IDEGEN TOLLAK

VICENTE SALAS FUMAS – ANDREW B. WHINSTON
(Martos Béla szerkesztői közreműködésével)

Automatikus ármódosítások hosszú távú szerződésekben*

Amikor vállalatok vagy kormányszervek olyan szerződést kötnek egymással, amelyek hosszabb időre elosztott szállításokra vonatkoznak, gyakran abban is megegyeznek, hogy az árakat időnként hozzáigazítják a termelési költségek exogén változásaihoz. E dolgozat megmutatja, hogy bizonyos feltételek mellett hogyan lehet olyan szerződést kialakítani, amely ugyan megengedi az árak változását, de nem szünteti meg a termelő ösztönzését arra, hogy hatékonyan gazdálkodjék. Csak egész különleges feltételek mellett fogadható el a teljes „áthárítás". Megmutatjuk, hogy a geometriai programozás módszere a termelésgazdaságtanra alkalmazva ennek a problémának az elemzésére is használható.

Nyilvánvaló, hogy a szocialista gazdaság viszonyai között ugyanez a módszer nemcsak a vállalatoknak egymásközötti szerződéses áraira alkalmazható, hanem hasznosítható egyrészt kormányközi hosszú lejáratú szerződések keretében is, valamint alapul szolgálhat a szabályozott árak körében arra, hogy az alkudozásos ármegállapítást automatikus árszabályozással helyettesítse.

I. Bevezetés

A dolgozat olyan problémákkal foglalkozik, amelyek gazdasági egységek között hosszú lejáratú szerződések megkötésekor merülnek fel. Például egy cégnek meg kell egyeznie nyersanyagszállítóival olyan ármódosításokról, amelyek a szállítókat érő költségnövekedéseket visszatükrözik. Tőkés vállalatokkal szemben a szakszervezetek rendszerint olyan formulákra törekszenek, amelyek megvédik tagjaikat az ár-infláció hatásaitól.

Általában a rugalmas szerződések kialakulása arra az ésszerű érvre támaszkodik, hogy vegyék figyelembe, hogy megváltozhatnak egyes olyan tényezők, amelyekre a szerződő feleknek nincs befolyásuk. Jóllehet e változások jellege és mértéke ex ante nem határozható meg, el lehet érni olyan specifikus for-

* A cikk nagyobbik része a két szerzőnek „Flexible Contracting Theory and Case Examples" *European Journal of Operations Research 3* (1979) 368–378 c. cikkének fordítása. Szerkesztő-fordítóként azonban a szerzők engedélyével helyenként kiegészítettem vagy módosítottam az eredmények interpretációját, hogy világosabbá váljék a módszer alkalmazhatósága a szocialista gazdaságban. A Függelék a két szerzőnek „Production Theory and Log-Convexity" c. publikálatlan kéziratából [4] származik. Néhány gondolatot átvettem az S. Ram-Mohan, V. Salas, A. Whinston: „An Automatic Price Adjustment Formula for a Regulated Firm" *Applied Economics 9* (1977) 243–252 c. cikkből is. (M.B.)

májú egyezményeket, amelyekben a szerződéses ár alkalmazkodik az ilyen változáshoz, ha az bekövetkezik.

A rugalmas szerződéseket indokoló fő motívum az infláció. A ráfordítások árának változása egy vállalat számára külsődleges és nem büntethető érte. Ennek ellenére a szerződéses kapcsolat egy ilyen vállalat és vevői között nem engedheti meg, hogy a kibocsátási árakat egyszerűen a ráfordítási árak arányában emeljék. A termelő egység vezetőségét ösztönözni kell arra, hogy a ráfordítás-szerkezetet is hozzáidomítsa az új feltételekhez, már amennyire ezt a technológia megengedi, úgy hogy a terméket az új ráfordítási árakon is minimális költséggel állítsa elő. A megállapodásoknak vissza kell tükrözniük a helyettesítési lehetőségeket és ösztönözniük a vállalatvezetést az elérhető legnagyobb hatékonyságra.

Az infláció az áremelés meggyőző indokául szolgálhat, miközben elfedheti egy részét a vállalatvezetői mulasztásoknak. A fő célja e dolgozatnak, hogy olyan szerződések kidolgozásához segítsen, amelyek megkülönböztetik a vállalatvezetés hibájából bekövetkezett költségemelkedést a tőle független külső hatásoktól.

Az áremelkedések által előidézett másik probléma egy gazdasági egység teljesítményének elszámolásával kapcsolatos. A teljesítmény, amit itt a költséghatékonysággal vagy termelékenységgel mérünk, sok decentralizált szervezetben a premizálás és ösztönzés alapjául is szolgál. Ismeretes, hogy a jelenlegi elszámolási módszerek, amelyek a múltbeli költségeken alapulnak, nagyon korlátozottan alkalmasak csak arra, hogy a teljesítményt mérjék olyan időszakokban, amikor az árak változtak azokhoz képest, amelyek a bázisidőszakban voltak érvényesek (vagy azokhoz amelyeken az eredeti költségvetéseket csinálták). Ez a bírálat bizonyára jogos nemcsak az amerikai, hanem a magyar teljesítmény-elszámolás módszerére is. Ilyen körülmények között, a termelő egység megfigyelt eredményei mind az árváltozásoknak, mind a hatékonyság változásának a hatását tartalmazzák. Mivel pedig a premizálási rendszer csak a hatékonyságot veheti alapul, egy ilyen rendszer sikere attól függ, hogy a két hatást külön tudjuk-e választani.

