhangzása után, a záró plenáris ülésen a következő megállapításokat és ajánlásokat fogadta el:

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai Közgazdasági Szakosztálya, a Bolyai János Matematikai Társulat Alkalmazott Matematikai Szakosztálya és a Neumann János Számítógéptudományi Társaság Operációkutatási Szakosztálya a tudományos munka és a gyakorlati alkalmazások elősegítése, terjesztése és ösztönzése érdekében 1963 óta rendez operációkutatási konferenciákat. A rendezvények 1972 óta gyakorlatilag évente követik egymást. A konferenciák nagy számú résztvevője, a sok és tartalmas előadás, alkotó vita jelentősen elősegítette mind a tudományos kutatást, mind pedig a gyakorlati alkalmazást.

A konferencia résztvevői továbbra is szükségesnek és célszerűnek tartják a Magyar Operációkutatási Konferenciák évenkénti megrendezését.

A rendező szakosztályok vezetőségei a Konferenciák alkalmából koordinálják tevékenységüket, egyeztetik a fejlődés folyamán a felmerülő problémák megoldásában vállalt szerepüket.

A következőkben megrendezésre kerülő Operációkutatási Konferenciák programját az eddigi átfogó jelleg fenntartása mellett célszerű úgy alakítani, hogy alkalmanként egy-egy új vagy nárányonányosak tekinthető konkrét alkalmazási terület (társadalomtudományok, műszaki tervezési problémák, egészségügy, vízügy, mezőgazdaság, stb.) eredményeinek bemutatásával bővüljön.

A X. Magyar Operációkutatási Konferencián elhangzott előadások az operációkutatási módszerek széles területét fogták át (matematikai programozási eljárások, matematikai-közgazdasági modellek, faktoranalízis, szimulációs eljárások, készletgazdálkodási és egyéb sztochasztikus modellezés stb.) egzaktt és heurisztikus módszereket egyaránt.

Ezzel az elmélet és a gyakorlat szoros kapcsolatát, kölcsönhatását is kifejezésre juttatták.

Az elméleti és módszertani kérdések mellett az előadások az alkalmazások számos területére terjedtek ki: népgazdasági, területi és vállalati alkalmazások, kül- és belkereskedelem, közlekedés és szállítás, mezőgazdaság, információ és hírközlés, földtani és bányászati kérdések.

Az elhangzott előadások és az előadásokat követő viták alapján megállapítható, hogy a magyar operációkutatók mind elméleti és módszertani, mind gyakorlati alkalmazási területen jelentős eredményeket értek el, ami lehetővé teszi, hogy az operációkutatás gyakorlatban történő felhasználása mind szélesebb területre terjedjen ki.

Ennek elősegítése érdekében az operációkutatás és a számítástechnikai tudományos kutatások elsősorban pedig a gyakorlati felhasználások hatékonyabb támogatása és koordinálása szükséges országos szinten is, de különösen az egyes tárcákon belül. Kerülni kell a felesleges párhuzamosságokat, összehangolt munkával együttműködve, törekedni kell általánosan használható komplex információs és irányítási rendszerek kialakítására, felhasználva az operációkutatási módszerek széles körét.

A Konferencia egyidejűleg felhívja az országos szerveket, minisztériumokat és vállalatokat, hogy segítsék elő és támogassák az ilyen irányú törekvéseket.

A Konferencia résztvevői örömmel veszik tudomásul, hogy a Magyar Tudományos Akadémián Operációkutatási Bizottság alakul. A Bizottság munkájától a résztvevők egyebek között azt is várják, hogy elősegíti a fentebb említett célok megvalósítását, a hatékonyabb információcsere megszervezését.

Fontos feladatnak tartják annak megvizsgálását is, hogy a magyar operációkutatók munkájának összefogása és a nemzetközi operációkutatási társaságokkal való kapcsolat milyen szervezeti formában fejleszthető tovább.

Nemzetközi IFAC/IFORS konferencia a „Népgazdaság dinamikus modellezéséről és irányításáról.”

Varsó, 1980. június 16—19.

Az IFAC/IFORS által szervezett nemzetközi konferencia innár hagyományosan követte az 1973-as warwicki és az 1977-es bécsi azonos jellegű rendezvényt. A jelenlegi tudományos ülésszakon mintegy 150 kutató vett részt.

