CSÉBFALVI GYÖRGY–VÖRÖS JÓZSEF

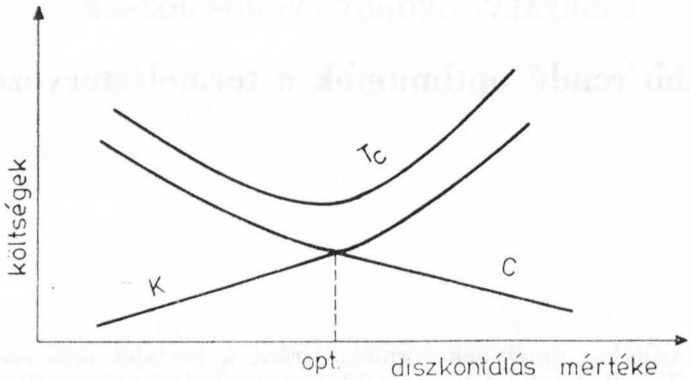
Magasabb rendű optimumok a termeléstervezésben

Az olyan vállalat, amelynek termékei iránt a kereslet erős szezonalitást mutat, nem kerülheti el teljes mértékben a termelési szint változtatásából eredő költségeket. E költségeket csökkentheti például úgy, hogy a termelést viszonylag stabil szinten tartja, a kereslet fluktuálását pedig raktározási tevékenységgel közömbösíti. Enyhe kereslet idején a raktárszint magas, keresleti csúcs idején alacsony, sőt negatív raktárszint pozíció is előfordulhat. A termeléstervezési modellek általában a következő három szélsőséges alternatíva kombinálását oldják meg:

— a munkaerő- és raktárszint állandó, a termelési szintet a munkaerő kihasználása mozgatja (pl. túlóra),
— a raktárszint állandó, a termelési szintet a munkaerő nagyságának változtatása mozgatja,
— a termelési és munkaerőszint stabil, a kereslet fluktuálását a raktározás közömbösíti.

A vázolt elgondolást először HOLT, MODIGLIANI, MUTH és SIMON öntötte formába, mely HMMS modell néven vált ismertté ([2], [8], [9], [10], [11]). A HMMS modellt többen továbbfejlesztették ([6], [7], [12], [13], [17], [18], [21], [25], stb.). Ezek a modellek megmaradnak a fenti hármas döntési alternatívánál; a keresleti előrejelzés a modellek input adata. E tanulmányban olyan modellvariánsokat mutatunk be, melyek szimultán módon határozzák meg a termelési-, munkaerő- és keresleti szinteket. Evvel tulajdonképpen a tervezésben a termelési szektor mellett a marketing szektor is helyet kap. A próbálkozás nem új keletű; M. TUITE pl. árdiszkontálással módosítja a kereslet eloszlását [22], s így a keresleti görbe egyenletesebbé válása miatt a termelési költségek csökkennek. Az árcsökkenésnek azt a nagyságát keressük, melynél a termelési költségek és a diszkontálásból eredő költségek összege minimális (lásd 1. ábra).

R. LEITH [16]-ban a kereslet eloszlását a reklámozás kumulatív hatásával befolyásolja s a problémát egy kvadratikus programozási feladatra vezeti vissza. Míg az előző két modellben a két költségnem egyensúlya adja az optimumot, a BERGSTROM–SMITH modell a bevételek és termelési költségek egyensúlyát keresi [1]. A bevétel és a kereslet közötti összefüggést másodfokú függvény írja le, s mivel a feltételrendszer eliminálható, a probléma végül is egy többismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldására vezethető vissza. Külön jelentőséget tulajdonítunk W. DAMON és R. SCHRAMM [5] alatti modelljének, mely a vállalat termelési és marketing szektora mellett döntést hoz a pénzügyi szférára is. Utolsó — negyedik — modellünk ezen [5] alatti modell



1. ábra

K = diszkontálásból eredő költség, C = termelési költségek,
T_c = teljes költség (diszkontálási költség + termelési költség)

általánosítása. Az első modellünk önköltségarányos árral dolgozik, melyhez a kereslet fordítottan aránylik. A költségminimalizálás az önköltség csökkenésén át az árat csökkenti, a csökkenő ár növeli a keresletet. A többletkeresletet a termelésnövekedés fedezi, mely növeli a célfüggvény értékét, de a költségminimalizálás egyrészt a leggazdaságosabb megoldást keresi, másrészt a rendszer teljesítőképességét csökkenti. Az alacsony keresléthez viszont magas ár és önköltség tartozik, s ezzel a kör bezárult. Modellünk ezen összefüggés felhasználásával lép be a HMMS típusú modellek sorába, s annak ellenére, hogy költségminimalizáló modell, a kereslet globális nagyságát mégis meghatározza. Második modellünk egy valószínűségfeltételes, keresletet átrendező árdiszkontáló modell, a harmadik pedig az első és második modelltípus szintézise. Valamennyi modellünk sem feltételrendszerében, sem célfüggvényében nem lineáris. A modellek jobb megismerése és mondanivalónk jobb megvilágítása céljából mindegyiket számszerűsítettük, s a programozási feladatokat a *Fiacco–McCormick*-féle SUMT módszerrel oldottuk meg.

1. modell

Tekintsünk egy előttünk álló T ($t = 1, \ldots, T$) periódusból álló tervidőszakot, melyben vállalatunk terméke iránti kereslet erős szezonalitást mutat. Tételezzük fel, hogy

(F1): a kereslet és az ár közötti összefüggést az

$$S_t = a_t^{(1)} + a_t^{(2)}/R$$

függvény írja le, ahol:

S_t a t-edik periódusban a termék iránti kereslet nagysága,
R a termék ára, mely minden periódusban állandó,
$a_t^{(1)}$ és $a_t^{(2)}$ paraméterek;

(F2): vállalatunk költségstruktúráját a HMMS modell célfüggvénye adja:

$$Y_t = C_1 W_t + C_2(W_t - W_{t-1})^2 + C_3(X_t - C_4 W_t)^2 + C_5 X_t -$$
$$- C_6 W_t + C_7(I_t - C_8 - C_9 S_t)^2,$$

ahol: Y_t a termeléssel kapcsolatos költségek nagysága a t-edik periódusban,
X_t a termelési szint nagysága a t-edik periódusban,
I_t a raktárszint a t-edik periódus végén,
W_t a termelésben alkalmazott munkaerő nagysága a t-edik periódusban.