Célunk e dolgozatban, hogy elméleti és gyakorlati alapot teremtsünk a hatékonyság megfigyelésére, a minimális működési költség értelmében. A konvex és a geometriai programozás dualitás elméletének és metodikájának keretében a termelés elméletét kiterjesztjük az olyan költségindex formulák számítására, amelyek lehetővé teszik a költségbecsléseknek az árváltozások okozta módosítását a feltételezett hatékonysági szint fenntartása mellett.

A 2. fejezet részletesebben elemzi a termelési költség hatékonyságának fogalmát. A 3. fejezet a költségindexek számítására alkalmazza ezt az elméletet és megmutatja hogyan használható különböző körülmények között. Összefoglalással és következtetésekkel zárul a tanulmány.

2. Termelés és költséghatékonyság

A termelési modellekben a költséghatékonyság fogalma abból a magatartási feltevésből következik, hogy a javak és szolgáltatások termelése egy költségminimalizálási cél eredménye, amelyet a technológiai adottságok és jártasságok korlátoznak. Ebből a magatartásból levezethető a normatív szabályok egy sora, amelyeket be kell tartani, amikor a megkívánt kibocsátási szintnek megfelelő különböző ráfordítások mennyiségét megválasztják.

A termelési modellekben a következő előzetes információk állnak rendelkezésre:

(1) Az n számú ráfordítási változóból képzett $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ vektor, amelyhez a gazdasági egység szabadon hozzájut, ha megfizeti a minden időpontban ismert egységárat, $p = (p_1, \ldots, p_n)'$. Általában $p_i > 0$ és $x_i \geq 0$, $i = 1,2, \ldots, n$.

(2) Az x vektor komponensei a termelési folyamatban úgy kombinálódnak, hogy egy adott időpontban az y kibocsátást hozzák létre. Egy adott x-re többféle y lehetséges, de a probléma arra az y-ra korlátozódik, amelyik maximálisan elérhető egy adott x-ből. Feltételezzük, hogy a termelési folyamat olyan, hogy ez a maximum létezik. A maximumot $y = F(x)$ alakban írjuk, ahol F-et a termelő *termelési függvényének* nevezzük, ez foglalja magában a technológiai lehetőségeket a vizsgált időszakban. F-ről hagyományosan feltételezik a következő tulajdonságokat (*Diewert* [1, pp. 484—485]).

(a) F az x-nek skalárértékű függvénye, amely minden $x \geq 0$-ra értelmezve van és véges, ha x véges.

(b) $F(\theta) = 0$ és F nemcsökkenő függvénye x-nek, azaz, ha $x^* \geq x^{**}$, akkor $F(x^*) \geq F(x^{**})$.

(c) Minden pozitív y kibocsátási szint elérhető, bár az általánosság akkor sem csorbul, ha azt tesszük fel, hogy y korlátos.

(d) F felülről félig folytonos.

(e) F kvázikonkáv az n-dimenziós euklideszi tér nemnegatív ortánsában, azaz az

$$\{x \mid F(x) \geq y, x \geq 0\} \tag{2.1}$$

halmaz konvex minden $y \geq 0$-ra.

A fenti (e) feltételt módosítani lehet a termelési függvényeknek azon osztálya esetén, amit ebben a tanulmányban tárgyalunk. Ezt az osztályt *pozinomoknak*[1] nevezzük, a függvények alakja a következő:

$$F(x) = \left[\sum_{j=1}^{T} \beta_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_{ij}} \right]^{-\gamma} \tag{2.2}$$

ahol γ és β_j $(j = 1, \ldots, T)$ pozitív paraméterek, míg az α_{ij} $(i, j = 1,2, \ldots, n)$ paraméterek előjele nem korlátozott, kivéve, hogy a (2.2)-ben definiált F-nek ki kell elégítenie a fenti (a)—(d) feltételeket. Az (e) feltételt a (2.2) függvény általában nem elégíti ki, de a geometriai programozás elméletéből tudjuk, hogy a függvény logkonkáv a változók logaritmusaiban. A logkonkáv függvények kvázikonkávak, tehát (2.2), jóllehet nem okvetlenül kvázikonkáv, de a változók logaritmikus transzformálásával kvázikonkávvá tehető.[2] Így a transzformált változókban kifejezett függvény az (e) feltételt is kielégíti.

[1] A pozinom függvények szolgáltak a geometriai programozás alapjául. Lásd pl. *Duffin* et al. [2].

[2] A konvex S halmazon értelmezett $\theta(x)$ függvényt logkonkávnak nevezzük, ha $0 \leq \alpha \leq 1$, $x_1, x_2 \in S$-re

Az (e) feltételnek ez az általánosítása azért fontos, mert az alább bemutatandó eredmények a pozinom optimalizálásra vonatkoznak, ahogyan az először műszaki tervezési problémákban felmerült. Továbbá a (2.2) alakú általános termelési függvény fontos lehet, mivel a termelés gazdaságtanában újabban javasolt termelési függvényeket is reprezentál [4]. Megjegyezzük még, hogy (2.2) következtében $y > 0$-hoz, $x_i > 0$, $i = 1,2, \ldots, n$ szükséges, azaz pozitív kibocsátáshoz a modell összes változói lényegesek.