A konferencia célja az volt, hogy átfogó képet adjon a gazdasági rendszerek dinamikus modellezése és irányítása elméletének legújabb eredményeiről, konkrét alkalmazási lehetőségeiről.

A Nemzetközi Programbizottság — melynek elnöke *Z. Pawlowski*, titkára *K. Cichocki* volt — az előadásokat a korábban beküldött kivonatok, majd a rövid összefoglaló ismertetés alapján két lépcsőben választotta ki és sorolta be az alkalmazási, illetve a módszertani szekcióba. A két szekció témaköreit az alábbiakban ismertetjük.

Alkalmazási szekció:

Népgazdasági, illetve nemzetgazdasági modellek
Szektormodellek
Regionális modellek
Pénzügyi modellek

Módszertani szekció:

Ökonometriai előrejelzés, becslés és identifikáció
Optimalizációs módszerek
A modellépítés elmélete
A makroökonómiai modellezés és elemzés software eszközei

A jól szervezett konferenciát összességében alkotó légkör és élénk vita jellemezte. Naponta két plenáris előadás és három teremben párhuzamosan szekciónként 15—20 benyújtott előadás hangzott el. A plenáris előadásokra mindig az adott terület egy-egy kimagasló szaktekintélyét kérték fel, aki egyrészt összefoglalta a témában eddig elért eredményeket, másrészt felvázolta a további kutatás várható irányait. A következő meghívott előadókat hallhattuk:

J. Bray: Egy vegyes gazdaság gazdaságpolitikájának tervei és vizsgálatai.

V. B. Nepomiaschty: A makroökonómia modellezés software eszközei.

Martos B.: A gazdaság szabályozása árjelzések nélkül.

K. K. Valtukh: Optimalizációs népgazdasági modellek.

A konferencia résztvevői számára, felkért hozzászólókkal két kerekasztal vitát is rendeztek: *Martos Béla* elnökletével a közgazdasági modellek dinamikus és irányítás-elméleti jellemzőiről és *J. Bray* (Anglia) elnökletével a modellépítők és döntéshozók közti kapcsolatokról. Mindkét beszélgetést egy hatalmas előadóban tartották, ami eleve megnehezítette az elnökségen kívül helyet foglalók egyenjogú részvételét, igazi vita kialakulását.

Ami a szekciónkénti előadásokat illeti, azokat — mint ahogy az már a témafelsorolásból is kitűnt — a rendkívüli változatosság jellemezte. Az egyes előadások megtartására rendelkezésre álló 25 perc természetesen a legritkább esetben lehetett elegendő a téma részletes kifejtésére, ezért az ülések után gyakoriak voltak a személyes konzultációk is. Az előadások nagy száma és a konferencia témakörének gazdagsága miatt nem vállalkozhatunk arra, hogy minden előadást részletesen ismertessünk, sőt még arra sem, hogy a mintegy 60 címet felsoroljuk. Ehelyett megelégszünk azzal, hogy mind az alkalmazási, mind a módszertani szekcióból kiemelünk néhányat. Elsősorban azokról az előadásokról

adunk rövid összefoglaló áttekintést, amelyek számunkra a legérdekesebbek, leginkább hasznosak voltak.

Az alkalmazási szekcióban bemutatott modellek nagy része népgazdasági, illetve nemzetgazdasági méretű volt, de sok regionális és szektormodellt is ismertettek. A modellezők érdeklődésüket elsősorban a pénzügyi folyamatok és a külgazdasági kapcsolatok elemzésére és előrebecslésére irányították. Szembetűnő volt az energiamodellek nagy száma is.

Az alkalmazott módszereket illetően nagyon változatos a kép. Input-output modellektől kezdve egészen a legmodernebb dinamikus irányításelméleti eszközökig, illetve a különböző módszerek kombinálásáig, mindent megtalálhatunk a bemutatott modellek eszköztárában. Az alábbiakban először néhány dinamikus irányítási és klasszikus ökonometria modellt ismertetünk.

J. Bradeley, C. O'Riartaigh (Dublin, Írország): „Optimális irányítás és elemzés kis nyílt gazdaságban. Írország példája.” A nemzetek közötti kölcsönös függés növekedésével a kis nyitott gazdaságok egyre kiszolgáltatottabb helyzetbe kerülnek. Az ír szerzők a stabilitásra való törekvést vizsgálják a Központi Bank számára készített makromodell segítségével. Modelljükben nemlineáris irányításelméleti algoritmust és egy *G. C. Chow* által kidolgozott számítási eljárást (Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, 1975. New York) használtak.