(F3): A termék ára önköltségarányos az alábbi módon:

$$R = \frac{\Sigma_1^T Y_t + F}{\Sigma_1^T X_t} \cdot \alpha,$$

ahol: α és F paraméterek.

Az (F1) feltételben szereplő függvény azt az egyszerű összefüggést írja le, hogy a magasabb árhoz alacsonyabb, az alacsonyabb árhoz magasabb kereslet tartozik. Természetesen az S_t-hez is mindig egyértelműen hozzárendelhető egy R. A kereslet-ár között értelmezett ezen fordított arányosság fontos alkotó eleme lesz modellünknek.

Az (F2) feltevésben $C_1 W_t$ a termeléshez felhasznált munkaerővel kapcsolatos lineáris költséget fejezi ki. A második kifejezésben az alkalmazott munkaerő mennyiségében beállt változás négyzetesen növeli a költségeket; ugyanígy hat a ledolgozott túlóra mennyisége is, a C_5 és C_6 paraméterekkel kifejezett költségrész a munkaerő kihasználatlanságából eredő négyzetes hatást tompítja. $(C_8 + C_9 S_t)$ az S_t keresletthez tartozó ideális raktárszintet fejezi ki, s a raktárszintünk eltérése az ideális szinttől szintén négyzetesen növeli a költségeket. Ezen utolsó költségnem mozgatja viszont a termelési és munkaerőszinteket. A raktárszint csak akkor maradhat ugyanis az ideális szint közelében, ha a termelés pótolja a fogyasztóknak kiadott termék mennyiségét. Így a termelési szinteknek is a keresleti szintek közelében kell lenniök, s a $C_3 (X_t - C_4 W_t)^2$ költséghatás miatt a munkaerő szintnek X_t/C_4 közelében kell lennie. A kereslet megmozgatja tehát az összes költségokozó változót. Az (F3)-ban felírt összefüggésnél F-ben fix költség, míg α-ban nyereség számolható el. Az (F1) mellett az (F3)-ban definiált önköltségarányos ár adja modellünk másik fontos alkotóelemét, hiszen ez az ár keresletet határoz meg, melyhez (F2) alapján $\Sigma_1^T Y_t$ költség rendelhető. A $\Sigma_1^T Y_t$ költségösszeg és a hozzátartozó $\Sigma_1^T X_t$ termelési szint kialakítja az árat s a ciklus ismétlődik.

A bevezetőben említett összefüggés tehát valóban biztosítja az alábbi (1) modell konzisztenciáját:

$$Z_1 = \Sigma_1^T Y_t \to \text{MIN} \tag{1a}$$

$$R = \frac{\Sigma_1^T Y_t + F}{\Sigma_1^T X_t} \cdot \alpha \tag{1b}$$

$$S_t = a_t^{(1)} + a_2^{(1)}/R; \qquad t = 1 \ldots T \tag{1c}$$

$$I_{t-1} + X_t = S_t + I_t; \qquad t = 1 \ldots T \tag{1d}$$

$$Y_t = C_1 W_t + C_2(W_t - W_{t-1})^2 + C_3(X_t - C_4 W_t)^2 + C_5 X_t - C_6 W_t +$$
$$+ C_7(I_t - C_8 - C_9 S_t)^2; \qquad t = 1 \ldots T \qquad (1e)$$
$$S_t, X_t, W_t, I_t \geq 0; \qquad t = 1 \ldots T; \; R \geq 0 \quad (1f)$$

Az (1) alatti modell (1d) feltétele a raktározási egyenlet, mely szerint a t-edik periódusban a fogyasztóknak eladott mennyiség és a periódus végi raktárszint azonos a periódusban megtermelt termék mennyiségének és a periódus kezdetén raktáron levő termékek mennyiségének összegével. Az (1d) feltételt helyettesíti az $I_t = I_0 + \Sigma_1^t X_k - \Sigma_1^t S_k$ feltétel s ezzel az I_t változók elminálhatók (következmény: negatív raktárszint pozíció lehetősége). Természetesen az (1e) típusú feltételek is csak a könnyebb áttekinthetőség miatt szerepelnek. Az (1d) és (1e) típusú feltételek eliminálása után, s az (1f) típusú feltételeket nem tekintve, az (1) modellnek $T + 1$ egyenlőségi feltétele és $3T + 1$ változója van.

Legyen:

$T = 6$, $C_1 = 10$, $C_2 = 1{,}0$, $C_3 = 0{,}01$, $C_4 = 50$, $C_5 = 0{,}001$, $C_6 = 0{,}1$,

$C_7 = 0{,}02$, $C_8 = 20$, $C_9 = 0{,}1$, $\alpha = 1{,}2$, $F = 50$, $I_0 = 20$, $W_0 = 20$,

valamint:

t	1	2	3	4	5	6
$a_t^{(1)}$	200	100	200	300	400	300
$a_t^{(2)}$	120	100	140	200	300	250

A tervhorizontot tehát hat periódusra osztottuk, s $a_t^{(1)}$, illetve $a_t^{(2)}$ paraméterek megadott értékeiből az derül ki, hogy adott ár mellett az első három periódusban a kereslet alacsony az utolsó három periódusban megnyilvánuló kereslethez képest. A vállalat 20 fővel kezd s raktárán mindössze 20 db termék van. A tervidőszak alatt fellépő fix költség 50 egység, az önköltséghez pedig 20%-os hasznot számolunk fel ($\alpha = 1{,}2$). A C_4 paraméter szerint egy fő 50 darab terméket állít elő, egy periódusban a munkabér jellegű fajlagos költség pedig 10 egység. A konstansok felhasználásával (1) modellünk programozási feladattá válik, mely az alábbi formára hozható:

$$f(\mathbf{X}) \to \min$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0},$$

ahol az f és $\mathbf{g}$ függvények nem lineárisak.

