Lővei László

# Időleges kompetitív egyensúly

## 1. Az elmélet bemutatása

### 1.1. *Arrow–Debreu modell*

Az általános egyensúlyelmélet ma már klasszikusnak tekinthető alapmodellje az *Arrow–Debreu* modell. Részletes ismertetésére itt nem vállalkozom, az magyarul is hozzáférhető (l. Hegedüs–Zalai [9] vagy elmélettörténeti és kritikai aspektusait tekintve Kornai [13], Mátyás [14].) Csak azon jellemzőit hangsúlyozom, melyek a továbbiak megértése szempontjából fontosak.

A modellben a gazdasági személyek két csoportra oszlanak, fogyasztókra és termelőkre. A résztvevők egymástól elkülönültek, mindegyikük szigorúan racionálisan viselkedik a saját érdekei szerint. Tökéletes szabad verseny érvényesül, az árakat mindenki adottságnak tekinti.

A termelők ismerve saját termelési lehetőségeiket, tetszőleges adott árrendszer mellett képesek meghatározni azt a termelési programot (vagy programokat) – a felhasználásra és kibocsátásra kerülő javak azon együttesét –, amely a maximális nyereséget eredményezi számukra. Készleteik nincsenek, keletkező nyereségük teljes egészében a fogyasztók között kerül felosztásra, előre meghatározott arányokban.

A fogyasztók valamivel bonyolultabb lények. Adottak fogyasztási lehetőségeik és a javakból rendelkezésükre álló akkora készletek, melyek már eleve biztosítják számukra a túlélést. Rögzített ízlésük van, racionalitásuknak megfelelően ezt egy teljes és tranzitív preferenciarendezés képviseli. Ez a preferenciarendezés a megfelelő értelemben folytonos és konvex, aminek következtében folytonos és szigorúan kvázi-konkáv hasznossági függvénnyel helyettesíthető. Adott árrendszer esetén készleteik értéke és a termelőktől kapott nyereség összege meghatározva számukra, hogy mennyit költhetnek szükségleteik kielégítésére. Költségvetési kereteiken belül kiválasztják a számukra maximális hasznot nyújtó fogyasztást, és azzal mint kereslettel jelentkeznek a piacon.

Az Arrow–Debreu modell (és az általános egyensúlyelmélet) alapkérdése: milyen feltevések mellett létezik olyan árrendszer, amely esetén a termelők és fogyasztók kínálata és kereslete minden jószág piacán fedi egymást, vagyis egyensúlyban van.

Az idő explicit módon a modellben nem szerepel. Gyakori ezzel kapcsolatban az a megállapítás, hogy a modell a gazdasági élet egy adott időszakra vonatkozó jelenségeit mutatja be. Azonban így ellentmondásra jutunk, hiszen ekkor az ábrázolt fogyasztói és termelői magatartás elveszti racionalitását, mivel nem számol a jövőbeli léttel és problémákkal. Az interpretáció másik módját írja le *Arrow* (l. *Arrow–Hahn* [2]). Az árukat nemcsak fizikai jellemzőik és térbeli elhelyezkedésük alapján különbözteti meg egymástól, hanem előállításuk, kézbesítésük időpontja alapján is. Megállapítván, hogy a résztvevők számára jelenlegi döntéseikben úgyis csak véges számú időszak releváns, minden változtatás nélkül beilleszthető az eredeti keretek közé a jövővel is számoló gazdasági magatartás — egyetlen feltétel segítségével. Ez a meglehetősen irreális feltétel a minden időszakra, árura és szükségletre kiterjedő határidős piacok léte. Ezeken a résztvevők jövőbeli szükségleteik kielégítését biztosítják úgy, hogy a vevő által most kifizetett összeg ellenében az eladó vállalja bizonyos jószág meghatározott időpontban való szállítását. A jelenség jól ismert a tőzsdei világban, azonban általánosnak semmiképp nem tekinthető. Csak a legfontosabb, igen jól jellemezhető cikkek néhány hónappal, maximum egy-két évvel későbbi kézbesítésére terjed ki, célja nem annyira jövőbeli szükségletek biztosítása, hanem sokkal inkább spekuláció és a kockázat csökkentésére való törekvés. Mindkét cél létezésének alapvető oka az üzleti és egyben az egész gazdasági élet bizonytalansága. Ez a bizonytalanság a fő oka annak is, hogy a határidős piacok viszonylag rövid időtávra terjednek ki, a tranzakciók száma nem túl nagy, ami különösen ellentmond az árak adottságként való kezelésének. Sem a termelési folyamat, sem pedig az áralakulás természetes bizonytalansága nem szerepel az Arrow—Debreu modellben.

### 1.2. *A továbblépés irányai*

A mindenre kiterjedő határidős piacok feltételezése tulajdonképpen a jövőt a jelenbe hozza, az összes szerződést most kötik meg, semmi sem ösztönzi a résztvevőket a piacok későbbi megnyitására. Mi történik, ha elvetjük ezt az irreális feltevést, és számolunk a gazdasági életre oly jellemző bizonytalansággal?

A termelők és fogyasztók lehetőségeikhez képest igyekeznek jelenbeli szükségleteiket kielégíteni úgy, hogy közben tudják, holnap a piacon már más körülmények közé kerülnek. Nem látják előre biztosan az áralakulást, nem tudják, hogy a változó gazdasági és természeti környezet milyen hatással lesz a termelésre, mekkora lesz a kereslet és a kínálat az egyes termékekből. A gazdasági személyeknek az adott időpontban megfigyelhető viselkedése ekkor már csak a felszínt jelenti. A felszín alatt létezik a várakozások és tervek láthatatlan szövevénye, melyek a múltban gyökereznek és a döntéshozók jövőbeli tervezési horizontjáig terjednek ki. Az időleges egyensúlyi modellek alapjában véve a várakozások és tervek valódi szerepét próbálják meg ábrázolni a maguk sajátos eszközeivel.

Két fő irányzat alakult ki. Az egyik az időleges kompetitív egyensúly elmélete, amely megtartja a szabad verseny feltételét, a fő probléma továbbra is a keresletet és kínálatot egyensúlyba hozó árrendszer létezése. A másik az ún. rögzített árak melletti egyensúlyi modellek köre (használatosak még az „időleges egyensúly mennyiségi szabályozással", „keynesi időleges egyensúly" vagy „disequilibrium-elmélet" elnevezések is). Az adott árakon eltérhet egymástól az egyes termékek kereslete és kínálata, ilyenkor a résztvevők bizonyos elosztási rendszer szerint mennyiségi korlátozásokat kapnak eladásaikra és vásárlásaikra. Az alapkérdés most az elosztási rendszer és a hozzá való alkalmazkodás elemzésén keresztül különböző egyensúlyhiányos helyzetek vizsgálata, habár egy újfajta, nem kompetitív egyensúlyfogalom definiálása és létezésének bizonyítása segítségével.

### 1.3. *Az új gondolati keret*

A következőkben néhány szóval megpróbálom felvázolni az időleges kompetitív egyensúlyi modellek szerkezetét.

Az idő a modellekben véges számú (legtöbbször csak két) különálló intervallumra van bontva, ami az idő diszkrét változóként való kezelését jelenti. Az első időszak a jelen, a továbbiak pedig a szereplők elképzeléseiben megjelenő véges időhorizontot képviselik.

A résztvevők tudják, hogy a jövő bizonytalan. Felmérik, melyek azok az események, amelyek befolyásolják létüket (árak, gazdasági, társadalmi és természeti viszonyok) és ezeknek a bekövetkezési esélyeiről várakozásokat alkotnak maguknak. Várakozásaik természetesen függnek jelen- és múltbeli tapasztalataiktól. A függés módjára vonatkozó feltételezéseknek kulcsszerepük van az egyensúly létezésének vizsgálatakor.

