Dormány Mihály

Parametrikus módszer az indefinit kvadratikus programozási feladatok megoldására

1. Bevezetés

Adott az

$$L = \{x \mid x \geq 0,\ \mathbf{A}x \leq b\} \subset \mathcal{R}^n$$

nemüres, korlátos konvex poliéder, és az n-változós

$$F(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T \mathbf{D} x$$

kvadratikus függvény. (A feladatban szereplő állandók valamennyien valós értékűek.) A

$$\max_{x \in L} F(x) \tag{1}$$

feladatot kvadratikus programozási (a továbbiakban: QP) feladatnak nevezzük. A $\mathbf{D}$ mátrix legyen (célszerűen, de nem szükségszerűen) szimmetrikus; a feladat legspeciálisabb eseteként (amikor $\mathbf{D} = \mathbf{0}$) a lineáris programozási feladatot nyerjük.

Az (1) feladat megoldására kidolgozott módszerek közül legismertebbek a lokális Kuhn—Tucker—Lagrange feltételekre épülő szimplex algoritmus különböző variánsai (pl. [17], [19]), de más lokális — elsősorban a hatékony irány módszerekre épülő — módszerek is használatosak. (*Murray* [14] pl. az aktív feltételek lépésenkénti szisztematikus változtatásával kombinálja kvázi-Newton módszerét.) A lokális módszerekkel azonban csak lokális maximum nyerhető, így ezekkel a módszerekkel teljes sikerre csak akkor számíthatunk, ha $\mathbf{D}$ negatív (szemi)definit (konvex QP), ugyanis ilyenkor a lokális maximum egyúttal globális maximum is.

Speciális az az eset is, amikor $\mathbf{D}$ pozitív (szemi)definit (konkáv QP) — ekkor a megoldást az L halmaz csúcspontjai között kell keresnünk. Kis méretű feladatok esetén jól használható a csúcspontok teljes leszámlálása; nagyobb, méretek esetén részleges leszámlálások (pl. *Cabot*, *Francis* [3]), vagy a lokális optimumpontból kiinduló metszősík módszerek (*Forgó* [6], *Tui* [16]) vezethetnek eredményre.

A konvex, ill. konkáv QP megoldási módszerei — *Martos* [11], [12] vizsgálatai nyomán — könnyen kiterjeszthetők kvázikonvex, ill. kvázikonkáv feladatokra is. Ennél általánosabb indefinit QP feladatok azonban már eléggé nehezen kezelhetők. Pl. *Ritter* [4], [15] a metszősík módszert fejleszti tovább, *Mueller* [13] pedig a gradiens projekció módszerére építi fel több pontból indított heurisztikus algoritmusát. *Forgó* [8] ugyancsak metszősík módszert alkalmaz egy „ε-optimális” megoldás felkutatására.

Az ismert *paraméteres* módszerek lényege, hogy a változók egy részét paraméterként kezelve csökkentett méretű multiparametrikus konvex kvadratikus vagy lineáris programozási feladatok sorozatát állíthatjuk elő (*Van De Panne* [17], *Forgó* [7], [8]).

A dolgozat egy új paraméterezési lehetőségre hívja fel a figyelmet; részletesen foglalkozik a primál-duál multiparametrikus lineáris programozással, és megmutatja, hogy a „szétválasztás és korlátozás" módszerével hogyan növelhető az algoritmus hatékonysága.

2. Visszavezetés redukált méretű QP feladatokra paraméterezéssel

Az indefinit mátrixokra jellemző, hogy már eleve tartalmaznak (vagy — amint azt az 5. pontban látni fogjuk — célszerű lineáris transzformációkkal mindig elérhető, hogy tartalmazzanak) egy $\mathbf{0}$ főminor-mátrixot.

Tegyük tehát fel, hogy egy $(n-p)$-edrendű $\mathbf{0}$ főminor blokk áll — ha kell, a sorok és oszlopok célszerű, azonos permutációja után — a bal felső sarokban, azaz legyen

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{12}^T & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}$$

Ha az x és a c vektort is a $\mathbf{D}$ mátrix particiójának megfelelően particionáljuk, akkor az (1) feladat célfüggvénye az

$$F(x) = F(x_1, x_2) = [c_1^T, c_2^T]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x_1^T, x_2^T]\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{12}^T & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

alakot ölti. Végezzük el a szorzásokat, és vezessük be az $x_2 = t$ jelölést:

$$F(x_1, t) = c_1^T x_1 + c_2^T t + \frac{1}{2} t^T \mathbf{D}_{12}^T x_1 + \frac{1}{2} x_1^T \mathbf{D}_{12} t + \frac{1}{2} t^T \mathbf{D}_{22} t =$$

$$= c_2^T t + \frac{1}{2} t^T \mathbf{D}_{22} t + (c_1 + \mathbf{D}_{12} t)^T x_1. \tag{2}$$

Az $\mathbf{A}x \leq b$ feltételt ugyanígy felbontva kapjuk, hogy

$$[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ t \end{bmatrix} \leq b,$$

azaz

$$\mathbf{A}_1 x_1 \leq b - \mathbf{A}_2 t.$$

Ha a p komponensű t vektorváltozót *paraméterként* kezeljük, akkor a (2) célfüggvénnyel felírt

$$f(t) = \max_{x_1} \left\{ F(x_1, t) \mid x_1 \geq 0, \mathbf{A}_1 x_1 \leq b - \mathbf{A}_2 t, t \geq 0 \right\} \tag{3}$$

feladat csak annyiban tér el a 4. pontban tárgyalandó „szokványos" primál-duál parametrikus lineáris programozási feladattól, hogy az $F(x_1, t)$ célfüggvényben egy, a t paramétertől kvadratikusan függő $c_2^T t + \frac{1}{2} t^T \mathbf{D}_{22} t$ rész is szerepel. Ez azonban semmi nehézséget nem jelent, mivel a primál-duál feladat megoldásában az $f(t)$ függvénynek az $L_1, \ldots, L_k, \ldots, L_s$ karakterisztikus tartományok feletti $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, s$ része mindenképpen kvadratikus. Írhatjuk tehát, hogy

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{ha} \quad t \in L_1, \\ \vdots \\ f_k(t), & \text{ha} \quad t \in L_k, \\ \vdots \\ f_s(t), & \text{ha} \quad t \in L_s, \end{cases}$$

ahol

$$f_k(t) = c^{(k)T} t + \frac{1}{2} t^T \mathbf{D}^{(k)} t, \qquad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Mivel nyilvánvaló, hogy

$$\max_{x \in L} F(x) = \max_{1 \leq k \leq s} \left\{ \max_{t \in L_k} f_k(t) \right\},$$

ezért az (1) feladat megoldása s számú — csökkentett dimenziójú — QP feladat megoldására vezethető vissza, ugyanis a

$$\max_{t \in L_k} f_k(t) = \max_{t \in L_k} \left\{ c^{(k)T} t + \frac{1}{2} t^T \mathbf{D}^{(k)} t \right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, s \tag{4}$$

feladat formailag azonos az (1) feladattal, csupán $t \in R^p$ $(p < n)$.