S. Holly (London, Egyesült Királyság): „Racionális elvárások és lehetőségek egy nyílt gazdaság pénzügyi politikájában.” *Holly* egy olyan előrebecslési módszert ismertetett, amely különböző racionális elvárásokra építve más és más előrebecslést eredményez. Ez azt jelenti, hogy a *Holly* által javasolt irányítási modell a kérdéses kategóriák jövőbeli értékeit nemcsak a modell egyenleteibe való automatikus behelyettesítéssel számolja ki, hanem tekintetbe veszi az egyéb elérhető információkat is. Az előadó illusztrálta is módszerét. Egy kis szimulációs modellt mutatott be, melyben az optimális pénzügyi politika a világgazdaságban lezajlott változásoknak megfelelően alakul.

J. A. Eklöf (Umea, Svédország): „Optimális makrogazdasági irányítási modell pontatlan adatokkal.” *Eklöf* a többperiódusú optimális irányításelmélet kis nyílt gazdaságra vonatkozó néhány aspektusát tekintette át. Érzékenységi vizsgálatokat végzett, melyek alapján arra a következtetésre jutott, hogy a megfigyelt adatok mérési hibája, illetve a bennük késleltetetten érzékelhető hatások következtében az irányítási modellek megbízhatósága lényegesen csökken.

D. R. Basu (Cambridge, Egyesült Királyság): „Egy sokszektoros optimális irányítási modell az Egyesült Királyság energiapolitikájának meghatározására.” A 14 szektoros dinamikus ökonometria modell sztochasztikus optimális irányítási technikán alapszik. Olyan gazdasági tervet kíván meghatározni, mely tartalmazza a beruházások, az export és az import jövőbeli alakulását. A részletes elemzés magába foglalja az atomerőművek energiatermelésére és az Északi-tenger olajtartalékainak feltárására vonatkozó részmodellt is.

Az alkalmazási szekcióban bemutatottak olyan modelleket is, amelyek célja több ország gazdaságának együttes elemzése és előrebecslése volt. Ide tartoznak az úgynevezett „összekapcsolt” modellek és az Inforum-IIASA modellrendszer.

J. A. J. Plasmans (Antwerpen, Belgium): „Interplay: Az EKG gazdaságpolitikájának összekapcsolt modellje.” Az Interplay modell 6 EKG ország — Belgium, NSZK, Franciaország, Olaszország, Hollandia és az Egyesült Királyság — éves adatokon alapuló makro-ökonómiai részmodelljének összekapcsolása. A kapcsolatot a bilaterális kereskedelmi és pénzügyi változók teremtik meg. Minden egyes országot kb. 30 strukturális egyenlet képvisel.

D. E. Nyhus (Laxenburg, Ausztria, IIASA): „Inforum-IIASA nemzetgazdasági modellrendszer.” An INFORUM-IIASA modell nemzetgazdasági modelleket kapcsol össze, bilaterális külkereskedelmi változók segítségével. Elődje az 1966-ban publikált (*Almon*) INFORUM modell volt, mely csak az USA-ra vonatkozott. Az IIASA irányításával készülő nagyméretű számítások időhorizontja 10–15 év. Minden egyes nemzetgazdaságot olyan dinamikus input-output modell képvisel, mely a ki- és a bemenő adatokat azonos módon kezeli, de belső struktúrájában tagolt és rugalmas.

M. M. Albegov (Laxenburg, Ausztria, IIASA), *J. Kacprzyk*, *J. W. Owsinski*, *A. Straszak* (Varsó, Lengyelország): „Dezaggregált lineáris programozási modell alapján kidolgozott regionális mezőgazdasági tervpolitika.” A nemzetközi kutatócsoport nagyméretű lineáris programozási modellt készített. A modell a terméshozamot és az állatállomány nagyságát részletesen, területekre, talajtípusokra, alkalmazott technológiákra stb. lebontva részletesen tartalmazza. Figyelembe veszi a rendelkezésre álló anyagi, emberi és természeti erőforrásokat, értelmezi mind a primál, mind a duál feladat megoldását.