Adott a fogyasztás és termelés során felhasznált vagy előállított javak listája. A modellekben ezek csak egy-egy időszakon át léteznek, ezért a tartós fogyasztási vagy beruházási cikkek úgy szerepelnek, hogy beszerzésük után az adott időszakban „amortizálódó" rész jelenik meg a résztvevők készletében.

A termelők ismerik jelenbeli termelési lehetőségeiket és készleteiket. Tudják, hogy a következő időszakokban bekövetkező bizonytalan eseményektől hogyan függ mostani és későbbi termelési folyamatuk naturális eredménye, valamint készleteik alakulása. A termelők készletei az általam ismert időleges egyensúlyi modellekben függetlenek termelési programjaiktól, ekkor azonban a berendezések elhasználódása és a beruházások kimaradnak a modell által leírható jelenségkörből. Ennek a függőségnek a bevezetésével termelési célú felhasználásukban szerepelhet beruházásuk, későbbi készleteik között pedig az ennek eredményeképpen megjelenő felhasználható berendezés.

A termelés eredménye és így a vállalat jövedelme is függ a jövőbeli eseményektől. A vállalatok termelési programja ezért — az Arrow—Debreu modelltől eltérően — most nem egyszerűen a felhasználásnak és kibocsátásnak, hanem annak az összefüggésnek a meghatározása, amely megmondja, hogy a különböző helyzetekben hogyan alakuljon a termelés. Tehát a vállalatnak „ha — akkor" típusú lehetséges termelési programjai vannak, ezek közül kell kiválasztania a várakozásai, költségvetése és célja szempontjából megfelelőt. Célként az egyes időszakokra vonatkozó termelési érték,- nyereségnövekedés valamely függvénye szerepelhet.

Minden vállalatnak vannak részvényei, melyek akár a fogyasztók, akár a termelők tulajdonában lehetnek. A részvénypiac aktív, a résztvevők a jelenlegi árak és a jövőbeli áralakulásról alkotott várakozások alapján adják-veszik a részvényeket. A többidőszakos modellekben tehát megengedett a spekuláció. A részvények árfolyama többnyire nincs explicit módon a kifizetésekhez kötve. A bemutatni kívánt modell a vásárlásoktól függő készletalakulás révén interpretálható úgy, hogy a készletek közé beleértjük a kifizetéseket is. Valójában a részvénypiac egyelőre elég neuralgikus pontja az időleges egyensúlyi modelleknek, a kifizetések és az új részvények kibocsátásának megfelelő kezelése nem megoldott (a problémáról bővebben l. GRANDMONT [7] 554—556 o.). A részvények jelentősége abban van, hogy olyan nem fizikai javakat képviselnek, amelyek tartósak, egyik időszakról a másikra változatlanul kerülnek át. Áralakulásuk viszont bizonytalan. Szükség van olyan jószágra is, amely szintén tartalékolható, de nominális értéke állandó. Ezt a szerepet a modellekben a pénz tölti be, melynek elszámolási egységként az ára mindig egy. Reálértéke természetesen változhat a többi jószág áralakulásának függvényében (az infláció megengedett), azonban értéktelenné sosem válik. A termelők feladata tehát az, hogy az adott időszakban bizonyos javakat vásároljanak, amelyeket aztán készleteik hozzáadásával a termelési folyamat révén a következő időszakban megjelenő más javak kibocsátására használnak fel. Tevékenységüket az előállított termékek, a tulajdonukban levő részvények és pénz értékesítésével finanszírozhatják.

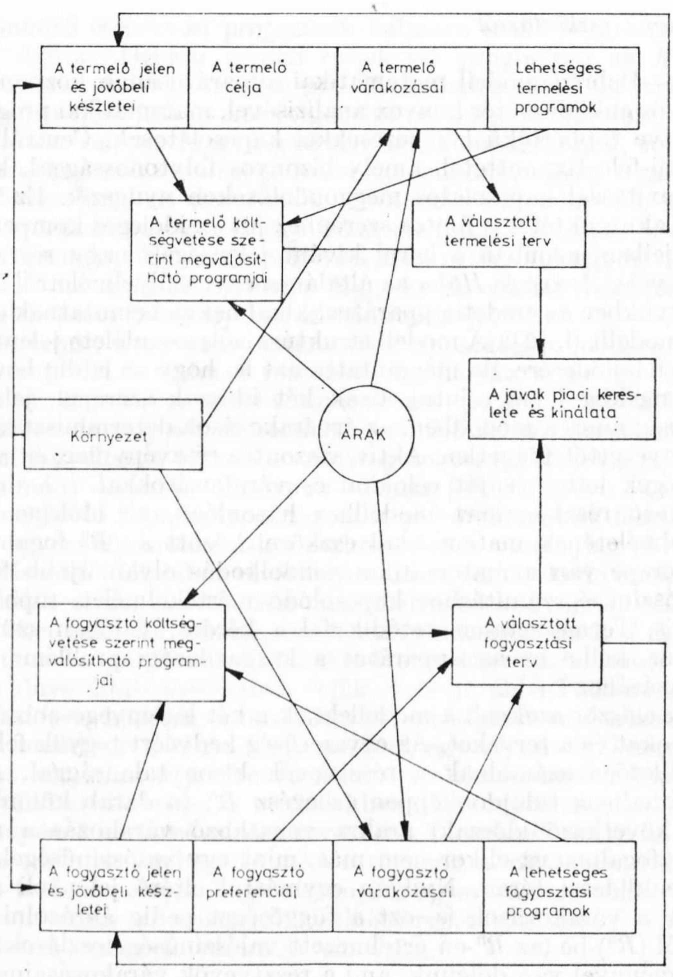
Hasonlóan a termelési egységekhez, a fogyasztók is ismerik fogyasztási lehetőségeiket és készleteiket. Cselekvési programjaik a bizonytalan jövőbeli eseményektől függő olyan vásárlásokat és egyben szolgáltatások teljesítését tartalmazzák, melyek révén biztosított a létfenntartásuk. Nemcsak a reálszféra javait, hanem részvényeket és pénzt is szerezhetnek. Újszerű a következő részben tárgyalt modellben, hogy készletük függ fogyasztásuktól is, így a vásárolt tartós fogyasztási cikkek felhasználása, valamint a teljesíthető szolgáltatások (munka) fogyasztástól való függése ábrázolható. A különböző fogyasztási kosark hasznosságát most is preferenciarendezésük szerint ítélik meg. Azonban egy cselekvési program fogyasztási konzekvenciái bizonytalanok, hiszen függnek a jövőbeli eseményektől (pl. az áraktól). Ezért ekkor már nemcsak ízlésük, hanem várakozásaik is szerepet játszanak abban, melyik tervet tekintik a legjobbnak — vagyis a következményeket súlyozzák azok bekövetkezéseinek (szubjektíven megítélt) esélyeivel.

A résztvevők a költségvetésük szempontjából lehetségesnek ítélt cselekvési programjaik közül — melyek tehát azt tartalmazzák, hogy a jelen- és jövőbeli időszakokban a körülmények alakulásától függően mit vásárolnak, adnak el, fogyasztanak, dolgoznak, illetve termelnek — kiválasztják a céljaiknak leginkább megfelelőt és az abban meghatározott első időszaki kereslettel, illetve kínálattal jelenkeznek a piacon. A jelenben érvényes árrendszer két szempontból is befolyásolja az eladási és vásárlási szándékokat. Egyrészt az Arrow—Debreu modellhez hasonlóan behatárolja a résztvevők költségvetése szempontjából most megvalósítható akciók halmazát. Másrészt, mint megfigyelt valóság, a múltbeli tapasztalatokhoz hozzáadódva hat a szereplőknek a jövőbeli árakkal kapcsolatos várakozásaira. Ezek az árvárakozások mondják meg a termelőknek, hogy mit érdemes termelni (amihez megfelelő első időszaki input szükséges), a fogyasztóknak pedig, hogyan alakul vagyoni helyzetük.