A (4) feladat — amennyiben $\mathbf{D}^{(k)}$ indefinit mátrix — hasonló probléma elé állít bennünket, mint az (1) feladat: a t változót most már *programváltozóként* kezelve megismételjük a paraméterezést, tovább csökkentve ezzel a részfeladatok dimenzióját.

Ha pedig $\mathbf{D}^{(k)}$ (szemi)definit, akkor a $\max\limits_{t \in L_k} f_k(t) = f_k^0$ értéket a konvex vagy a konkáv QP bármely ismert eszközével meghatározhatjuk.

A definit QP feladatok megoldására szolgáló részprogramokat szubrutinként kell kezelnünk, mert az adott esetben egymásba skatulyázott, egyre csökkenő dimenziójú indefinit QP feladatok sorát mindig egy definit QP feladat megoldása zárja. A felbontás során ugyanis célfüggvényként előbb vagy utóbb mindig egy (szemi)definit kvadratikus függvényt (extrém esetben — az egyváltozós szintre jutva — egy parabolát) kapunk.

Az összes, tovább már nem bontott karakterisztikus tartományon kiszámítván a definit QP feladat optimumát, e részoptimumok maximuma az (1) feladat megoldását szolgáltatja.

3. Megoldás a szétválasztás és korlátozás módszerével

Az előző pontban ismertetett algoritmus tulajdonképpen egy *teljes leszámlálás*, mivel minden karakterisztikus tartomány vizsgálatára explicite szükségünk van. Az algoritmus hatékonysága azonban a szétválasztás és korlátozás módszerével nagyban növelhető, az alábbiak szerint.

Az $\frac{1}{2}\mathbf{D}^{(k)}$ mátrix oszloponkénti partíciója legyen

$$\frac{1}{2}\mathbf{D}^{(k)} = \left[d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \ldots, d_p^{(k)}\right];$$

az L_k karakterisztikus tartományon érvényes célfüggvény ezzel

$$f_k(t) = c^{(k)T}t + \frac{1}{2}t^T\mathbf{D}^{(k)}t = \sum_{j=1}^{p} c_j^{(k)}t_j + \sum_{j=1}^{p}(t^Td_j^{(k)})t_j = \sum_{j=1}^{p}(c_j^{(k)} + t^Td_j^{(k)})\,t_j.$$

Mivel

$$\max_{t\in L_k} f_k(t) = \max_{t\in L_k}\sum_{j=1}^{p}(c_j^{(k)} + t^Td_j^{(k)})t_j \leq \max_{t\in L_k}\sum_{j=1}^{p}(c_j^{(k)} + \max_{t\in L_k} t^Td_j^{(k)})t_j,$$

ezért a

$$\max_{t\in L_k} t^Td_j^{(k)} = h_j^{(k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, p \tag{5}$$

lineáris programozási feladatsor megoldása után az $f_k(t)$ függvényre — egy újabb lineáris programozási feladat megoldásával — jól használható felső korlátot nyerhetünk:

$$\max_{t\in L_k} f_k(t) \leq \max_{t\in L_k}\sum_{j=1}^{p}(c_j^{(k)} + h_j^{(k)})t_j = \max_{t\in L_k}(c^{(k)} + h^{(k)})^T\,t = \bar{f}_k. \tag{6}$$

Az (5) feladatsor megoldása — mivel csak a célfüggvények különbözőek, a feltételek nem — nem okoz nehézséget.

A teljes leszámlálási algoritmusunkat célszerű tehát úgy módosítani, hogy minden karakterisztikus tartományhoz hozzárendeljük a célfüggvény (6) szerinti felső korlátját, és csak a mindenkori legkedvezőbb korláttal rendelkező karakterisztikus tartományt vesszük részletes vizsgálat alá. Algoritmusunkat a szétválasztás és korlátozás szabályai szerint addig folytatjuk, amíg a fa-gráf valamelyik aktuális végpontján meg nem jelenik egy domináns, effektív célfüggvényérték.

4. A primál-duál parametrikus lineáris programozásról

A primál-duál feladat általános alakja

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}x &= b + \mathbf{\Delta}t \\ x &\geq 0,\ t\in T \\ f(t) &= \max_x\,(c + \mathbf{\Gamma}t)^Tx, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ahol a

$$T = \{t \mid \mathbf{R}t = r\} \subset \mathbf{R}^p$$

konvex poliéder a p-komponensű vektorparaméter értelmezési tartománya.

A (7) feladat az

$$\mathbf{A}x = b$$

$$x \geq 0,\ t\in T$$

$$f(t) = \max_x\,(c + \mathbf{\Gamma}t)^Tx$$

primális, és az

$$\mathbf{A}x = b + \mathbf{\Delta}t$$

$$x \geq 0, \ t \in T$$

$$f(t) = \max_x c^T x$$

duális feladat egyfajta általánosításának tekinthető. (A (7) feladatnak azzal a speciális esetével, amikor a célvektorban és a kapacitásvektorban más-más paraméterek szerepelnek, vagyis a célvektor $c + \mathbf{\Gamma}t$, a kapacitásvektor pedig $b + \mathbf{\Delta}\tau$ alakú, *Weinert* [18] foglalkozik.)

Bizonyítható (lásd pl. [5]), hogy a primális (ill. a duális) feladatnál a T értelmezési tartomány felbontható összefüggő, szeparált $L_1, L_2, \ldots, L_s$ konvex poliéderek (karakterisztikus tartományok) rendszerére, amely rendszer felett a feladat $f(t)$ megoldása tartományonként lineáris, folytonos konvex (ill. konkáv) függvény.

