

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

FÜSTÖS LÁSZLÓ—MESZÉNA GYÖRGY—SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA

A sokdimenziós skálázás egyes újabb módszerei I.

Számos tényezőt figyelembe venni a mérésnél és összehasonlításnál, ez a gyakorlat számára is igen vonzó probléma. A sokváltozós statisztikai vizsgálatokhoz alkalmas induló táblák általában a vizsgált objektumok számos jellemzőre tartalmaznak megfigyelési értékeket. Rendelkezésünkre állnak tehát a sokdimenziós „állapot-térben” a pontok és a közöttük észlelt hasonlóságok, különbözőségek vagy távolságok. A klasszikus skálázás ezután úgy kívánja kijelölni egy tengelyen az objektumok helyét, hogy a származtatott sorrendjük egy egy-dimenziós skálán valamilyen értelemben az eredeti térben fennálló viszonyoknak feleljenek meg. Tágabb értelemben skálázásról beszélünk akkor is, ha a származtatott tér 2, 3 vagy több, de az eredetinel kisebb dimenziószámmal rendelkezik. Szemléletes kép az eredményekhez természetesen csak 3 dimenzióig tartozik, de egyes esetekben az állapottér dimenziószámának számottevő csökkentése is sokat segíthet az összefüggések felismerésében.

A sokváltozós skálázás számos módszerével, vonatkozásával foglalkozik KINDLER—PAPP: Komplex rendszerek vizsgálata (Műszaki Kiadó Bp. 1977) c. könyve, de a SZIGMÁBAN is több tanulmány jelent már meg e témakörből. Cikkünk, amelynek most I. részét közöljük nem törekszik teljességre, nem adja áttekinthető összefoglalását sem e területnek. Részletesen foglalkozunk viszont azokkal az újabb, egyre kiforrottabbá váló számítógépes eljárásokkal melyek a hazai köztudatban még szinte teljesen ismeretlenek s a többi sokváltozós módszerrel egyetemben a korszerű statisztikai módszertan ígéretes eszköztárának tekinthetők.

I. Történeti áttekintés¹

A skálázás első modelljét RICHARDSON dolgozta ki 1938-ban. Arra keresett választ, hogy hogyan lehet a pontok közötti (euklideszi) távolságokból a faktoranalízishez szorosan kapcsolódó módszerrel meghatározni a pontok koordinátáit és a térben ábrát készíteni. Elgondolásainak jelentőségét az adja, hogy Richardson előtt a skálázó módszerek alkalmazói feltételezték a vizsgált terület dimenzióinak az ismeretét. Richardson modellje feloldotta ezt a megkötést, és az alapadatokból a dimenziók ismeretétől függetlenül határozta meg a tengelyekre vonatkozó vetületeket, azaz a koordináták értékeit.

Hasonló eredményeket publikált YOUNG és HOUSEHOLDER 1938-ban, elgondolásukat TORGERSON használta fel és fejlesztette tovább 1954-ben és 1958-ban.

¹ Lásd: FORGÁCSNÉ, KOVÁCS ERZSÉBET: „A sokdimenziós skálázás, mint a matematikai statisztika új módszere” c. doktori értekezés; MKKE 1981, kézirat.

Ezt a munkát számos könyv és tanulmány követte. Az időrendet követve meg kell említenünk COOMBS Adatelméletét (1964), amelyben megtalálható a nem-metrikus sokdimenziós skálázás kezdeti leírása mellett az egyéni preferenciákat feltáró modell is.

Ez a könyv elsősorban a skálázó modellek elméleti és geometriai megalapozásával foglalkozik. 1970 és 1973 között három olyan tanulmány is megjelent, amelyek a módszereknek a piacutatásban való alkalmazhatóságát mutatják be. Természetesen jól használhatják az üzleti és pénzügyi élet más területén dolgozók is az algoritmusok összehasonlítására és a közülük való választásra.

SHEPARD, ROMNEY és NERLOVE kétkötetes munkája (1972) a sokdimenziós skálázás elméletének és alkalmazásainak átfogó bemutatását adja. Az első kötetben a skálázó modellek és módszerek csoportosítása után a nem-metrikus elemzés, az egyéni különbségek vizsgálata és még számos más elméleti kérdés szerepel. A második kötet az alkalmazási lehetőségek széles körét mutatja be. Találunk példát antropológiai, szemantikai vizsgálatokra, valamint a nemzetek közötti különbségek elemzésére is.

Az említett könyvekben kívül számos cikk jelent meg különböző folyóiratokban. A cikkek egyrésze a skálázás elméleti kérdéseit boncolgatja, más részük gyakorlati problémákat feszeget. SHEPARDnak (1962) olyan két írása jelent meg, amelyben a közelségek elemzését kísérli meg ismeretlen távolság-függvény segítségével. KRUSKAL (1964) pedig az illeszkedés jóságát helyezi vizsgálatai középpontjába, és bevezeti a legkisebb négyzetes monoton regressziót a távolságok és a hasonlóságok közötti kapcsolat becslésére.

GUTTMAN 1968-ban új számítási módszert dolgoz ki a legkisebb dimenziójú tér megtalálására.

Jelentős eredményt publikál CAROLL és CHANG 1970-ben az egyéni különbségek skálázása terén. A sokdimenziós skálázás általánosításaként bevezetik az INDSICAL-nek nevezett módszert, amelyet *Eckart-Young* általánosított eljárásával oldanak meg.