Az alapkérdés: milyen feltételek mellett létezik olyan első időszaki árrendszer, melynek ismeretében a résztvevők kereslete és kínálata mind a fizikai, mind a pénzügyi javak piacán egyensúlyban van. A következő ábrával a modell legfontosabb szerkezeti elemeinek kapcsolatait próbálom szemléltetni a mondottak könnyebb megértése érdekében.

## 1.4. *Rövid történeti áttekintés*

Az a gondolat, hogy a gazdasági egységeknek a bizonytalan jövőre vonatkozó hiányos ismeretei következtében a jövő a várakozásokon keresztül hat a jelenre, egyáltalán nem új, már *Marshall* figyelembe vette elemzéseiben. Tulajdonképpen alapvető fontosságú része a keynesi makroökonómiának és *Lindahl* gazdasági elméletének is. *Marshall* az ilyen típusú elemzést rövid távú egyensúlyi vizsgálatnak nevezte, a jelenlegi elnevezés (angolul temporary equilib-




*1. ábra*

rium) *Hicks*től ered, aki két könyvében is foglalkozott a marshalli gondolatok továbbfejlesztésével (l. HICKS [10], [11]).

Az elmélet első matematikai modelljei a hatvanas évek végén jelentek meg. A hetvenes évek elején már nyilvánvalóvá lett, hogy mind feltevéseiben, mind pedig eszköztárában új irányzat van születőben az egyensúlyelméleten belül. A területről 1977-ben közölték az első áttekintést (l. GRANDMONT [7]), habár még közel sem érték el a kutatók azt a logikai letisztultságot, amely az Arrow–Debreu típusú modellekre jellemző. Szerteágazó vizsgálatok folynak, különösen a disequilibrium elmélettel összeolvadó rögzített áras időleges egyensúlyi modellek körében. Egyelőre a legtöbben azt a stratégiát követik, hogy csak néhány fontos problémát választanak ki és egyszerűbb modellt készítve tanulmányozzák azokat. Ez azt eredményezte, hogy nagyszámú azonos metódussal dolgozó, bár eltérő kérdéseket vizsgáló modell jött létre.

1.5. *A szükséges eszköztárról*

Az Arrow—Debreu modell matematikai apparátusának központi fogalmai az $n$-dimenziós euklideszi tér konvex analízisével, matematikai programozással és egy-, illetve többértékű leképezésekkel kapcsolatosak. Centrális tétele az ún. Kakutani-féle fixponttétel, amely bizonyos folytonossággal, korlátossággal és konvexitással kapcsolatos meggondolásokon nyugszik. Ez a technika, és maga a Kakutani tétel is fontos szerephez jut az időleges kompetitív egyensúly modelljeiben, azonban a leírni kívánt jelenségek nagy része már nem ábrázolható vele. *Arrow* és *Hahn* az általános egyensúlyelméletről szóló összefoglaló könyvükben az eredeti apparátust alkalmazva bemutatnak egy időleges egyensúlyi modellt (l. [2]). A modell struktúrája és szemlélete jelentős hatással volt a terület fejlődésére, de megmutatta azt is, hogy az eddig bevált eszközrendszerrel meddig lehet eljutni. Csak két időszak szerepel, jelen és jövő, bizonytalanság nincs a modellben, az árvárakozások determinisztikusak, a termelés a környezettől független. Aktív viszont a részvénypiac, és a vállalatok önálló egységek lettek, saját célokkal és várakozásokkal.

A következő részben leírt modellhez hasonlóan, az időleges kompetitív egyensúly elméletének matematikai eszközei között az $R^n$ fogalmai mellett alapvető szerepe van a matematikai gondolkodás olyan újabb fejezeteinek, mint a valószínűségszámításhoz kapcsolódó mértékelmélet, topológia, funkcionálanalízis. Természetesen vetődik fel a kérdés; valóban szükséges-e az alkalmazásuk, kell-e ez az apparátus a közgazdasági probléma lényegének megfogalmazásához?

Tekintsük először ezeknek a modelleknek a két leglényegesebb új fogalmát, a várakozásokat és a terveket. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy csak az árakat illetően számolnak a résztvevők bizonytalansággal. Az *a priori* lehetséges árhalmaz tulajdonképpen az egész $R^n$ ($n$ darab különböző jószág esetén). A következő időszaki árakra vonatkozó várakozás a matematika nyelvén megfogalmazva ekkor nem más, mint egy valószínűségeloszlás az $n$-dimenziós euklideszi téren. Nyilván egymástól eltérő jelenbeli árak esetén különbözőek a várakozások is, ezt a függőséget pedig ábrázolni kell. Máris egy $R^n$-ből M ($R^n$)-be (az $R^n$-en értelmezett valószínűségeloszlások halmazába) képező függvénnyel van dolgunk, ami a résztvevők várakozásainak tapasztalattól való függését írja le. Ahhoz, hogy be tudjuk látni az egyensúly létezését (illetve tulajdonképpen bármilyen vizsgálathoz), arra van szükségünk, hogy ettől a függvénytől bizonyos tulajdonságokat követeljünk meg. Egyszerre tehát benn találjuk magunkat a modern matematika kellős közepén, hiszen folytonossággal és konvergenciával kapcsolatos fogalmakat kell értelmeznünk valószínűségeloszlások terében, az ilyen (általánosabban mérték-) terek topológiai tulajdonságainak leírását pedig bizonyos dualitási tételeken keresztül a funkcionálanalízis adja meg. Ha azt is figyelembe vesszük, hogy az árakon kívül a résztvevőknek más bizonytalan környezeti tényezőkre vonatkozó várakozásaival is számolnunk kell, akkor már nemcsak az $R^n$-en, hanem absztrakt téren is kell valószínűségeloszlást, vagyis valószínűségi mértéket értelmeznünk és viselkedésében vizsgálnunk; eljutunk tehát a mértékelmélethez. Hogyan jellemezhető matematikailag a résztvevők egy cselekvési terve? A fogyasztó esetén például arról van szó, hogy terve a lehetséges jövőbeli események bekövetkezéséhez különböző reagálásokat rendel — az áraktól, készleteitől és a környezettől függően más és más fogyasztást, illetve munkaszolgáltatást ír elő. A különböző cselekvési programok halmaza tehát függvények halmazát jelenti. Az Arrow–Debreu modell cselekvési programjai az $R^n$ pontjaival voltak azonosíthatók és így az $R^n$ megfelelő részhalmazain kellett korlátosságot, zártságot és pontjaik között konvergenciát értelmezni. Az időleges egyensúly modelljei esetén viszont függvénytérben kell kompaktsággal, sorozatok konvergenciájával kapcsolatos meggondolásokat tennünk, amivel a valós függvénytan és funkcionálanalízis foglalkozik. Mint már volt róla szó, a résztvevők cselekvési terveik hasznosságát úgy ítélik meg, hogy a céljaik szempontjából fontos következményeket azok bekövetkezési esélyeivel együtt veszik figyelembe. Ez a matematika nyelvén függvények várható értékének, vagyis mértékekkel képzett integráljának kiszámítását jelenti.