A primál-duál feladat a — pl. [9]-ben részletesen tárgyalt — primális, ill. duális feladattól elsősorban abban tér el, hogy

— az $f(t)$ függvény továbbra is folytonos, de tartományonként nem lineáris, hanem kvadratikus,

— a karakterisztikus tartományoknak egy-egy határlapján nemcsak egy, hanem több szomszédos tartományba is átléphetünk, mivel a mindenkori szűk keresztmetszet (és így az átlépést realizáló transzformáció generáló eleme is) függ a vektorparamétertől.

A (7) feladat adatait az alábbi táblába rendezhetjük:

	x^T	
	$\mathbf{A}$	$b + \mathbf{\Delta}t$
$f(t)$	$-(c + \mathbf{\Gamma}t)^T$	0

Ha az $\mathbf{A}$ mátrix mérete $m \times \nu$, akkor — feltéve, hogy $\mathbf{A}$ sorai lineárisan függetlenek — a lehetséges *bázisok* száma $\binom{\nu}{m}$. Egy B bázishoz (vagyis egy $\mathbf{B}$ bázismátrixhoz) tartozó rövid szimplex tábla (amikor is a bázisváltozók csak a bal szegélyen szerepelnek) az alábbi:

	$(x^N)^T$	
x^B	$\mathbf{A}'$	$b'(t)$
$f(t)$	$[c'(t)]^T$	$(c + \mathbf{\Gamma}t)_B^T\, b'(t)$

ahol x^B tartalmazza a bázisváltozókat,

x^N tartalmazza a nembázis változókat,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{B}^{-1}\, \mathbf{A},$$

$$b'(t) = \mathbf{B}^{-1}\,(b + \mathbf{\Delta}t),$$

$$[c'(t)]^T = (c + \mathbf{\Gamma}t)_B^T\, \mathbf{A}' - (c + \mathbf{\Gamma}t)_N^T.$$

(Itt $(c + \mathbf{\Gamma}t)_B^T$ és $(c + \mathbf{\Gamma}t)_N^T$ jelöli a célvektornak a bázis, ill. nembázis változókra vonatkozó részét.)

A B bázis *optimális*, ha a

$$\left.\begin{aligned} b'(t) &\geq 0 \\ c'(t) &\geq 0 \\ t &\in T \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

rendszer konzisztens. A konzisztens (8) egyenlőtlenségrendszer megoldásaként nyert

$$L_B = \{t \mid t \in T,\ b'(t) \geq 0,\ c'(t) \geq 0\} \neq \emptyset$$

konvex poliéder a B bázishoz tartozó karakterisztikus tartomány. Az L_B karakterisztikus tartomány felett

$$\left.\begin{aligned} x^B(t) &= b'(t) \\ x^N &= 0 \end{aligned}\right\}$$

az optimális program, és $f(t) = (c + \mathbf{\Gamma}t)_B^T\, b'(t)$.

Ha nem teljes leszámlálással dolgozunk (azaz, ha nem akarjuk valamennyi bázist explicite megvizsgálni; — ez nagy méretű feladatok esetén túl sok munkát jelentene), akkor két alapvető kérdésre kell választ adnunk:

1. Hogyan határozhatunk meg egy optimális bázist (vagyis egy karakterisztikus tartományt), és
2. hogyan határozhatjuk meg az összes többi optimális bázist (ill. karakterisztikus tartományt).

ad. 1. Az első kérdést könnyen megválaszolhatjuk. Ha ugyanis ismerünk egy $t_0 \in T$ vektorparamétert, akkor a

$$\max\,\{(c + \mathbf{\Gamma}t_0)^T x \mid x \geq 0,\ \mathbf{A}x = b + \mathbf{\Delta}t_0\} \tag{9}$$

paraméter nélküli („közönséges") LP feladat megoldásához tartozó B_1 bázis lesz az első optimális bázis, és a (8) rendszer megoldása az L_1 karakterisztikus tartomány.

ad. 2. Ismeretes, hogy ha a *primális* feladat megoldása során szomszédos tartományba akarunk átlépni, akkor egy *nemredundáns* (aktivizálható) feltételnek megfelelő *oszlopban* kell *pozitív* generáló elemet választanunk a szűk keresztmetszetben. A *duális* feladatnál is hasonló a helyzet, csak ott *negatív* generáló elemet kell választanunk a megfelelő *sor* szűk keresztmetszetében. (Meg kell jegyeznünk, hogy a degeneráció ezeknél a feladatoknál, csakúgy, mint a primál-duál feladatnál, komplikációkat okozhat.)

A primál-duál feladatnál is szükségünk van a nemredundáns feltételekre. Legyen a (8) rendszer aktivizálható feltételeinek indexhalmaza

$$I_0 = \{i \mid \text{a } b_i'(t) \geq 0 \text{ feltétel nem redundáns, } i = 1, 2, \ldots, m\},$$

és

$$J_0 = \{j \mid \text{a } c_j'(t) \geq 0 \text{ feltétel nem redundáns, } j = 1, 2, \ldots, \nu\}.$$

Most is a nemredundáns feltételeknek megfelelő oszlopban, ill. sorban kell pozitív, ill. negatív generáló elemet választani a szűk keresztmetszetben.

Mivel azonban itt a szűk keresztmetszet is függ a paramétertől, csak további nehézségek árán (pl. a karakterisztikus tartományok valamennyi csúcsának meghatározásával) tudnánk kijelölni a szomszédos tartományokba átvezető generáló elemeket.

Sokkal egyszerűbb, ha *valamennyi* $a'_{kj} < 0$, $k \in I_0$ és $a'_{il} > 0$, $l \in J_0$ elemet számon tartjuk, mint *potenciális* generáló elemet. Ezek közül az elemek közül azonban csak azok lesznek tényleges generáló elemek, amelyekkel végrehajtott transzformáció konzisztens feltételi rendszerhez vezet.

A primál-duál feladat specialitásaként az is előfordulhat, hogy szomszédos bázishoz geometriailag nem szomszédos karakterisztikus tartomány tartozik. Ez azonban semmi problémát nem jelent, mert a tényleges geometriai viszonyoknak nincs jelentőségük abban az *algoritmusban*, melyet — vázlatosan — alább ismertetünk.