A módszertani szekcióban elhangzott előadások alapvetően három csoportba sorolhatók: ökonometriai módszertani tanulmányok, dinamikus irányításméleti modellek és optimalizációs modellek.

Az előadások egy jelentős része a klasszikus ökonometriai modellek módszertani problémáival foglalkozott. Először azok közül emelünk ki néhányat, amelyek a hagyományos becslési és előrebecslési módszerek területén elért eredményeiket mutatták be.

Yuri A. Chizov (Novoszibirszk, Szovjetunió): „Szovjet tapasztalatok az ökonometriai modellezésben és néhány tőkés országra vonatkozó előrebecslés ökonometriai modellek felhasználásával.” Az előadó beszámolt a Novoszibirszkben folyó ökonometriai kutatásokról és ismertette a tőkés országok negyedéves adataiból becsült ökonometriai modellek fő jellemzőit, becslési eredményeit az ex ante és ex post előrebecsléseket.

P. J. Vermeulen (Pretoria, Dél-Afrika): „Az ökonometriai modellek paraméter- és struktúraérzékenysége.” A szerző olyan mutatót szerkesztett, amely alkalmas az ökonometriai modellek paramétereinek specifikációtól és becslési eljárástól függő változásának mérésére. Egy egyszerű modell, a Klein I-es felhasználásával kiszámította az érzékenységi mutató értékeit különböző becslési módszerek és specifikáció esetén.

C. Bianchi, G. Culzori, P. Corsi (IBM Tudományos Központ, Olaszország): „Multiplikátorok és előrebecslések szórásnegyzeteknek) meghatározása blokkdiagonális kovariancia mátrix felhasználásával.” A szerzők az előrebecslés kovariancia mátrixának nagyméretű számításigényét elkerülendő, egy egyszerűbb eljárást dolgoztak ki a kovariancia mátrix fődiagonálisának (szórásnegyzeteknek) meghatározására. Annak ellenére, hogy néhány ismert modellen (pl. Klein I, Klein–Goldberger) sikerült a korlátozott információ alapult módszerrel és a teljes információjú becslési eljárásokkal kapott eredmények nem túl nagy eltérést kimutatniuk, a szekcioulás résztvevői között élénk vita bontakozott ki az eljárásról. Két olyan nyomós érv is született, amelyek alapján kétségbe lehet vonni a bemutatott módszer hasznosságát. Az egyik, hogy a mai korszerű számítástechnikai apparátus mellett nem jelent gondot a teljes kovariancia mátrix kiszámítása, a másik, hogy a fenti eljárás nem alkalmazható általánosan, csak néhány speciális esetben.

P. W. Otter (Hollandia): „Becslés, identifikáció és adaptív irányítás többváltozós zárt gazdasági rendszerekben.” A hagyományos ökonometria és a sztochasztikus szabályozásmélet kapcsolata alapján a szerző előadásában bebizonyította, hogy a lineáris zárt visszacsatolásos modellek identifikálhatóságának feltételeit le lehet vezetni a szimultán ökonometriai modellek identifikálhatósági feltételeinek szinonimájára.

Az új utat keresők között kell megemlíteni azt a számos előadót, akik a klasszikus módszerek problémáit felismerve új becslési és előrebecslési eljárásokkal, nevezetesen a Kálmán-filter módszerrel végzett kísérleteikről számoltak be. A módszert, mint ahogyan az elnevezésben is benne van, a magyar származású R. E. Kálmán dolgozta ki 1960-ban technikai rendszerek elemzésére. Az ökonometriában először D. A. Besley ajánlotta időben változó paraméterek becslésére 1973-ban és M. Athans alkalmazta a redukált forma koefficienseinek becsléséhez 1974-ben. A hivatkozásokban megtaláljuk P. F. Harrison, C. F. Stevens nevét, akik elméletileg megalapozták a Kálmán-filter gazdasági előrebecslésre való felhasználását. A varsói konferencián az NSZK-ból, az Egyesült Államokból, Dániából és Görögországból érkezett kutatók mutatták be Kálmán-filter módszerrel becsült modelleket.