Láthatjuk tehát, hogy ez a matematikai apparátus a modern matematika jelentős fejezeteiből tartalmaz részeket. Ez hátránya és egyben előnye is a modelleknek. Hátránya, mivel amíg a Arrow–Debreu modell bizonyításainak technikáját és alapjait megérthette az elsősorban közgazdasági és nem matematikai műveltségű olvasó is aránylag kevés, jól összefogható matematikai előtanulmány után (l. HEGEDÜS–ZALAI [9], NIKAIDO [15], ARROW–HAHN [2] megfelelő fejezeteit), addig most ez korántsem áll fenn. Az időleges kompetitív egyensúly matematikai eszköztárának viszonylag rövid, az elméleti közgazdászoktól általában elvárható tudásra támaszkodó összefoglalásával még nem találkoztam. A területtel megismerkedni vágyóknak előtanulmányként könyveket kell elolvasniuk, ezért valószínű, hogy ezek a modellek csak a matematikus közgazdászok érdeklődésére tarthatnak számot. A kiterjedt apparátus előnye általánosságában rejlik, vele korábban elhanyagolt jelenségek vizsgálatára is képesek a modellek. A valósághoz való közeledésnek látszatra ellentmond az a tény, hogy például egy olyan rendszeresen művelt döntési folyamat, mint a jövőre vonatkozó cselekvési tervek közül a legkedvezőbbnek tűnő kiválasztása, a modellekben függvénytéren képzett integrálok maximumhelyének keresésével van ábrázolva. Természetesen senki sem tételezi fel, hogy az emberek fejében ily módon történik a választás. Jól mutatja az alkalmazott technika erejét, hogy viszonylag egyszerű axiómákból levezethető a döntés ilyen, matematikailag jól kezelhető reprezentációja (l. ARROW [1] – a bizonytalanság melletti választás elmélete).

## 2. Egy jellemző modell

A bemutatásra kerülő modell CHETTY és DASGUPTA [4] cikke alapján készült. Bizonyos megoldatlan, illetve nem jól megoldott problémák, valamint bizonyításbeli hiányosságok miatt, bár a modell hasonlít a [4]-beli modellre, nem egyezik meg azzal. Jelentős eltérések találhatók mind a feltevések, mind pedig a bizonyítások területén. Másként definiálom a résztvevők cselekvési halmazait és készleteit; a fogyasztók lokális kielégíthetetlenségét fogyasztási halmazuk kompaktságának feloldásával a cikkben található bonyolult megoldástól eltérő módon biztosítom; a várakozások mértékterét az irodalomban általánosan elfogadott gyenge konvergencia helyett az erős konvergenciával topologizálom. Az eltérő feltevések következtében a modell nem sokat veszít az általánosságából, viszont lényegesen egyszerűbben kezelhetővé válik.

Ez a modell a szakdolgozatomban találhatónak javított változata. Mind a dolgozat, mind pedig a cikk megírásához nagy segítséget kaptam *Medvegyev*

*Péter*től, az ő támogatása és ötletei nélkül a modell nem jöhetett volna létre. Ezúton szeretnék köszönetet mondani tanácsaiért. Az esetleges hibákért a felelősség természetesen egyedül engem terhel.

Legyen $I$ a résztvevők által figyelembe vett időszakok száma. Jelölje egyben $I$ a $\{2,3,\ldots,I\}$ halmazt is. $J$ és $A$ két véges halmaz, a termelők és a fogyasztók indexeinek halmaza. $L$ jelöli az $\{1,2,\ldots,L\}$ halmazt, a reálszféra javainak indexeit. $i\in I$ esetén $P_i\subset R^L$ a javak, $R_i\subset R^J_+$ a részvények árhalmaza. Az $(L+J+1)$-edik jószág a pénz, amely az elszámolási egységet képviseli. Az $S_i=P_i\times R_i\times\{1\}$ halmaz adja meg az $i\in I$ időszaki árrendszereket. Az első időszakban $S_1=P_1\times R_1\times\{1\}$, ahol $P_1=R^L$, $R_1=R^J_+\cdot Q'_i$, $i\in I$ teljes szeparábilis metrikus tér, a világ lehetséges állapotait jelöli az adott időszakban az árak kivételével. Legyen $Q_i=S_i\times Q'_i$, $\Omega=\prod_{i\in I}Q_i$. Az $\Omega$ halmazon a szorzattopológia által indukált Borel-féle halmazalgebra $(B(\Omega))$ elemeit tekintjük a világ jövőbeli állapotait tartalmazó eseményeknek (Borel halmazokról l. SZŐKEFALVI–NAGY [17], HALMOS [8]).

## 2.1. *Termelők*

Tetszőleges termelőt mutatok be, a $j\in J$ indexet elhagyom. Az $Y_i\colon(\Omega\times T_{i-1})\to\to R^L_+$ leképezéssel adjuk meg termelési lehetőségeit, ahol a $T_i$, $i=1,2,\ldots,(I-1)$ halmazok (a lehetséges felhasználások) részei az $R^L_+$-nek, zártak és konvexek. Ha az $(i—1)$-edik időszakban a felhasználás $x\in R^L_+$, a termelést befolyásoló véletlen tényezők realizációja $\omega\in\Omega$, akkor az $i$-edik időszakban a kibocsátás $Y_i(\omega,x)=y\in R^L_+$ lesz. Egyidőszakos késleltetés van tehát, a technológia bizonytalan, de csak a $Q'_i$ halmazok elemeitől függ, az áraktól természetesen nem. Feltesszük, hogy minden $i\in I$ esetén:

T.1 korlátos $F\subset T_{i-1}\subset R^L_+$ halmazhoz az $\{y\in Y_i(\Omega,x):x\in F\}$ halmaz szintén korlátos;

T.2 rögzített $\omega\in\Omega$ mellett az $Y_i(\omega,\cdot)\colon T_{i-1}\to R^L_+$ függvény gráfja (az $\{(x,y)\in T_{i-1}\times R^L_+\colon y=Y_i(\omega,x)\}$ halmaz) zárt és konvex;

T.3 rögzített $x\in R^L_+$ mellett az $Y_i(\cdot,x)\colon\Omega\to R^L_+$ függvény Borel mérhető.

Az egyes időszakokban a termelő lehetséges akcióit a $G_i$ halmazok adják meg. Egy $f_i\in G_i$ akció áll a felhasználást jelentő $t_i\colon\Omega\to T_i$, a kibocsátást tartalmazó $k_i\colon\Omega\to R^L_+$, a részvényekre és a pénzre vonatkozó $n_i\colon\Omega\to M$ Borel mérhető függvényekből, ahol $M=[0,1]^J\times[0,\infty]$. $[0,1]^J$ a megvásárolható, illetve eladható részvények, $[0,\infty]$ pedig a tartalékolható pénzmennyiség halmaza (az $R_+$ tér *Alekszandrov* kompaktifikációja). Természetesen minden $i\in I$, $k_i\in G_i$ esetén fenn kell állnia a $k_i(\omega)=Y_i(\omega,t_{i-1}(\omega))$ relációnak valamely $t_{i-1}\in G_{i-1}$-re és minden $\omega\in\Omega$-ra. $G_i$-ről feltesszük, hogy az egyenletes konvergencia topológiájával ellátva konvex kompakt metrikus tér. Ez a feltevés teljesül például akkor, ha $G_i$ véges számú Borel mérhető függvény konvex lineáris kombinációját tartalmazó halmaz, ami közgazdaságilag jelentheti azt, hogy a termelőnek léteznek bizonyos alapvető cselekvési sémái (számuk lehet akár millió is), azokat kombinálva képzeli el lehetséges stratégiáit.

$$G=\{f=((t_1,n_1),f_2,\ldots,f_I)\colon(t_1,n_1)\in T_1\times M,f_i\in G_i\}$$

lesz a vállalat lehetséges cselekvési terveinek halmaza. Készleteit egy $e\colon \Omega\times G\to$ $\to \prod_{i=1}^{I}(T_i\times M)$ függvény adja meg, mely az $\Omega$-n belül szintén csak a $Q_i'$ halmazok elemeitől függ, és $e=((t_1,n_1),e_2(\cdot),\ldots,e_I(\cdot)),\ e_1=(t_1,n_1)\in T_1\times M$

T.4 $\sup\limits_{\omega\in\Omega, f\in G} e_{i,L+J+1}(\omega,f)=m_i<\infty,\ 0<m_1=e_{1,L+J+1}<\infty,$

T.5 a) rögzített $\omega\in\Omega$-ra az $e(\omega,\cdot)$ függvény gráfja zárt és konvex;

b) létezik olyan $\hat e\in G$, hogy $\hat e_1=e_1$. $\hat e_i=(\hat t_i,\hat k_i,\hat n_i)$-re $\hat k_i(\omega)=Y_i(\omega,\hat t_{i-1}(\omega))$, $p_i\hat k_i(\omega)\geqq 0$ minden $i\in I$, $\omega\in\Omega$ esetén és $e(\cdot,\hat e)=\hat e(\cdot)$ teljesül az $\hat e$ megfelelően szűkített képterén.