A módszertani és gyakorlati alkalmazási témákról írt cikkek is egymás után jelennek meg a társadalomtudományi, matematikai és statisztikai folyóiratokban.

Az egyéni különbségek skálázásával számos szerző foglalkozik. TUCKER és MESSICK (1963) cikkében a különbözőségi mátrixokat csoportosítja, és az egyes clusterek átlagos mátrixait elemzi sokdimenziós skálázással.

MCGEE (1968) a nem-metrikus egyéni különbségeket vizsgálja, és az illeszkedés elégtelensége függvénnyel jellemzi a konfiguráción belüli távolságot. KRUSKAL és CAROLL az illeszkedés elégtelenségének különböző mértékeit határozza meg, és elméleti eredményeket közöl a hatás-függvényről.

WISH (1970) a nemzetek közötti hasonlóságot elemzi INDSICAL-lal.

WISH, DEUTSCH és BIENER (1970) az INDSICAL alkalmazásával kimutatták, hogy a nemzetek közötti hasonlóság megítélésénél a dimenziók súlyozásának egyéni különbségei szisztematikusan függnek az egyén politikai beállítottságától, valamint attól, hogy mennyit tud az egyén az adott nemzetről, milyen országból származik és a neve is befolyásolja döntését.

CAROLL (1971) az egyéni különbségeknek az észlelésben és a preferenciákban játszott szerepét tárgyalja.

TUCKER (1972) olyan módszert dolgoz ki az egyéni különbségek elemzésére, amely az INDSICAL általánosítása, de hiányzik belőle a dimenzionális egységiség tulajdonsága.

CAROLL és WISH (1973) a háromutas sokdimenziós skálázás modelljeit és módszereit bemutató cikkében részletesen bemutatja az IDIOSCAL-nak nevezett modellt, amelyben az euklideszi távolság általánosítása szerepel, és speciális esetként magába foglalja az INDSCAL-t is.

A módszertani kérdések között olyanok szerepelnek, mint a távolságok súlyozása (MCGEE, 1966), metrikus, azaz számszerű információk származtatása nem-metrikus adatokból (SHEPARD, 1966) és az illeszkedés milyenségének vizsgálata.

A gyakorlati alkalmazások között megtaláljuk a Morse jelekhez hasonló jelzések észlelését elemző modellt (WISH, 1967), valamint CAROLL és CHANG (1972) cikkét, amelyben az 1960-as amerikai elnökválasztást elemzik sokdimenziós skálázással.

Megjelentek olyan cikkek is, amelyek az alakzat pontosságát, a megfelelő dimenziók meghatározását, valamint a véletlen hibát vizsgálják pl. Monte Carlo módszerrel (KLAHR, 1969, STENSON és KNOLL 1971).

YOUNG (1970) a nem-metrikus skálázással nyerhető metrikus információt határozza meg. A tényleges és a megállapított távolságok közötti korrelációs együtthatót a „metrikus meghatározottság mértékének” tekinti és a kapott alakzat pontosságát becsli ennek segítségével.

2. A sokdimenziós skálázás kapcsolata a sokváltozós statisztika egyes fejezeteivel

Már a bevezetésben mondottakból is felismerhető, hogy a tágabb értelemben vett sokdimenziós skálázás mind a faktoranalízissel (I. SZIGMA: 1970. III. évf. 2. sz.) mind pedig a clusteranalízissel (I. SZIGMA: 1977. X. évf. 3. sz.) több vonatkozásban is kapcsolatba hozható. Az alábbiakban e kérdést kissé részletesebben vizsgáljuk meg.

Beszéljünk először a skálázás és a cluster analízis viszonyáról. Alapjaikat tekintve mindkét eljárás a vizsgált rendszer — az állapottérben elhelyezkedő pont-konfiguráció —, struktúrájának a felismerését tűzi ki céljául. Így jól használhatók kölcsönösen egymás eredményeinek ellenőrzésére, stabilitás vizsgálatokra, egy-egy probléma megközelítésére több oldalról. A járt út azonban már különböző.

A skálázás esetében az egyedek közötti hasonlósági vagy különbözőségi mérőszámok az induló adatok. Az eredmények egy-két-három, esetleg több dimenzióbeli pontkoordináták, azaz egy térbeli ábra. Egy dimenzió esetén egy skála, két és három dimenzió esetén egy szemléletesen értékelhető pontfelhő, a magasabb dimenziókban aztán már a szemlélet előnye elmarad. (Természetesen az induló hasonlóságok vagy különbözőségek a szokásos sokváltozós induló tábláknak, megfigyeléseknek, jellemzőknek a felhasználásával is előállíthatók.)

A cluster analízis ugyanabból az induló táblából változatlan dimenziószám mellett állapítja meg — számos különböző technikával —, az egyedeknek sok szempont szimultán figyelembevételével kialakítható, relatíve homogénebb rész-halmazait, fürtjeit, clustereit. A hierarchikus technikák esetében aztán az eredményeket egy jól kezelhető két dimenziós ábrán, a dendogramon szemlélteti.

