Vörös József

Többállomásos termelés-tervezés konkáv és lineáris költségfüggvénnyel

1. Az egyállomásos termelés-tervezési probléma

Tekintsünk egy vállalatot, mely egy terméket sorozatokban gyárt, valamint egy tervidőszakot, melyet T periódusra osztunk fel. A termék iránti fogyasztói keresletet adottnak tételezzük fel, s célunk annak meghatározása, hogy mely periódusokban milyen nagysággal indítsunk sorozatot annak érdekében, hogy minimális költség mellett a fogyasztói keresletet kielégítsük.

Az első megközelítésben eltekintünk a termelési folyamat részletezésétől, ami azt jelenti, hogy csak a késztermék termelési szintjével jellemezzük a termelési folyamatot. Azt a modellt, melyben nem követjük nyomon a félkésztermékek késztermékké alakulásának folyamatát, egyállomás termelés-tervezési modellnek nevezzük. Egy állomáshoz a termelési folyamat és a termelési folyamat outputját tartalmazó raktár tartozik. A raktározás lehetővé teszi, hogy esetleg nem kell minden periódusban sorozatot indítani, és így a t-edik periódus ($t = 2, 3, \ldots, T$) igényét egy korábbi periódusban termelik meg, a terméket pedig raktározzák a t-edik periódusig. A periódusok közötti kapcsolatot így a raktározás teremti meg. ($T = 3$-ra lásd az 1. ábrát.)

Az elmondottak értelmében problémánkat a következő programozási feladat fogalmazza meg:

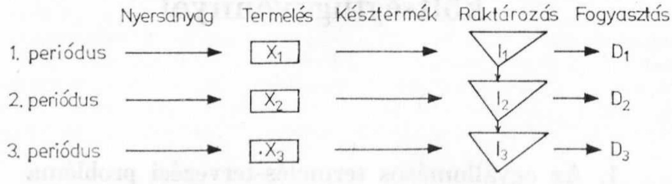
$$\mathrm{MIN}\left\{\sum_{t=1}^{T} K_t(X_t, I_t)\right\}$$

$$\begin{aligned} I_{t-1} + X_t &= D_t + I_t; & t &= 1, \ldots, T \\ I_0 = I_T &= 0, & & \\ I_t \geq 0,\ X_t &\geq 0; & t &= 1, \ldots, T \end{aligned} \tag{1}$$

ahol D_t = a t-edik periódusban a termék iránti kereslet,
X_t = a t-edik periódusban termelt termék mennyisége,
I_t = a t-edik periódus végén raktáron levő termék mennyisége,
K_t = a t-edik periódusban az X_t és I_t szintekhez tartozó költség.

Legyen a K_t függvény konkáv X_t és I_t-ben. Ismert, hogy az (1) alatti feladattípus esetén konkáv függvény a minimumát egy extremális pontban veszi fel, s minden extremális pont kölcsönösen és egyértelműen meghatároz egy bázismegoldást. (1) alatti feladatunk bázismegoldásában legfeljebb T nem zéró bázisváltozó lehet. Legyen most $D_t > 0$, $t = 1, 2, \ldots, T$. Mivel egy bázismegoldásban legfeljebb T nem zéró bázisváltozó lehet, következik, hogy egy bázismegoldásban az I_{t-1} és X_t változók közül az egyik pozitív, a másik zéró ($t = 1, 2, \ldots, T$). Ha $D_t = 0$ néhány t-re, akkor könnyen belátható, hogy van olyan bázis, hogy a hozzá tartozó bázismegoldásban az I_{t-1} és X_t

változók közül az ilyen t-kre is legfeljebb az egyik lehet pozitív. Ezek szerint egy bázismegoldás esetén a t-edik periódusban csak akkor folyik termelés, ha $I_{t-1} = 0$, s X_t-ről azt kell eldönteni, hogy hány $(t - 1)$ utáni periódus



1. ábra

igényével legyen egyenlő. Azon t pontokat, ahol $I_t = 0$, regenerációs pontoknak nevezzük. Problémánkat tehát a regenerációs pontok megkeresésére vezettük vissza. Az (1) alatti problémát *Wagner* és *Within* [3]-ban vetette fel először és *Veinott* [2]-ben a fenti gondolatmenet alapján egy dinamikus programozási algoritmust adott.

Zangwill [5]-ben úgy általánosította az (1) alatti problémát, hogy az I_t változókat előjelkötetlenné tette. Ez a gyakorlatban annyit jelent, hogy megengedjük a fogyasztói igények késleltetett kielégítését (pl. előjegyzéses rendszer). Problémánkat ekkor az alábbi programozási feladat írja le:

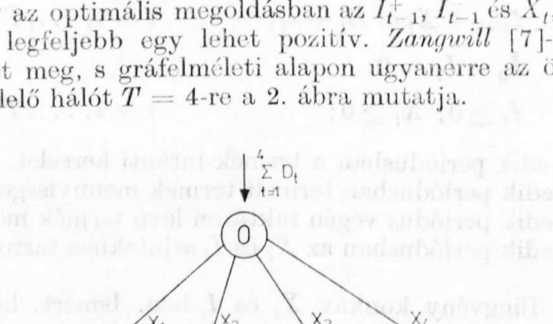
$$\mathrm{MIN}\left\{\sum_{t=1}^{T}\left[C_t(X_t) + H_t^+(I_t^+) + H_t^-(I_t^-)\right]\right\}$$

$$I_{t-1} + X_t = D_t + I_t; \qquad t = 1, \dots, T \qquad (2)$$

$$I_0 = T_T = 0$$

$$I_t^+ - I_t^- = I_t,\ I_t^+ \geq 0,\ I_t^- \geq 0,\ X_t \geq 0; \qquad t = 1, \dots, T$$

ahol C_t, H_t^+ és H_t^- a megfelelő költségfüggvények, melyek konkávak. Zangwill bizonyítja, hogy az optimális megoldásban az I_{t-1}^+, I_{t-1}^- és X_t, $t = 1, 2, \dots, T$, változók közül legfeljebb egy lehet pozitív. *Zangwill* [7]-ben (2)-nek egy hálózatot feleltet meg, s gráfelméleti alapon ugyanerre az összefüggésre jut. A (2)-nek megfelelő hálót $T = 4$-re a 2. ábra mutatja.



2. ábra

2. A többállomásos termelés-tervezési probléma

Tekintsük az (1) alatti problémának egy olyan általánosítását, melyben a félkésztermékek termelési szintjeit nem a késztermék termelési szintjeiből vezetjük le közvetlenül, hanem az egyes megmunkálási fázisokhoz külön változót rendelünk: X_{jt} jelentse, hogy a t-edik időszakban hány terméken fejeztük be a j-edik, $(j = 1, 2, \ldots, M)$ megmunkálási fázisnak megfelelő műveleteket. Azokat a termelés-tervezési modelleket, melyekben nyomon követjük a félkésztermékek késztermékké alakulásának folyamatát, többállomásos termelés-tervezési modelleknek nevezzük.

A j-edik állomás a j-edik megmunkálási szakasznak megfelelő munkafolyamatokat és ezen munkafolyamaton átesett termékek raktárát foglalja magában. Így a j-edik állomás termelési szintje nem determinálja egyértelműen a $j+1$-edik állomás termelési szintjét. Az utolsó állomáson — az M-ediken — készül el a késztermék, melyet az M-edik raktárban raktározunk. Az egyes periódusokat ismét a raktározás köti össze. (Lásd 3. ábrát $T = 3$ és $M = 2$ esetre).

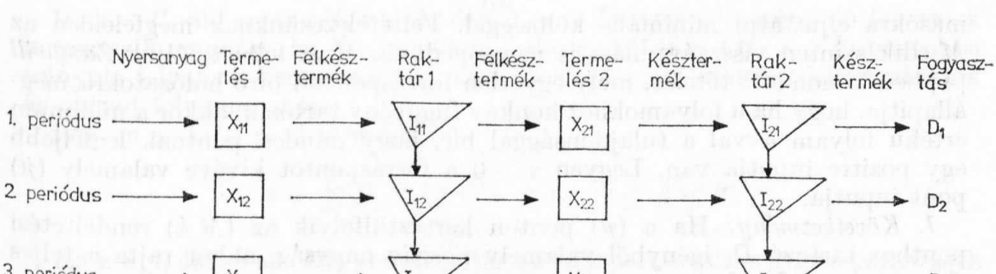
Problémánkat az alábbi programozási feladat fogalmazza meg:

$$\mathrm{MIN}\left\{\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{M}\left[C_{jt}(X_{jt}) + H_{jt}(I_{jt})\right]\right\}$$

$$\begin{aligned}
&I_{j,t-1} + X_{jt} = I_{jt} + X_{j+1\,t}; \quad j = 1 \ldots M-1, && t = 1, \ldots, T \\
&I_{M,t-1} + X_{Mt} = I_{Mt} + D_t; && t = 1, \ldots, T \\
&X_{jt} \geq 0,\ I_{jt} \geq 0; \quad j = 1, \ldots, M, && t = 1, \ldots, T \\
&I_{j0} = I_{jT} = 0; && j = 1, \ldots, M
\end{aligned} \tag{3}$$

ahol I_{jt} a t-edik periódus végén a j-edik raktár szintjét jelöli.

Zangwill ugyancsak [7]-ben (3)-nak egy hálózatot feleltet meg, s dinamikus programozási algoritmust ad arra az esetre, amikor a költségfüggvények konkávak. Cikkünkben ezen utóbbi modellt általánosítjuk oly módon, hogy az utolsó állomáson, a késztermékek szintjén, megengedjük a kereslet késleltetett kielégítését. Konkáv költségeket feltételezve dinamikus programozási algoritmust adunk, lineáris költségeket feltételezve pedig problémánkat egy speciális típusú szállítási feladatra vezetjük vissza.



3. ábra

3. A többállomásos termelési folyamat jellemzése a kereslet késleltetett kielégítése esetén konkáv költségfüggvény mellett

Mivel a késztermék raktári szintje negatív is lehet (az utolsó perióduskivételével), ez azt jelenti, hogy a tervperiódus alatt a fogyasztói igényeket kielégítjük, de nem biztos, hogy ez részperiódusonként is megvalósul. Értelemszerűen, egyetlen félkésztermék raktári szintje sem lehet negatív a tervperiódus alatt. Legyen ismét ismert a fogyasztói kereslet, s az X termelési és I^+, I^- raktározási szintekhez tartozzon ismét konkáv függvény. Feladatunk, hogy állomásonként és periódusonként meghatározzuk azokat a termelési és raktározási szinteket, melyekhez tartozó költség minimális a fogyasztói kereslet kielégítése esetén.

Modellünknek az alábbi programozási feladat felel meg:

$$\mathrm{MIN}\left\{\sum_{j=1}^{M}\sum_{t=1}^{T} C_{jt}(X_{jt}) + \sum_{j=1}^{M-1}\sum_{t=1}^{T} H_{jt}(I_{jt}) + \sum_{t=1}^{T}\left[H^+_{Mt}(I^+_{Mt}) + H^-_{Mt}(I^-_{Mt})\right]\right\}$$

$$\begin{aligned}
&I_{j,t-1} + X_{jt} = I_{jt} + X_{j+1,t}; && j = 1, \ldots, M-1,\ t = 1, \ldots, T \\
&I_{M,t-1} + X_{Mt} = I_{Mt} + D_t; && t = 1, \ldots, T \qquad (4)\\
&X_{jt} \geq 0; && j = 1, \ldots, M;\ t = 1, \ldots, T \\
&I_{jt} \geq 0; && j = 1, \ldots, M-1,\ t = 1, \ldots, T \\
&I_{Mt} = I^+_{Mt} - I^-_{Mt};\ I^+_{Mt} \geq 0;\ I^-_{Mt} \geq 0; && t = 1, \ldots, T \\
&I_{j,0} = I_{jT} = 0; && j = 1, \ldots, M
\end{aligned}$$

ahol: X_{jt} = a j-edik állomás termelési szintje a t-edik periódusban,
I_{jt} = a j-edik raktár szintje a t-edik periódus végén,
C_{jt} = termelési költségfüggvény, mely nemnegatív és konkáv,
$H_{jt}, H^+_{Mt}, H^-_{Mt}$ = raktározási költségfüggvények, melyek nemnegatívak és konkávak.

A (4) feladat feltételrendszere úgy is reprezentálható, mint egy egyetlen forrásponttal bíró hálózat, melynek formáját a 4. ábra mutatja, $T = 3$, $M = 3$ esetre.

A (00) forráspontból kiindulva a $\sum_{t=1}^{T} D_t$ folyamot kell a rendeltetési állomásokra eljuttatni minimális költséggel. Feltételezésünknek megfelelően az M-edik szinten visszaáramlást is megengedünk. Most felhasználjuk *Zangwill* [4]-ben kimondott tételét, mely egyetlen forrásponttal bíró hálózatokra megállapítja, hogy ha a folyamokhoz konkáv függvény tartozik, akkor a minimum értékű folyam avval a tulajdonsággal bír, hogy minden pontnak legfeljebb egy pozitív inputja van. Legyen $z > 0$ a forráspontot kivéve valamely (jt) pont inputja.

1. Következmény: Ha a (jt) ponton keresztülfolyik az $(M\ k)$ rendeltetési ponthoz tartozó D_k igényből valamely pozitív nagyság, akkor rajta a teljes D_k nagyság átfolyik.

Ellenkező esetben legalább egy, a (jt)-től különböző és vele kapcsolatban nem álló $(j't')$ pontnak kellene lennie, melyen a D_k igény hiányzó része átfolyik, s ezen folyamoknak legkésőbb az M-edik szinten egyesülniök kellene.

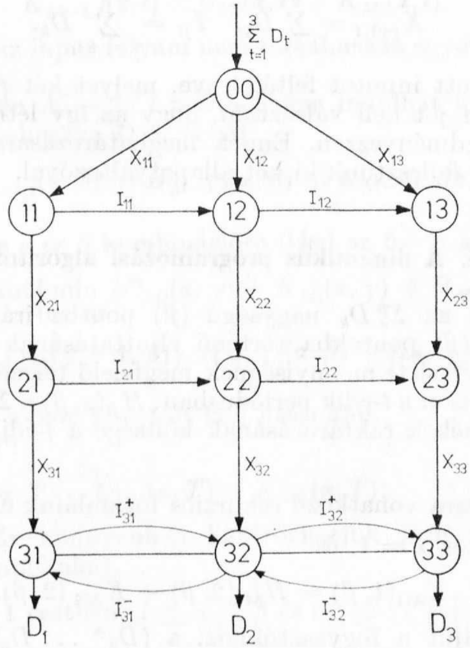
Ekkor azonban legalább egy pontnak biztosan két pozitív inputja volna, ami tételünknek ellentmond.

2. Következmény: Ha z, mint a (jt) pont inputja tartalmazza D_k-t; $k < t$, akkor tartalmazza D_t-t is. Másként az (Mt) pontnak két pozitív inputja lenne.

3. Következmény: Ha z a (jt) pont inputja, akkor

$$z = \sum_{k=\alpha}^{\beta} D_k; \quad 1 \leq \alpha \leq \beta, \quad t \leq \beta \leq T.$$

Tegyük fel, hogy (jt) z inputja tartalmazza D_α-t és $D_{\alpha+h}$-t; $h \geq \max\{2, t-\alpha\}$ és $\alpha + h \leq T$, de nem tartalmazza $D_{\alpha+k}$-t; $1 \leq k < h$, továbbá, hogy $(j't')$ z' inputja tartalmazza $D_{\alpha+k}$-t; $1 \leq k < h$.



1. ábra. A többállomásos, dinamikus rendszer hálózata

Ha $t < t'$, akkor az $(M, \alpha + h)$ és $(M, \alpha + k)$ pontokba irányuló folyamok keresztezik egymást, ha $t' < t$, akkor pedig az $(M\alpha)$ és $(M, \alpha + k)$ pontokba irányuló folyamok keresztezik egymást. Ezek alapján könnyen jellemezhetjük az output folyamokat is.

Legyen az (Mt) pont inputja

$$z = \sum_{k=\alpha}^{\beta} D_k; \quad 1 \leq \alpha \leq t, \quad t \leq \beta \leq T.$$

Ha $\alpha < t$, akkor az (Mt) pont inputja a t-edik periódust megelőző periódusok igényét is tartalmazza, s hogy az igény eljusson ezen rendeltetési helyre

$$I_{M,t-1} = \sum_{k=\alpha}^{t-1} D_k$$

kell legyen. Hasonlóan, ha $\beta > t$, akkor

$$I^+_{M,t} = \sum_{k=t+1}^{\beta} D_k.$$

Amikor egy belső (jt) pont inputja

$$z = \sum_{k=\alpha}^{\beta} D_k; \quad 1 \leq \alpha \leq \beta, \quad t \leq \beta \leq T;$$

ezt a z folyamot szintén két részre kell osztani, hiszen a (jt) pontból csak a $(j+1, t)$ és $(j, t+1)$ pontokba irányul folyam. Mivel a (jt) pont output folyama ezen két pont input folyama, a 3. következmény azt diktálja, hogy

$$X_{j+1,t} = \sum_{k=\alpha}^{\gamma} D_k, \quad I_{jt} = \sum_{k=\gamma+1}^{\beta} D_k.$$

Egy pontban adott inputot feltételezve, melyet két paraméter, az α és β határoz meg, olyan γ-t kell választani, hogy az így létrejött felosztás minimális költséget eredményezzen. Ennek meghatározására dinamikus programozási algoritmust fejlesztünk ki két állapotváltozóval.

4. A dinamikus programozási algoritmus

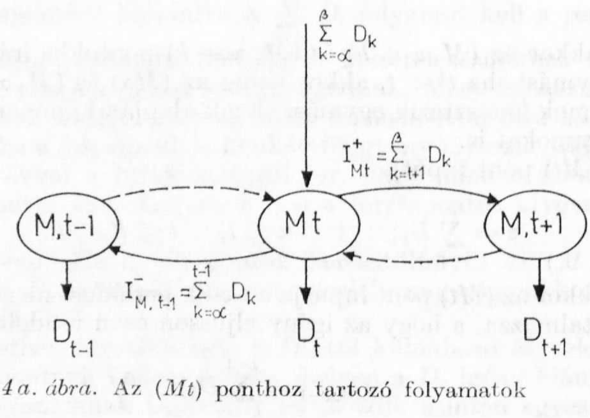
Legyen $K_{jt}(\alpha, \beta)$ az $\Sigma_\alpha^\beta D_k$ nagyságú (jt) pontba irányuló folyam $(M\alpha)$, $(M, \alpha+1), \ldots, (M\beta)$ pontokba történő eljuttatásának minimális költsége; $C_{jt}(\alpha, \beta)$ a $\Sigma_\alpha^\beta D_k$ keresleti mennyiségnek megfelelő termék termelésének költsége a j-edik állomáson a t-edik periódusban: $H_{jt}(\alpha, \beta)$ a $\Sigma_\alpha^\beta D_j$ keresleti tömegnek megfelelő termékek raktározásának költsége a j-edik raktárban a t-edik periódusban.

I. Az utolsó állomásra vonatkozó rekurziós formuláink ekkor:

1. Ha $t = 1$, akkor $\alpha = 1$, és

$$K_{M1}(1, \beta) = H^+_{M1}(2, \beta) + K_{M2}(2, \beta),$$

mivel a D_1 eljut a fogyasztókhoz, a $(D_2 + \ldots D_\beta)$ mennyiséget pedig az I^+_{M1} szállítja.



4a. ábra. Az (Mt) ponthoz tartozó folyamatok

2. Ha $t = T$, akkor $\beta = T$, és

$$K_{Mt}(\alpha, T) = H^-_{M,T-1}(\alpha, T-1) + K_{M,T-1}(\alpha, T-1).$$

3. Minden más t-re (lásd 4. ábra):

$$K_{Mt}(\alpha, \beta) = H^-_{M,t-1}(\alpha, t-1) + K_{M,t-1}(\alpha, t-1) + H^+_{M,t+1}(t+1, \beta) +$$
$$+ K_{M,t+1}(t+1, \beta).$$

II. $j = M - 1$ esetben, $1 \leq \alpha \leq \beta$, $t \leq \beta \leq T$ kikötések mellett

1. $t < T$-re, ha

1a. $\beta = t$;

$$K_{M-1,t}(\alpha, t) = C_{Mt}(\alpha, t) + K_{Mt}(\alpha, t),$$

ugyanis ez az input folyam nem tartalmazza egyetlen t utáni periódus igényét sem.

1b. $\alpha > t$ esetben $M-1$, t pontból nem indulhat folyam (Mt)-be, mert ez nem tartalmazza D_t-t. Tehát:

$$K_{M-1,t}(\alpha, \beta) = H_{M-1,t}(\alpha, \beta) + K_{M-1,t+1}(\alpha, \beta),$$

1c. minden más α és β kombinációra (lásd az 5—7. ábrákat):

$$K_{M-1,t}(\alpha, \beta) = \min\left\{\min_{t \leq \gamma \leq \beta} \{C_{Mt}(\alpha, \gamma) + K_{Mt}(\alpha, \gamma) + H_{M-1,t}(\gamma+1, \beta) + \right.$$
$$\left. + K_{M-1,t+1}(\gamma+1, \beta)\}, H_{M-1,t}(\alpha, \beta) + K_{M-1,t+1}(\alpha, \beta)\right\}$$

s ha $t = 1$, akkor $\alpha = 1$-et kell használni.

2. $t = T$-re $\beta = T$:

$$K_{M-1,T}(\alpha, T) = C_{MT}(\alpha, T) + K_{MT}(\alpha, T); \qquad 1 \leq \alpha \leq T.$$

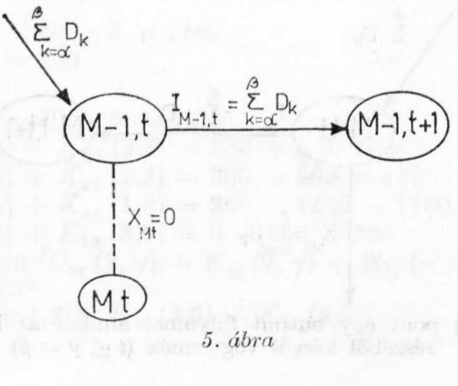
Ezek után már könnyebben határozhatjuk meg az alsóbb szintekre vonatkozó formuláinkat.

III. $1 \leq j < M - 1$ esetben, $1 \leq \alpha \leq \beta$ és $t \leq \beta \leq T$ kikötés mellett

1. $t < T$-re, ha

1a. $\beta = t$:

$$K_{jt}(\alpha, t) = C_{j+1,t}(\alpha, t) + K_{j+1,t}(\alpha, t),$$



5. ábra

1b. $\alpha > t$:

$$K_{jt}(\alpha, \beta) = \min_{\alpha-1 \leq \gamma \leq \beta} \{C_{j+1,t}(\alpha, \gamma) + K_{j+1,t}(\alpha, \gamma) + K_{j,t+1}(\gamma + 1, \beta)\};$$

$$C_{j+1,t}(\alpha, \alpha - 1) = K_{j+1,t}(\alpha, \alpha - 1) = 0,$$

1c. minden más α, β kombinációra:

$$K_{jt}(\alpha, \beta) = \min \Big\{ \min_{t \leq \gamma \leq \beta} C_{j+1,t}(\alpha, \gamma) + K_{j+1}(\alpha, \gamma) + H_{jt}(\gamma + 1, \beta) + + K_{j,t+1}(\gamma + 1, \beta)\}, H_{jt}(\alpha, \beta) + K_{j,t+1}(\alpha, \beta) \Big\}.$$

Ha $t = 1$, akkor $\alpha = 1$-et kell használni.

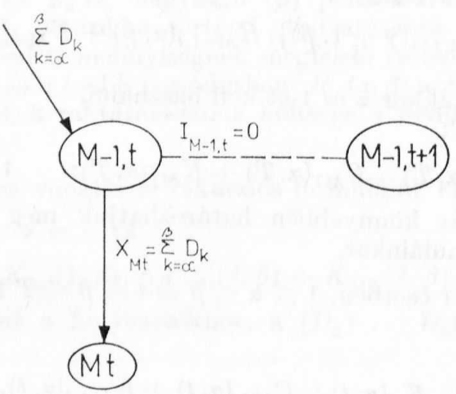
2. $t = T$-re $\beta = T$:

$$K_{jT}(\alpha, T) = C_{j+1,T}(\alpha, T) + K_{j+1,T}(\alpha, T).$$

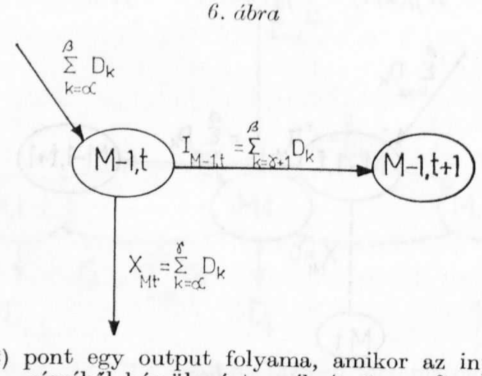
IV. Végül a forráspontra vonatkozó egyenleteket kell meghatározni. Ehhez bevezetjük a $K_{0t}(\alpha, T)$ jelölést ($1 \leq \alpha \leq T$), mely a $\Sigma_\alpha^T D_k$ keresleti tömeg $(M\alpha), (M, \alpha + 1), \ldots (MT)$ pontokba juttatásának minimális költségét jelenti a forráspontból kiindulva, és ezt a tömeget a $t, t + 1, \ldots, T$ periódusokban termeljük meg.

1. Ha $T \geq \alpha > t$, $t \neq T$:

$$K_{0t}(\alpha, T) = \min_{\alpha-1 \leq \gamma \leq T} \{C_{1t}(\alpha, \gamma) + K_{1t}(\alpha, \gamma) + K_{0,t+1}(\gamma + 1, T)\}.$$



6. ábra



7. ábra. Az $(M - 1, t)$ pont egy output folyama, amikor az input folyam csak egy részéből készül végtermék ($t \leq \gamma < \beta$)

2. Ha $1 \leq \alpha \leq t, t \neq T$:

$$K_{0t}(\alpha, T) = \min\Big\{ \min_{t \leq \gamma \leq T} \{C_{1t}(\alpha, \gamma) + K_{1t}(\alpha, \gamma) + K_{0,t+1}(\gamma + 1, T)\},\ K_{0,t+1}(\alpha, T)\Big\}.$$

3. Ha $t = T$, akkor

$$K_{0T}(\alpha, T) = C_{1T}(\alpha, T) + K_{1T}(\alpha, T); \qquad 1 \leq \alpha \leq T.$$

Mivel algoritmusunk „visszafelé lépegető", $K_{MT}(TT) = 0$-val kezdünk és ha $K_{01}(1T)$-hez érkeztünk, megadhatjuk az optimális megoldást.

Illusztrációként tekintsünk egy példát, melyben a költségfüggvények legyenek a következő típusúak:

$$C_{jt}(X_{jt}) = \begin{cases} 0 & \text{ha } X_{jt} = 0 \\ A_j + c_{jt} \cdot X_{jt} & \text{ha } X_{jt} > 0 \end{cases}$$

és

$$H_{jt}(I_{jt}) = h_{jt} \cdot I_{jt} \qquad j = 1, \ldots, M - 1$$

$$H^{+}_{Mt}(I^{+}_{Mt}) = h_{Mt} \cdot I^{+}_{Mt}$$

$$H^{-}_{Mt}(I^{-}_{Mt}) = \pi_{Mt} \cdot I^{-}_{Mt} \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Legyen $M = 2$, $T = 3$, $D_1 = 100$, $D_2 = 200$, $D_3 = 300$, $A_1 = 400$, $A_2 = 300$; $c_{1t} = 20$, $c_{2t} = 30$, $t = 1, \ldots, T$;
$h_{11} = 2$, $h_{12} = 0$, $h_{21} = 1$, $h_{22} = 3$; $\pi_{21} = 2$, $\pi_{22} = 4$.

Tekintve, hogy c_{1t} és c_{2t} minden t-re azonos, modellünk érzéketlen erre a költségnemre. Számításainknál ezeket nem vesszük figyelembe. Eljárásunkat az M-edik állomáson kezdjük.

$$\begin{aligned} K_{23}(3,3) &= 0 \\ K_{23}(2,3) &= 200 \cdot 4 = 800 \\ K_{23}(1,3) &= 300 \cdot 4 + 100 \cdot 2 = 1400 \\ K_{22}(2,2) &= 0 \\ K_{22}(2,3) &= 300 \cdot 3 = 900. \end{aligned}$$

Most azt a lehetőséget kell megvizsgálni, amikor a (2,2) pontba mind a három periódus igénye beérkezik. A D_2 mennyiség közvetlenül a fogyasztókhoz kerül, a D_1 mennyiség az I_1^- folyamon kerül a fogyasztókhoz, a D_3 pedig a I_2^+ folyamon keresztül.

Ennek alapján:

$$\begin{aligned} K_{22}(1,3) &= 100 \cdot 2 + 300 \cdot 3 = 1100 \\ K_{22}(1,2) &= 100 \cdot 2 = 200 \\ K_{21}(1,1) &= 0 \\ K_{21}(1,3) &= 500 \cdot 1 + 300 \cdot 3 = 1400 \\ K_{13}(3,3) &= C_{23}(3,3) + K_{23}(3,3) = 300 + 0 = 300 \\ K_{13}(2,3) &= C_{23}(2,3) + K_{23}(2,3) = 300 + 800 = 1100 \\ K_{13}(1,3) &= C_{23}(1,3) + K_{23}(1,3) = 300 + 1400 = 1700 \\ K_{12}(3,3) &= H_{12}(3,3) + K_{13}(3,3) = 0 + 300 = 300 \\ K_{12}(2,3) &= \min\Big\{ \min_{2 \leq \gamma \leq 3} \{C_{22}(2, \gamma) + K_{22}(2, \gamma) + H_{12}(\gamma + 1,3) + \\ &\quad + K_{13}(\gamma + 1,3)\},\ H_{12}(2,3) + K_{13}(2,3)\Big\} = \end{aligned}$$

$$= \min\{300 + 0 + 0 + 300,\ 300 + 900 + 0 + 0,\ 0 + 1100\} =$$
$$= 600;\ \gamma^* = 2$$
$$K_{12}(2,2) = C_{22}(2,2) + K_{22}(2,2) = 300$$
$$K_{12}(1,2) = C_{22}(1,2) + K_{22}(1,2) = 300 + 200 = 500$$

Amikor az (1,2) pont inputja $(D_1 + D_2 + D_3)$-mal egyenlő, az (1,2) pont outputjait tekintve az alábbi változatok lehetségesek:

— a második periódusban egyetlen készterméket sem termelünk, így a teljes input folyam I_{12}-n keresztül eljut az (1,3) pontba, tehát $I_{12} = (D_1 + D_2 + D_3)$,
— a második periódusban $(D_1 + D_2)$ mennyiséget termelünk, a D_3 mennyiséget, mint félkészterméket még raktározzuk; tehát $X_{22} = (D_1 + D_2)$ és $I_{12} = D_3$,
— a második periódusban megtermeljük a tervidőszak alatt jelentkező teljes keresleti mennyiséget, tehát $X_{22} = (D_1 + D_2 + D_3)$ és $I_{12} = 0$.

$$K_{12}(1,3) = \min\Big\{\min_{2\le\gamma\le3}\{C_{22}(1,\gamma) + K_{22}(1,\gamma) + H_{12}(\gamma+1,3) + K_{13}(\gamma+1,3)\},\ K_{13}(1,3) + H_{12}(1,3)\Big\} = \min\{300 + 200 + 0 + 300\ 1100 + 0 + 0,\ 0 + 1700\} = 800;\ \gamma^* = 2$$
$$K_{11}(1,1) = C_{21}(1,1) + K_{21}(1,1) = 300 + 0 = 300$$
$$K_{11}(1,2) = \min\Big\{\min_{1\le\gamma\le2}\{C_{21}(1,\gamma) + K_{21}(1,\gamma) + H_{11}(\gamma+1,2) + K_{12}(\gamma+1,2)\},\ H_{11}(1,2) + K_{12}(1,2)\Big\} =$$
$$= \min\{300 + 0 + 400 + 300,\ 300 + 200 + 0 + 0,\ 600 + 550\} = 500;\ \gamma^* = 2$$
$$K_{11}(1,3) = \min\Big\{\min_{1\le\gamma\le3}\{C_{21}(1,\gamma) + K_{21}(1,\gamma) + H_{11}(\gamma = 1,3) + K_{12}(\gamma+1,3),\ H_{11}(1,3) + K_{12}(1,3)\Big\} =$$
$$= \min\{300 + 0 + 1000 + 600,\ 300 + 200 + 600 + 300,\ 300 + 1400 + 0 + 0,\ 1200 + 800\} = 1400;\ \gamma^* = 2.$$

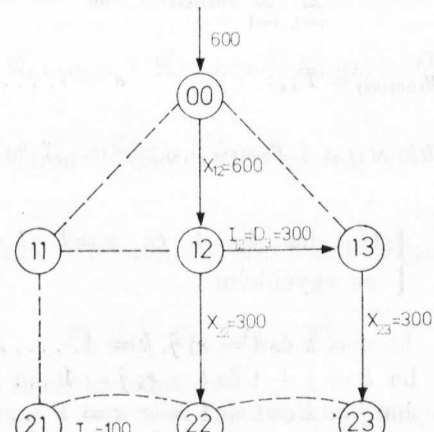
S végül határozzuk meg a forráspontból kiinduló folyamok értékét:

$$K_{03}(3,3) = 400 + 300 = 700$$
$$K_{03}(2,3) = 400 + 1100 = 1500$$
$$K_{03}(1,3) = 400 + 1700 = 2100$$
$$K_{02}(3,3) = \min_{2\le\gamma\le3}\{C_{12}(3,\gamma) + K_{12}(3,\gamma) + K_{03}(\gamma+1,3)\} =$$
$$= \min\{0 + 0 + 700,\ 400 + 300\} = 700;\ \gamma^* = 2,3$$
$$K_{02}(2,3) = \min\Big\{\min_{2\le\gamma\le3}\{C_{12}(2,\gamma) + K_{12}(2,\gamma) + K_{03}(\gamma+1,3)\},\ K_{03}(2,3)\Big\}$$
$$= \min\{400 + 300 + 700,\ 400 + 600 + 0,\ 1500\} = 1000;\ \gamma^* = 3$$
$$K_{02}(1,3) = \min\Big\{\min_{2\le\gamma\le3}\{C_{12}(1,\gamma) + K_{12}(1,\gamma) + K_{03}(\gamma+1,3)\}\ K_0(1,3)\Big\}$$
$$= \min\{400 + 500 + 1500,\ 400 + 800 + 0,\ 2100\} = 1200;\ \gamma^* = 3$$
$$K_{01}(1,3) = \min\Big\{\min_{1\le\gamma\le3}\{C_{11}(1,\gamma) + K_{11}(1,\gamma) + K_{02}(\gamma+1,3)\},\ K_{02}(1,3)\Big\}$$
$$= \min\{400 + 300 + 100,\ 400 + 500 + 700,\ 400 + 1400 + 0,\ 1200\} = 1200;\ X_{11} = 0$$

Mivel $K_{01}(1,3)$ minimumát $K_{02}(1,3)$ adta, ebből következik, hogy $X_{11} = 0$. $K_{02}(1,3)$ minimuma $\gamma^* = 3$-nál van, tehát $X_{12} = (D_1 + D_2 + D_3)$. A (12) pontba irányuló folyam nagysága ezek szerint 600 egység, $K_{12}(1,3)$ minimuma pedig $\gamma^* = 2$-nél van, tehát $X_{22} = D_1 + D_2$ és $I_{12} = D_3$. Innen pedig már következik, hogy $I_{11} = 100$, $X_{23} = D_3$ és az összes több változó értéke zéró. A feladat optimális folyamát a 8. ábra mutatja. Az optimális megoldás költségei a következőképpen oszlanak meg:

- Az első termelési állomáson a második periódusban a fix költség 400
- Az első termelési állomáson a második periódusban D_3-nak megfelelő félkésztermék raktározásának költsége 0
- A második termelési állomáson a második periódusban $D_1 + D_2$ mennyiség termelésének fix költsége 300
- A második termelési állomáson a harmadik periódusban D_3 termelésének fix költsége 300
- A második termelési állomáson az első periódus késleltetett keresletkielégítésének költsége 200

melyek összege természetesen megegyezik $K_{01}(1T)$ optimális értékével.



8. ábra. Az optimális folyam fa struktúrája

5. A lineáris eset

Tekintsük az alábbi termelés-tervezési problémát:

$$\mathrm{MIN} \left\{ \sum_{j=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} (c_{jt} \cdot X_{jt} + h_{jt} \cdot I_{jt}) \right\}$$

$$I_{j,t-1} + X_{jt} = I_{jt} + X_{j+1,t}; \qquad t = 1, \ldots, T, \quad j = 1 \ldots M$$

$$\sum_{t=1}^{T} X_{M+1,t} = D \tag{5}$$

$$\underline{D}_t \leq X_{M+1,t} \leq \overline{D}_t; \qquad t = 1, \ldots, T$$

$$X_{jt} \geq 0, \; I_{jt} \geq 0; \qquad j = 1, \ldots, M$$

$$I_{j,0} = I_{j,T} = 0; \qquad j = 1, \ldots, M$$

ahol $X_{M+1,t}$, = a t-edik periódusban a fogyasztóknak kiszállított mennyiség.

(5) alatti modellünk megszünteti tehát a termelés-tervezési modellek azon hátrányos tulajdonságát, hogy a keresletet nem tudják a tervperióduson belül átrendezni.

Most tekintsük az alábbi szállítási feladatot:

$$\text{MIN} \sum_{k=1}^{M} \sum_{s=1}^{T} v_{(00)(ks)} y_{(00)(ks)} + \sum_{j=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{M} \sum_{s=1}^{T} v_{(jt)(ks)} \cdot y_{(jt)(ks)}$$

$$\sum_{k=1}^{M+1} \sum_{s=1}^{T} y_{(jt)(ks)} = r_{jt}; \qquad t = 1, \ldots, T, \; j = 1, M$$

$$\sum_{k=1}^{M+1} \sum_{s=1}^{T} y_{(00)(ks)} = r_{00} \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} y_{(jt)(ks)} + y_{(00)(ks)} = P_{ks}; \qquad s = 1, \ldots, T, \; k = 1, \ldots, M$$

$$\underline{p}_{M+1,s} \leq \sum_{j=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} y_{(jt)(M+1,s)} + y_{(00)(M+1,s)} \leq \overline{p}_{M+1,s}; \qquad s = 1, \ldots, T$$

ahol:

$$v_{(00)(ks)} = \begin{cases} C_{1t} & \text{ha} \quad k = 1 \quad \text{és} \quad s = t; \quad t = 1, \ldots, T \\ \infty & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$v_{(jt)(ks)} = \begin{cases} 0 & \text{ha } j = k \text{ és } t = s; \; j, k = 1, \ldots, M; \; t, s = 1 \ldots T \\ c_{j+1,} & \text{ha } k = j + 1 \text{ és } t = s; \; j = 1 \ldots M - 1; \; t = 1 \ldots T \\ h_{jt} & \text{ha } j = k \text{ és } t + 1 = s; \; s = 1 \ldots T - 1; \; j = 1 \ldots M \\ 0 & \text{ha } j = M; \; k = M + 1, \; t = s; \; t = 1 \ldots T \\ \infty & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$r_{00} = r_{jt} = p_{ks} = D; \; j = 1 \ldots M; \; t = 1 \ldots T; \; k = 1 \ldots M; \; s = 1 \ldots T:$$

$$\overline{p}_{M+1,s} = \overline{D}_s; \qquad \underline{p}_{M+1,s} = \underline{D}_s.$$

1. tétel: Az (5) feladat minden lehetséges megoldásához hozzárendelhető a (6) feladatnak egy lehetséges megoldása, s a megoldáshoz tartozó célfüggvényértékek megegyeznek.

Bizonyítás: Legyen x_{jt}^0; $j = 1, \ldots, M + 1$, $t = 1 \ldots T$ és I_{jt}^0; $j = 1 \ldots M$, $t = 1 \ldots T$ az (5) feladat egy lehetséges megoldása. Ekkor

$$I_{j,t-1}^0 + X_{jt}^0 = I_{jt}^0 + X_{j+1.t}^0$$

Ebből

$$I^0_{j,t-1} + X^0_{jt} + D - (I^0_{j,t-1} + X^0_{jt}) = I^0_{jt} + X_{j+1,t} + D - (I^0_{j,t-1} + X^0_{jt})$$

Legyen most

$$y^0_{(jt)(jt)} = D - (I^0_{j,t-1} + X^0_{jt}) = D - (I^0_{j,t} + X_{j+1,t})$$

$$y^0_{(jt)(j,t+1)} = I^0_{jt}; \quad y^0_{(j,t-1)(jt)} = I^0_{j,t-1}$$

$$y^0_{(jt)(j+1,t)} = X^0_{j+1,t}; \quad y^0_{(j-1,t)(jt)} = X^0_{jt},$$

valamint

$$y_{(jt)(ks)} = 0 \quad \text{és} \quad y_{(ks)(jt)} = 0$$

minden más k, s, j, t kombinációra.

Könnyen belátható, hogy ez megoldása az (5) feladatnak, s a megoldáshoz tartozó célfüggvényértékek egyenlőek.

2. tétel: A (6) és (5) alatti feladat optimális megoldásának halmazai között kölcsönös és egyértelmű leképezés létesíthető.

Bizonyítás: Elegendő megmutatni, hogy a (6) feladat optimális megoldása lehetséges megoldása az (5) feladatnak. Mivel a (6) feladat optimális megoldásához tartozó célfüggvényérték kisebb mint végtelen, minden $((jt), (jt))$ zéró elemére:

$$y^0_{(j,t-1)(jt)} + y^0_{(j-1,t)(jt)} + y^0_{(jt)(jt)} = D$$

és

$$y^0_{(jt)(jt)} + y^0_{(jt)(j,t+1)} + y^0_{(jt)(j+1,t)} = D.$$

Ezekből

$$y^0_{(j,t-1)(jt)} + y^0_{(j-1,t)(jt)} = y^0_{(jt)(j,t+1)} + y^0_{(jt)(j+1,t)},$$

és sorrendben az

$$I^0_{j,t-1}, \quad X^0_{jt}, \quad I^0_{jt}, \quad X^0_{j+1,t}$$

választással adódik a kívánt eredmény.

Ahhoz azonban, hogy a termelési feladatunkat megoldhassuk, a szállítási feladat megoldásához hatékony algoritmust kell keresni. Ehhez felhasználjuk az [1] cikk eredményét, mely alkalmas a (6) szállítási feladattípus megoldására.

Illusztrációként legyen:

$$\begin{array}{lll}
c_{11} = 20 & D = 700 & h_{11} = 2 \\
c_{12} = 40 & \underline{D}_1 = 100 & h_{12} = 0 \\
c_{13} = 30 & \underline{D}_2 = 100 & h_{13} = \infty \\
c_{21} = 50 & \underline{D}_3 = 200 & h_{21} = 1 \\
c_{22} = 60 & \bar{D}_1 = \infty & h_{22} = 3 \\
c_{23} = 40 & \bar{D}_2 = 300 & h_{23} = \infty \\
 & \bar{D}_3 = 200 &
\end{array}$$

A feladathoz tartozó disztribuciós táblát a 9. ábra, a 10. ábra pedig az optimális megoldást mutatja. Összehasonlításként most vegyük azt az esetet, amikor a keresletet a tervidőszak alatt nem tudja a modell átrendezni, azaz $\underline{D}_t = \bar{D}_t = D_t$. Ez esetben (6) alatti feladat egy standard szállítási feladattá válik. Legyen most továbbra is $D = 700$, de $D_1 = 200$, $D_2 = 300$, $D_3 = 200$.

	11	12	13	21	22	23	31	32	33	
00	20	40	30							700
11	0	2		50						700
12		0	0		60					700
13			0			40				700
21				0	1		0			700
22					0	3		0		700
23						0			0	700
	0^0	0^0	0^0	0^0	0^0	0^0	0^{8700}	0^{200}	0^0	8600
	700	700	700	700	700	700	8800	300	200	

9. ábra. A szállítási feladat induló disztribuciós táblája

	11	12	13	21	22	23	31	32	33
00	20^{700}	40	30						
11	0^0	2^{200}		50^{500}					
12		0^{500}	0^{200}		60				
13			0^{500}			40^{200}			
21				0^{200}	1^{100}		0^{400}		
22					0^{600}	3		0^{100}	
23						0^{500}			0^{200}
	0	0	0	0	0^0	0^0	0^{8100}	0^{200}	0^0

10. ábra. A szállítási feladat optimális megoldása

A feladat optimális megoldását a 11. ábra mutatja.

	11	12	13	21	22	23	31	32	33	
00	20^{700}	40	30^0							700
11	0	2^{200}		50^{500}						700
12		0^{500}	0^{200}		60					700
13			0^{500}			40^{200}				700
21				0^{200}	1^{300}		0^{200}			700
22					0^{400}	3		0^{300}		700
23						0^{500}			0^{200}	700
	700	700	700	700	700	700	200	300	200	

11. ábra. A standard szállítási feladat optimális megoldása

A 10. ábra alapján az optimális megoldás: $X_{11} = 700$, $I_{11} = 200$, $X_{21} = 500$, $I_{12} = 200$, $X_{23} = 200$, $I_{21} = 100$, $X_{31} = 400$, $X_{32} = 100$, $X_{33} = 200$ és $Z = 47\,500$.

A 11. ábra alapján: $X_{11} = 700$, $I_{11} = 200$, $X_{21} = 500$, $I_{21} = 300$, $X_{23} = 200$ és $Z = 47\,600$.

Mivel az előző optimális célfüggvényérték száz egységgel kisebb, ez is igazolja, hogy az (5) alatti modellünk annak révén, hogy a keresleteket intervallumba szorítja, hatékonyabb eredményt ér el.

(Beérkezett: 1980. május 21-én.)

IRODALOM

1. DANYI, P.—KOMLÓSI, S.: Megjegyzés a szállítási feladat egy változatához. Szigma. E számban.
2. VEINOTT, JR. A. F.: Unpublished notes, Stanford University, California, 1963.
3. WAGNER, H. M. and WHITHIN, T. M.: Dynamic version of the economic lot size model, Management Science, Vol. 5. No. 1., Oct. 1959. pp. 89—96.
4. ZANGWILL, W. I.: Single and multi-commodity minimum concave cost flows in certain networks, Working paper No. 154., Center for Research in Management Science, University of California, Berkely, California, Febr. 1966.
5. ZANGWILL, W. I.: A deterministic multiperiod production scheduling model with backlogging, Management Science, Vol. 13. No. 1., Sept. 1966. pp. 105—119.
6. ZANGWILL, W. I.: A deterministic multi-product, multi-facility production and inventory system, Operations Research, Vol. 14. No. 3., May-June 1966. pp. 486—508.
7. ZANGWILL, W. I.: A backlogging model and a multi-echolen model of a dynamic economic lot size production system a network approach, Management Sicence, Vol. 15. No. 9., May, 1969. pp. 506—527.

MULTI-STAGE PRODUCTION PLANNING WITH CONCAVE AND LINEAR COST FUNCTIONS

Zangwill [7] gives a dynamic programming algorithm to the solution of a multi-stage production planning problem with concave cost function. The present study generalizes this model in such a way that at the level of finished products also negative stock levels are allowed and for this generalized case a dynamic programming algorithm is given, too. Besides a multi-stage production planning problem with linear cost function is presented where demands in a given period are considered not as a fixed quantity, but are confined to an interval. This case can be reduced to a generalized transportation problem.

МНОГОСТУПЕНЧАТОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВА С ПОМОШЬЮ ВОГНУТЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАТРАТ

Зангвилл в (7) разработал алгоритм динамического программирования для решения многоступенчатой задачи планирования производства посредством вогнутой функции затрат. В данной работе эта модель обобщается так, что на уровне готового изделия допускаются также и отрицательные складские уровни и относительно этого обобщенного случая рассматривается алгоритм динамического программирования. Наряду с этим рассматривается такая проблема многоступенчатого планирования производства с помощью линейной функции затрат, в рамках которой спрос в каком-то периоде не фиксируется а ограничивают определенным интервалом. Этот случай может быть сведен к обобщенной транспортной задаче.