T.4 szerint a termelők pénzkészletei korlátosak, T.5 b) azért szükséges, hogy legyen költségvetésüket is figyelembe véve autark módon megvalósítható tevékenységük. A feltétel — természetesen más formában — szerepel az Arrow—Debreu modellben is (l. HEGEDÜS—ZALAI [9] „önellátás lehetősége"). Ehhez kapcsolódik a következő, az összes termelőre vonatkozó feltétel:

T.6 $$\sum_{j\in J} e_{j1}\in \operatorname{int}\sum_{j\in J}(T_{j1}\times M)$$

amely szerint első időszaki összkészletük belső pontja jószágterük összegének.

Adott $e$ és $s_1\in S_1$ esetén

$$\begin{aligned}\beta(e,s_1)=\{f\in G: {}& s_1((t_1,n_1)-e_1)\leqq 0\\ & s_i(t_i(\omega),n_i(\omega))-s_i(k_i(\omega),n_{i-1}(\omega))-s_ie_i(\omega,f)\leqq 0\\ & k_i(\omega)\in Y_i(\omega,t_{i-1}(\omega)) \text{ minden } i\in I,\ \omega\in\Omega\text{-ra}\}\end{aligned}$$

a vállalat költségvetési leképezése, vagyis a pénzügyileg megvalósítható tervek halmaza. Látható, hogy a vállalatok termelési tevékenységüket a tulajdonukban levő részvények eladásával, pénzzel, termékeik értékesítésével finanszírozhatják.

Nem adtuk még meg a reprezentatív termelési egység döntési szabályát. Feltesszük, hogy a vállalat célja az egyes időszakok nyereségének maximalizálásához kapcsolódik. Legyen

$$C_i(f,\omega)=p_ik_i(\omega)-p_{i-1}t_{i-1}(\omega)+r_in_{i-1}(\omega)$$

és $u\colon R^{I-1}\to R$ korlátos, folytonos, változónként szigorúan monoton növekedő függvény.

T.7 A vállalat lehetséges stratégiái közül való választása reprezentálható a $v\colon G\times M(\Omega)\to R$ funkcionállal ($M(\Omega)$ az $\Omega$ halmazon értelmezett valószínűségi mértékek terét jelenti az erős konvergencia topológiájával, vagyis $\mu_k\to\mu_0$, ha $\mu_k(B)\to\mu_0(B)$ minden $B\in B(\Omega)$ esetén):

$$v(f,\lambda)=\int_\Omega u(C_2(f_1,\cdot),\ldots,C_I(f,\cdot))\,d\lambda$$

ahol $\lambda = \psi(s_1, \cdot) \times \sigma, \psi : S_1 \times B(\prod_{i \in I} S_i) \to [0, 1]$,

$$\psi(s_1, \cdot) \in M(\prod_{i \in I} S_i) \text{ minden } s_1 \in S_1\text{-re, } \sigma \in M(\prod_{i \in I} Q_i')$$

(mértékek szorzatáról l. SZŐKEFALVI–NAGY [17]).

Mit jelent a feltétel? A $\sigma$ mérték rögzített, a termelőnek múltbeli tapasztalatai alapján kialakult elképzeléseit tartalmazza a környezeti tényezőkről. Ezzel szemben az árvárakozásokat képviselő $\psi(s_1, \cdot)$ mérték függ a jelenbeli árrendszertől is. A funkcionál tulajdonképpen az $f$ cselekvési terv szubjektíve várható hasznát adja meg. Ha a termelőnek a választási helyzetekben mutatott viselkedése kielégít bizonyos axiómarendszert, akkor az alapján megkonstruálható mind a $\lambda$ valószínűségi mérték, mind az $u$ hasznossági függvény és a várható haszon hipotézis teljesül (l. ARROW [1]). Ez az axiómarendszer feltételünk mélyebb megalapozását jelentené, itt ettől eltekintünk.

T.8 A $V$ funkcionál szigorúan kvázi-konkáv az első változójában (a vállalat rendezése konvex).

T.9 Ha $s_1^k \to s_1^0$, akkor minden zárt $C \subset \prod_{i \in I} S_i$ esetén $\psi(s_1^k, C) \to \psi(s_1^0, C)$ (a várakozások folytonos függése a jelenlegi áraktól).

T.10 Létezik olyan $\mu \in M(\prod_{i \in I} S_i)$ valószínűségi mérték, hogy $\lim_{\mu(E) \to 0} \psi(s_1, E) = 0$ minden $s_1 \in S_1$ esetén.

A T.10 feltétel matematikailag azt jelenti, hogy a termelő várakozásai egyenletesen abszolút folytonos mértékcsaládot alkotnak. Ekvivalens azzal az állítással, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\psi(s_1, E) < \varepsilon$ minden $s_1 \in S_1$ esetén, ha $\mu(E) < \delta$. Közgazdaságilag úgy interpretálható, hogy a termelőben múltbeli tapasztalatai alapján kialakult egy előzetes elképzelés az árakról. A jelenben megfigyelt árrendszer ezt csak korlátozottan módosíthatja; amelyik eseményt nem túl valószínűnek ítélte, azt továbbra is annak ítéli, ugyanakkor jelentős hangsúlyeltolódások lehetségesek. Feltevésünk némileg lazítható, elegendő a mértékcsalád egyenletes szorossága is (l. BILLINGSLEY [3] — Prohorov tétel), azonban a bizonyítások bonyolultabbá válnak a gyenge konvergencia használata miatt.

Legyen

$$Z(f, s_1) = V(f, \psi(s_1, \cdot) \times \sigma),$$

$$\delta(s_1) = \{f^* \in \beta(e, s_1) : Z(f^*, s_1) \geq Z(f, s_1) \text{ minden } f \in \beta(e, s_1)\}$$

így

$$\eta(s_1) = \{(t_1^*, n_1^*) : ((t_1^*, n_1^*), f_2^*, \ldots, f_I^*) \in \delta(s_1)\}$$

lesz a termelő keresleti függvénye.

## 2.2. *Fogyasztók*

Foglalkozzunk most a reprezentatív fogyasztó leírásával. Legyen $X = \prod_{i=0}^{I} (X_i \times M)$, ahol $X_i \subset R^L$ a fogyasztható, illetve szolgáltatható jószág-mennyiségek halmaza, konvex zárt és alulról korlátos, $M$ pedig ugyanaz, mint a termelőknél. Minden $i \in I$ esetén legyen $G_i$ az $\Omega$-t $(X_i \times M)$-be képező Borel mérhető függvények konvex, kompakt részhalmaza az egyenletes konvergencia topológiájával ellátva. Így a fogyasztó akcióit a

$$G = \{f = ((x_1, l_1), f_2, \ldots, f_I) \cdot (x_1, l_1) \in X_1 \times M, f_i \in G_i\}$$

halmaz tartalmazza, a szorzattopológiával ellátva. Legyen proj $f$ az $f \in G$ függvénynek a $\prod_{i=1} X_i$ halmazra való vetítése és $l_i$ az $f_i \in G_i$ függvénynek az $M$-re való vetítése.