A költségminimális feladat ezekután a következő:

$$\min_x \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \mid F(x) \geq y, x \geq 0 \right\}, \tag{2.3}$$

ahol $F(x)$-et (2.2) szerint specifikáljuk.

Megjegyzendő, hogy a paraméterek megfelelő választásával $F(x)$ felveszi a termeléselméletben használt szokásos alakok akármelyikét. Például, ha $\beta_k = \beta$, $\beta_j = 0$, $j \neq k$, és $\gamma = 1$, és α_{ik} helyett α_i-t írunk, akkor a jól ismert *Cobb–Douglas* [5] termelési függvényt kapjuk:

$$F_1(x) = \beta \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha_i},$$

amelyben $\alpha_i < 0$, hogy a függvény nemnövekvő legyen.

Hasonlóképpen, ha $T = n$, $a_{ii} = -1/\gamma$ $\alpha_{ij} = 0$, $i \neq j$, akkor a páronként állandó és azonos helyettesítési elaszticitású (CES) termelési függvényt kapjuk, amelyet két inputra *Arrow* et al. [6] vezetett be és *Uzawa* [7] általánosított:

$$F_2(x) = \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j^{-1/\gamma} \right]^{-\gamma}.$$

Végül, ha $T = n^2$, $\alpha_{ij} = -2/\gamma$ és β-nak a j indexét (i, j)-re változtatjuk, úgy hogy $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, akkor az $1/\gamma$ rendű négyzetes átlagot kapjuk:

$$F_3(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_i^{-2/\gamma} x_j^{-2/\gamma} \right]^{-\gamma}.$$

$$\theta[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] \geq [\theta(x_1)]^\alpha [\theta(x_2)]^{1-\alpha}$$

és logkonvexnek, ha az egyenlőtlenség jele fordított. (Klinger és Mangasarian [3]). A (2.2) függvényben az

$$x_i = e^{u_i}, \text{ azaz } \ln x_i = u_i \qquad x_i > 0, \quad i = 1, \ldots n$$

helyettesítéssel:

$$F(\ln x) = G(u) = \left[\sum_{j=1}^{T} \beta_j \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \right) \right]^{-\gamma}.$$

Mivel pedig a $\sum_{j=1}^{T} \beta_j \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \right)$ függvény logkonvex. ([3] 2.8 és 2.18), a $G(u)$ függvény logkonkáv ([3] 2.12). Az F-re tett monotonitási követelmény korlátozza α_{ij} lehetséges értékeit. $\gamma > 0$ esetén a globális monotonitás elégséges feltétele $\alpha_{ij} < 0$ minden i, j-re. De megelégedhetünk lokális monotonitással is, ha a függvény értelmezési tartományát olyan x-ekre korlátozzuk, ahol ez a feltétel kielégül. Ha valamelyik $\beta_j < 0$, akkor a (2.2) alak általánosított pozinomot állít elő. Ennek optimalizálását *Passy* és *Wilde* [10], valamint *Gochet* és *Smeers* [16] tárgyalták.

Ezt a függvényt *Diewert* [1] és mások vezették be mint egy általános, változó helyettesítési elaszticitású függvényt. Arra is rámutattak, hogy ez a függvény β_{ij} megfelelő választásával egy tetszőleges elsőfokú homogén függvény másodrendű közelítését adja. Végül ez is kitűnt, hogy $\gamma \to 0$ határesetben a függvény logaritmikus alakot vesz fel. (Diewert [11]-ben Lau eredményét idézi.)

A (2.3) alakú probléma a termelés gazdaságtanában kiindulópontul szolgált és az $F(x)$-re idézett példák a technológia reprezentálására leggyakrabban használt függvényalakoknak felelnek meg. A (2.3) feladatot az $F(x)$-re tett (a)—(c) feltevésekkel együtt a termelés gazdaságtanában arra használják, hogy jellemezzék az általuk definiált $C(p, y)$ költségfüggvényt. Ha az

$$X = \{x \mid x \in R_+^n,\ F(x) \geq y\}$$

halmazt a lehetséges ráfordítások halmazának nevezzük, akkor a költségfüggvény

$$C(p, y) = \min_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

alakban adódik. E függvényt és tulajdonságait *Shephard* [8], *Diewert* [1] és mások tanulmányozták.

A jelen tanulmányban, mivel hogy az (e) feltevést gyengítettük, a geometriai programozás duálisát használjuk fel arra, hogy (2.3)-ból a költségfüggvényt levezessük. Bár a *GP* dualitás alkalmazásának értékét a következő fejezetben bemutatandó példákkal illusztráljuk majd, már itt megjegyezzük, hogy a *GP* duálisnak az a kellemes tulajdonsága van, hogy konvex programozási feladathoz vezet. Így a költségfüggvény tulajdonságait a duális formulázásból könnyű kibontani.

A *GP*-nek és a *GP* dualitásnak eredeti megfogalmazása *Duffin* és társai műve [2]; további hivatkozások: *Passy* és *Wilde* [10] valamint *Peterson* [9]. A *GP* feladatok számítástechnikai vonatkozásait legutóbb *Dembo* [14] tekintette át.