Mindennemű alkalmazás esetében feltétlenül szem előtt tartandó, hogy mind a több tucat cluster-technika, mind a nagy számú skálázó eljárás esetenként

egymástól lényegesen eltérő eredményeket adhat. Az eljárások és az egész problémakör mélyebb átgondolása esetén e jelenség gyorsan természetessé válik. A fejlődés jelenlegi fokán éppen a leginkább adekvát eljárás kiválasztása okozza a legnagyobb nehézségeket. Különösképpen igaz tehát, hogy a skálázó és clusterező megfontolások igen sok körülmény miatt adhatnak kisebb-nagyobb mértékben eltérően interpretálható eredményeket. Kimondhatjuk az egész területre leginkább jellemző egyik ajánlást: mindenfajta mechanikus alkalmazást messzemenően kerüljünk el. Ugyanakkor az eltérő eredmények jellege, ismerte a különböző technikák sajátosságait, értékes információkat hordozhat.

Egy külön is megemlítenő probléma a következő. A skálázó eljárások optimalizálási feladatainak megoldása gyakran csak pl. lokális minimumok elérését biztosítja. A megoldás hatékonyságának, a globális optimum megtalálásának, esetleg valószínűsítésének további vizsgálata gyakran sok újabb kérdést vet fel.

A két eljárás eredményeinek praktikus összehasonlítására jó lehetőséget ad a következő gondolatmenet. Két dimenziós skálázást végezve a kapott pontábrában alkalmasan megjelöljük az egy clusterba tartozó pontokat. Az esetleges összhang a két megközelítés között igen szemléletesen azonnal felmérhető.

Foglalkozunk most a skálázás és a faktoranalízis eljárásainak összevetésével.

A sokdimenziós skálázásnak az a tulajdonsága, hogy kis dimenziószámú térben állít elő az eredeti állapottér különbözőségi (távolság) viszonyait tükröző pont konfigurációt, közvetlenül hozható kapcsolatba a faktoranalízissel. A skálázás pontábrájába elhelyezhető tengelyek, fő-irányok, a körjük csoportosuló jellemzők, illetve objektumok képe a lényeg kiemelésének gondolatával azonosítható. A faktoranalízis is igyekszik csökkenteni a dimenziószámot, új – fiktív – tengelyeket határoz meg. Ezek értelmezése éppen úgy igen érdekes, de sok problémát felvető tevékenység, mint a skálázás esetében.

Az induló adatrendszernek itt is lehetnek azonosak, de részben el is térhetnek egymástól. A skálázás az egyedek különbözőségeit tartalmazó táblából indul. E mértéktől azt kívánjuk meg, hogy kisebb távolsághoz kisebb, nagyobb távolsághoz nagyobb érték tartozzon. A faktoranalízis a megfigyelések korrelációs mátrixát tekinti induló táblának, s így a megkötések szigorúbbak az előbbieknél. (Gondoljunk a korrelációs együtthatónak két vektor skalár szorzataként történő értelmezésére).

Érdeemes felhívni a figyelmet a két eljárás logikai gondolatmenete közötti rokonságra. A sokdimenziós térben keresett pont-koordináták meghatározásánál mindkét esetben sajátvektorok és sajátértékek számításán át vezet az út. A faktoranalízisnél a korrelációs mátrix reprodukálása, a skálázásnál a különbözőségek és a távolságok egymásnak való minél jobb megfeleltetése a cél. Egyik esetben sincs azonban a cél mindenek elé helyezve. Mindkét eljárás azt a minimális dimenziószámú teret keresi, melyben a dimenziószám csökkenéséből eredő előny még kiegyenlíti a reprodukálásban, illetve megfeleltetésben elszenvedett veszteséget. A faktoranalízisnél minimalizáljuk a faktorszámot s maximalizáljuk a kommunalításokat, a skálázásnál a különbözőségek – távolságok illeszkedését mérő különböző célfüggvények minimalizálása megy végbe.

Ígéretes lehetőségeket kínál a két eljárás összekapcsolására a skálázás eredmény-ábrájának a faktoranalitikus eredményekkel összevetett elemzése. Cé-

lunk itt a két oldalú közelítés felhasználásával a pont ábrában elhelyezhető tengelyek végső irányának és értelmezésének minél körültekintőbb megállapítása.

A két eljárás közötti kapcsolat fordított irányban is igen gyümölcsözően hasznosítható. Köztudomású, hogy a faktoranalízis gondolatmenete szigorúan kapcsolódik a linearitás problémaköréhez. Ezért ha a vizsgált változók között erősen nem-lineáris összefüggések vannak, a faktoranalízis eredményeként kényelmetlen, sok dimenziós megoldáshoz juthatunk. A skálázó eljárások alacsony dimenziós megoldáshoz juthatunk. A skálázó eljárások alacsony dimenziós megoldásai ilyenkor sokat segíthetnek az összetett törvényszerűségek felismerésében.

3. Nem metrikus módszerek

A sokdimenziós skálázás feladata a minimális dimenziószámú térben olyan ponthalmaz meghatározása, amelyben az output térbeli távolságok monoton függvényei az input rendszer elemei közötti különbözőségeknél. Teljesül a következő összefüggés:

$$\text{ha } \delta_{ij} < \delta_{kl}, \text{ akkor } d_{ij} \leq d_{kl},$$

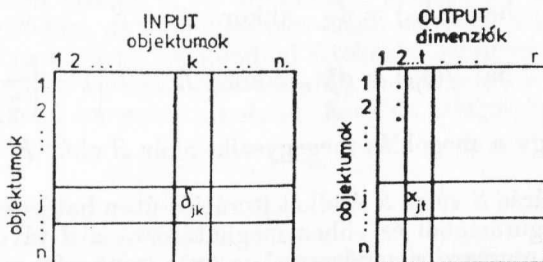
ahol δ_{ij} , δ_{kl} a megfelelő objektumok közötti különbözőségeket (input)

d_{ij} , d_{kl} a megfelelő objektumok közötti távolságokat jelenti (output).