Mivel az f és $\mathbf{g}$ függvények jelen típusai mellett a SUMT módszer nem biztos, hogy globális szélsőértéket ad, célszerű a változókra adott indulóértékeket változtatni, s így az algoritmust többször indítani. A megoldások értékelését elősegíti most az, hogy programozási feladataink a feltételek szerkezetét tekintve különbözőek lesznek, de a hozzájuk tartozó modellek gazdaságilag egymásra épülnek. Elemezve az egyes futási eredményeket, azt mondhatjuk, hogy a megadott inputok mellett az alábbi megoldás nagy valószínűséggel globális szélsőértékét adja az (1) modellnek:

$t =$	1	2	3	4	5	6	$\sum_{t=1}^{T}$
S_t^0	610,6	442,2	679	984,4	1426,5	1155,5	5298,2
W_t^0	13	9,3	13,5	20,5	27,4	24,3	
X_t^0	652,5	460,4	679,2	1036,4	1401,5	1218,8	5448,6
túlóra	2,5	−5,6	4,7	10,4	30	3,3	
I_t^0	61,9	80,2	80	132,2	107,2	170,5	

$R^0 = 0{,}292$ és $Z_1^0 = 1377{,}9$

A táblázatban szereplő S_t^0, W_t^0, X_t^0, R^0 és Z_t^0 értékeket az optimális megoldás explicite megadja, a túlórában termelt termékek mennyiségét az $(X_t^0 - C_4W_t^0)$ kifejezésből számíthatjuk ki. Ez az érték a második periódusban negatív, ami arra enged következtetni, hogy ebben a periódusban a termelési kapacitás nincs kihasználva, s ez még mindig gazdaságosabb megoldás mint a munkaerő szintjének változtatása. Az I_t^0 raktárszinteket az

$$I_0 + \Sigma_1^t X_k^0 - \Sigma_1^t S_k^0$$

kifejezés felhasználásával határozhatjuk meg. Az adatokból kiderül, hogy a kezdő raktárszint jelentősen elmarad az ideális szinttől, s a periódus végére a modell fokozatosan ledolgozza e hátrányt. A rendszer összteljesítménye 5448 db termék, s az optimális ár 0,292.

2. modell

Tekintve, hogy az ár minden periódusban állandó, az (1)-es modell (1b) és (1c) feltételei merevséget kölcsönöznek rendszerünknek; az ár nem befolyásolja rugalmasan a periódusonkénti keresletet. A problémát úgy oldjuk meg, hogy a keresleti mélyvölgyben árdiszkontálást engedünk meg, melynek következtében a kereslet nő, s így a kereslet átrendezésével a keresleti csúcsokat mérsékeljük. A keresleti görbe egyenletesebbé válásával csökkennek a termeléssel kapcsolatos költségek, viszont a diszkontálásból eredő veszteség nő. Modellünk annyiban tér el a *Tuite*-féle modell koncepciójától, hogy a keresleti mélyvölgy minden periódusában más-más árcsökkentési rátát engedünk meg. A probléma így viszont nem vezethető vissza egy egyváltozós szélsőérték-számítási feladatra. Az (F2) feltételezés mellé bevezetjük még az alábbiakat (az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az első k periódusban a kereslet alacsony):

(F4): az i-edik ($i = 1, \ldots k$) periódusban megvalósított $100p_i$ %-os árleszállítás $(b_ip_i + e_ip_i^2)$ nagysággal (b_i és e_i paraméterek) növeli a periódus keresletét, s az árleszállítás nem változtatja meg a tervidőszak összkeresletét.

Az, hogy p_i-hez parabolikus függvényt kapcsoltunk az irodalmi hagyománynak felel meg [22], de modellünk szerkezete és megoldási algoritmusunk elbír akármilyen $p_i \geq 0$-ra folytonos, differenciálható függvényt. Feltételünk második fele viszont egy, a realitással nem szembenálló, kényszerűség: költségminimalizáló modellben egyetlen periódusban sem nőhet a kereslet, s így a termelés, egy adott szinthez képest csak akkor, ha ezt a mennyiséget valamely más periódusban nem kell megtermelni. Erre vonatkozik a következő feltétel:

(F5): az árleszállítással a $(k+j)$-edik $(j=1,\ldots,T-k)$ periódus kereslete

$$\beta_j \sum_{i=1}^{k} (b_i p_i + e_i p_i^2)$$

nagysággal csökken, ahol: β_j normális eloszlású valószínűségi változó $\bar{\beta}_j$ várható értékkel és σ_j szórással. ($\Sigma \bar{\beta}_j = 1$ és a β_j-k egymástól függetlenek.)

(F6): a $k+j$-edik periódus kereslete nem csökkenhet tetszőlegesen: annak a valószínűsége, hogy az átrendezés a $k+j$-edik periódus keresletéből nem von el többet mind d_j, legalább π_j legyen.

Ha β_j determinisztikus lenne d_j a $\beta_j \cdot \Sigma_1^k(b_i p_i + e_i p_i^2)$-re jelentene felső korlátot. Az (F6) ennek a sztohasztikus megfelelője, s feladata annak biztosítása, hogy a keresletelvonás a $k+j$-edik periódusban ne haladjon meg egy előre meghatározott szintet. Az (F2), (F4), (F5) és (F6) feltételek alapján az (1) modell optimális megoldásából nyert R^0 és S_t^0 adatsor felhasználásával megkonstruálhatjuk a (2) modellt:

$$Z_2 = \{\Sigma_1^T Y_t + R^0 \cdot \Sigma_1^k p_i \cdot (b_i p_i + e_i p_i^2)\} \to \mathrm{MIN} \tag{2a}$$

$$I_{t-1} + X_t = S_t + I_t; \qquad t = 1 \ldots T \tag{2b}$$

$$S_i = S_i^0 + b_i p_i + e_i p_i^2; \qquad i = 1 \ldots k \tag{2c}$$

$$S_{k+j} = S_{k+j}^0 - \bar{\beta}_j \Sigma_1^k (b_i p_i + e_i p_i^2); \qquad j = 1 \ldots T-k \tag{2d}$$

$$P(\beta_j \Sigma_1^k (b_i p_i + e_i p_i^2) \leq d_j) \geq \pi_j; \qquad j = 1 \ldots T-k \tag{2e}$$

$$Y_t = C_1 W_t + C_2(W_t - W_{t-1})^2 + C_3(X_t - C_4 W_t)^2 + C_5 X_t - C_6 W_t + \\ + C_7(I_t - C_8 - C_9 S_t)^2; \qquad t = 1 \ldots T; \tag{2f}$$

$$S_t, X_t, W_t, I_t \geq 0, \ t = 1 \ldots T, \ p_i \geq 0, \qquad i = 1 \ldots k. \tag{2g}$$