1. A (9) feladat megoldásával meghatározzuk az első szimplex táblát, majd kijelöljük a potenciális generáló elemeket.
2. Megnézzük, hogy a táblán van-e olyan potenciális generáló elem, amelyik eddig még nem vizsgált B bázist generál. Ha nincs, térjünk rá a 4. lépésre. Egyébként
3. a B bázist vegyük fel a vizsgálat alá vett bázisok listájára, majd nézzük meg, hogy a megfelelő (8) rendszer konzisztens-e. Ha a (8) rendszer inkonzisztens, térjünk vissza a 2. lépésre. Ha viszont a (8) rendszer konzisztens, számítsuk ki az $\mathbf{A}'$ mátrixot — így egy új szimplex táblát nyerünk, melyet a még nem vizsgált szimplex táblák közé sorolunk. A célszerűség kedvéért a konzisztencia-vizsgálattal együtt itt határozzuk meg a nemredundáns feltételek I_0 és J_0 indexhalmazát is. Térjünk vissza a 2. lépésre.
4. Van-e még nem vizsgált szimplex tábla? Ha nincs, megoldottuk a primál-duál programozási feladatot. Ha van, akkor kiválasztjuk a következő táblát, és
   — kiíratjuk a legfontosabb adatokat (L_k, $x^k(t)$, $f_k(t)$, stb.),
   — meghatározzuk a potenciális generáló elemeket.

   Térjünk vissza a 2. lépésre.

5. A 0 főminor előállításáról

A fődiagonálisban előállítható $\mathbf{0}$ blokk méreteinek lehetséges határait a *főtengelytranszformáció* segítségével vizsgálhatjuk.

Ismeretes, hogy ha $\mathbf{D}$ egy n-edrendű szimmetrikus mátrix, akkor a célfüggvény $\frac{1}{2}x^T\mathbf{D}x$ kvadratikus része $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\hat{x}_j^2$ alakra transzformálható, ahol a λ_j együtthatók a $\mathbf{D}$ mátrix sajátértékei. Ha a pozitív sajátértékek száma w (indefinit mátrixról lévén szó $0 < w < n$), akkor a sajátértékek közül kiválasztható legfeljebb $z = \min\{w, n - w\}$ számú $\lambda_k > 0$, $\lambda_l < 0$ pár. Bevezetve az

$$\hat{\hat{x}}_k = \sqrt{\lambda_k}\hat{x}_k + \sqrt{-\lambda_l}\hat{x}_l,$$

$$\hat{\hat{x}}_l = \sqrt{\lambda_k}\hat{x}_k - \sqrt{-\lambda_l}\hat{x}_l$$

új változókat, azt kapjuk, hogy $\lambda_k \hat{x}_k + \lambda_l \hat{x}_l^2 = \hat{\hat{x}}_k \hat{\hat{x}}_l$, vagyis minden ilyen párhoz megjelentethető egy

$$\hat{\hat{\mathbf{D}}}(k, l) = \begin{array}{c} \hat{\hat{x}}_k \quad \hat{\hat{x}}_l \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

főminor. Mivel az így előállítható másodrendű főminorok maximális száma z, ezért $\hat{\hat{\mathbf{D}}}$ vonalainak célszerű permutációjával legfeljebb z-edrendű $\mathbf{0}$ főminor nyerhető.

Nézzük most a (3) feladatot! Mivel $t \in R^p$ és $x_1 \in R^{n-p}$, ezért a $\mathbf{0}$ főminor méreteinek növelésével az $\mathbf{A}_1$ mátrix mérete (és ezzel a karakterisztikus tartományok száma) növekszik, csökken viszont a p paraméterszám (és ezzel együtt az egyes karakterisztikus tartományokon megoldandó részfeladatok dimenziója). Számítástechnikai tapasztalatok hiányában a $\mathbf{0}$ főminor méreteinek növelése látszik célszerűnek.

Mindenesetre, ha csupán egyetlen zérust akarunk előállítani, akkor ehhez elegendő a főátlóban kiválasztani egyetlen pozitív-negatív elempárt, sőt, elég egy olyan másodrendű főminort találni, amelynek determinánsa negatív. Ugyanis, ha

$$\det \mathbf{D}(i, j) = \begin{vmatrix} d_{ii} & d_{ij} \\ d_{ij} & d_{jj} \end{vmatrix} < 0,$$

ekkor a megfelelő kvadratikus rész szorzattá alakítható az

$$\frac{1}{2} d_{ii} x_i^2 + d_{ij} x_i x_j + \frac{1}{2} d_{jj} x_j^2 = \frac{1}{2} d_{ii} (x_i + \alpha x_j)(x_i + \beta x_j) = \frac{1}{2} d_{ii} \hat{x}_i \hat{x}_j$$

összefüggésnek megfelelően, ahol

$$\alpha = \frac{d_{ij} + \sqrt{-\det \mathbf{D}(i, j)}}{d_{ii}},$$

$$\beta = \frac{d_{ij} - \sqrt{-\det \mathbf{D}(i, j)}}{d_{ii}}.$$

Ha nagyobb $\mathbf{0}$ blokkot akarunk előállítani, akkor a főtengelytranszformáció mellett (amelynek itt inkább csak elvi szerepe van) a *diagonizáló* eljárást is sikerrel alkalmazhatjuk. (A kvadratikus formák diagonizáló transzformációja abban különbözik a lineáris bázistranszformációtól, hogy a diagonális generáló elem sora és oszlopa – a generáló elemet leszámítva – zérussá változik. Erről a transzformációs eljárásról bővebben pl. [10]-ben vagy [17]-ben olvashatunk.)

A diagonizáló transzformációs egyenleteket $\mathbf{D}$ transzformált alakjainak segítségével írhatjuk fel. Az első lépésben pl. a $\mathbf{D}$ mátrix első sorát használhatjuk fel az

$$\hat{x}_1 = d_{11} x_1 + d_{12} x_2 + \ldots + d_{1n} x_n$$

új változó bevezetésére. ($\hat{x}_1$ előjelkötetlen vagy előjelkötött, a $d_{11}, \ldots, d_{1n}$ állandók előjelétől függően.) Innen

$$x_1 = \frac{1}{d_{11}} (\hat{x}_1 - d_{12} x_2 - \ldots - d_{1n} x_n) \geq 0.$$

Ekkor d_{11} a generáló elem, és $\mathbf{D}$ transzformáltja

$$\mathbf{D}' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \hat{x}_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} - \frac{d_{12}^2}{d_{11}} & \dots & d_{2n} - \frac{d_{12}d_{1n}}{d_{11}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & d_{2n} - \frac{d_{12}d_{1n}}{d_{11}} & \dots & d_{nn} - \frac{d_{1n}^2}{d_{11}} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} d'_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d'_{22} & d'_{23} & \dots & d'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & d'_{2n} & d'_{3n} & \dots & d'_{nn} \end{bmatrix}$$

A második lépésben az

$$\hat{x}_2 = d'_{22}x_2 + d'_{23}x_3 + \dots + d'_{2n}x_n$$

transzformációt alkalmazzuk. Az új $\mathbf{D}''$ mátrixot a d'_{22} generáló elemmel nyerjük, stb.