A fogyasztó készleteit egy $e\colon \Omega \times G \to \prod_{i=1}^{I} (X_i \times M)$ függvénnyel adjuk meg, ahol $e = ((x_1, l_1), e_2(\cdot), \ldots, e_I(\cdot))$, vagyis első időszaki készlete a jószágtér rögzített pontja, további készletei bizonytalanok és függnek tevékenységétől, valamint az árak kivételével a világ állapotától.

F.1 $\sup_{\omega \in \Omega, f \in G} e_{i,L+J+1}(\omega, f) < \infty,\ 0 < e_{1,L+J+1} < \infty$

F.2 a) rögzített $\omega \in \Omega$-ra az $e(\omega, \cdot)$ függvény gráfja zárt és konvex;
b) létezik olyan $\hat{e} \in G$, hogy $e(\omega, \hat{e}) = \hat{e}(\omega)$ minden $\omega \in \Omega$-ra.

Az eddigiek alapján meghatározható a fogyasztó által megvalósítható akciókat definiáló költségvetési leképezés:

$$\beta(e, s_1) = \{f \in G\colon s_1((x_1, l_1) - e_1) \leq 0,$$
$$s_i f_i(\omega) - r_i\, l_{i-1}(\omega) - s_i e_i(\omega, f) \leq 0 \text{ minden } i \in I,\ \omega \in \Omega\}.$$

F.3 Feltesszük, hogy lehetséges stratégiái közül való választása reprezentálható a $V\colon G \times M(\Omega) \to R$ funkcionállal:

$$V(f, \psi(s_1, \cdot) \times \sigma) = \int_{\Omega} u(\text{proj}\, f(\cdot))\, d\psi(s_1, \cdot) \times \sigma$$

ahol $u\colon \prod_{i=1}^{I} X_i \to R$ korlátos, folytonos függvény, $\psi$ és $\sigma$ hasonlóak a termelők várakozási függvényeihez (a fogyasztó is kielégíti a várható haszon hipotézist).

F.4 A $V$ funkcionál szigorúan kvázi-konkáv az első változójában.

F.5 Ha $s_1^k \to s_1^0$, akkor minden zárt $C \subset \prod_{i \in I} S_i$ esetén

$$\psi(s_1^k, C) \to \psi(s_1^0, C).$$

F.6 (kielégíthetetlenség). Tetszőleges $f = ((x_1, l_1), f_2, \ldots, f_I) \in G$ esetén létezik olyan $\hat{x}_1 \in X_1$, hogy az $\hat{f} = ((\hat{x}_1, l_1), f_2, \ldots, f_I)$ akcióra

$$u(\text{proj}\, f(\omega)) < u(\text{proj}\, \hat{f}(\omega))$$

minden $\omega \in \Omega$ esetén teljesül.

A fogyasztó választási problémája abból áll, hogy meg kell találnia azon $f^* \in \beta(e, s_1)$ akciókat, melyekre

$$Z(f^*, s_1) \geq Z(f, s_1)$$

minden $f \in \beta(e, s_1)$-re, ahol $Z(f, s_1) = V(f, \psi(s_1, \cdot) \times \sigma)$. Jelöljük az optimális akciók halmazát $\gamma(s_1)$-el, legyen

$$\xi(s_1) = \{(x_1^*, l_1^*): ((x_1^*, l_1^*), f_2^*, \ldots, f_I^*) \in \gamma(s_1)\}$$

a keresleti függvény.

A modellbeli absztrakt gazdaságot jellemezhetjük a következő $E$ halmazzal:

$$E = \{(G_a, X_a, u_a, \psi_a, e_a), (G_j, Y_{j2}, \ldots, Y_{jI}, u_j, \psi_j, e_j), a \in A, j \in J\}.$$

Egy $s_1 \in S_1$ árvektor egyensúlyi árrendszer és

$$\{f_{a1}, (t_{j1}, n_{j1}), a \in A, j \in J\}$$

egyensúlyi allokáció, ha

a) $f_{a1} \in \xi_a(s_1)$ minden $a \in A$-ra;

b) $(t_{j1}, n_{j1}) \in \eta_j(s_1)$ minden $j \in J$-re;

c) $\sum_{a \in A} f_{a1} + \sum_{j \in J} (t_{j1}, n_{j1}) \leq \sum_{a \in A} e_{a1} + \sum_{j \in J} e_{j1}$;

d) $s_1\left(\sum_{a \in A} f_{a1} + \sum_{j \in J} (t_{j1}, n_{j1})\right) = s_1\left(\sum_{a \in A} e_{a1} + \sum_{j \in J} e_{j1}\right)$.

### 2.3 *Az egyensúly létezése*

A következő tételeknél, ahol lehetséges, bizonyítások helyett csak a megfelelő hivatkozásokat közlöm. Ennek a felesleges ismétlések elkerülésén kívül elsősorban terjedelmi okai vannak.

Először az egyensúlyelméletben a gazdaság szűkítésének nevezett eljárás segítségével kompakttá fogjuk tenni a termelők és fogyasztók lehetséges akcióinak halmazát. A definíciók alapján ehhez csak az szükséges, hogy az $X_1$, illetve $T_1$ alulról korlátos, zárt halmazokat felülről is korlátosokkal helyettesítsük.

*Definíció*

Tetszőleges fogyasztó (illetve termelő) esetén releváns első időszaki fogyasztási (ráfordítási) halmaznak nevezzük azt az $X_{a1}^r(T_{j1}^r)$ halmazt, amelynek minden eleme naturális egyensúlyban levő első időszaki allokáció része lehet (vagyis a többi résztvevőknek van olyan lehetséges tevékenysége, melyekkel együtt a releváns allokáció kielégíti az egyensúly c) feltételét).

1. *Segédtétel.* A releváns fogyasztási és ráfordítási halmazok konvexek és felülről korlátosak.

*Bizonyítás*

A konvexitás az eredeti halmazok konvexitása alapján triviális. A felülről korlátosság egyszerű következménye a készletek rögzítettségének és a fogyasztási halmazok alulról korlátosságának.

*Definíció*

Nevezzük szűkített gazdaságnak azt a $\hat{E}$ halmazt, ahol

$$\hat{E} = \{(\hat{G}_a, X_a, u_a, \psi_a, e_a), (\hat{G}_j, Y_{j2}, \ldots, Y_{jI}, u_j, \psi_j, e_j), a \in A, j \in J\}$$

és a „személyi" indexeket elhagyva a fogyasztóknál

$$\hat{G} = (\hat{X}_1 \times M) \times G_2 \times \ldots \times G_I,$$

illetve a termelőknél

$$\hat{G} = (\hat{T}_1 \times M) \times G_2 \times \ldots \times G_I,$$

ahol $\hat{X}_1 = X_1 \cap H, \hat{T}_1 = T_1 \cap H, H \subset R^L$ konvex, kompakt és $X_1^r \subset \operatorname{int} H$, $T_1^r \subset \operatorname{int} H$.

1. *tétel.* A szűkített és eredeti gazdaság egyensúlypontjai egybeesnek.

A *bizonyítás* megegyezik a Hegedüs—Zalai [9] 122. oldal 12. tételének bizonyításával.

A továbbiakban az $\hat{E}$ szűkített gazdasággal foglalkozom, de az eredeti jelöléseket alkalmazom.

2. *tétel.* A költségvetési leképezések kompakt, konvex értékűek és $s_1$-ben folytonosak.