Az (F4)–(F5) feltevések alapján a (2c) és (2d) feltételek a periódusok keresletét definiálják, a (2b) és (2f) feltételek ismét eliminálhatók. A (2e) feltétel megfelel az (F6) feltevésnek, s így egy sztochasztikus programozási feladatot kell megoldanunk. A feltételben szereplő $\beta_j \Sigma_1^k (b_i p_i + e_i p_i^2)$ valószínűségi változó normális eloszlású, várható értéke $\bar{\beta}_j \cdot \Sigma_1^k (b_i p_i + e_i p_i^2)$, szórás pedig $\sigma_j \Sigma_1^k (b_i p_i + e_i p_i^2)$.

Keressük meg most azt a λ-t, melyre:

$$P(\beta_j(\Sigma_1^k b_i p_i + \Sigma_1^k e_i p_i^2) \leq \bar{\beta}_j(\Sigma_1^k b_i p_i + \Sigma_1^k e_i p_i^2) + \\ + \lambda \cdot \sigma_j(\Sigma_1^k b_i p_i + \Sigma_1^k e_i p_i^2)) = \pi_j,$$

s jelöljük ezt az értéket $\lambda(\pi_j)$-vel.

A (2e) sztochasztikus feltétel ekkor az alábbi determinisztikus feltétellel pótolható:

$$\beta_j(\Sigma_1^k b_i p_i + \Sigma_1^k e_i p_i^2) + \lambda(\pi_j)\cdot\sigma_j\cdot\Sigma_1^k(b_i p_i + e_i p_i^2) \leqq d_j\,;$$

$$j = 1\ldots T-k.$$

Az (1) modellben használt paraméterek mellett legyen:

i, j	b_i	e_i	$\overline{\beta}_j$	σ_j	π_j	$\lambda(\pi_j)$	d_j
1	3 000	5 000	0,3	0,1	0,95	1,65	112
2	5 000	10 000	0,4	0,1	0,9	1,28	200
3	3 000	5 000	0,3	0,1	0,9	1,28	300

Az első három periódusban beállt keresletnövekedésnek várhatóan 30%-a a negyedik, 40%-a az ötödik, 30%-a a hatodik periódusból származik. A π_j-kre adott értékek azt mutatják, hogy eléggé biztosak akarunk lenni afelől, hogy az utolsó három periódusból származó keresletelvonások nem lépik túl a 112, 200, 300 szinteket. A standard normális eloszlás táblázatából a π_j-hez hozzárendelhetjük a megfelelő $\lambda(\pi_j)$ értékeket, s a konstansok behelyettesítése után kapott programozási feladat az alábbi formára hozható:

$$f(\mathbf{X}) \to \min$$

$$\mathbf{X} \geqq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{X}) \geqq \mathbf{0}.$$

ahol az f, g_1 és g_2 függvények ismét nem lineárisak.

A feladat megoldását az alábbi táblázat mutatja:

t	1	2	3	4	5	6	Σ_1^T
S_t^0	627,6	560,2	864,2	887,7	1298,6	1058,7	5297,0
W_t^0	13,6	11,67	17,01	18,45	25,42	20,87	
X_t^0	681,3	575,7	871,5	921,1	1304,2	1079,8	5433,7
túlóra	1,3	−7,8	21,0	−1,5	33,2	36,3	
I_t^0	73,7	89,2	36,5	129,9	135,5	156,6	
p_i^0	0,0056	0,023	0,052				
$(b_i p_i^0 + e_i p_i^0)^2$	17,6	118,2	185,2				

$Z_2^0 = 1259{,}47$

A megadott inputok mellett a modell gyakorlatilag a második és harmadik periódusban javasolt (2,3%-os, illetve 5,2%-os) árleszállítást. A (2) modell összkereslete megegyezik az (1) modell összkeresletével, s értelemszerűen a két modell teljesítménye is közel van egymáshoz. Mint várható volt: $Z_1^0 > Z_2^0$, az árdiszkontálás a költségek szempontjából kedvezően befolyásolja a kereslet eloszlását. A változást a táblázat utolsó sora mutatja, s ennek megfelelően a (2) modell által mutatott keresleti szint az első periódusban 17,6, a másodikban 118, a harmadikban 185 egységgel magasabb mint az (1) modell optimális megoldásában. A keresleti görbe egyenletesebbé válásával a munkaerő szintek sem mutatnak olyan ingadozást mint az (1) modellben, s ez okozhatja, hogy ugyanezt a termelési programot kisebb termelési költséggel lehet megvalósítani.

3. modell

A (2) modell felhasználta az (1) modell optimális megoldását. Az (1) és (2) modell szimultán optimalizálása [(3) modell] várhatóan a célfüggvény értékekre nézve a $Z_1^0 > Z_2^0 \geq Z_3^0$ rangsorhoz juttat bennünket, mivel a modell egyidejűleg határozza meg a keresleti összértéket és az árdiszkontálás nagyságát. A szimultán modellben a (2) modellben inputként szereplő, az (1) modell optimumából kapott S_t^0 értékeket az (F1) feltevésben definiált függvény adja meg. Az (F1)–(F6) feltevések alapján modellünknek az alábbi formája van:

$$Z_3 = \{\Sigma_1^T Y_t + R(\Sigma_1^k p_i(b_i p_i + e_i p_i^2))\} \to \text{MIN} \tag{3a}$$

$$I_{t-1} + X_t = S_t + I_t; \quad t = 1, \ldots, T \tag{3b}$$

$$R = \frac{\Sigma_1^T Y_t + F}{\Sigma_1^T X_t} \alpha, \tag{3c}$$

$$S_i = a_i^{(1)} + a_i^{(2)}/R + b_i p_i + e_i p_i^2; \qquad i = 1, \ldots, k \tag{3d}$$

$$S_{k+j} = a_{k+j}^{(1)} + a_{k+j}^{(2)}/R - \beta_j \Sigma_1^k (b_i p_i + e_i p_i^2); \quad j = 1, \ldots, T-k \tag{3e}$$

$$P\big(\beta_j(\Sigma_1^k(b_i p_i) + \Sigma_1^k e_i p_i^2) \leq d_j\big) \geq \pi_j; \qquad j = 1, \ldots, T-k \tag{3f}$$