L. W. Taylor és S. M. Sliva (Newport News, USA): „A Kálmán-filter módszer felhasználása az Egyesült Államok gazdasági feltételeinek előrebecsléséhez” 1950–80 közötti havi adatok alapján a hagyományos paraméterbecslési módszerek és a Kálmán-filter iteratív alkalmazásával olyan előrebecslési modellt számszerűsítettek, amely alkalmas a rövidtávú gazdasági ciklusok elemzésére és az inflációs ráta előrebecslésére.

Rolf Aagaard-Svendsen (Dánia): „Ökonometriai modellek becslése Kálmán-filter módszerrel.” A szerző a nemlineáris ökonometriai modellek paraméterbecslési problémáival foglalkozik. Előadásában két módszert, az instrumentális változók iteratív módszerét és a Kálmán-filter továbbfejlesztett változatát mutatta be.

C. S. Mitrópoulas, J. E. Somoulidis, E. N. Protonotarios (Görögország): „Energia-prognózis Kálmán-filter segítségével.” A görög szerzőhármas időben változó paraméterű kinematikus energiamodell becslésére a Kálmán-filtert használva jó előrebecslési eredményeket kapott. A becslés során G. W. Morrison és D. H. Pike által 1977-ben az Egyesült Államok energiaigényének hosszútávú előrebecslésére kidolgozott algoritmust használták fel.

G. Paas (NSZK): „Az előrebecslés minőségének előzetes becslése.” Az előadásban bemutatott BAYKAL (Bayesi előrebecslés Kálmán-filter alkalmazásával) módszer alkalmas a szimultán dinamikus lineáris ökonometriai modellek becslésére és előrebecslésre való felhasználására. Az előadó három módszerűsített modellt mutat be,

amelyeknél a BAYKAL módszer alkalmazásával növelték az előrebecslés megbízhatóságát a klasszikus ökonometria előrebcséléssel szemben.

A software eszközöket bemutató előadások között szerepeltek *A. Diediw és D. Nudds* (Anglia), akik az input-output táblák tárolására és kezelésére dolgoztak ki könnyen használható programokat. *A. Drud* (Dánia) a TSP (az USA-ban kidolgozott és könnyű kezelhetősége miatt világszerte alkalmazott) ökonometria programcsomag továbbfejlesztését, optimális irányítási programmal való kiegészítését mutatta be.

Az optimalizációs módszerek* között általános áttekintések, megoldási algoritmusok és konkrét modellek is szerepeltek.

G. H. Saad (USA) áttekintette és rendszerezte az operációkutatásban eddig kidolgozott és alkalmazott termelés-tervezési rendszereket. Az egyes módszerek összehasonlítása, korlátaik és előnyös tulajdonságaik feltárása mellett arra is rámutatott, hogy hol vannak még fehér foltok a modellezés területén, illetve az elmélet és gyakorlat viszonyában.

B. Rustem és M. B. Zarrop (Anglia) N személyes játékok Nash-féle egyensúlyi pontjának meghatározására adott egy Newton-típusú algoritmust, amit a holland gazdaságra kidolgozott kétszemélyes játékok modelben ki is próbált.

Az optimalizációs modellek között elsősorban nemlineáris célfüggvényű, többcélú modellek szerepeltek. Több előadó foglalkozott különböző érzékenységi, instabilitási problémákkal is.

Jugoszláv modellezők (*V. Rupnik, S. Strmcnik, R. Korba és F. Bremsak*) a gazdaság dinamikus tulajdonságait folytonos dinamikus LP modellel közelítették meg. Kétfajta optimalizálást végeztek. A minden időpontban optimalizáló és a végállapotot optimalizáló változat összevetésével azt vizsgálták, hogy a hosszútávú célokat melyik tartományban közelítik jól a rövidtávú tervdöntések.

Magyarországot 11 kutató képviselte. A meghívott előadók között szerepelt *Martos Béla*, aki előadásában a Közgazdaságtudományi Intézetben több éve folyó, a decentralizált, nem akma szerinti, nem árjellegű szabályozással foglalkozó kutatás főbb eredményeiről számolt be. A modellek általános ismertetése mellett azt elemezte, hogy a gazdaság vegetatív működése körében milyen szerepet töltenek be olyan információk, mint a készletek és a rendelkezésemre álló pénzeszközök, hogyan lehetséges ezekkel az eszközökkel a gazdaságot szabályozni. Összehasonlította a stagnáló és fejlődő gazdaságokra alkalmazható, a centralizáltság különböző fokainak megfelelő szabályozási modelleket. Bemutatta, hogy a döntések bizonytalanságának, a szabályozók korlátozottságának milyen destabilizáló hatása lehet.