Az ilyen *gyenge monotonitási* kritériumot kielégítő eljárásokat nem metrikus módszereknek nevezzük.

3.1. A MINISSA modell

Legyen adott n objektumra (megfigyelési egységre) a különbözőségeket kifejező $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix (δ). Az eljárás kétutas input mátrixból kiindulva, a hasonlósági vagy különbözőségi mértékek alapján határozza meg az adott feltételt kielégítő minimális dimenziószámú térre vonatkozó eredmény mátrixot. A kétutas (two-way) módszerek input és output mátrixát mutatja be az 1. sz. ábra. Az algoritmus az n objektumnak megfelelő pont koordinátáit keresi az r -dimenziós térben ($r < n$), olyan feltételek mellett, hogy a pontok közötti távolságok sorrendisége megegyezzen a különbözőségek sorrendjével.



1. ábra. A kétutas MDS módszerek inputja és outputja

Az objektumok különbözőségeit jelölje δ_{jk} ($j, k = 1, \dots, n$); ez lehet például egyszerű rangszám is, amely 1-től $n(n-1)/2$ -ig veheti fel értékeit.

Az output pontok koordinátáit jelölje x_{jt} , $t = 1, \dots, r$; két pont közötti távolság a következő:

$$d_{jk} = \left\{ \sum_{t=1}^r |x_{jt} - x_{kt}|^p \right\}^{1/p}.$$

Ha $p = 2$, az ismert euklideszi távolságot kapjuk.

A célfüggvényt *Limgoes* és *Roskam* a következőképpen definiálta:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{jk} \{d_{jk} - f(\delta_{jk})\}^2}{\sum_{jk} d_{jk}^2}},$$

ahol $f(\delta_{jk})$ a δ_{jk} különbözőségi indexnek monoton függvénye, vagyis bármely $\delta_{jk} > \delta_{il}$ esetén $f(\delta_{jk}) > f(\delta_{il})$.

Minél nagyobb S értéke annál rosszabb az output pontábra és az f függvény illeszkedése az adatrendszerre.

Az eltérések mérésére más mértéket is alkalmaznak, a *Guttman*-féle K -együtthatót;

$$K = 1 - \frac{\left\{ \sum_{jk} d_{jk} f(\delta_{jk}) \right\}^2}{\sum_{jk} d_{jk}^2 \sum_{jk} (f(\delta_{jk}))^2}$$

A MINISSA modellben az $f(\delta_{jk})$ függvény kétféle módon határozható meg:

a) a *Kruskal*-féle monoton regressziós eljárással (\hat{d}_{jk})

b) a *Guttman*-féle rang-kép eljárással (d_{jk}^*).

A megfelelően megválasztott kezdeti értékekből kiindulva keresi az algoritmus a pontoknak azt a konfigurációját, amely mellett a célfüggvény értéke minimális.

Belátható a

$$\sum_{jk} d_{jk} (d_{jk} - \hat{d}_{jk}) = 0$$

$$\sum_{jk} d_{jk}^2 = \sum_{jk} (d_{jk}^*)^2$$

összefüggések felhasználásával, hogy az S és K együttható értéke között a következő relációk érvényesek:

$$\text{ha } f(\delta_{jk}) = \hat{d}_{jk} \text{ akkor } K = S$$

$$\text{ha } f(\delta_{jk}) = d_{jk}^* \text{ akkor } K = S \left(1 - \left(\frac{1}{2} S \right)^2 \right)$$

Ez azt jelenti, hogy a megoldás megegyezik, akár S akár K minimalizálását végezzük el.

A MINISSA eljárás S vagy K értékét iterációs-úton határozza meg. Kiindul egy kezdeti konfigurációból és ehhez meghatározza a d távolságokat, majd vagy a monoton regressziós módszerrel vagy a rang-kép módszerrel állítja elő $f(\delta)$ értékeit. Ezek alapján meghatározható S (vagy K) értéke. Ezután

az algoritmus olyan x értéket keres, amelyik jobb illeszkedést ad $f(\delta)$ -hoz. Az iteráció a második lépésben az új konfigurációnak megfelelő távolságértékek alapján újra számítja S értékét. Az eljárás addig folytatódik amíg S értéke adott korlát alá nem esik, vagy értéke már nem változik az egyes lépések során.

A kezdeti konfiguráció a következő mátrix (C) elemeivel határozható meg: [l. részletesebben a 4.2. pontban]

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 + \sum_j \varrho_{ij}/l & i = j \\ 1 - \varrho_{ij}/l & i \neq j \end{cases}$$

ahol: $l = n(n - 1)/2$

ϱ_{ij} a δ_{ij} különbözőségeket rangszáma.

A kezdeti pontok meghatározásához csak az adatok sorrendiségét használjuk fel.