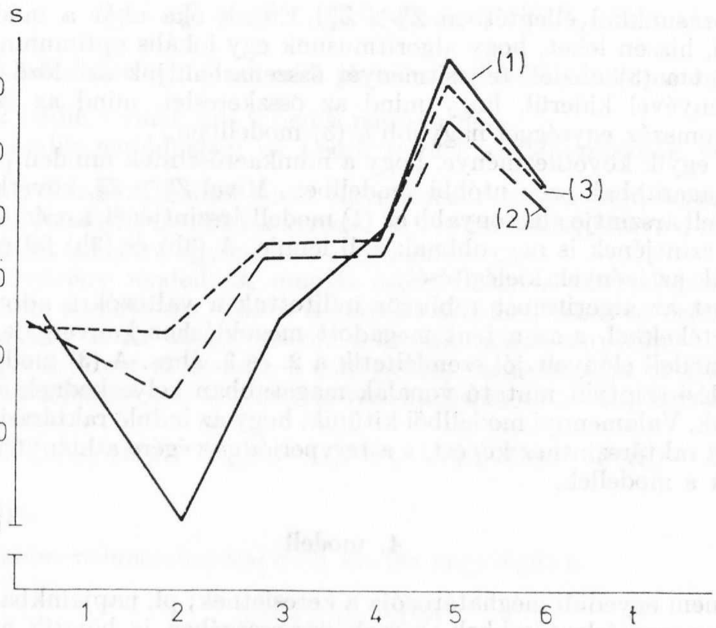
$$\begin{aligned} Y_t = C_1 W_t + C_2(W_t - W_{t-1})^2 + C_3(X_t - C_4 W_t)^2 + C_5 X_t - C_6 W_t + \\ + C_7(I_t - C_8 - C_9 S_t)^2; \qquad t = 1, \ldots, T; \end{aligned} \tag{3g}$$

$$X_t, S_t, W_t, I_t \geq 0; \; t = 1, \ldots, T; \quad p_i \geq 0; \quad i = 1 \ldots k; \quad R \geq 0. \tag{3h}$$

Az (1) és (2) modellek inputjait felhasználva a feladat megoldása az alábbi:

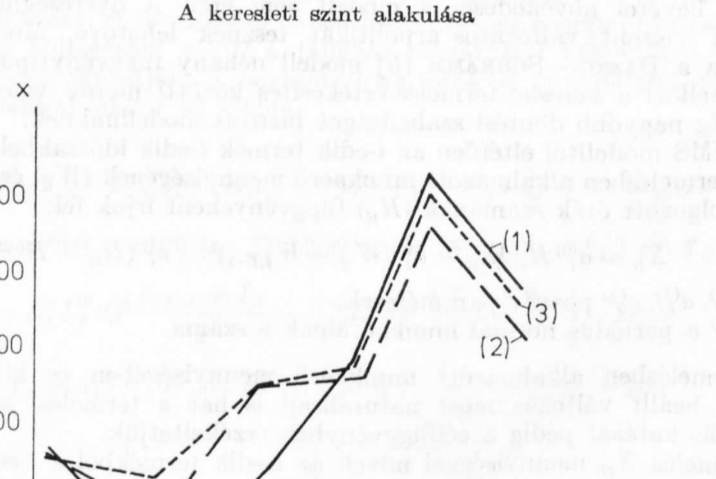
t	1	2	3	4	5	6	$\sum_{t=1}^{T}$
S_t^0	641,5	637,1	888,4	939,5	1375,1	1123,3	5583
W_t^0	13,8	13,2	17,2	19,6	26,9	22,1	
X_t^0	691,9	659,9	874,2	977,9	1377,1	1107,3	5688
túlóra	−0,1	0,0	16,9	−2,1	37,1	2,3	
I_t^0	69,9	92,0	99,0	137,4	139,2	123,2	
p_i^0	0,0	0,032	0,044				
$b_i p_i^0 + e_i p_i^{02}$	0,0	169,0	151,5				

$R^0 = 0,2718$, $Z_0^3 = 1305,9$.



2. ábra

A keresleti szint alakulása



3. ábra

A termelési szint alakulása

Várakozásunkkal ellentétben $Z_3^0 > Z_2^0$! Ennek oka akár a módszerben is kereshető, hiszen lehet, hogy algoritmusunk egy lokális optimumnál elakadt. Ha viszont a (3) modell teljesítményét összehasonlítjuk az előző két modell teljesítményével kiderül, hogy mind az összkereslet, mind az össztermelés közel háromszáz egységgel nagyobb a (3) modellben.

Ennek egyik következménye, hogy a munkaerőszintek minden periódusban rendre magasabbak ezen utóbbi modellben. Mivel $Z_1^0 > Z_3^0$, következik, hogy a (3) modell árszintje alacsonyabb az (1) modell árszintjénél, s ezért a (3) modell keresleti szintjének is nagyobbnak kell lennie. A (3b) és (3h) feltételek pedig biztosítják az igények kielégítését.

Emellett az algoritmust többször indítottuk a változókra adott más-más induló értékekkel, s az a fent megadott megoldáshoz konvergált. A (3) szimultán modell előnyeit jól szemléltetik a 2. és 3. ábra. A (3) modell keresleti és termelési szintjeit mutató vonalak magasabban helyezkednek el és egyenletesebbek. Valamennyi modellből kitűnik, hogy az induló raktárszint alacsony az ideális raktárszinthez képest, s a tervperiódus végére a hiányt fokozatosan behozzák a modellek.