Az Agrárgazdasági Kutató Intézet munkatársa, *Mészáros Sándor* a szektorális modellek szkecióban ökonometria modellre ismertetett, amelynek célja a fejlődő és fejlett országok műtrágyafelhasználásának és termelésének előrebecslése.

A Tervgazdasági Intézet és az OT SzK munkatársai — *Vellai Györgyi, Veliczky József és Berde Éva* — dinamikus faktoranalízis felhasználásával kidolgozott dinamikus faktor-modelleket mutattak be. *Ziermann Margit* ismertette a szerzőtársaival (*Bánkvi György és Veliczky József*) együtt kidolgozott módszer alapelveit. A dinamikus faktoranalízis, mint információszűrő eljárás, több interdependens idősor dinamikus és statikus sajátosságait ragadja meg és fő célja az egyes kategóriák értékeinek előrebecslése. A dinamikus faktormodell a múltban statisztikusan érvényesülő tendenciák jövőre vonatkozó kivetítésén alapul. Az első faktor általában az idősorok által tükrözött gazdasági jelenség alapirányzatát ragadja meg, míg a további faktorok a trendtől való eltéréseket fejezik ki. Az előadó a módszer gyakorlati illusztrálásaként a VI. ötéves terv számításaihoz készített két dinamikus faktormodellt is bemutatta.

Pór András a IIASA-ban munkatársaival együtt kidolgozott módszert ismertetett „Dekompozíciós elvek alkalmazása a gazdasági egyensúly meghatározásához” címmel. A magyar előadásokat élénk érdeklődés kísérte.

A konferencián az előadások sokrétűsége ellenére is néhány, a gazdasági modellezésben érvényesülő tipikus tendenciát figyelhettünk meg. A hagyományos ökonometria modellekkel készített előrebecslések problémái arra ösztönzik a kutatókat, hogy új eljárásokat dolgozzanak ki mind a becslések, mind az előrebecslések terén. Ugyanakkor sok országban az előrebecslés mellett az ökonometria modellek felhasználásának új területe a gazdaságpolitikai döntések előkészítése, ahol fontos szerepet kapnak a matematikai rendszerelmélet legújabb eredményei is.

BERDE ÉVA—VELLAI GYÖRGYI

* Az optimalizációs módszertani tanulmányok ismertetésében hasznos segítséget nyújtott *Csernátorny Csaba*.

Köszönet a kötet lektorainak

A Szigma 1980. évfolyamához benyújtott cikkeket — a Szerkesztőség állandó munkatársain kívül — a következő külső munkatársak lektorálták:

Augustinovics Mária
Csepinszky Andor
Éltető Ödön
Forgó Ferenc
Hagelmayer István
Haraszi Katalin
Horváth Piroska
Kádas Sándor
Kéri Gerzson
Kindler József
Kovács János

Lányi Kamilla
Mikó Gyula
Nagy András
Pajzs János
Pölöskei Pál
Simon András
Simonné Mosolygó Nóra
Tarján Tamás
Tényi György
Vető Istvánné
Ziermann Margit

Áldozatkész munkájukért ezúton is köszönetet mond a Szerkesztőség.

Kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Marton Andor

A kézirat nyomdába érkezett: 1980. XII. 8. - Terjedelem: 7 (A/5) ív

81.9042 Akadémiai Nyomda, Budapest - Felelős vezető: Bernát György

SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A lap témájának megfelelően elsősorban azokat az új bel- és külföldi matematikai módszereket ismerteti, melyek a mai közgazdaságtan szerves részévé váltak. Elemzi a matematika felhasználásának legidősebb kérdéseit a vállalati alkalmazástól a népgazdasági szintig és az elméleti közgazdaságtantól a gyakorlati operációkutatási feladatokig.