*Bizonyítás*

(Ponthalmaz leképezések felülről és alulról félig folytonosságára vonatkozóan l. Nikaido [15], Hegedüs—Zalai [9].) Először a fogyasztóval foglalkozunk. A $\beta(e, s_1)$ halmazok zártak, így a $\beta$ leképezés kompakt értékű. Felülről félig folytonossága ekkor egyszerű következménye annak, hogy a gráfja zárt. Az alulról félig folytonossághoz azt kell belátni, hogy tetszőleges $s_1^0 \in S_1$ pont és $s_1^k \to s_1^0$ sorozat esetén minden $f^0 \in \beta(e, s_1^0)$ akcióhoz létezik olyan $f^k \to f^0$ sorozat, melyre $f^k \in \beta(e, s_1^k)$ minden $k$ esetén. Ha $s_1^0(f_1^0 - e_1) < 0$, akkor elég nagy $k$-tól $f^k = f^0$ megfelelő választás lesz. A másik esetben, ha $s_1^0(f_1^0 - e_1) = 0$, némileg komplikáltabb a keresett sorozat konstrukciója. Tekintsük azt a $h = (h_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_I) \in G$ akciót, melyre $h_1 = (e_{11}, \ldots, e_{1L}, 0, \ldots, 0, m_1/2)$. $0 < \lambda < 1$ esetén legyen $f_\lambda^0 = \lambda f^0 + (1-\lambda)h$. Ekkor F.1 és F.2 következtében $s_1(f_{1,\lambda}^0 - e_1) < 0$ minden $s_1 \in S_1$-re,

$$s_i f_{i,\lambda}^0(\omega) - r_i l_{i-1,\lambda}^0(\omega) - s_i e_i(\omega, f_\lambda^0) \leq 0 \text{ minden } i \in I, \omega \in \Omega\text{-ra.}$$

Legyen $\lambda^k = \min\left\{1, \dfrac{s_1^k e_1 - s_1^k h_1}{s_1^k f_1^0 - s_1^k h_1}\right\}$. Nyilván van olyan $K$ szám, hogy minden $k > K$ esetén $s_1^k f_1^0 > s_1^k h_1$, ekkor $f_{\lambda^k}^0 \in \beta(e, s_1^k)$ és $\lambda^k \to 1$. A $k = 1, 2, \ldots, K$ indexekhez egy-egy $f^k \in \beta(e, s_1^k)$ akciót választunk.

A termelő költségvetési leképezésének hasonló tulajdonságai a T.2, T.4, T.5 feltételek felhasználásával ugyanezen a módon bizonyíthatóak.

2. *segédtétel.* Ha $f^k, f^0 \in G$, $f^k$ pontonként konvergál $f^0$-hoz, $s_1^k \to s_1^0 \in S_1$, akkor $\psi(s_1^k, \cdot) \to \psi(s_1^0, \cdot)$ (erős konvergencia) és $V(f^k, \psi(s_1^k, \cdot) \times \sigma) \to$ $\to V(f^0, \psi(s_1^0, \cdot) \times \sigma)$ (l. Delbaen [5]).

3. *tétel.* A $Z$ függvények folytonosak.

A tétel az előző segédtétel egyszerű következménye.

4. *tétel.* A $\xi\colon S_1 \twoheadrightarrow X_1 \times M$ és $\eta\colon S_1 \twoheadrightarrow T_1 \times M$ keresleti függvények nem üres, konvex és kompakt értékű, felülről félig folytonos leképezések.

A tétel állítása a második és harmadik tétel alapján az egyensúlyelméletben alkalmazott szokásos érveléssel könnyen belátható (l. ARROW—HAHN [2], HEGEDÜS—ZALAI [9], NIKAIDO [15]).

3. *segédtétel* (lokális kielégíthetetlenség). Tetszőleges $\varepsilon > 0$, releváns $f \in \beta(e, s_1)$, $s_1 \in S_1$ esetén létezik olyan $f' \in G$, hogy

$$s_1(f_1' - e_1) \leq \varepsilon + s_1(f_1 - e_1)$$

$$s_i f_i'(\omega) - r_i l_{i-1}'(\omega) - s_i e_i(\omega, f') \leq 0$$

és

$$V(f, \psi(s_1, \cdot) \times \sigma) < V(f', \psi(s_1, \cdot) \times \sigma)$$

*Bizonyítás*

Legyen $\hat{f}$ az F.6 feltételben szereplő akció és $f^\lambda = \lambda\hat{f} + (1-\lambda)f$, $0 < \lambda < 1$. Elég kis $\lambda$-ra nyilván fenn fog állni a tétel első része és az $f^\lambda \in G$ reláció, így $f' - t$ $f^\lambda$-nak választva a $V$ szigorú kvázi-konkavitásából következik az állítás.

5. *tétel.* Tetszőleges $s_1 \in S_1$ esetén, ha $z \in \xi(s_1) - e_1$, releváns és $z' \in \eta(s_i) - e_1$, akkor $s_i z = s_i z' = 0$.

A fogyasztók esetében az előző segédtételt, a vállalatoknál pedig első időszaki pénztartalékolással a hasznossági függvény monotonitását felhasználva az állítás egyszerűen belátható.

6. *tétel.* Ha egy $E$ gazdaság kielégíti a 2—5. tételeket, ezenkívül megvan az a tulajdonsága, hogy legalább egy résztvevő esetén minden korlátos $z^k \in \eta_j(s_1^k)$ sorozathoz az $\{s_1^k\}_{k=1}^{\infty} \subset S_1$ ársorozat korlátos, akkor létezik egyensúlyi állapota (l. SONDERMANN [16]).

Sondermann bizonyítása a Kakutani tételéből következő Alaptételen l. HEGEDŰS—ZALAI [9]), valamint szokásos konvexitással, korlátossággal és felülről félig folytonossággal kapcsolatos meggondolásokon nyugszik. Modellünkben az egyensúly léte bizonyított, ha be tudjuk látni a tételben használt tulajdonság fennállását. Ezt tartalmazza a negyedik segédtétel, melynek bizonyítása dolgozatom fő eredménye.

4. *segédtétel.* Ha $\{s_1^k\}_{k=1}^{\infty} \subset S_1$, $\lim\limits_k \|s_1^k\| = \infty$, akkor létezik olyan $j \in J$, hogy a $(t_1^k, m_1^k) \in \eta_j(s_1^k)$ sorozat utolsó komponense (vagyis a pénzkereslet) végtelenhez tart, $\lim\limits_k m_1^k = \infty$.

*Bizonyítás*

Legyen $\pi^k = s_1^k / \|s_1^k\|$, a $\pi^k$ végtelen sorozatból korlátossága miatt kiválasztható egy $\pi^0$-hoz tartó konvergens részsorozat. $\pi^0 \neq 0$, mivel $\|\pi^0\| = 1$. A T.6 feltétel miatt

$$\sum_{j \in J} \pi^0 e_{j1} > \inf \sum_{j \in J} \pi^0(T_{j1} \times M) = \sum_{j \in J} \inf \pi^0(T_{j1} \times M)$$

Így legalább egy $j \in J$ termelőre $\pi^0 e_{j1} > \inf \pi^0(T_{j1} \times M)$ tehát létezik olyan $(t_1', n_1') \in T_{j1} \times M)$, hogy $\pi^0 e_{j1} > \pi^0(t_1', n_1')$. A továbbiakban csak ezzel a termelővel foglalkozunk, ezért elhagyhatjuk a „j" indexet.

Tegyük fel, hogy az állítás nem teljesül. Ekkor kiválasztunk egy konvergens részsorozatot, amelyben az indirekt feltevés alapján $(t_1^k, n_1^k) \to (t_1^0, n_1^0)$, ahol $m_1^0 < \infty$.