4. modell

Az ár nem egyedüli meghatározója a keresletnek; pl. napjainkban a reklámkiadások egyre jelentősebbek, s ezek összességében is bővítik a keresletet. Az ilyen faktorokat költségminimalizáló modellekben nem egyszerű szerepeltetni; a bevétel növekedését a modell nem érzi. A nyereségmaximalizáló modellek viszont változatos árpolitikát tesznek lehetővé. Modellünk felhasználja a DAMON–SCHRAMM [5] modell néhány függvénytípusát, ugyanakkor mellőzi a kereslet-termelés-értékesítés közötti merev viszonyt. Ez a különbség nagyobb döntési szabadságot biztosít modellünknek.

A HMMS modelltől eltérően az i-edik termék t-edik időszakbeli termelését (X_{it}) a termelésben alkalmazott munkaerő mennyiségének (W_{it}) és a periódusban ledolgozott órák számának (H_{it}) függvényeként írjuk fel:

$$X_{it} = a_i^{(0)} H_{it} W_{it} - a_i^{(1)}(W_{it} - W_{i,t-1})^2 - a_i^{(2)}(H_{it} - H^0)^2$$

ahol: $a_i^{(0)}$, $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$ pozitív paraméterek,
H^0 a periódus normál munkaóráinak a száma.

A termelésben alkalmazott munkaerő mennyiségében és kihasználtsági fokában beállt változás most naturálisan is hat a termelési szintre, ezek financiális hatását pedig a célfüggvényben érzékeltetjük.

A termelés X_{it} mennyiséggel növeli az i-edik termékből a t-edik periódus elején meglevő $I_{i,t-1}$ raktárszintet és $a_{ij}^{(3)} X_{it}$ mennyiséggel csökkenti a j-edik nyersanyagból a t-edik periódus elején meglevő $I_{j,t-1}^M$ raktárszintet. Az X_{it} termelési szint ugyancsak csökkenti a t-edik periódusban a k-adik erőforrásból meglevő $b_{kt}^{(1)}$ mennyiséget $a_{ki}^{(4)} X_{it}$ nagysággal. A vállalat által a t-edik periódusban a j-edik nyersanyagtípusra feladott megrendelés (O_{jt}) nem lehet nagyobb mint $b_{jt}^{(2)}$, s ezen megrendelés a $t+1$-edik periódusban áll rendelkezésre. A j-edik nyersanyagból I_j^{0M}, az i-edik késztermékből I_i^0 mennyiséget képes a vállalat kizárólagossn raktározni.

A marketing szektor modellezésénél feltesszük, hogy az i-edik termék iránt a t-edik periódusban megnyilvánuló D_{it} keresletet az alábbi függvény írja le:

$$D_{it} = \alpha_{it}^{(0)} + \alpha_{it}^{(1)} Y_{i,t-1} + \alpha_{it}^{(2)} A_{it} + \alpha_{it}^{(3)}/R_{it}$$

ahol: Y_{it} az i-edik termékből a t-edik periódusban értékesített mennyiség,

R_{it} az i-edik termék ára a t-edik periódusban,

A_{it} a t-edik periódusban az i-edik termék reklámozásának volumene.

A függvény konstruálásánál ismét figyelembe vettük a kereslet-ár közötti fordított arányosságot, továbbá a kereslet és a reklámozás, illetve a fogyasztói szokások között meglevő egyenes arányosságot.

A fenti függvény modellünk magját adja, hiszen a bevétel növelésének egyik módja az ár növelése. Ekkor a kereslet csökken, tehát az értékesíthető termékmennyiség is. Ez utóbbi viszont a bevétel másik tényezője.

A pénzügyi szektort most csak a célfüggvény reprezentálja. A HMMS-féle megközelítést felhasználva a munkaerővel kapcsolatos költségeket a

$$c_i^{(1)} H_{it} W_{it} + c_i^{(2)}(W_{it} - W_{i,t-1})^2 + c_i^{(3)} W_{it} \cdot (H_{it} - H^0) + c_i^{(4)}(H_{it} - H^0)^2$$

kifejezés adja.

Az A_{it} reklám volumenhez kapcsolt kiadás nagyságát a

$$(c_i^{(5)} A_{it} + c_i^6 A_{it}^{(2)})$$

függvény definiálja, s a tervidőszakban a reklámkiadások nem haladhatják meg az A^0 forintot. A termeléssel kapcsolatos fajlagos energia- és nyersanyag-felhasználási költségeket a $c_{it}^{(7)}$, a fajlagos raktározási költségeket a $c_{it}^{(8)}$ és $c_{jt}^{(9)}$ paraméterek mutatják. A bevezetett változók és paraméterek felhasználásával modellünk ekkor az alábbi:

$$Z = \Big\{ \Sigma_1^T \Sigma_1^n R_{it} Y_{it} - \Sigma_1^n \Sigma_1^T [c_i^{(1)} H_{it} W_{it} + c_i^{(2)}(W_{it} - W_{i,t-1})^2 + c_i^{(3)} W_{it}(H_{it} - H^0) +$$

$$+ c_i^{(4)}(H_{it} - H^0)^2] - \Sigma_1^T \Sigma_1^n (c_i^{(5)} A_{it} + c_i^{(6)} A_{it}^2) - \Sigma_1^n \Sigma_1^T c_{it}^{(7)} X_{it} -$$

$$- \Sigma_1^n \Sigma_1^T c_{it}^{(8)} \frac{I_{i,t-1} + I_{it}}{2} - \Sigma_1^m \Sigma_1^T c_{jt}^{(9)} \frac{I_{j,t-1}^M + I_{jt}^M}{2} \Big\} \to \max \tag{4a}$$

$$X_{it} = a_i^{(0)} H_{it} W_{it} - a_i^{(1)}(W_{it} - W_{i,t-1})^2 - a_i^{(2)}(H_{it} - H^0)^2$$

$$t = 1, \ldots, T; \; i = 1, \ldots, n \tag{4b}$$

$$I_{j,t-1}^M + O_{j,t-1}^M = a_{ij}^{(3)} X_{it} + I_{jt}^M; \quad j = 1, \ldots, m; \; t = 1, \ldots, T \tag{4c}$$

$$\Sigma_1^n a_{ik}^{(4)} X_{it} \leq b_{kt}^{(1)}; \quad k = 1, \ldots, p; \; t = 1, \ldots, T; \tag{4d}$$

$$O_{jt} \leq b_{jt}^{(2)}; \quad j = 1, \ldots, m; \; t = 1, \ldots, T \tag{4e}$$