Az iteráció következő lépéseiben a „legmeredekebb lejtő” módszert alkalmazzuk, ahol a pontok koordinátáit a gradiens módszer alapján változtatjuk:

$$x_{jt}^{(p+1)} = x_{jt}^{(p)} - \alpha_p \left\{ \frac{\partial S}{\partial x_{jt}} \right\}^{(p)}$$

ahol α_p optimálisan választott lépéshossz,
 p az iterációs lépés sorszáma.

3.2. Monoton regressziós eljárás

A *Kruskal*-féle algoritmus \hat{d} értékeinek olyan halmazát keresi, amely monoton függvénye a különbözőségeknél és minimalizálja a távolságoktól mért eltérés négyzetösszegét:

$$\sum_{jk} (d_{jk} - \hat{d}_{jk})^2 \rightarrow \min.$$

Az algoritmus menete a következő: a páronkénti különbözőségeket monoton növekvő sorrendbe rendezzük. Így az első (jk) indexpárhoz a legkisebb, az utolsóhoz pedig a legnagyobb különbözőség tartozik. E sorrend szerint rendezzük az iteráció során kapott konfiguráció d_{jk} távolságait is. Ha az illeszkedés tökéletes, akkor a távolságok ebben a rendezésben már monoton növekedőek. Vegyük a legkisebb különbözőségi indexhez tartozó d értéket és amíg nem találunk nála nagyobb d értéket, helyettesítsük az első d -t és az őt követő nála nem nagyobb értékeket az átlagukkal. Ezután a „nagyobb értékből” kezdjük a vizsgálódást, az előbbihez hasonlóan keressük a következő nála nagyobb d értéket, a közbeeső és kiinduló értékeket pedig az átlagokkal helyettesítjük. Ez az eljárás addig folytatódik amíg az átlagokra is teljesül, hogy monoton nem csökkenő sorozatot alkotnak. Ezek az átlagos értékek adják a keresett \hat{d} értékeket.

3.3. Rang-kép eljárás

A *Guttman*-féle rang kép módszer a távolságok permutációjával határozza meg d^* értékeit. Ez a következő rendezést jelenti: legyen δ_p a különbözőségek

nagyság szerinti sorrendjében a p -edik elem, d_p pedig a távolságok sorrendjében a p -edik elem. Ekkor d_p a δ_p különbözőségi érték rang-képe lesz. Más szavakkal, ha δ_{jk} rangszáma p , és a d_{ip} távolság a távolság rangsorában a p -edik elem, akkor d_{ip}^* egyenlő d_{ip} értékével. A d^* értékek általában nem minimalizálják a $\sum_{jk} (d_{jk} - d_{jk}^*)^2$ kifejezést adott d_{jk} értékek esetén. Ezért a MINISSA eljárásban d^* értékét csak az iteráció első lépésében számítjuk ki, a további lépéseket a regressziós eljárással végezzük.

A monoton regressziós \hat{d} értékek és a rangkép eljárás d^* értékeinek számítását illusztrálja az 1. táblázat. (Az adatok forrása: Inter-University Research Councils Series, Report No. 32. May 1977.)

1. táblázat
Az $f(\delta)$ értékek illesztésének bemutatása

1/a

Különbözőségeik δ	Távolságok d	Átlagolás			\hat{d}	d^*
1	12	10	10	10	10	6
2	8	10	10	10	10	8
3	10	10	10	10	10	9
4	11	11	11	11	11	10
5	18	18	12	12	11 3/4	11
6	6	6	12	12	11 3/4	12
7	14	14	14	11 1/2	11 3/4	14
8	9	9	9	11 1/2	11 3/4	17
9	17	17	17	17	17	18
.
stb.

1/b

Hasonlóságok δ		Távolságok d	A d értékek rangszámai		\hat{d}		d^*	
csopor- tosított	nem csoportosított		csopor- tosított	nem csoportosított	első	második	első	második
1	3	2,0	3	7	4,25	4,83	5,0	6,67
1	1	8,0	1	1	8,0	4,83	8,0	6,67
1	2	3,0	2	6	4,25	4,83	7,0	6,67
2	6	4,0	2	4	4,0	4,83	3,0	3,33
2	5	5,0	1	3	4,25	4,83	3,0	3,33
2	4	7,0	1	2	4,25	4,83	4,0	3,33
3	8	2,0	3	8	2,0	2,0	2,0	1,67
3	9	1,0	3	9	1,0	2,0	1,0	1,67
3	7	3,0	2	5	3,0	2,0	2,0	1,67

3.4. A sokdimenziós skálázás dimenzióinak értelmezése

A MINISSA eljárás a koordináták X mátrixát minden lépésben normálja:

a) a koordináták átlaga minden tengelyen nulla:

$$\sum_j x_{jt} = 0. \quad t = 1, \dots, r$$

b) a koordináták négyzetösszege egyenlő n -el:

$$\sum_{jt} x_{jt}^2 = n.$$

A fenti feltételekből következik, hogy az euklideszi távolságok négyzetösszege egyenlő n^2 -el.

c) a tengelyeket úgy transzformálja az eljárás, hogy a koordináták a különböző dimenziókban korrelálatlanok:

$$\sum_k x_{jt} x_{kt} = 0 \quad \forall t = l \text{ esetén.}$$

Nem alkalmazunk rotációt, ha nem-euklideszi távolságokat használunk, ilyen esetekben a tengelyek korreláltak lesznek.