Jelöljük az ehhez a sorozathoz tartozó teljes cselekvési terveket $f^k$-val és $f^0$-al. Tekintsük a következő leképezést:

$$\varphi(e, \pi) \colon G \times \bar{\Pi}_1 \twoheadrightarrow G$$

(a felülvonás a halmaz lezárását jelenti), ahol

$$\Pi_1 = \{s_1/\|s_1\| : s_1 \in S_1\}$$

és

$$\varphi(e, \pi) = \beta(e, s_1), \text{ha } \pi = s_1/\|s_1\| ;$$

egyébként

$$\varphi(e, \pi^*) = \{f \in G \colon \pi^*((t_1, n_1) - e_1) \leq 0,\ k_i(\omega) \in Y_i(\omega, t_{i-1}(\omega)),$$
$$\text{minden } i \in I,\ \omega \in \Omega,\ s_i(t_i(\omega), n_i(\omega)) - s_i(k_i(\omega), n_{i-1}(\omega)) - s_i e_i(\omega, f) \leq 0\}$$

A $\varphi$ leképezés felülről félig folytonosságának bizonyítása megegyezik a második tétel bizonyításával. Hasonlóan látható be a $\pi^0$ pontban az alulról félig folytonosság is, csak a korábbi $h$ akció helyett most a $h' = (h_1', \hat{e}_2, \ldots \hat{e}_I)$ akciót kell alkalmaznunk, ahol $h_1' = (t_1', n_1')$. Erre azért van szükség, mert $\pi^0$ utolsó komponense 0, így nem biztos, hogy az eredeti $h$ akciót használva a $\pi^0(h_1 - e_1) < 0$ összefüggés teljesül.

Így $f^0 \in \varphi(e, \pi^0)$. Vegyünk egy tetszőleges $\bar{f} \in \varphi(e, \pi^0)$ akciót. Az alulról félig folytonosság, alapján létezik egy $\bar{f}^k \in \varphi(e, \pi^k)$, $\bar{f}^k \to \bar{f}$ sorozat. Mivel $f^k \in \delta(s_1^k)$, ezért

$$\int_\Omega u(C(f^k, \cdot))\, \mathrm{d}\psi(s_1^k, \cdot) \times \sigma \geq \int_\Omega u(C(\bar{f}^k, \cdot))\, \mathrm{d}\psi(s_1^k, \cdot) \times \sigma .$$

A $\psi(s_1^k, \cdot) \times \sigma$ mértéksorozatból a T.10 feltétel alapján kiválasztható konvergens részsorozat (l. DUNFORD—SCHWARTZ [6] IV. 9.2 tétel), a harmadik tételt felhasználva így

$$\int_\Omega u(C(f^0, \cdot))\, \mathrm{d}\psi^0 \times \sigma \geq \int_\Omega u(C(\bar{f}, \cdot))\, \mathrm{d}\psi^0 \times \sigma \text{ minden } \bar{f} \in \varphi(e, \pi^0)\text{-ra.}$$

Jelöljük $n_{1,\varepsilon}^0$-al az $n_1^0 + (0, 0, \ldots, 0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ összeget, vagyis az $f^0$ alapján tartalékolni kívánt pénzmennyiség pozitív értékkel való emelését. Tudjuk, hogy $m_1^0 < \infty$, $\pi^0$ utolsó komponense pedig 0, ezért az $\bar{f} = ((t_1^0, n_{1,\varepsilon}^0), f_2^0, \ldots, f_I^0)$ választás esetén $\bar{f} \in \varphi(e, \pi^0)$ teljesül. A $C_2$ nyereségfüggvény konstrukciójából és a pénz elszámolási árának rögzítettségéből következően $C_2(\bar{f}, \omega) > C_2(f^0, \omega)$ minden $\omega \in \Omega$ esetén. Mivel $u$ szigorúan monoton, ezért $u(C(\bar{f}, \omega)) > u(C(f^0, \omega))$ minden $\omega \in \Omega$-ra. A $(\psi^0 \times \sigma)$ valószínűségi mérték, így

$$\int_\Omega u(C(\bar{f}, \omega))\, \mathrm{d}\psi^0 \times \sigma > \int_\Omega u(C(f^0, \omega))\, \mathrm{d}\psi^0 \times \sigma$$

ami ellentmondás.

*(Beérkezett: 1980. június 16-án)*

## IRODALOM


1. ARROW, K. J.: Essays in the theory of risk — bearing. Amsterdam, 1974. North Holland, Publishing Co.
2. ARROW, K. J.—HAHN, F. H.: General competitive analysis. Edinburgh, Holden—Day, 1971.
3. BILLINGSLEY, P.: Convergence of probability measures. New York, 1968. Wiley.
4. CHETTY, V. K.—DASGUPTA, D.: Temporary competitive equilibrium in a monetary economy with uncertain technology and many planning periods. Journal of Mathematical Economics, 1978. 23—42. o.
5. DELBAEN, F.: Continuity of expected utility. — Allocation under uncertainty, equilibrium and optimality. 14. fejezet. London, 1974. Macmillan.
6. DUNFORD, N.—SCHWARTZ, J. T.: Linear operators I. New York, 1958. Wiley.
7. GRANDMONT, J. M.: Temporary general equilibrium theory. Econometrica, 1977. ápr.
8. HALMOS, P. R.: Measure theory. Princeton, 1964. Van Nostrand.
9. HEGEDŰS, M.—ZALAI, E.: Fixpont és egyensúly a gazdasági modellekben. Budapest 1978. KJK.
10. HICKS, J. R.: Érték és tőke. Budapest, 1978. KJK.
11. HICKS, J. R.: Capital and growth. Oxford, 1965. Oxford University Press.
12. HILDENBRAND, W.: Core and equilibria of a large economy. New York, 1974. Academic Press.
13. KORNAI, J.: Anti-equilibrium. Budapest, 1971. KJK.
14. MÁTYÁS, A.: A modern polgári közgazdaságtan története. Budapest, 1973. KJK.
15. NIKAIDO, H.: Convex structures and economic theory. New York, 1968. Academic Press.
16. SONDERMANN, D.: Temporary competitive equilibrium under uncertainty. — Allocation under uncertainty. . . London, 1974. Macmillan.
17. SZŐKEFALVI-NAGY, B.: Valós függvények és függvénysorok. Budapest, 1977. Tankönyvkiadó.



## TEMPORARY COMPETITIVE EQUILIBRIUM

The notion of temporary equilibrium is a relatively new area of the theory of general equilibrium. The mathematical models belonging here actually try to chart by their specific means the real role of expectations and plans about an uncertain future. Beyond the mathematical apparatus of the *Arrow—Debreu* model some tools of the theory of probability and of functional analysis are also applied and consequently these models are clearly distinct from the classical ones also with respect to form.

The paper presents a particular model based on the work of *Sondermann* as well as of *Chetty* and *Dasgupta*. This model is simpler than those are but in certain aspects (handling of stocks, relaxing the compactness requirement for the initial activity set) it is more general. Some defective proofs contained by the Chetty—Dasgupta paper are also corrected.



## ВРЕМЕННОЕ КОМПЕТИТИВНОЕ РАВНОВЕСИЕ

Относительно новой областью теории общего равновесия является временное равновесие. Относящиеся сюда математические модели, по существу, стараются изображать посредством привлечения своих специфических средств подлинную роль надежд и планов на предполагаемое будущее. По сравнению с математическим аппаратом модели Арроу—Дебре в данном случае привлекаются некоторые аспекты теории вероятности, а также и функционального анализа и в результате этого эти модели и по форме хорошо отличаются от классических.

В статье дается описание одной характерной модели, которые составлена на основании работ Сондерманна, а также Четти и Дасгупта. Эта модель более простая, однако в некоторых аспектах (обработка запасов, снятие компактности мозможностей действия по первому этапу) она является более общей. Исправлены некоторые ошибочные доказательства, имеющиеся в модели Четти—Дасгупта.