Legyen

$$\delta = (\delta_{01}, \ldots, \delta_{0n}, \delta_{11}, \ldots, \delta_{1T})$$

a duális változók vektora. (2.3) duálisa a következőképpen fogalmazható meg:[3]

$$\max_{\delta} \nu(\delta) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{0i} \ln \left(\frac{p_i}{\delta_{0i}}\right) + \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j} \ln \frac{\left(\sum_{j=1}^{T} \delta_{1j}\right) \beta_j y^{1/\gamma}}{\delta_{1j}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{0j} - 1 = 0 \quad \text{(normalitás)} \tag{2.4}$$

$$\delta_{0i} + \sum_{j=1}^{T} \alpha_{1j} \delta_{ij} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{(ortogonalitás)}$$

$$\delta \geq 0 \quad \text{(nem-negativitás)}$$

[3] Levezetését lásd a Függelékben.

A feladat: konkáv függvény maximálása egy konvex (lineáris) halmazon. Ha a (2.4) feladat megengedett halmazát $Q(\delta) \geqq 0$ alakban írjuk, a $C(p, y)$ költségfüggvény a következő alternatív alakra hozható

$$C(p, y) = \max_{\delta} \{v(\delta) \mid Q(\delta) \geqq 0\}, \quad p, y > 0 \tag{2.5}$$

Az optimálási probléma konkáv-konvex jellegéből és Slater-regularitásából következik, hogy a maximum létezik. Azt is feltesszük (lásd a Függeléket), hogy a duális teret definiáló $\begin{bmatrix} I \\ \alpha_{ij} \end{bmatrix}$ mátrix rangja teljes (n).

A geometriai dualitás szerint a primál és duális változók optimális értékei közt a következő összefüggések állnak fenn:

$$\delta_{0i}^* = \frac{p_i x_i^*}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{\delta_{1j}^*}{\sum_{j=1}^{T} \delta_{1j}^*} = \frac{\beta_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{*\alpha_{ij}}}{\sum_{j=1}^{T} \beta_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{*\alpha_{ij}}} \qquad j = 1, 2, \ldots, T, \tag{2.6}$$

Végül meg kell említeni a (2.5) szerint definiált $C(p, y)$ függvény következő tulajdonságait:

(a′) A $C(p, y)$ skalár függvény és értelmezve van $p > 0$ és $y > 0$-ra.
(b′) $C(p, y)$ nemnövekvő y-ban és p-ben.
(c′) $C(p, y)$ p-nek elsőfokú homogén függvénye minden $y > 0$-ra.
(d′) $C(p, y)$ p-ben konkáv függvény.

Jóllehet az (a′)–(d′) tulajdonságok teljesen jellemzik $C(p, y)$-t, explicit függvényalakot csak speciális esetekre lehet előállítani. Ezek egyike nyilván az, amikor a (2.4) feladat nehézségi foka zéró, amikor is (δ_0, δ_1) teljesen meghatározható p-től és y-tól függetlenül. Ez a helyzet akkor, ha $F(x)$ megfelel a fenti $F_1(x)$-nek (Cobb–Douglas). Ekkor $Q(\delta) \geqq 0$ úgy írható, hogy

$$\delta_{0i} - \alpha_i \gamma \delta_1 = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{0i} - 1 = 0,$$

amiből $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha$ jelöléssel:

$$\delta_1 = \alpha\gamma$$

$$\delta_{0i} = \frac{\alpha_i}{\alpha} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ezt a célfüggvénybe helyettesítve:

$$C(p, y) = \beta^{\alpha\gamma} \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha} \right)^{-\alpha_i/\alpha} \right] y^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i/\alpha}.$$

Hasonlóképpen (lásd [4]) az $F_2(x)$ CES függvény esetén:

$$C(p, y) = y \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^{1-\sigma} \beta_i^{\sigma} \right)^{1/(1-\sigma)},$$

ahol $\sigma = \gamma/(1 + \gamma)$.

De általánosságban nehéz volna $C(p, y)$ explicit alakját meghatározni. Egy közelítési mód lenne az, hogy választunk egy sorozat pozitív p és y értéket abból az értéktartományból, amelyet várhatóan felvesznek és kiszámítjuk a megfelelő minimális költségértékeket. A *GP* duális ismert tulajdonságaiból következik, hogy ezek az értékek az áraknak egy konkáv határfelületét alkotják és a kibocsátás növekedésével monoton növekszenek. Minden olyan $C(p, y)$ függvényalak, amelyik az (a′)–(d′) feltételeket kielégíti, hozzáilleszthető az így kapott megfigyelési értékekhez és előállítja a költségfelületet. Ezt az eljárást *Fedorowicz* [12] javasolta.

Diewert [1] és mások a következő függvényalakot javasolták, amelyik kielégíti az e fejezetben kikötött feltételeket:

$$C(p, y) = h(y) \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{T} a_{ij}\, p_i^{\mu/2}\, p_j^{\mu/2} \right]^{1/\mu}, \qquad a_{ij} = a_{ji} > 0,$$

ahol $h(y)$ a kibocsátásnak egy skalár függvénye. Azt is megmutatták, hogy ez a függvény az árak egy tetszőleges homogén konkáv függvényét másodrendű Taylor sorbafejtésével helyettesíti [1]. A *GP* irodalomban találunk eredményeket, amelyek lehetővé teszik a minimális költségértékek érzékenységi vizsgálatát a paraméterek egy tartományán (*Dinkel* és *Kochenberger* [15]).