Szerkeszti Martos Béla

Megjelenik évente 1 kötet 4 füzetben

Évi előfizetési díja 80, – Ft



Akadémiai Kiadó, Budapest

GAZDASÁG- ÉS JOGTUDOMÁNY

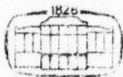
**A Magyar Tudományos Akadémia Gazdaság- és
Jogtudományok Osztályának közleményei**

Főszerkesztő Eörsi Gyula

Áttekintést ad az Osztályhoz tartozó intézmények munkájáról. Közzéteszi az Osztály előadóülésein, konferenciáin elhangzott előadásokat, a magyar nyelven még nyomtatásban meg nem jelent értekezéseket a gazdaság- és jogtudományok különböző területeit érintő olyan kérdésekről, mint többek között a közgazdaságtudomány, az ágazati gazdaságtudományok, az állam- és jogtudományok, a szociológia, a statisztika, a demográfia, valamint az afroziasiai kutatások.

Megjelenik évente 1 kötet 4 füzetben

Évi előfizetési díja 72,— Ft



Akadémiai Kiadó, Budapest

CONTENTS

TAMÁS FÉNYES—JÓZSEF SÁRI: Interest policy making with economic-mathematical model	241
JÓZSEF VÖRÖS: Multi-stage production planning with concave and linear cost functions	261
PÁL DANYI—SÁNDOR KOMLÓSI: Remarks on a variant of the transportation problem	277
MIHÁLY DORMÁNY: A parametric method for the solution of indefinite quadratic programming problems	285

BOOK REVIEWS

ANDRÁS BRÓDY: Cycle and control (<i>György Szepesi</i>)	305
MÁRIA AUGUSTINOVICS (Ed.): National economic models in long-term planning (<i>Rudolf Andorka</i>)	307
ANDRÁS PRÉKOPA (Ed.): Studies on mathematical programming (<i>Ferenc Forgó</i>)	309

SCIENTIFIC LIFE

Suggestions of the 10th Hungarian Conference on Operations Research	311
ÉVA BERDE—GYÖRGYI VELLAI: International IFAC/IFORS conference on „Dynamic modelling and control of national economies”	313

СОДЕРЖАНИЕ

Тамаш Фенеш—Йожеф Шарн: Политика процентных ставок с экономико-математической моделью	241
Йожеф Вереш: Многоступенчатое планирование производства с помощью во- гнутых и линейных функций затрат	261
Пал Дани—Шандор Комлоши: Замечание к одному из видов транспорт- ной задачи	277
Михай Дормань: Параметрический метод для решения неопределенных задач квадратического программирования	285

О КНИГАХ

Андраш Броди: Цикл и регулирование (<i>Дьердь Сепеши</i>)	305
Мария Аугустинович (ред.): Народнохозяйственные модели в долгосроч- ном планировании (<i>Рудольф Андорка</i>)	307
Андраш Прекопа (ред.): Статьи по математическому программированию (<i>Фе- ренц Форго</i>)	309

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Предложения X-ой конференции по операционному исследованию в Венгрии	311
Ева Берде—Дьерди Веллаи: Международная конференция ИФАК/ ИФОРС	313

Ára: 15,— Ft

Előfizetés egy évre: 60,— Ft

INDEX: 26 793
ISSN 0039—8128

TARTALOM

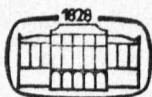
FÉNYES TAMÁS—SÁRFI JÓZSEF: Kamatlábpolitika közgazdasági-matematikai modellel	241
VÖRÖS JÓZSEF: Többállomásos termelés-tervezés konkáv és lineáris költségfüggvénnel	261
DANYI PÁL—KOMLÓSI SÁNDOR: Megjegyzés a szállítási feladat egy változatához	277
DORMÁNY MIHÁLY: Parametrikus módszer az indefinit kvadrátikus programozási feladatok megoldására	285

KÖNYVEKRŐL

BRÓDY ANDRÁS: Ciklus és szabályozás (<i>Szepesi György</i>)	305
AUGUSTINOVICS MÁRIA (szerk.): Népgazdasági modellek a távlati tervezésben (<i>Andorka Rudolf</i>)	307
A. PRÉKOFA (szerk.): Studies on mathematical programming (<i>Forgó Ferenc</i>)	309

TUDOMÁNYOS ÉLET

A X. Magyar Operációkutatási Konferencia ajánlásai	311
BERDE ÉVA—VELLAI GYÖRGYI: Nemzetközi IFAC/IFORS konferencia a „Népgazdaság dinamikus modellezéséről és irányításáról”	313



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST