Forgó Ferenc

Döntés több kritérium alapján: egy játékelméleti megközelítés

Bevezetés

A több kritérium alapján való döntés, és ennek fontos speciális esetei (pl. több célfüggvényes programozás), igen fontos helyet foglalnak el az operációkutatásban, mind a tisztázatlan matematikai kérdések, mind pedig a koncepcionális megközelítési módok vonatkozásában. Az igen széles körű alkalmazási lehetőségek kiaknázását főleg a koncepcionális kérdések tisztázása gyorsíthatná meg jelentősen. Ezen a téren meglehetős ,,káosz'' uralkodik, a Pareto optimalitáson kívül alig van általánosan elfogadott és operatívan is hasznosítható megoldási alapelv. A Pareto-optimalitás megkövetelése azonban általában nagy szabadságfokot enged a döntéshozónak és megmarad a Pareto-optimális megoldások közti válogatás fogas kérdése. Számos javaslat [7], [11] (még számítógépes program is, pl. ELECTRE) született ennek a kérdésnek a megoldására, de ezeknek heurisztikus, túlságosan is ,,rugalmas'' jellege az alkalmazók körében sokszor (joggal) gyanakvást kelt. Elsősorban az elméleti megalapozottság hiánya szembetűnő ezeknél a módszereknél.

Elméletileg is mégalapozott megoldáskoncepció megalkotásának egy lehetséges módja a következő: Állítsunk fel olyan, intuitíve racionálisnak tűnő követelményrendszert, amelyet egy ,,megoldásnak'' ki kell elégítenie. Próbáljuk meg ezt a követelményrendszert úgy szigorítani, hogy lehetőleg minél kevesebb (speciálisan pontosan egy) döntési alternatíva elégítse azt ki. Ezt a gondolatmenetet a kooperatív játékok elméletében már sikerrel alkalmazták. Jó példa rá a karakterisztikus függvénnyel megadott játékok esetében a Shapley-érték [8], [9], a kompenzáció (sidey-payment) nélküli játékok esetében pedig Nash axiomatikus megoldáskoncepciója [5], [9], amelyet ő kétszemélyes játékok esetére javasolt. Ezt a megoldáskoncepciót általánosította Szidarovszky [10] n-személy esetére. Dolgozatunknak az a célja, hogy a több kritérium alapján való döntési szituációt speciális kooperatív játékként fogalmazzuk meg és a Szidarovszky-féle megoldás tulajdonságait vizsgáljuk, ill. interpretáljuk.

A játékelméleti modell

Jelöljön $A_1, A_2, \ldots, A_r$ r számú alternatívát, amelyek közül a ,,legjobbat'' kell kiválasztanunk. Minden egyes alternatívát m numerikusan jellemezhető kritérium alapján értékelünk. Ez más szóval azt jelenti, hogy van r darab R^m-beli vektorunk,

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$$

és a numerikus jellemzőket úgy választottuk meg, hogy ha $a_{ij} > a_{ik}$, akkor az i-edik kritérium szerint a j-edik alternatíva előnyösebb, mint a k-adik, ha pedig $a_{ij} = a_{ik}$, akkor nem tudunk közöttük különbséget tenni. Feltesszük továbbá, hogy már csak efficiens (Pareto-optimális) alternatíváink vannak, vagyis, hogy egyetlen i, j indexpárra sem áll fenn az

$$\mathbf{a}_i \geqq \mathbf{a}_j$$

reláció. Az alternatívák közül a „legjobbat" keressük, s mivel valamennyien efficiensek, ez a valamilyen értelemben vett „legjobb kompromisszum" keresését jelenti.

Első lépésként bővítjük a szóba jöhető alternatívák halmazát. Megengedjük az eredeti „tiszta" alternatívák tetszőleges keverését, vagyis a lehetséges alternatívák halmaza ezentúl az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ pontok által kifeszített P poliéder:

$$P = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \lambda_i \geqq 0; \quad i = 1, \ldots, r; \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Ezt úgy lehet interpretálni, hogy ha az egyes alternatívákat rendre a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ valószínűségekkel választjuk, akkor a várható „következmények" vektora

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{a}_i .$$

A következőkben a „legjobb" következmény vektort szeretnénk meghatározni. A „jóság" mércéjének azt tekintjük, hogy a következmény vektor (ill. az ezt realizáló alternatívák) bizonyos, intuitíve racionálisnak ítélt axiomákat elégítsenek ki. E célból problémánkat játékelméleti keretbe helyezzük.

Rendeljünk minden kritériumhoz egyértelműen egy „játékost", akinek az a célja, hogy olyan alternatívát válasszon, amelynél az általa reprezentált kritérium szerinti numerikus érték minél nagyobb. Pontosan fogalmazva: minden játékos stratégiahalmaza az alternatívák véges $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ halmaza. Az i-edik játékos kifizetőfüggvényét pedig definiáljuk a következőképpen:

$$f_i(A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}) = \begin{cases} a_{ij}, & \text{ha } j_1 = j_2 = \ldots = j_r = j \\ -\alpha_i & \text{egyébként} \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

ahol α_i egy alkalmas (általában nagy) pozitív szám ($i = 1, \ldots, m$). Ez más szavakkal azt jelenti, hogy ha minden játékos ugyanazt az alternatívát, mondjuk A_j-t választja, akkor az adott alternatívához tartozó $\mathbf{a}_j$ kifizetéseket kapják rendre. Ha viszont közülük legalább egy eltér, akkor a kifizetés igen „rossz", a meg nem értésért az i-edik játékos α_i büntetést fizet ($i = 1, \ldots, m$).

Az így definiált $G = \{S, \mathrm{S}, \ldots, S; f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ játéknak keressük egy kooperatív megoldását. Azok a megoldáskoncepciók, ahol a játékosok egymásnak kompenzációt (side-payment) nyújthatnak, nem jöhetnek szóba, hiszen a kiinduló feltevésünk az, hogy az egyes kritériumok egymással nem mérhetők össze.

A kétszemélyes kompenzáció nélküli játékok esetére Nash [5], [9] javasolt egy megoldáskoncepciót, amelyet Harsányi [2] és Szidarovszky [10] általánosított n személyre. Axiomatikus felépítése és meggyőző interpretálhatósága miatt a SZIDAROVSZKY által javasolt megoldást alkalmazzuk a G játék és ezen keresztül a többkritériumú döntési probléma kezelésére.

Feltételezzük, hogy adva van egy $\mathbf{f}^* \in R^m$ ún. status quo pont, amelyet úgy interpretálhatunk, hogy ha a játékosok nem tudnak megegyezni (az egyes kritériumokat nem tudjuk „összehangolni"), akkor kifizetésként $\mathbf{f}^*$ komponenseit kapják.

Legyen $L \subset R^m$ egy zárt, korlátos, konvex halmaz (a lehetséges következmények halmaza), $\mathbf{f}^* \in R^m$ pedig egy olyan vektor (a status quo pont), amelyre $\mathbf{f} > \mathbf{f}^*$ valamely $\mathbf{f} \in L$ esetén. Legyen ψ egy olyan függvény, amely egy tetszőleges, a fenti tulajdonságokkal rendelkező $(L, \mathbf{f}^*)$ párhoz hozzárendel egy m-elemű vektort (a „legjobb" kompromisszumot) és kielégíti az alábbi axiómákat:

1. $\psi(L, \mathbf{f}^*) \in L$ (lehetségesség). Ez azt jelenti, hogy a legjobb kompromisszumnak benne kell lenni a lehetséges következmények halmazában.

2. $\psi(L, \mathbf{f}^*) \geq \mathbf{f}^*$ (racionalitás). A legjobb kompromisszum semmilyen kritérium alapján sem lehet rosszabb, mint a status-quo pont, amelyet minden kooperáció, egyeztetés nélkül is el lehet érni.