3. Költségindexek és termelési indexek: A GP dualitás alkalmazása a hosszú távú szerződésekben

Mint a bevezető megjegyzésekben már hangsúlyoztuk, e dolgozat célja, hogy az időbeli termelési folyamatnál figyelemmel tudjuk kísérni a költséghatékonyságot, különösen akkor, ha a ráfordítások árai változnak.

A rendszer működésének időbeli összehasonlításakor el kell különítenünk azt, ami az új árakra adott válasz, attól, ami a működés hatékonyságának ennél mélyrehatóbb változása. Noha az árak változását folyamatosnak kellene tekintenünk, mi megelégszünk a komparatív statikus közelítéssel két időpont között, és egy-egy periódus átlagos árait használjuk. A feladatnak véges időszakokra való felbontása egybe kell essék azzal a gyakorisággal, amivel a helyzetet felmérik.

E fejezetet hipotétikus példák köré építjük, amelyek lehetővé teszik, hogy a fő kérdésekre összpontosítsunk és ugyanakkor kellő alapot nyújtsunk az általánosításra. A szerzők eredeti példái ex ante árajánlatokra vonatkozó formulákat állítottak elő. Ezeket a szerkesztő a magyar olvasó igényeinek jobban megfelelő utólagos ármódosító formulákként értelmezte át.

1. Példa. *Pontos árformula*

Tegyük fel, hogy egy acélgyár termelési folyamata a fenti $F_2(x)$ függvénnyel leírható, kiegészítve ezt egy $\theta(t)$ tanulási tényezővel, ahol t az idő. Tehát

$$F(x) = \theta(t)\,[\beta_L L_t^{-1/\gamma} + \beta_M M_t^{-1/\gamma} + \beta_C C_t^{-1/\gamma}]^{-\gamma} \tag{3.1}$$

ahol $F(x)$ = időegységenkénti termelés tonnában

L_t, M_t, C_t = munka, anyag és tőkeszolgálati ráfordítások

$\gamma_L, \beta_M, \beta_C$ = pozitív paraméterek, melyeknek összege 1

γ = pozitív paraméter, amely a ráfordítások közötti σ helyettesítési elaszticitáshoz úgy kapcsolódik, hogy $\gamma = \sigma/(1-\sigma)$.

Mérnöki becslések azt mutatják, hogy $\sigma = 1/2$, míg $\theta(t)$-t úgy becsülhetjük, hogy évi 2%-os termelésnövekedést tesz lehetővé.

A (2.4) alatti probléma (2.8) alatti megoldását felhasználva y mennyiségű acél termelésének minimális költsége a t időszakban

$$C(p_t, y) = \frac{y}{\theta(t)}(p_{Lt}^{1-\sigma}\beta_L^{\sigma} + p_{Mt}^{1-\sigma}\beta_M^{\sigma} + p_{Ct}^{1-\sigma}\beta_C^{\sigma})^{1/(1-\sigma)}, \tag{3.2}$$

ahol p_{Lt}, p_{Mt}, p_{Ct} = a t időszakban érvényes ráfordítási árak. Tehát 1t acél árindexét a t-edik és a 0-val jelölt bázisidőszak között (3.2) alapján így írhatjuk:

$$\frac{C(p_t,1)}{C(p_0,1)} = \frac{\theta(0)}{\theta(t)}\left[\sum_{i=L,M,C}\frac{p_{it}^{1-\sigma}\beta_i^{\sigma}}{\sum_i p_{i0}^{1-\sigma}\beta_i^{\sigma}}\right]^{(1/1-\sigma)}.$$

Tudjuk azonban, hogy a 0 időszakban az optimumban

$$\sum_i p_{i0}x_{i0}^* = \frac{1}{\theta(0)}\Big(\sum_i p_{i0}^{1-\sigma}\beta_i^{\sigma}\Big)^{1/(1-\sigma)}.$$

Mindkét oldalon logaritmust véve, p_{i0} szerint differenciálva és p_{i0}-lal szorozva:

$$\frac{\partial \log\big(\sum_i p_{i0}x_{i0}\big)}{\partial p_{i0}}\,p_{i0} = \frac{p_{i0}x_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}x_{i0}} = S_{i0} = \frac{p_{i0}^{1-\sigma}\beta_i^{\sigma}}{\sum_i p_{i0}^{1-\sigma}\beta_i^{\sigma}}, \qquad i = L, M, C,$$

ahol S_{i0} az egyes ráfordítások részesedési aránya az összes költségből a bázisidőszakban.

E szerint helyettesítve

$$\frac{C(p_t,1)}{C(p_0,1)} = \frac{\theta(0)}{\theta(t)}\left[\sum_{i=1}^{n} S_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

Ha tehát 1 t acél ára a bázisidőszakban q_0 volt, és ezt a költségváltozásokkal arányosan kívánjuk emelni, akkor 1 periódussal később a jogos ár:

$$q_1 = q_0\frac{1}{1{,}02}\left[S_{L0}\left(\frac{p_{Lt}}{p_{L0}}\right)^{1/2} + S_{M0}\left(\frac{p_{M1}}{p_{M0}}\right)^{1/2} + S_{C0}\left(\frac{p_{C1}}{p_{C0}}\right)^{1/2}\right]^2. \tag{3.3}$$

Ha a kiinduló ár 500/tonna, az egyes tényezők költségrészesedése rendre 40%, 40% és 20% (a bázisidőszakban), továbbá a bérek 10%-kal, az anyagárak 15%-kal, a tőkeköltségek 2%-kal emelkedtek, akkor

$$q_1 = 500 \times 1{,}081 \simeq 540{,}50$$

(szemben a változatlan ráfordításarányokkal kalkulált árral, ami 541,18 lett volna).

2. Példa. *Közelítő árformula*

A vállalat új korszerűbb termék (integrált áramkör) termelésére kíván áttérni. A kísérleti gyártás költségei nem lehetnek mérvadóak arra az időre, amikor már tömeggyártás folyik majd, de bizonyos következtetések levonhatók mind az előző gyártmány termelési függvényéből, mind a kísérleti gyártás ráfordításarányaiból.

A régi gyártmány termelési függvénye pozinomiális (2.2) alakú volt és elsőfokú homogén, úgy hogy $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = -1/\gamma$. Így (2.4) második korlátozó feltételéből (ortogonalitás) következik

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{0i} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{T} \alpha_{ij}\alpha_{1j} = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j}$$

azaz az első (normalitási) feltételből:

$$\sum_{j=1}^{T} \delta_{1j} = \gamma.$$

Feltehető továbbá, hogy az új gyártmány termelési függvényében a β és γ paraméterek különbözni fognak a régi értékektől, de az α_{ij} paraméterértékek változatlanok maradnak (tehát ismertek). Továbbá mindezekről a paraméterekről feltehető, hogy az időben változatlanok.

A geometriai duális programból adódó

$$C(p, y) = \max_{\delta} \{v(\delta) \mid Q(\delta) \geq 0\} \quad p > 0, y > 0 \tag{3.4}$$

függvényt illetően a kísérleti gyártás adatai becslést adnak a δ_{0i} paraméterekre, a költségek tényezők közti megoszlására. Mivel az α_{ij}-k ismertek, kiszámítható, hogy vannak-e megengedett (nem-negatív) δ_{1j} értékek; ha igen, akkor az induló költségrészesedés megengedett lesz a jövőben is. E feltételek mellett alsó és felső becslés adható az új gyártmány költségindexére a kísérleti költségeket véve bázisul.

Jelölje $v(\delta^{*t}, p_t)$ a (3.4) optimális megoldását a t időszaki árak mellett, ugyanakkor a primál optimális megoldás

$$TC(x^{*t}, p_t) = \sum_{i=1}^{n} p_{it} x_i^{*t}$$

ahol x_i^{*t} az optimális ráfordításokat jelenti a t időszaki árak mellett. Mint tudjuk a primál és duális optimumok egyenlőek

$$\nu(\delta^{*t}, p_t) = TC(x^{*t}, p_t),$$

a kísérleti gyártásra vonatkozóan pedig

$$\nu(\delta^{*0}, p_0) = TC(x^{*0}, p_0).$$

Ez a következő egyenlőtlenséghez vezet az optimalitási tulajdonságokat figyelembe véve.

$$\frac{\nu(\delta^{*0}, p_t)}{\nu(\delta^{*0}, p_0)} \leq \frac{\nu(\delta^{*t}, p_t)}{\nu(\delta^{*0}, p_0)} = \frac{TC(x^{*t}, p_t)}{TC(x^{*0}, p_0)} \leq \frac{TC(x^{*0}, p_t)}{TC(x^{*0}, p_0)}. \tag{3.5}$$

Figyelembe véve β_j és γ időbeli változatlanságát a mi függvényünkre a fenti egyenlőtlenség a következőt adja

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)^{\delta_{0i}^{*0}} \leq \frac{\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{it}}{\delta_{0i}^{*0}}\right)^{\delta_{0i}^{*t}} \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{\beta_j}{\delta_{1j}^{*t}}\right)^{\delta_{1j}^{*t}}}{\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i0}}{\delta_{0i}^{*0}}\right)^{\delta_{0i}^{*0}} \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{\beta_j}{\delta_{1j}^{*0}}\right)^{\delta_{1j}^{*0}}} \leq \sum_{i=1}^{n} \delta_{0i}^{*0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right). \tag{3.6}$$

Mint látható a valódi költségindex az árváltozások súlyozott geometriai és aritmetikai átlaga közé esik,[4] de míg a valódi index kiszámításához az ismeretlen β_j paraméterekre lenne szükség, az alsó és felső becslés nélkülük is kiszámítható. A két becslés számtani közepe feltehetően kielégítő becslést ad a valódi indexre. Ily módon eldönthető, milyennek kell lennie az új termék árának a különböző jövőbeni inputárak mellett ahhoz, hogy érdemes legyen a régi helyett ezt gyártani.

4. Összefoglalás és következtetések

Dolgozatunkban a geometriai programozás technikáját alkalmaztuk az időbeli költséghatékonyság felülvizsgálatára abban az esetben, amikor a költségminimálási probléma költségparaméterei periodusonként különbözőek. Megmutattuk, hogyan jellemezhető az árak és termelési szintek költségfüggvénye pozinom optimálási feladatként; ez az alak mind a közgazdaságtudományban, mind a mérnöki szerkesztésben gyakran előfordul. Levezettünk egy feltételsorozatot, amely ilyen költségfüggvény esetén lehetővé teszi a tényleges vagy a (statisztikai értelemben) közelítő függvényforma megállapítását. A dolgozat eredményeit szembesíteni lehet a probléma klasszikus tárgyalásmódjával; az eredményeket itt a *GP* duálisból kapjuk. Ennek az az előnye, hogy a primál feladatban enyhíthetünk a konvexitási feltételeken, a duálisban pedig a szokásos klasszikus gyakorlattal szemben az eredményeink levezetésében jelentős számításbeli könnyebbségeket érünk el.

Az elméleti eredményeket a hosszú távú szerződések egy lényeges problémájára alkalmaztuk, olyan „költségátháritási" (vagy a magyar szakzsargonban

[4] A geometriai dualitás felhasználását már *Woolsey* [13, 4. fej.] is javasolta a változó árakkal számított összköltség alsó korlátjának kiszámítására.

meghonosodott szóval élve: „begyűrűztetési") formulát vezettünk be, ami a ráfordítási árak változását „átvezeti" a termék költségén, de e mögé nem bújtatható el az optimálisnál rosszabb termelékenység költségnövelő hatása. A formuláknak jelentős számításbeli előnyük van azzal szemben, mintha a költségminimálási feladatot meg kellene oldanunk valahányszor a tényezőköltségek megváltoztak. A dolgozatból kitűnik, hogy az ilyen formulákat a szerződéses árak és az ellenőrzött árszabályozás körében elterjesztve bizonyos mértékig fékezni lehet az inflációs folyamatokat is. A szerződő felek ezesetben nemcsak az induló árban alkudnának meg, amikor hosszú távú szállításokban állapodnak meg, hanem az áthárítási formulában is, amelyet a technológiai lehetőségeket visszatükröző múltbeli adatokra alapozhatnak. A formulát meghatározott periódusonként értékelnék újra, a ráfordítási árak időközben bekövetkezett változását tekintetbe véve. Így a szerződő felek biztosak lehetnének abban, hogy meghatározott mértékben növekvő hatékonyságra szerződtek.

A hatósági ármegállapítás keretében pedig számos ár alakulását automatikussá lehetne tenni, csökkentve az áralkudozásoknak mind a gyakoriságát, mind a szubjektivitását.

Függelék: A GP dualitás

A (2.3) feladat GP duálisát *Peterson* [9] módszerét követve mutatjuk be. Az $x_i = e^{u_i}$ helyettesítés után a primál feladat konvex Lagrange függvénye a következő lesz.

$$L(u, z, \mu) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{u_i} + \mu \left(y^{1/\gamma} \sum_{j=1}^{T} \beta_j\, e^{z_j} - 1 \right),$$

ahol

$$u_i = \ln x_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \ln x_i \qquad j = 1, 2, \ldots, T$$

$$\mu \geq 0$$

Így a transzformált költségminimálási probléma a következő lesz:

$$\mathrm{Min}\, L(u, z, \mu)$$

azzal a feltétellel, hogy

(u, z) eleme az $\begin{bmatrix} I \\ \alpha_{ij} \end{bmatrix}$ mátrix oszlopterének és

$$\mu \geq 0.$$

Az $\begin{bmatrix} I \\ \alpha_{ij} \end{bmatrix}$ mátrix $(T + n) \times n$ méretű, rangja pedig n, az eredeti feladat változóinak száma.

A következő definíciókra lesz szükségünk (*Peterson* [9])

a) Egy U kúp *duálisát* (D) a következő x halmaz adja

$$D \equiv \{y \in R^n \mid 0 \leq u'y \text{ minden } u \in U\text{-ra}\} \qquad \textbf{(F.1)}$$

ahol $u'y$ a két vektor skaláris szorzata. Mivel feladatunkban U vektortér lesz, D egyszerűen ortogonális komplementuma U-nak: $U^{\perp}$.

b) Egy W tartományon értelmezett w függvény *konjugáltjának* nevezzük a V tartományban értelmezett v függvényt, ha

$$v(\delta) = \operatorname*{Max}_{y \in W} [\delta' y - w(y)], \tag{F.2}$$

ahol V azoknak a δ-knak a halmaza, ahol a fenti maximum véges. Feltesszük, hogy V nem üres. A w függvényt v konjugáltjával a következő egyenlőtlenség köti össze

$$\delta' y \leq w(y) + v(\delta) \tag{F.3}$$

és az egyenlőség áll ott, ahol a fenti maximumot elérték. Továbbá

$$\delta \in \partial\, w(y),$$

ahol $\partial w(y)$ a $w(y)$ gradiense. (Pontosság kedvéért ∂w-re mint szubgradiensre kellene hivatkozni. De konvex függvény esetén, amit feltételezünk, a két fogalom egybeesik.) Továbbá két konjugált v és w függvény esetén a

$$\delta \in \partial\, w(y),\ y \in \partial v(\delta)$$

relációk ekvivalensek és egymást „megoldják" [9, 18. o.]. Továbbá mivel a GP konjugált dualitás esetén az U kúp egy vektortér $\left(\text{az } \begin{bmatrix} I \\ \alpha_{ij} \end{bmatrix} \text{ mátrix oszloptere}\right)$, a konjugált ennek ortogonális komplementer terén van értelmezve, és ez ortogonalitásból következően

$$\delta' v = 0.$$

Így az (F.3) egyenlet a következőre redukálódik:

$$-v(\delta) \leq w(y). \tag{F.3'}$$

Ha e fogalmakat most az $L(u, z, \delta)$ Lagrange függvény konjugált duálisára alkalmazzuk (miután a pozitív függvényeket logaritmusukkal helyettesítettük), akkor a $v(\delta) = v(\delta_0, \delta_1)$ függvényre a következőt kapjuk:

$$v(\delta) = \operatorname*{Max}_{u,z,\mu} \left[\sum_{i=1}^{n} \delta_{0i} u_i + \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j} z_j - \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{u_i}\right) - \mu \ln\left(y^{1/\gamma} \sum_{j=1}^{T} \beta_j e^{z_j}\right)\right]. \tag{F.4}$$