Például legyen

$$f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + \frac{117}{40}x_3^2 - 3x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_3\,,$$

így

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & \frac{117}{20} \end{bmatrix}.$$

Az első új változó

$$\hat{x}_1 = 4x_1 - 3x_2 + 3x_3,$$

$\mathbf{D}$ transzformáltja

$$\mathbf{D}' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \hat{x}_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{21}{4} \\ 0 & \frac{21}{4} & \frac{18}{5} \end{bmatrix} \end{array}$$

A második új változó

$$\hat{x}_2 = \frac{15}{4}x_2 + \frac{21}{4}x\,,$$

ezzel

$$\mathbf{D}'' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{4} \end{bmatrix} \end{array},$$

és $f(x)$ második transzformáltja

$$f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, x_3) = \frac{1}{8}\hat{x}_1^2 + \frac{2}{15}\hat{x}_2^2 - \frac{15}{8}x_3^2.$$

Természetesen, bármelyik transzformációt alkalmazzuk, az új változókat nemcsak a célfüggvénybe, hanem a feltételi rendszer minden egyes feltételébe is (a nemnegativitási feltételeket is beleértve) be kell vezetnünk.

6. Mintafeladat

Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_4 &\leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &\leq 12 \\ 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$F(x) = x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_2x_4 + 3x_3^2 + \frac{9}{4}x_4^2 - 4x_1 - 2x_2 + 3x_4 = \max.$$

feladatot!

Mivel x_1^2 mellett x_1x_2 és x_1x_3 tag is hiányzik a célfüggvényből, a $\mathbf{0}$ főminor rendjét az

$$x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2 = (x_2 + x_3)(x_2 + 3x_3) = \hat{x}_2\hat{x}_3,$$

azaz

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}(3\hat{x}_2 - \hat{x}_3) \geq 0 \\ x_3 &= \frac{1}{2}(\hat{x}_3 - \hat{x}_2) \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

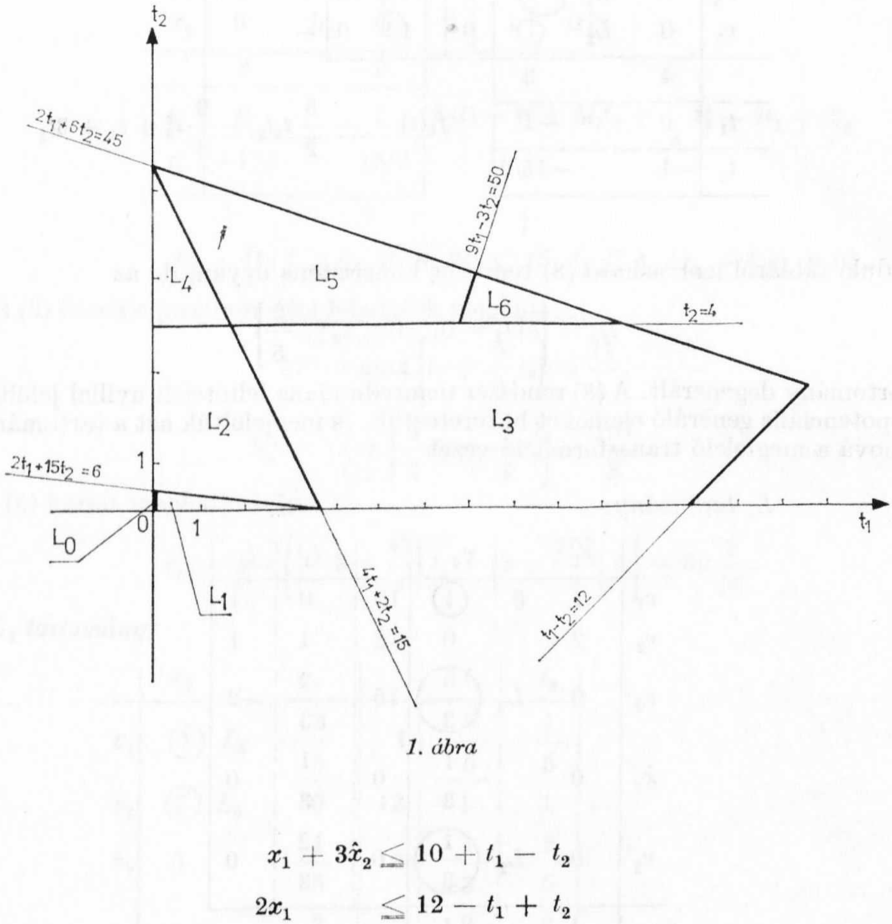
transzformáció felhasználásával növelhetjük.

Az új változókat bevezetve a feltételi rendszerbe és a célfüggvénybe, az alábbi feladatot nyerjük (most $\hat{x}_2$ és $\hat{x}_3$ is előjelkötött):

$$\begin{aligned} x_1 + 3\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + x_4 &\leq 10 \\ 2x_1 \qquad\quad + \hat{x}_3 - x_4 &\leq 12 \\ 5\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + 2x_4 &\leq 15 \\ -3\hat{x}_2 + \hat{x}_3 \qquad &\leq 0 \\ \hat{x}_2 - \hat{x}_3 \qquad &\leq 0 \\ x_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$x_1x_4 + \hat{x}_2\hat{x}_3 + \frac{15}{2}\hat{x}_2x_4 - \frac{5}{2}\hat{x}_3x_4 + \frac{9}{4}x_4^2 - 4x_1 - 3\hat{x}_2 + \hat{x}_3 + 3x_4 = \max.$$

$\hat{x}_3 = t_1$, $x_4 = t_2$ paraméterezéssel az alábbi kétparaméteres feladathoz jutunk, melynek karakterisztikus tartományai az 1. ábrán láthatók:



1. ábra

$$\begin{aligned} x_1 + 3\hat{x}_2 &\leq 10 + t_1 - t_2 \\ 2x_1 \quad\;\; &\leq 12 - t_1 + t_2 \\ 5\hat{x}_2 &\leq 15 + t_1 - 2t_2 \\ -3\hat{x}_2 &\leq -t_1 \\ \hat{x}_2 &\leq t_1 \\ x_1, \hat{x}_2, t_1, t_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$x_1(t_2 - 4) + \hat{x}_2\left(t_1 + \frac{15}{2}t_2 - 3\right) - \frac{5}{2}t_1t_2 + \frac{9}{4}t_2^2 + t_1 + 3t_2 = \max.$$