A sokdimenziós skálázás output pontábrájának értelmezése az ábrázolt „pontok” irányainak vizsgálatával oldható meg. Ha a skálázás terének minden iránya nem is, de a koordináta tengelyek iránya viszonylag jól értelmezhető. Ehhez segítséget ad a vizsgált jellemzők és a tengelyek páronkénti korreláció együtthatója. A regresszióelemzés alkalmazható annak a hipotézisnek a tesztelésére, hogy a pont-ábra adott elhelyezkedésével egy változóhalmaz kapcsolatban van-e. Az ábra koordinátáinak olyan kombinációját keressük, amely jól becsüli, jól magyarázza a változókat. Az eredmények jóságát a többszörös korreláció méri.

Arra nincs szigorú szabály, hogy az induló adatrendszernek és a MINISSA eljárás eredményeként kapott konfigurációnak az eltérését mérő S (vagy K) értékét hogyan minősítsük. Gyakorlati számítások alapján a következő kategóriák alakíthatók ki az illeszkedés jóságára:

$S < 0,05$	kiváló
$0,05 \leq S < 0,10$	jó
$0,10 \leq S < 0,15$	közepes
$0,15 \leq S < 0,20$	elfogadható
$0,20 \leq S$	gyenge.

A *Guttman*-féle K érték általában 1,4-szer nagyobb mint S értéke. Ugyanazon adathalmaz esetén általában várható, hogy a dimenziók számának növekedésével jobb illeszkedéshez, alacsonyabb S értékhez jutunk. Ez azonban nem minden esetben teljesül, előfordulhat, hogy az iterációk megengedett számán belül csak lokális optimumhoz jutunk.

3.5. Példa a MINISSA eljárásra

Milton Rokeach amerikai nemzeti mintán (1409 felnőtt, húsz év alatti lakos) 36 eszköz- és célérték struktúráját vizsgálta 1967–68-ban. A 18 cél- és 18 eszközérték vizsgálatát az Életmód, Életminőség és Értékrendszer vizsgálat (HANKISS E., MANCHIN R., FÜSTÖS L. 1978) megismételte magyar országos reprezentatív mintán (808 fő). A kérdés így hangzott:

„Kérem, rendezze ezeket az értékeket sorrendbe, aszerint, hogy mint irányelvek, milyen fontos szerepet játszanak az Ön életében. Tanulmányozza gondosan a kártyákat, azután válassza ki közülük a legfontosabbat. Tegyük itt le az asztalra, legfölül. Most válassza ki a sorrendben következő legfonto-

sabbat. Tegyük a másik alá. És így tovább. Mikor elkészült, lapozza végig még egyszer a kártyákat s ellenőrizze, hogy helyes-e a sorrend. S ha megvan, akkor engedje meg, hogy leírjam a sorrendet.”

Ezután 18 cél- és 18 eszközértéket kellett külön-külön sorbarendezi. Mérési értéként tehát rangszámokat kaptunk.

A 18 cél- és 18 eszközérték a következő:

1. Anyagi jólét (jómód, bőség)
2. Béke (háborútól és konfliktusoktól mentes világ)
3. Boldogság (megelégedettség)
4. Bölcsesség (életbölcesség)
5. Családi biztonság (szeretteinkről való gondoskodás)
6. Belső harmónia (belső feszültségtől mentes élet)
7. Egyenlőség (testvériség, mindenki számára azonos lehetőség)
8. Az elvégzett munka öröme (teljesítmény, hasznosság)
9. Érdekes, változatos élet (élményekben gazdag, aktív élet)
10. A haza biztonsága (külső támadásokkal szembeni védettség)
11. Igazi barátság (szoros emberi kapcsolat)
12. Igaz szerelem (meghitt testi és lelki kapcsolat)
13. Kellemes, élvezetes élet (örömök, sok szabadidő)
14. Emberi önérzet (öntudat, önbecsülés)
15. Szabadság (függetlenség, választás lehetősége)
16. A szépség világa (a természet és a műalkotás szépsége)
17. Társadalmi megbecsülés (elismerés, tisztelet)
18. Üdvözülés (megváltás, örök élet)
19. Alkotó szellem (újító, eredeti gondolkodású)
20. Bátor, gerinces (kiáll a nézeteiért)
21. Előítéletektől mentes (elfogulatlan, nyílt gondolkodású)
22. Engedelmes (kötelességtudó, tisztelettudó)
23. Értelmes (gondolkodó, intelligens)
24. Fegyelmezett (önuralommal rendelkező)
25. Felelősségteljes (megbízható, felelősségtudó)
26. Hatékony (hozzaértó, szakszerű)
27. Jókedélyű (vidám, könnyű szívű)
28. Logikus gondolkodású (racionális, ésszerű)
29. Megbocsátó (nem bosszúálló)
30. Önálló (független, erős egyéniség)
31. Segítőképz (mások jólétéért dolgozik)
32. Szavahihető (becsületes, őszinte)
33. Szeretettel teljes (ragaszkodó, gyöngéd)
34. Tiszta (rendes, ápolat)
35. Törekvő (szorgalmas, vinni akarja valamire)
36. Udvarias (jó modorú, jól nevelt)

A 18 cél- és 18 eszköztérték terében 25 társadalmi csoportot vizsgáltunk.