Az (F.4) optimalitási feltételei a következők

$$\delta_{0i} = \frac{p_i e^{u_i}}{\sum_{i=1}^{n} p_i e^{u_i}} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\delta_{1j} = \mu \frac{\beta_j e^{z_j}}{\sum_{j=1}^{T} \beta_j e^{z_j}} \qquad j = 1, \ldots, T$$

$$\ln\left(y^{1/\gamma} \sum_{j=1}^{T} \beta_j e^{z_j}\right) = 0.$$

Ezt u_i, z_j és μ-re megoldva:

$$u_i = \ln \frac{\delta_{0i}}{p_i} + \ln \sum_{i=1}^{n} p_i e^{u_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$z_j = \ln \frac{\delta_{1j}}{y^{1/\gamma} \beta \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j}} \qquad j = 1, \ldots, T$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j}.$$

Ezeket az értékeket (F.4)-be helyettesítve:

$$v(\delta) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{0i} \ln \left(\frac{\delta_{0i}}{p_i} \right) + \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j} \ln \frac{\delta_{1j}}{y^{1/\gamma} \beta_j \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j}}. \tag{F.4'}$$

Ennek értelmezési tartománya

$$V = \left\{ \delta_{0i} \geq 0,\ \delta_{1j} \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \delta_{0i} = 1 \right\} \tag{F.5}$$

és állnia kell a $\delta \in U^{\perp}$ ortogonalitási feltételnek is. Ez utóbbit a következőképpen láthatjuk be. A transzformált változók

$$v = [I]\,[\ln x]$$

$$z = [\alpha_{ij}]\,[\ln x)$$

előállításából és a $\delta' y = 0$, azaz

$$[\delta_0, \delta_1] \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix} = 0$$

ortogonalitási feltételből kapjuk, hogy

$$[\delta_0, \delta_1] \begin{bmatrix} I \\ \alpha_{ij} \end{bmatrix} = 0. \tag{F.6}$$

Ez lesz a duális feladat egyik (ortogonalitási) korlátja. A duális feladat tehát:

$$\text{Max}\, \{ -v(\delta) \mid \delta \in V \cap U^{\perp} \},$$

ahol $v(\delta)$-t (F.4'), V-t (F.5), $U^{\perp}$-t pedig (F.6) definiálja.

A $\nu(\delta) = -v(\delta)$ jelöléssel a (2.4) alatti duális feladatot kapjuk.

IRODALOM

1. W. E. Diewert: An application of Shephard Duality Theorem: A generalized Leontief production function, J. Political Econ. 79 (May/June 1971).
2. R. J. Duffin, E. L. Peterson and C. Zener: Geometric Programming (John Wiley, New York, 1967).
3. A. Klinger and O. L. Mangasarian: Logarithmic convexity and geometric programming, J. Math. Anal. Appl. 24 (November 1968).

4. V. Salas and A. B. Whinston: Production function and log-convexity, Purdue University (August 1976). (Kézirat.)
5. C. W. Cobb and P. H. Douglas: A theory of production, Am. Econ. Rev. 17 (1, Supplement) (March 1971).
6. K. J. Arrow, H. B. Chenery, B. S. Minhas and R. M. Solow: Capital—Labor Substitution and Economic Efficiency, Rev. Econ. Statist. 63 (August 1961).
7. H. Uzawa: Production functions with constant elasticities of substitution, Rev. Econom. Stud. 29 (October 1967).
8. R. V. Shephard: Theory of Costs and Production Functions (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970).
9. E. L. Peterson: Geometric programming, SIAM Rev. 18 (January 1976).
10. U. Passy and D. T. Wilde: Generalized polynomial optimization, SIAM J. Appl. Math. (September 1967).
11. W. E. Diewert: Exact and superlative index numbers, J. Econometrics 4 (May 1976).
12. A. J. Federowicz: The approximation of functions by posynomials for the purpose of applying geometric programming, R. R. 67-1C3-MCONS-R1, Westinghouse Research Lab. (April 1967).
13. C. S. Beighter and D. T. Phillips: Applied Geometric Programming (John Wiley, New York, 1976).
14. R. S. Dembo: The current state of the art of algorithms and computer software for geometric programming, Report No. 88, School of Organization and Management, Yale University (1976).
15. J. J. Dinkel and G. A. Kochenberger: On sensitivity analysis in geometric programming, Operations Res. 25 (1) (1977) 155—163.
16. W. Gochet and Y. Smeers: A branch and bound method for reversed geometric programming, CORE Discussion Paper, No. 7511, Catholic University of Louvain (1975).