Az

	x_1		$\hat{x}_2$		t_1	t_2	
v_1	1	∅	3	10	1	−1	
v_2	2		0	12	−1	1	
v_3	0	L_3	5	15	1	−2	
v_4	0	L_1	−3	0	−1	0	←
v_5	0	L_2	1	0	1	0	←
	4		3				
t_1	0		−1				
t_2	−1		−15/2				
			↑				

$$f_0(t) = -\frac{5}{2}t_1t_2 + \frac{9}{4}t_2^2 + t_1 + 3t_2$$

induló tábláról leolvasható (8) rendszer konzisztens ugyan, de az

$$L_0 = \left\{t \mid t_1 = 0, \quad 0 \leq t_2 \leq \frac{2}{5}\right\}$$

tartomány degenerált. A (8) rendszer nemredundáns feltételeit nyíllal jelöltük; a potenciális generáló elemeket bekereteztük, és megjelöltük azt a tartományt, ahová a megfelelő transzformáció vezet

L_1 tartomány:

	x_1		v_4		t_1	t_2
v_1	1	∅	1	10	0	−1
v_2	2		0	12	−1	1
v_3	0	L_3	$\frac{5}{3}$	15	$-\frac{2}{3}$	−2
$\hat{x}_2$	0		$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
v_5	0	L_2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0
	4		1			
t_1	0		−1/3			
t_2	−1		−5/2			
			↑			

$$f_1(t) = \frac{1}{3}t_1^2 + \frac{9}{4}t_2^2 + 3t_2$$

$$L_1 = \{t \mid t \geq 0, \ 2t_1 + 15t_2 \leq 6\}.$$

Mivel $f_1(t)$ konvex függvény, és az L_1 tartománynak mindössze 3 csúcsa van, teljes leszámlálással kapjuk, hogy $f_1^0 = \max\limits_{t \in L} f_1(t) = 3.$

L_2 tartomány:

	x_1		v_5		t_1	t_2	
v_1	1	L_4	-3	10	-2	-1	
v_2	2	$\emptyset$	0	12	-1	1	
v_3	0	L_3	-5	15	-4	-2	←
v_4	0	L_1	3	0	2	0	
$\hat{x}_2$	0	L_0	1	0	1	0	
	4		-3				
t_1	0		1				
t_2	-1		$15/2$				
	↑		↑				

$$f_2(t) = t_1^2 + 5t_1t_2 + \frac{9}{4}t_2^2 - 2t_1 + 3t_2.$$

$$L_2 = \{t \mid t \geq 0,\ 4t_1 + 2t_2 \leq 15,\ t_2 \leq 4,\ 2t_1 + 15t_2 \geq 6\}.$$

Az (5) lineáris programozási feladatok megoldása:

$$h_1^{(2)} = \max_{t \in L_2}\left\{t_1 + \frac{5}{2}t_2\right\} = \frac{47}{4},$$

$$h_2^{(2)} = \max_{t \in L_2}\left\{\frac{5}{2}t_1 + \frac{9}{4}t_2\right\} = \frac{107}{8}.$$

A (6) korlát meghatározása:

$$\bar{f}_2 = \max_{t \in L_2}\left\{\left(-2 + \frac{47}{4}\right)t_1 + \left(3 + \frac{107}{8}\right)t_2\right\} = 82\frac{9}{16}.$$

L_3 tartomány:

	x_1		v_3		t_1	t_2	
v_1	1	L_5	$-\frac{3}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	
v_2	2	L_6	0	12	-1	1	←
$\hat{x}_2$	0		$\frac{1}{5}$	3	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	
v_4	0		$\frac{3}{5}$	9	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	←
v_5	0	L_2	$-\frac{1}{5}$	-3	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	←
	4		$-3/5$				
t_1	0		$1/5$				
t_2	-1		$3/2$				
	↑						

$$f_3(t) = \frac{1}{5}t_1^2 - \frac{7}{5}t_1t_2 - \frac{3}{4}t_2^2 + \frac{17}{5}t_1 + \frac{267}{10}t_2 - 9$$

$$L_3 = \{t \mid t \geq 0,\ t_1 - t_2 \leq 12,\ 2t_1 + 6t_2 \leq 45,\ 4t_1 + 2t_2 \geq 15,\ t_2 \leq 4\}.$$

$$h_1^{(3)} = \max_{t \in L_3} \left\{ \frac{1}{5} t_1 - \frac{7}{10} t_2 \right\} = \frac{12}{5},\quad h_2^{(3)} = \max_{t \in L_3} \left\{ -\frac{7}{10} t_1 - \frac{3}{4} t_2 \right\} = -\frac{21}{8},$$

$$\bar{f}_3 = \max_{t \in L_3} \left\{ \frac{29}{5} t_1 + \frac{963}{40} t_2 - 9 \right\} = 148{,}2.$$

L_4 tartomány:

	v_1	v_5		t_1	t_2	
x_1	1 L_2	-3	10	-2	-1	
v_2	-2	6	-8	3	3	
v_3	0	L_5 -5	15	-4	-2	←
v_4	0	3	0	2	0	
$\hat{x}_2$	0	1	0	1	0	
	-4	9				
t_1	0	1				
t_2	1	9/2				
	↑					

$$f_4(t) = t_1^2 + 3t_1t_2 + \frac{5}{4} t_2^2 + 6t_1 + 17t_2 - 40$$

$$L_4 = \{t \mid t \geq 0,\ 4t_1 + 2t_2 \leq 15,\ t_2 \geq 4\}.$$

$$h_1^{(4)} = \max_{t \in L_4} \left\{ t_1 + \frac{3}{2} t_2 \right\} = \frac{45}{4},\quad h_2^{(4)} = \max_{t \in L_4} \left\{ \frac{3}{2} t_1 + \frac{5}{4} t_2 \right\} = \frac{75}{8},$$

$$\bar{f}_4 = \max_{t \in L_4} \left\{ \frac{69}{4} t_1 + \frac{211}{8} t_2 - 40 \right\} = 157 \frac{13}{16}$$