A társadalmi csoportok az értéktérben

Település

- 1. Falu
- 2. Kisváros
- 3. Nagyváros
- 4. Budapest

Életkor

- 5. 20–29 éves
- 6. 30–39 éves
- 7. 40–49 éves
- 8. 50–59 éves
- 9. 60–69 éves

Iskolai végzettség (években)

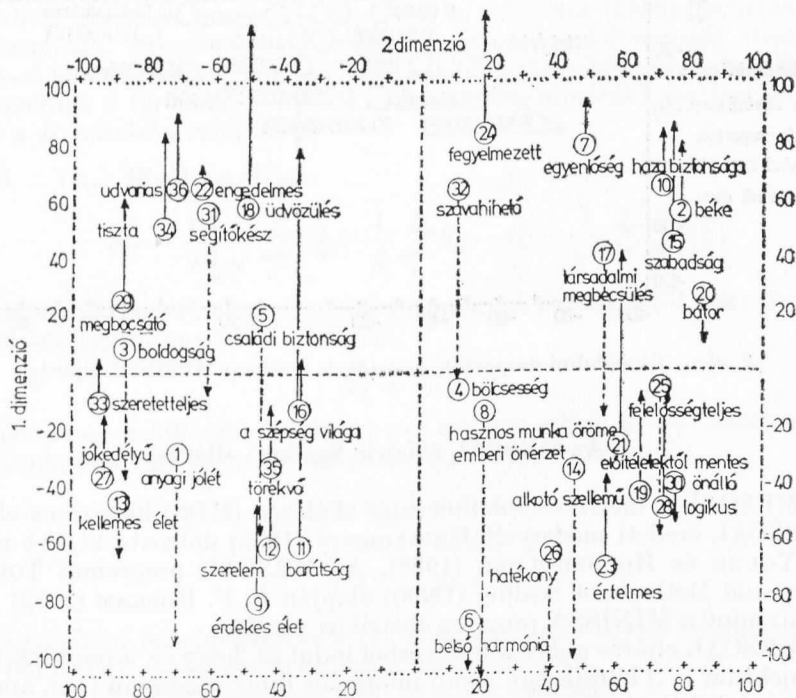
- 10. 4 év vagy kevesebb
- 11. 5–8 év
- 12. 9–11 év
- 13. 12 év
- 14. 13–15 év
- 15. 16–17 év
- 16. 18 év vagy több

Jövedelem (személyes jövedelem)

- 17. 1000 Ft vagy kevesebb
- 18. 1001–2000 Ft
- 19. 2001–2500 Ft
- 20. 2501–3000 Ft
- 21. 3001–4000 Ft
- 22. 4001–6000 Ft
- 23. 6001 Ft vagy több

Nem

- 24. Férfi
- 25. Nő

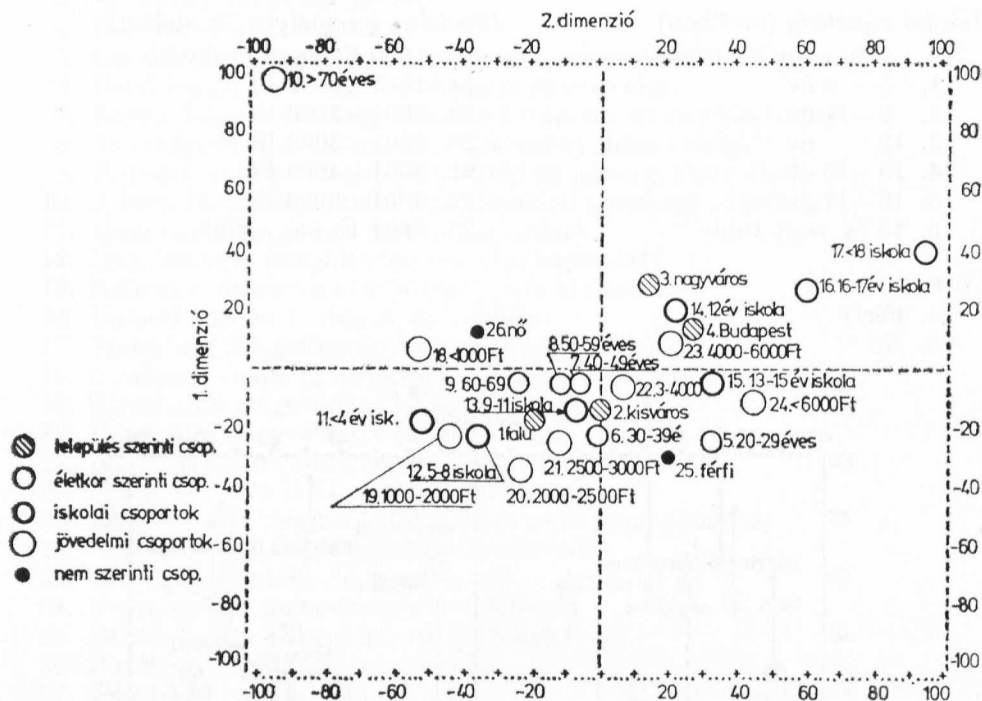


2. ábra. Az értékek axiológiai tere Magyarországon; MINISSA eljárás: három dimenziós megoldás

A módszer eredményeit a 2. és 3. ábrában mutatjuk be. Az értékek páronkénti hasonlóságait a korrelációs mátrixból képeztük az $(r + 1)/2$ képlet szerint. A társadalmi csoportok eltéréseit az értékválasztásaik mediánjaiból számítottuk euklideszi távolság alapján (δ_{ij}) :

$$\delta_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{36} (y_{ik} - y_{jk})^2.$$

Az eredmények értelmezését az olvasó az Értékszociológiai Elemzések Műhelye más kiadványaiban találhatja meg.