3. Ha $\mathbf{f} \in L$ és $\mathbf{f} \geq \psi(L, \mathbf{f}^*)$, akkor $\mathbf{f} = \psi(L, \mathbf{f}^*)$ következik (Pareto-optimalitás vagy efficiencia). Ez azt jelenti, hogy legjobb kompromisszumként nem jöhet szóba egy olyan vektor, amelyet legalább egy kritérium szerint lehet úgy javítani, hogy egyetlen más kritérium szerint sem rontjuk.

4. Ha $L_1 \subseteq L$ és $\psi(L, \mathbf{f}^*) \in L_1$, akkor $\psi(L, \mathbf{f}^*) = \psi(L_1, \mathbf{f}^*)$ (kedvezőtlen alternatíváktól való függetlenség). Ez a tulajdonság azt az elvet fogalmazza meg, hogy ha egy tágabb halmazon egy megoldás a „legjobb" és egyúttal eleme egy szűkebb halmaznak is, akkor a szűkebb halmazon is a „legjobbnak" kell lennie.

5. Legyenek $\mu_k > 0$, β_k $(k = 1, \ldots, n)$ tetszőleges konstansok és

$$\mathbf{f}^{*\prime} = (\mu_1 f_1^* + \beta_1, \ldots, \mu_m f_m^* + \beta_m),$$

$$L' = \{(\mu_1 l_1 + \beta_1, \ldots, \mu_m l_m + \beta_m) \mid (l, \ldots, l_m) \in L\}.$$

Ekkor $\psi(L', \mathbf{f}^{*\prime}) = (\mu_1 \psi_1 + \beta_1, \ldots, \mu_m \psi_m + \beta_m)$ (monoton növekvő lineáris transzformációtól való függetlenség)[1]. Ez azt a megnyugtató tulajdonságot fejezi ki, hogy a „legjobb" kompromisszum kiválasztása független az egyes kritériumok szerinti mérésnél használt mértékegységtől és a mérési skála kiindulópontjától.

6. Tegyük fel, hogy valamely i, j indexpárra $f_i^* = f_j^*$. Ha az $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) \in L$ reláció maga után vonja a $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in L$ reláció fennállását ($\varphi_k = f_k$, $k \neq i$, $k \neq j$, $\varphi_i = f_j$, $\varphi_j = f_i$), akkor $\psi_i = \psi_j$. Ezek szerint, ha két játékos (kritérium) szerepe mind a lehetséges következmények halmazában, mind a status quo pontban felcserélhető, akkor a „legjobb" kompromisszum pontban is ugyanannyi illeti meg őket.

SZIDAROVSZKY [10] bebizonyította a következő tételt:

1. *tétel*. Egyetlen olyan ψ függvény van, amely kielégíti az 1–6. axiómákat.

[1] Itt $\psi(L, \mathbf{f}^*) = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$

A bizonyítás menetéből az is kiderül, hogy az egyértelműen meghatározott „legjobb" kompromisszum a

$$\prod_{k=1}^{m}(x_k - f_k^*) \to \max \tag{1}$$
$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in L$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{f}^*$$

programozási feladat egyetlen optimális megoldása.

Minthogy az $\mathbf{f}^*$ status-quo pont egyes komponenseit úgy interpretáltuk, mint a „döntésképtelenség", ill. a „meg nem egyezés" következményét, természetesen adódik az $f^* = -(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ választás.

Legyen $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ olyan, hogy minden $\mathbf{x} \in P$ esetén $\mathbf{x} > -\alpha$, vagyis bármely lehetséges döntés (és ezek „keverékei" is) jobb, mint a meg nem egyezés. Írjuk fel az (1) feladatot:

$$\prod_{k=1}^{m}(x_k + \alpha_k) \to \max \tag{2}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\lambda}$$
$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1}\boldsymbol{\lambda} = 1,$$

ahol $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_r]$. Ha $\mathbf{A}$ sorvektorait $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$-el jelöljük, akkor (2) így is írható:

$$\prod_{k=1}^{m}(\mathbf{b}_k\boldsymbol{\lambda} + \alpha_k) \to \max$$
$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \tag{3}$$
$$\mathbf{1}\boldsymbol{\lambda} = 1.$$

Az 5. axiómánk értelmében az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük' hogy $\mathbf{A} > \mathbf{0}$. Mind (2), mind pedig a (3) célfüggvénye a lehetséges tartományon pozitív és minthogy konkáv függvények szorzata, ezért szigorúan kvázikonkáv. (Lásd [4], 61. o. 47. tétel.) Ennek következménye, hogy minden lokális maximumpont egyúttal globális is. (Ugyanakkor, minthogy $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, a kvázikonkáv célfüggvény gradiense mind a (2), mind a (3) feladat esetében pozitív. Ezért minden stacionárius pont globális maximumpont, mint ahogy azt a [3] 71. oldalán található V. tétel kimondja. Ez lehetővé teszi, hogy a (2), ill. a (3) feladat megoldására a nemlineáris programozás hatékony lokális módszereit (pl. a gradiens módszer változatait) alkalmazzuk.

Ha a (2) feladat célfüggvényének logaritmusát vesszük (minthogy a log monoton növekvő függvény, ezt megtehetjük, az optimumhelyek változatlanok maradnak), akkor az alábbi feladatot kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{m}\log(x_k + \alpha_k) \to \max$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \tag{4}$$
$$\lambda \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1}\boldsymbol{\lambda} = 1,$$

amelynek célfüggvénye konkáv, szeparábilis, s így a log $(x_k - \alpha_k)$ függvényeknek kellő finomságú, szakaszonként lineáris közelítésével lineáris programozási feladatot kapunk (lásd [3]).

Az eddigiekből kitűnik, hogy a többkritériumú döntések elméletében alapvető szerepet játszó és a gyakorlati alkalmazásoknál oly problematikus súlyozás kérdését nem érintettük, a „legjobb kompromisszum" kiválasztásánál nem játszott szerepet. Az egyes kritériumok relatív fontosságát jellemző paraméterek beépítése nélkül — úgy tűnik — értelmes döntés azonban nem képzelhető el. Amíg a hagyományos döntési eljárások esetében expliciten vagy impliciten az egyes kritériumok relatív súlyát használjuk, addig esetünkben az $\boldsymbol{\alpha}$ status quo pont („büntetés vektor") megválasztásának van centrális jelentősége. Az egyes kritériumok relatív fontosságát az $\boldsymbol{\alpha}$ megválasztásán keresztül juttatjuk érvényre.

Az alábbiakban néhány racionálisnak tűnő lehetőséget említünk meg az $\boldsymbol{\alpha}$ paramétervektor megválasztására. Konkrét döntési szituációkban természetesen mérlegelni kell, hogy ezek közül melyiket (esetleg valami mást) alkalmazzuk.

1. Tegyük fel, hogy a döntéshozónak az a feladata, hogy egy $\mathbf{a}_0$ pozitív vektorral jellemzett „szituációt" javítson és a javításra rendelkezésre álló r lehetőség közül kell választani. Ezeket a lehetőségeket jellemzik az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ vektorok. Feltételezzük, hogy az $\hat{\mathbf{a}}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ vektoroknak van olyan $\hat{\mathbf{a}}$ konvex lineáris kombinációja, hogy $\mathbf{a}_0 < \hat{\mathbf{a}}$. Ekkor az $\alpha = \mathbf{a}_0$ választás lehetséges és úgy interpretálható, hogy ha „döntésképtelenség" miatt az r javítási lehetőség közül nem tudunk választani, akkor a helyzet marad a régiben, továbbra is $\mathbf{a}_0$ jellemzi.

2. Ha a döntéshozó nem tud választani az r lehetőség közül, akkor valamilyen véletlen mechanizmus fog választani a $\mathbf{p}$ eloszlás szerint, amit vagy ismerünk, vagy becsülni tudunk. Ha $\mathbf{A}\,\mathbf{p} > \mathbf{0}$ és van olyan $\mathbf{a} \in P$, hogy $\mathbf{A}\,\mathbf{p} < \hat{\mathbf{a}}$, akkor lehetséges az $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}\,\mathbf{p}$ választás.

3. Legyen $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ és $\alpha_i = \min a_{ij}$, $(i = 1, \ldots, n)$. Az így definiált $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ vektort tekintsük „büntetés" vektornak. E mögött a választás mögött az a gondolat húzódik meg, hogy ha semmit nem tudunk a döntésképtelenség várható következményéről, akkor minden „játékos" (kritérium) számíthat a legrosszabb eset bekövetkezésére is s így egy összességében ugyan általában soha elő nem forduló, de komponensenként reális veszélyt kifejező „ideálisan" rossz ponttól való „távolodás" kívánatos lehet a döntéshozó számára.

4. Utoljára hagytuk azt az esetet, amikor a „döntésképtelenség" még mint elvi lehetőség sem jöhet szóba, csupán formálisan, mint matematikai konstrukcióval számolhatunk vele. Más szóval ez azt jelenti, hogy azt a megoldást keressük (ha létezik), amelyet akkor kapunk, ha a „büntetés" tart a végtelenhez. Ezért feltesszük, hogy

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{r}$$

ahol $\mathbf{r}$ egy pozitív vektor, amely az egyes játékosoknak büntetésből való részesedését reprezentálja, α pedig egy paraméter, amely a büntetés mértékét fejezi ki.

A (2) feladat optimális megoldása az $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{r}$ helyettesítés esetén, amelyet $\mathbf{x}(\alpha)$-val jelölünk, általában függvénye az α paraméternek. Ha azonban veszünk egy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, végtelenbe tartó sorozatot, akkor az $\{\mathbf{x}(\alpha_k)\}$ sorozatnak, amelynek elemei az 1. tétel értelmében egyértelműen meghatározottak, van legalább egy torlódási pontja, mivel P zárt és korlátos. Az azonban egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ennek a sorozatnak csak egy torlódási pontja van. Ezt a koncepcionális nehézséget oldja fel az alábbi tétel.

Tekintsük az alábbi programozási feladatot:

$$
\begin{aligned}
F(\alpha):\ & \prod_{k=1}^{m} (x_k + \alpha_k) \to \max \\
(5) \qquad & \mathbf{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \\
& \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \\
& \mathbf{1}\boldsymbol{\lambda} = 1.
\end{aligned}
$$

2. *tétel*. Az $\{\mathbf{x}(\alpha_k)\}$ sorozatnak pontosan egy torlódási pontja van, ha $\alpha_k \to \infty$, $(k = 1, 2, \ldots,)$.

Bizonyítás

Az $F(\alpha)$ feladat célfüggvénye az α pozitív paraméter m-fokú polinomja. Legyen ez a polinom

$$s(\mathbf{x}, \alpha) = h_m(\mathbf{x})\,\alpha^m + h_{m-1}(\mathbf{x})\,\alpha^{m-1} + \ldots + h_1(\mathbf{x})\,\alpha + h_0(\mathbf{x}).$$

Azt tudjuk, hogy $s(\mathbf{x}, \alpha)$ bármely rögzített pozitív α esetén kvázikonkáv az R^+ pozitív ortanson. Legyen $K \subset R^+$ egy tetszőleges konvex halmaz. Tegyük fel, hogy j az a legnagyobb index, amelyre $h_j(\mathbf{x})$ nem konstans a K halmazon. Azt állítjuk, hogy ekkor $h_j(\mathbf{x})$ kvázikonkáv. Tegyük ugyanis fel az ellenkezőjét, vagyis hogy van olyan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$, és olyan λ, $(0 < \lambda < 1)$, hogy $h_j(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) < \min(h_j(\mathbf{x}_1), h_j(\mathbf{x}_2))$. Ez azt jelenti, hogy elég nagy α esetén $s(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{x}_2, \alpha) < \min(s(\mathbf{x}_1, \alpha), s(\mathbf{x}_2, \alpha))$, ami ellentmond annak, hogy $s(\mathbf{x}, \alpha)$ kvázikonkáv R^+-on.

Legyen $P^m \equiv P$ és P^k a

$$
\begin{aligned}
& h_k(\mathbf{x}) \to \max \\
(2) \qquad & \mathbf{x} \in P^{k+1}
\end{aligned}
$$

programozási feladat optimális megoldásainak halmaza $(k = m-1, \ldots, 1, 0)$. Nyilvánvaló, hogy

$$P^m \supseteqq P^{m-1} \supseteqq \ldots \supseteqq P^1 \supseteqq P^0$$

és a (6) feladat minden k-ra megoldható, hiszen P zárt és korlátos, $h_k(\mathbf{x})$ pedig folytonos $(k = 0, \ldots, m)$, (egy többváltozós polinom). A P^m konvex, és $h_j(\mathbf{x})$, $(j \geq k+1)$ konstans a P^{k+1} halmazon, így a $h_k(\mathbf{x})$ kvázikonkáv P^{k+1}-en. Ez azt jelenti, hogy a P^k is konvex minden k-ra. P^0 biztosan egy pontból áll, hiszen az utolsó feladat:

$$
\begin{aligned}
& h_0(\mathbf{x}) \equiv x_1, x_2, \ldots, x_r \to \max \\
(7) \qquad & \mathbf{x} \in P^1
\end{aligned}
$$

aminek pontosan egy megoldása van, hiszen (7) ekvivalens az

$$\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots \ln x_r \to \max$$
$$\mathbf{x} \in P^1$$

feladattal, aminek a célfüggvénye szigorúan konkáv.

Azt állítjuk, hogy a P^0 egyetlen eleme $\mathbf{x}_0$ az $\{\mathbf{x}(\alpha_k)\}$ sorozat egyetlen torlódási pontja. Tegyük fel, hogy az $\{\mathbf{x}(\alpha_k)\}$ sorozatnak van olyan $\mathbf{x}_1$ torlódási pontja, melyre $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1$. Elegendő azt belátnunk, hogy $s(\mathbf{x}_0, \alpha) \equiv s(\mathbf{x}_1, \alpha)$, hiszen ez lehetetlen, mivel P^0-nak csak egy eleme van.

Tegyük fel, hogy $s(\mathbf{x}_0, \alpha) \not\equiv s(\mathbf{x}_1, \alpha)$ és hogy j az a legnagyobb index, amelyre $h_j(\mathbf{x}_0) > h_j(\mathbf{x}_1)$. Ekkor van olyan α_0, hogy minden $\alpha \geq \alpha_0$ esetén $s(\mathbf{x}_0, \alpha) > > s(\mathbf{x}_1, \alpha)$. Mivel $\mathbf{x}_1$ torlódási pont, ezért minden $K(\mathbf{x}_1, \varepsilon)$ környezetében végtelen sok $\mathbf{x}(\alpha_k)$ pont van. A környezet sugarát, ε-t meg lehet választani olyan kicsinek, hogy $h_j(\mathbf{x}_0) > h_j(\mathbf{x}(\alpha_k))$ és $s(\mathbf{x}_0, \alpha_0) > s(\mathbf{x}(\alpha_k), \alpha_0)$ fennállnak minden $\mathbf{x}(\alpha_k) \in K(\mathbf{x}, \varepsilon)$ esetén. Ebből következik, hogy $s(\mathbf{x}_0, \alpha) > s(\mathbf{x}(\alpha_k), \alpha_0)$ fenn áll minden $\alpha \geq \alpha_0$ és $\mathbf{x}(\alpha_k) \in K(\mathbf{x}, \varepsilon)$-ra. Elég nagy k-ra $\alpha_k \geq \alpha_0$ s így $s(\mathbf{x}_0, \alpha_k) > s(\mathbf{x}(\alpha_k), \alpha_k)$, ami ellentmond annak, hogy $\mathbf{x}(\alpha_k)$ az $F(\alpha_k)$ feladat optimális megoldása.

A bizonyításból kiderül, hogy a torlódási pont meghatározásához legfeljebb m programozási feladatot kell megoldani, kvázikonkáv célfüggvényekkel. Mivel $h_{m-1}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} r_j\right) x_i$ lineáris, ezért ezek közül az első feladat

$$h_{m-1}(\mathbf{x}) \to \max$$
$$\mathbf{x} \in P$$

egy lineáris programozási feladat, amelynek általában (duál-degeneráció mentes esetben) egy megoldása van s az is P csúcspontja, vagyis egy eredeti („tiszta") alternatíva.

Kritikus szerepe van az $\mathbf{r}$ arányvektor megválasztásának is. Egy racionálisnak tűnő lehetőség az $\mathbf{r}$ vektort úgy megválasztani, hogy az egyes kritériumokat jellemző numerikus értékek nagyságrendjét reprezentálják. Ennek legegyszerűbb megvalósítása, ha

$$r_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

tehát a büntetés az átlagos értékek arányában tart a végtelenhez döntésképtelenség esetén.

Érdemes megjegyezni, hogy abból, hogy a (2) feladatnak egyetlen optimális megoldása van, egyáltalán nem következik, hogy a λ vektor is egyértelműen meghatározott. Elképzelhető, hogy ugyanazt a „legjobb" következmény vektort különböző alternatívák keverésével is előállíthatjuk. Ez egyféle szelekciót tesz lehetővé az alternatívák között, hiszen azokat az alternatívákat, amelyek az optimális következményvektor egyetlen keverésében sem szerepelnek pozitív súllyal, a döntéshozás további folyamatában figyelmen kívül hagyhatjuk.

Példaként tekintsük a következő négy alternatívát, amelyeket két kritérium alapján értékelünk:

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{array}$$

A G játékban mindkét játékos stratégiahalmaza: $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. A kifizetőfüggvények:

$$f_1(A_1, A_1) = 2 \qquad f_2(A_1, A_1) = 3$$

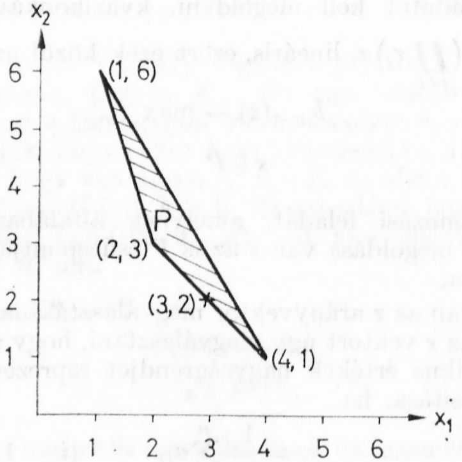
$$f_1(A_2, A_2) = 1 \qquad f_2(A_2, A_2) = 6$$

$$f_1(A_3, A_3) = 4 \qquad f_2(A_3, A_3) = 1$$

$$f_1(A_4, A_4) = 3 \qquad f_2(A_4, A_4) = 2$$

$$f_1(A_i, A_j) = -\alpha_1, \ (i \neq j), \quad f_2(A_i, A_j) = -\alpha_2, \ (i \neq j).$$

A P poliédert az alábbi ábra szemlélteti:



1. ábra

Ha status quo pontnak az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pontot választjuk (mindkét kritérium szerint a legrosszabb érték 1), akkor a (2) feladat optimális megoldásaként az $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$ pontot kapjuk, ami azt jelenti, hogy az A_2 és A_3 alternatívákat $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ valószínűségekkel kell választani.

Ha az alternatívákat jellemző vektorok átlagát vesszük, ez $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a status quo pontnak a $-\alpha \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ pontot, ahol α egy pozitív paraméter, akkor $\alpha \geq \frac{26}{7}$ esetén mindig az $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ pontot, vagyis az A_2 alternatívát kapjuk „legjobb kompromisszumnak".

Az előzőekben leírt játékelméleti megközelítési módot a lineáris vektormaximum (LVM) problémára is alkalmazhatjuk. Az LVM a következő:

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}\,\mathbf{x} \to \text{„max"} \\ (8)\qquad &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ &\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{C}$ egy $m \cdot n$-es mátrix (m kritériumunk van). Itt a lehetséges alternatívák halmaza az $L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ poliéder. Ha L csúcspontjait tekintjük „tiszta" alternatíváknak, akkor L tulajdonképpen ezeknek az összes lehetséges konvex lineáris kombinációja. A csúcspontok közül ki lehet választani az efficienseket. Erre számos módszer ismert (pl. [1], [6]), amelyek nem túl nagy m esetén elég hatékonyak. Ha lehetséges tiszta alternatíváknak ezeket a csúcspontokat, P poliédernek pedig az összes konvex lineáris kombinációját tekintjük, akkor máris az előzőekben tárgyalt modellnél vagyunk. A különbség csak annyi, hogy itt a „keverés" megengedése már eleve a probléma természetéhez tartozik, hiszen a (6) feladat lehetséges megoldásainak halmaza ezeket a „kevert" megoldásokat tartalmazza.

(Beérkezett: 1980. augusztus 15-én.)

IRODALOM

1. EVANS, J. P.—STEVER, R. E.: A revised simplex method for linear multiple objective programs. Mathematical Programming, Vol. 5. No. 1. 1973.
2. HARSÁNYI, J. C.: Rational behaviour and bargaining equilibrium in games and social situations. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1977.
3. KREKÓ, B.: Optimumszámítás. Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1966.
4. MARTOS, B.: Nonlinear programming theory and methods. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976.
5. NASH, J.: The bargaining problem. Econometrica, 18, 155—162.o., 1950.
6. PHILIP, J.: Algorithms for the vector maximization problem. Mathematical Programming 2 (2), 1972. 207—209. o.
7. ROY, B.: Problems and methods with multiple objective functions. Mathematical Programming. Vol. 1. No. 2. 1971.
8. SHAPLEY, L. S.: A value for n-person games. In contributions to the Theory of Games II. Annals of Math. Studies, 28. Princeton N. J. Princeton University Press, 1953.
9. SZÉP, J.—FORGÓ, F.: Bevezetés a játékelméletbe. Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1974.
10. SZIDAROVSZKY, F.: A kooperatív játékok Nash-féle megoldáskoncepciójának általánosítása. SZIGMA, IX. (1978), 1—2, 69—74. o.
11. ZELENY, M.: Linear multiobjective programming. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 95. Springer, 1976.

MULTICRITERIA DECISION-MAKING: A GAME THEORETICAL APPROACH

In the article the following problem is dealt with: choice has to be made on the basis of m criteria from a finite number of numerically characterized alternatives. To this problem a cooperative m-person game is associated where side-payment is not allowed. A point of the polihedron spanned by the alternatives is uniquely determined by the axioms given by *Nash* for the case of two-person games and by *Szidarovszky* for n-person games. Under certain circumstances this point can justly be regarded as the ,,solution'' of the decision-making problem. In the article characteristics of this solution are examined and interpreted, as well as possibilities of its determination are dealt with.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ НА ОСНОВАНИИ НЕСКОЛЬКИХ КРИТЕРИЕВ: ПОДХОД В АСПЕКТЕ ТЕОРИИ ИГРЫ

В данной статье рассматривается следующая проблема: на основании «m» критериев необходимо выбрать конечное число численно охарактеризованных альтернатив. Проблем поставим в соответствие кооперативной игре «m», лиц, в которой компенсация (side-payment) является недопустимой. Одна точка многогранника, образуемого альтернативами однозначно определяется посредством тех аксиом, которые при игре двух лиц описаны Нэшем, а при играх «n» лиц Сидаровским. Эта точка, наличии определенных условий, с полным правом может рассматриваться в качестве «решения» проблемы принятия решения. В статье рассматриваются и интерпретируются свойства этого решения, т. е. они интегрируются, рассматриваются возможности ее определения.