L_5 tartomány:

	v_1	v_3		t_1	t_2	
x_1	1 L_3	$-\frac{3}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	
v_2	-2 L_6	$\frac{6}{5}$	10	$-\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}$	←
$\hat{x}_2$	0	$\frac{1}{5}$	3	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	
v_4	0	$\frac{3}{5}$	9	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	←
v_5	0	L_4 $-\frac{1}{5}$	-3	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	←
	-4	9/5				
t_1	0	1/5				
t_2	1	9/10				
	↑					

$$f_5(t) = \frac{1}{5} t_1^2 - t_1t_2 - \frac{11}{20} t_2^2 + \frac{9}{5} t_1 + \frac{269}{10} t_2 - 13$$

$$L_5 = \{t \mid t \geqq 0,\ 9t_1 - 3t_2 \leqq 50,\ 2t_1 + 6t_2 \leqq 45,\ 4t_1 + 2t_2 \geqq 15,\ t_2 \geqq 4\}.$$

$$h_1^{(5)} = \max_{t \in L_5} \left\{\frac{1}{5} t_1 - \frac{1}{2} t_2\right\} = -\frac{28}{45},\quad h_2^{(5)} = \max_{t \in L_5} \left\{-\frac{1}{2} t_1 - \frac{11}{20} t_2\right\} = -\frac{123}{40},$$

$$\bar{f}_5 = \max_{t \in L_5} \left\{\frac{53}{45} t_1 + \frac{953}{40} t_2 - 13\right\} = 165\frac{11}{16}.$$

L_6 *tartomány:*

	v_2		v_3		t_1	t_2	
v_1	$-\frac{1}{2}$	L_5	Ø $-\frac{3}{5}$	-5	$\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	←
x_1	$\frac{1}{2}$	L_3	0	6	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
x_2	0		$\frac{1}{5}$	3	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	
v_4	0		$\frac{3}{5}$	9	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	←
v_5	0		$-\frac{1}{5}$	-3	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	
	-2		$-3/5$				
t_1	0		$1/5$				
t_2	$1/2$		$3/2$				
	↑						

$$f_6(t) = \frac{1}{5} t_1^2 - \frac{19}{10} t_1 t_2 - \frac{1}{4} t_2^2 + \frac{27}{5} t_1 + \frac{307}{10} t_2 - 33$$

$$L_6 = \{t \mid t \geqq 0,\ 9t_1 - 3t_2 \geqq 50,\ 2t_1 + 6t_2 \leqq 45,\ t_2 \geqq 4\}.$$

$$h_1^{(6)} = \max_{t \in L_6} \left\{\frac{1}{5} t_1 - \frac{19}{20} t_2\right\} = -\frac{17}{10},\quad h_2^{(6)} = \max_{t \in L_6} \left\{-\frac{19}{20} t_1 - \frac{1}{4} t_2\right\} = -\frac{679}{90},$$

$$\bar{f}_6 = \max_{t \in L_6} \left\{\frac{37}{10} t_1 + \frac{1042}{45} t_2 - 33\right\} = 111\frac{115}{216}.$$

Mivel a $\max\limits_{1 \leq k \leq 6} \bar{f}_k = 165\frac{11}{16}$ érték $k = 5$-re adódik, ezért az L_5 tartomány további vizsgálatára kerül sor. $f_5(t)$ egy indefinit kvadratikus függvény, ezért ismét egy dimenziócsökkentő paraméterezést kell végrehajtanunk.

Első lépésben $\mathbf{D}^{(5)}$ főátlójában kell előállítanunk a zérust. Ezt az

$$\frac{1}{5} t_1^2 - t_1 t_2 - \frac{11}{20} t_2^2 = \frac{1}{5}\left(t_1 - \frac{11}{2} t_2\right)\left(t_1 + \frac{1}{2} t_2\right)$$

összefüggés felhasználásával tehetjük meg. Legyen

$$\hat{t}_1^* = t_1 - \frac{11}{2} t_2 ,$$

$$\hat{t}_2 = t_1 + \frac{1}{2} t_2 \geq 0,$$

innen

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{12}(\hat{t}_1^* + 11\hat{t}_2) \geq 0 , \\ t_2 &= \frac{1}{6}(\hat{t}_2 - \hat{t}_1^*) \geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

A transzformációs (11) egyenleteket behelyettesítve az L_5 tartomány feltételi rendszerébe és az $f_5(t)$ célfüggvénybe, az alábbi feladatot nyerjük:

$$\begin{aligned} 5\hat{t}_1^* + 31\hat{t}_2 &\leq 200 \\ -5\hat{t}_1^* + 17\hat{t}_2 &\leq 270 \\ 4\hat{t}_2 &\geq 15 \\ -\hat{t}_1^* + \hat{t}_2 &\geq 24 \\ \hat{t}_1^* + 11\hat{t}_2 &\geq 0 \\ \hat{t}_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{5}\hat{t}_1^*\hat{t}_2 - \frac{13}{3}\hat{t}_1^* + \frac{92}{15}\hat{t}_2 - 13 = \max .$$

Legyen a paraméter $\hat{t}_2 = \tau$. Az induló szimplex tábla

	$\hat{t}_1^*$		τ
w_1	5	200	−31
w_2	−5	270	−17
w_3	0	−15	4
w_4	1	−24	1
w_5	−1	0	11
	13/3	$f_{50}(\tau) = \frac{92}{15}\tau - 13$	
τ	−1/5		

A bekeretezett helyen választva generáló elemet az előjelkötetlen $\hat{t}_1^*$ változót bevisszük a bázisba:

	w_2		τ	
w_1	1	470	-48	←
$\hat{t}_1^*$	$-\frac{1}{5}$	-54	$\frac{17}{5}$	
w_3	0	-15	4	←
w_4	$\frac{1}{5}$	30	$-\frac{12}{5}$	
w_5	$-\frac{1}{5}$	-54	$\frac{72}{5}$	
	$13/15$			
τ	$-1/25$			

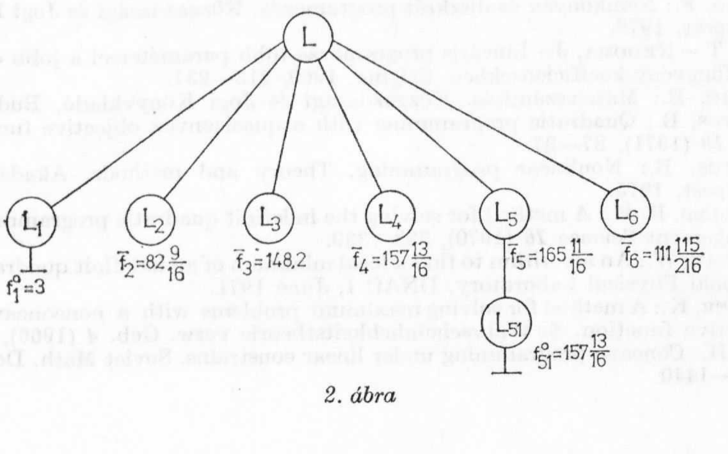
$$f_{51}(\tau) = \frac{17}{25}\tau^2 - \frac{97}{5}\tau + 221$$

$$L_{51} = \left\{\tau \mid \frac{15}{4} \leq \tau \leq \frac{235}{24}\right\}.$$