$$I_{i,t-1} + X_{it} = Y_{it} + I_{it}; \quad i = 1, \ldots, n; \; t = 1, \ldots, T \tag{4f}$$

$$\Sigma_j^m \frac{I_{jt}^M}{I_j^{0M}} + \Sigma_1^n \frac{I_{it}}{I^0} \leq 1; \quad t = 1 \ldots T \tag{4g}$$

$$D_{it} = \alpha_{it}^{(0)} + \alpha_{it}^{(1)} \cdot Y_{i,t-1} + \alpha_{it}^{(2)} A_{it} + \alpha_{it}^{(3)}/R_{it}; \quad i = 1, \ldots, n; \; t = 1, \ldots, T \tag{4h}$$

$$Y_{it} \leq D_{it}; \quad i = 1, \ldots, n; \; t =, 1, \ldots, T \tag{4i}$$

$$\Sigma_1^T \, \Sigma_1^n (c_i^{(5)} A_{it} + c_i^{(6)} A_{it}^2) \leq A^0; \tag{4j}$$

$$I_{iT} \geq I_i^F; \quad i = 1, \ldots, n; \quad I_{jt}^M \geq I_j^{MF}; \; j = 1, \ldots, m; \tag{4k}$$

$$A_{it}, Y_{it}, W_{it}, H_{it}, I_{it}, I_{jt}^M, O_{jt} \geq 0 \tag{4l}$$

minden i, t, j-re.

Legyen:

$$n = 2, \; m = 1, \; p = 1, \; T = 3,$$

valamint:

$$a_1^{(0)} = 1, \; a_2^{(0)} = 1{,}2, \; a_1^{(1)} = 2, \; a_2^{(1)} = 2{,}2, \; a_1^{(2)} = 3,$$

$$a_2^{(2)} = 2{,}8, \; a_1^{(3)} = 4, \; a_{11}^{(4)} = 0{,}8 \cdot 10^{-3}, \; a_{21}^{(4)} = 0{,}5 \cdot 10^{-3},$$

$$H^0 = 160, \; b_{1t}^{(1)} = 160, \; b_{1t}^{(2)} = 10^6, \; I_1^{0M} = 0{,}55 \cdot 10^6, \; I^0 = 0{,}4 \cdot 10^6,$$

$$c_1^{(1)} = 3, \; c_2^{(1)} = 2, \; c_1^{(2)} = 20, \; c_2^{(2)} = 15, \; c_1^{(3)} = 1{,}5, \; c_2^{(3)} = 1, \; c_1^{(4)} = 50,$$

$$c_2^{(4)} = 40, \; c_1^{(5)} = 3, \; c_2^{(5)} = 2, \; c_1^{(6)} = 0{,}4, \; c_2^{(6)} = 0{,}2, \; c_1^{(7)} = 8{,}5, \; c_1^{(7)} = 7,$$

$$c_{1t}^{(8)} = 0{,}15, \; c_{2t}^{(8)} = 0{,}1, \; c_{1t}^{(9)} = 0{,}02, \; I^{FM} = 347 \cdot 10^3, \; I_1^F = 0{,}12 \cdot 10^6,$$

$$I_2^F = 0{,}0, \; I_{1,0} = 0{,}12 \cdot 10^6, \; I_{2,0} = 0, \; I_0^M = 0{,}38 \cdot 10^6, \; 0_{1,0} =$$

$$= 0{,}6 \cdot 10^6, \; W_{1,0} = 1000, \; W_{2,0} = 0{,}0, \; A^0 = 50\,000 \text{ és}$$

it	$\alpha_{it}^{(0)}$	$\alpha_{it}^{(1)}$	$\alpha_{it}^{(2)}$	$\alpha_{it}^{(3)}$
11	−300 000	0,3	300	$3{,}5 \cdot 10^6$
12	−310 000	0,31	310	$3{,}6 \cdot 10^6$
13	−314 000	0,33	330	$3{,}8 \cdot 10^6$
21	−310 000	0,31	310	$3{,}6 \cdot 10^6$
22	−314 000	0,33	330	$3{,}8 \cdot 10^6$
23	−300 000	0,3	300	$3{,}5 \cdot 10^6$

Az inputok két termékre vonatkoznak, és a tervidőszakot három periódusra osztottuk. A termékek egyetlen nyersanyagot és erőforrást használnak ($m = 1$, $p = 1$). A kezdeti értékek (W_{i0}, I_{i0}) azt mutatják, hogy az 1-es indexszel ellátott termék termelése folyik a tervperiódus elején, a 2. termékből viszont a termelési szint ekkor zéró.

A termelékenységi paraméterek ($a_i^{(0)}$, $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$) és a költség-paraméterek ($c_i^{(1)}$, $c_i^{(2)}$, $c_i^{(3)}$, $c_i^{(4)}$) viszont a második terméket preferálják.

Nézzük meg, hogy modellünk milyen termelési ütemet javasolt az egyes periódusokban:

it	11	12	13	21	22	23
H_{it}	128,7	150,75	163	167,5	156,8	141,9
W_{it}	982	572,9	963,4	54,9	84,9	93,5
X_{it}	122 823	138 422	147 912	10 707	21 306	20 319,3
I_{jt}^M	90,18	93,14	347 079	—	—	—
I_{it}	8,56	6,04	120 000	300,4	3250,2	31,5
O_{jt}	144 227	618 719	999 170	—	—	—
Y_{it}	246 126	142 547,5	35 417	19262,7	24 426	31 370
D_{it}	246 328	142 826	35 897	2021,5	28 131	32 116
A_{it}	148	171,5	120,1	167,2	196,3	197,4
R_{it}	7,65	11,25	14,54	14,0	14,06	13,29

Az 1. termék magas kezdő raktárszintje miatt a termékből az első periódusban értékesített mennyiség (Y_{11}) a termelési szintet (X_{11}) jóval meghaladja, s ekkor az árnak (R_{11}) alacsonynak kell lennie. Az értékesítés (Y) és ár (R) adatsorból egyértelműen kiderül, hogy modellünk a termelési szerkezet módosítását javasolja, s így az 1. termék árát fokozatosan növeli, hiszen az így csökkenő kereslet nem zavarja termelési céljait.