$f_{51}^0 = \max\limits_{\tau \in L_{51}} f_{51}(\tau) = 157\frac{13}{16}$, amit a függvény a $\tau^0 = \frac{15}{4}$ helyen vesz fel. Mivel nincs több karakterisztikus intervallum, L_5 felbontása befejeződött. Az $f_{51}^0 = 157\frac{13}{16}$ érték a 2. ábrán látható fa-gráfon domináns effektív érték, tehát feladatunkat megoldottuk.

Az optimális program meghatározásához először is figyelembe kell vennünk, hogy $\hat{t}_2 = \tau^0 = \frac{15}{4}$, és az utolsó tábláról $\hat{t}_1^* = -54 + \frac{17}{5}\tau^0 = -\frac{165}{4}$. A (11) összefüggésből

$$\hat{x}_3 = t_1 = \frac{1}{12}\left(-\frac{165}{4} + \frac{165}{4}\right) = 0,\quad x_4 = t_2 = \frac{1}{6}\left(\frac{15}{4} + \frac{165}{4}\right) = \frac{180}{24} = \frac{15}{2},$$



2. ábra

az L_5 tartomány táblájából pedig

$$x_1 = 1 + \frac{2}{5}t_1 + \frac{1}{5}t_2 = \frac{5}{2}, \quad \hat{x}_2 = 3 + \frac{1}{5}t_1 - \frac{2}{5}t_2 = 0.$$

Végül, a (10) összefüggésből

$$x_2 = \frac{1}{2}(3\hat{x}_2 - \hat{x}_3) = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}(\hat{x}_3 - \hat{x}_2) = 0.$$

Az optimális program e szerint $x^0 = \left[\frac{5}{2}, 0, 0, \frac{15}{2}\right]^T$.

Köszönetnyilvánítás. Végezetül szeretném megköszönni a lektoroknak, valamint Klafszky Emil professzornak értékes megjegyzéseiket és tanácsaikat, melyek nélkül ez a dolgozat nem születhetett volna meg.

(Beérkezett: 1980. augusztus 15-én.)

IRODALOM

1. BALAS, E.: Nonconvex quadratic programming via generalized polars. Management Sciences Research Report. No. 278, G.S.I.A., Carnegie-Mellon University, October 1973.
2. BURDET, C. A.: General quadratic programming. Management Sciences Research Report. No. 299, G.S.I.A., Carnegie — Mellon University, November 1971.
3. CABOT, A. V.—FRANCIS, R. L.: Solving certain nonconvex quadratic minimization problems by ranking the extreme points. Opns. Res. *18* (1970), 82—86.
4. COTTLE, R. W.—MYLANDER, W. C.: Ritter's cutting plane method for nonconvex quadratic programming, in: Integer and nonlinear programming, ed. J. ABADIE, North-Holland, Amsterdam, 1970.
5. DINKELBACH, W.: Sensivitätsanalysen und parametrische Programmierung. Springer V., 1969.
6. FORGÓ, F.: Cutting plane methods for solving nonconvex programming problems. Acta Cybernetica *1* (1972), 171—192.
7. FORGÓ, F.: Egy speciális kvadratikus feladat megoldása. Szigma, 1975, 53—59.
8. FORGÓ, F.: Nemkonvex és diszkrét programozás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1978.
9. GÁL, T.—NEDOMA, J.- Lineáris programozás több paraméterrel a jobb oldalon vagy a célfüggvény-koefficiensekben. Szigma, 1969, 213—237.
10. KREKÓ, B.: Mátrixszámítás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1964.
11. MARTOS, B.: Quadratic programming with a quasiconvex objective function. Opns. Res. *19* (1971), 87—97.
12. MARTOS, B.: Nonlinear programming, Theory and methods. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
13. MUELLER, R. K.: A method for solving the indefinit quadratic programming problem. Management Science *16* (1970), 333—339.
14. MURRAY, W.: An algorithm to find a local minimum of an indefinit quadratic program. National Physical Laboratory, DNAC 1, June 1971.
15. RITTER, K.: A method for solving maximum problems with a nonconcave quadratic objective function. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. *4* (1966), 340—351.
16. TUI, H.: Concave programming under linear constrains. Soviet Math. Dokl. *5* (1964), 1437—1440.

17. Van De Panne, C.: Methods for linear and quadratic programming. North-Holland, Amsterdam, 1975.
18. Weinert, H.: Solution of multiparametric linear programming problems, in: Studies on mathematical programming, ed. A. Prékopa, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.
19. Wolfe, P.: The simplex method for quadratic programming. Econometrica *27* (1959), 382—398.

A PARAMETRIC METHOD FOR THE SOLUTION OF INDEFINITE QUADRATIC PROGRAMMING PROBLEMS

The solution of indefinite quadratic programming problems raises serious difficulties. *Parametric* methods yield a way of solution when a part of program variables are treated as parameters and a series of multiparametric convex quadratic or linear programming problems of reduced size can be formulated.

The procedure presented in this paper draws attention to a new possibility of parametrization making use of the minor matrices taken from the main diagonal of an indefinite matrix **D**. Primal-dual multiparametric linear programming is dealt with in detail, furthermore, it is shown how the efficiency of the algorithm can be raised by using Branch and Bound techniques.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решение неопределенной задачи квадратического программирования является серьезной проблемой. Одной из возможностей решения данной задачи являются параметрические методы, когда при рассмотрении части программных переменных в качестве параметров можем получить серию мультипараметрических выпуклых задач квадратичного или линейного программирования меньших размеров.

Метод, изложенный в данной работе обращает внимание на новые возможности параметрирования с использованием минорных матриц «O», которые могут быть расположе ны по основной диагонали-неопределенных матриц «D»; детально рассматривается двой ственная задача мультипараметричного линейного программирования и указывается, ка с помощью метода ветвей и границ можно повысить эффективность алгоритма.