A 2. terméknél a folyamat ellentétes. A termelési szint változtatásához kapcsolt költségek miatt csak fokozatosan lehet emelni a termelési szintet, s mindaddig magasan lehet tartani az árat, amíg az értékesítési szintet nem korlátozza a kereslet nagysága.

(Beérkezett: 1981. március 20-án.)

IRODALOM

1. Bergstrom, G. L.—Smith B. E.: Multi-item production planning -an extension of the HMMS Rules. M. Sci. 16 (10), 1970, B614—B629.
2. Bowman, E. H.—Fetter: Analyses of industrial operations. Homewood, Illinois, 1959. R. D. Irwin Inc.
3. Bowman, E. H.: Production scheduling by the transportation method of linear programming. Op. R. 2 (1), 1956, 100—103.
4. Buffa, E. S.—Taubert, W. S.: Production inventory systems: planning and control. Homewood, 1972. Irwin.
5. Damon, W.—Schramm, R.: A simultaneous decision model for production, marketing and finance, M. Sci. 19 (2), 1972, 161—172.
6. Ebert, R. J.: Aggregate planning with learning curve productivity. M. Sci. 23 (2), 1976, 171—182.
7. Florian, M.—Klein, M.: Deterministic production planning with concave costs and capacity constraints. M. Sci. 18 (1), 1971, 12—20.
8. Hanssmann, F.: Operation research in production and inventory control. N. Y.—London, 1962. John Wiley and Sons Inc.
9. Holt—Modigliani—Muth—Simon: A linear decision rule for production and employment scheduling. M. Sci. 2 (1), 1955, 1—30.
10. Holt—Modigliani—Muth: Derivation of a linear decision rule for production and employment. M. Sci. 2 (2), 1956, 159—177.

11. HOLT—MODIGLIANI—MUTH—SIMON: Planning production inventories and workforce. Englewood Cliffs, 1960. Prentice-Hall.
12. JONES, C. H.: Parametric production planning. M. Sci. 13 (11), 1967, 843—866.
13. KUNREUTHER, H.: Extension of Bowman's theory on managerial decision-making. M. Sci. 15 (8), 1969, 415—439.
14. LASDON, L. S.—TERJUNG, R. C.: An efficient algorithm for multi-item scheduling. Op. R. 19 (4), 1971, 946—969.
15. LEE, W. B.—KHUMAWALA, B. M.: Simulation testing of aggregate production planning models in an implementation methodology. M. Sci. 20 (6), 1974, 903—911.
16. LEITCH, R. A.: Marketing strategy and the optimal production schedule. M. Sci. 21 (3), 1974, 302—312.
17. LIPPMAN, S. K.—ROLFE—WAGNER—YUAN: Optimal production scheduling with deterministic demands. M. Sci. 14 (3), 1967, 1011—1029.
18. MELLICHAMP, J. M.—LOVE, R. M.: Production switching heuristics for the aggregate planning planning problem. M. Sci. 24 (12), 1978, 1242—1251.
19. PRÉKOPA, A.—SZÁNTAI, T.: On multi-stage stochastic programming progress in O. R. Vol. II. Bp. Akadémiai Kiadó 1976. 733—757.
20. SCHWARZ, L. B.—JOHSON, R. E.: An appraisal of the empirical performance of the linear decision rule for aggregate planning. M. Sci. 24 (8), 1978, 844—849.
21. TAUBERT, W. H.: A search decision rule for the aggregate scheduling problem. M. Sci. 14 (6), 1968, 343—359.
22. TUITE, M. F.: Merging marketing strategy: selection and production scheduling: a higher order optimum. The Journal of Industrial Engineering, Febr. 1968, 76—84.
23. VERGIN, R. C.: Production scheduling under seasonal demand. The J. of Industrial Eng. 17 (5), 1966, 260—266.
24. WELAM, U. P.: An HMMS type interactive model for aggregate planning. M. Sci. 24 (5), 1978, 564—575.
25. WELAM, U. P.: Multi item production planning models with almost closed solution. M. Sci. 22 (9), 1975, 1021—1028.

OPTIMA OF HIGHER ORDER IN PRODUCTION PLANNING

Problems of production planning showing strong seasonality and meeting consumer's demands with minimal costs are usually solved by the combination of the following three extreme assumptions:

— fluctuations in production level are caused by the change in employed labour force,
— fluctuations in production level are caused by the degree of utilization of manpower;
— production level is constant and fluctuations in demand are counterbalanced by stockholding.

Some authors (e.g. references 16, 22) suggest the rearrangement of demand as a fourth possibility, but these models cannot determine the global level of demand.

Four models are presented in the study determining demand levels both globally and by periods. The first three of them minimize cost, while the last one maximizes profits. All models may be reduced to such a programming problem where both the objective function, and the system of constraints are non-linear. It is shown in a numerical example that despite cost minimization the level of demand and production, respectively, will not decrease in our models.

Problems were solved by Fiacco-McCormick's SUMT method.

ОПТИМУМЫ БОЛЕЕ ВЫСОКОГО УРОВНЯ В ПЛАНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВА

Проблемы планирования производства с ярко выраженной сезонностью и удовлетворяющие потребительским запросам при минимальных затратах решаются, чаще всего посредством комбинирования трех следующих крайних альтернатив:

— колебания уровня производства вызываются изменением численности рабочей силы;
— причиной колебания уровня производства является степень использования рабочей силы;

— уровень производства является стабильным и колебания спроса нейтрализуются с помощью складских запасов.

Некоторые работы, указанные в литературе (например 16, 22) в качестве четвертой альтернативы предлогают перестройку спроса, однако эти модели не могут определить глобальный уровень спроса.

В данной работе приводятся четыре модели, которые глобально и по периодам определяют уровни спроса. Первые три модели минимализируют затраты, а последняя максимализирует прибыль.

Все модели могут быть отнесены к такой задаче по программированию, в которой ни целевая функция, ни система условий не являются линейными. С помощью цифрового примера указывается, что несмотря на минимализацию затрат в наших моделях не уменьшается уровень спроса и производства.

Рассматриваемые задания решались посредством метода Фиакко—Маккормика.