3. ábra. Társadalmi csoportok az értékek terében; MINISSA eljárás

4. Az MRSCAL (Metric Scaling) eljárás

Az MRSCAL a metrikus sokdimenziós skálázás (MDS) klasszikus eljárása. Az MRSCAL eredeti módszerét RICHARDSON (1938) dolgozta ki, ezt módosította YOUNG és HOUSEHOLDER (1938). Az MRSCAL programot TORGESON (Theory and Methods of Scaling (1958)) alapján F. F. ROSKAM (1972) fejlesztette ki, mint a MINISSA program metrikus párját.

Az MRSCAL eljárás abból a feltevésből indul ki, hogy az n pontnak (stimulus, objektum . . .) létezik egy olyan minimális dimenziószámú tere, amelyben a pontok közötti távolságok (d_{ij}) az eredeti térben mért különbözőségeknél δ_{ij} lineáris vagy logaritmikus transzformációjával állíthatók elő:

$$d_{ij} = f(\delta_{ij}) \quad \text{vagy} \quad d_{ij} = f(\log \delta_{ij})$$

Az MRSCAL célja megtalálni az n pont (objektum) koordinátáinak (X) azt a becslését az adott dimenzió-számú térben, amelyben a számított távolságok (d_{ij}) lineáris függvényei a minta-térben mért különbözőségeknél (δ_{ij}).

4.1. Az additív konstans probléma

Az additív konstans problémát eredetileg TORGERSON (1958) úgy fogalmazta meg, mint megtalálni azt a konstans (c), amely a megfigyelt viszonylagos távolságokat (különbözőségeket, δ_{ij}) átalakítja abszolút távolságokká (d_{ij}) olyan módon, hogy az eredményül kapott euklideszi tér dimenziószáma minimális legyen.

Ez a következőképpen fejezhető ki:

$$(1) \quad d_{ij} = \delta_{ij} + c,$$

ahol δ_{ij} : az i -edik és j -edik objektum különbözősége a megfigyelési térben
 d_{ij} : az i -edik és j -edik objektum távolsága a származtatott térben

$$d_{ij} = \left[\sum_{t=1}^r (x_{it} - x_{jt})^2 \right]^{1/2}$$

c : az additív konstans

$i, j = 1, 2, \dots, n$, n az objektumok száma.

Az additív konstans problémát MESSICK és ABELSON (1956) elemezte először részletesebben. Vizsgálták a konstans hatását a sokdimenziós struktúrára. Eljárásukban az objektumok távolságainak négyzeteiből kiszámították az objektumoknak a tér tengelyeire eső vetületei (koordináták) skaláris szorzatait, és azt a B mátrixba rendezték.

A $B = \{b_{ij}\}$ általános eleme:

$$(2) \quad b_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} \sum_j d_{ij}^2 + \frac{1}{n} \sum_i d_{ij}^2 - d_{ij}^2 - \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_j d_{ij}^2 \right]$$

A B mátrix diagonális elemei, az objektumoknak önmaguktól mért távolságai, feltételezés szerint egyenlőek nullával:

$$(3) \quad d_{ii} = \delta_{ii} = 0$$

A konstans c -t a különbözőséghez $i \neq j$ esetben adjuk hozzá. Ezért az (1) és (3) egyenleteket egy egyenletben a következőképpen írhatjuk:

$$(4) \quad d_{ij} = \delta_{ij} + c(1 - \varepsilon_{ij}),$$

ahol $\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$

A (4) egyenletet behelyettesítve a (2) egyenletbe már olyan formulát kapunk, amelyből látszik a c konstans hatása a konfigurációra.

Először a távolságok négyzete a (4) egyenlet alapján:

$$(5) \quad d_{ij}^2 = \delta_{ij}^2 + (2c\delta_{ij} + c^2)(1 - \varepsilon_{ij})$$

Ezt (2)-be behelyettesítve kapjuk (a levezetést lásd MESSICH és ABELSON (1956) 3. old.):

$$(6) \quad b_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} \sum_j^n \delta_{ij}^2 + \frac{1}{n} \sum_i^n \delta_{ij} - \delta_{ij}^2 - \frac{1}{n^2} \sum_i^n \sum_j^n \delta_{ij}^2 + \right. \\ \left. + 2c \left(\frac{1}{n} \sum_j^n \delta_{ij} + \frac{1}{n} \sum_i^n \delta_{ij} - \delta_{ij} - \frac{1}{n^2} \sum_i^n \sum_j^n \delta_{ij} \right) + c^2 \left(\varepsilon_{ii} - \frac{1}{n} \right) \right]$$

Mátrix jelölésekkel:

$$(7) \quad B = A + cE + \frac{1}{2}c^2H,$$

ahol:

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_j^n \delta_{ij}^2 + \frac{1}{n} \sum_i^n \delta_{ij} - \delta_{ij}^2 + \frac{1}{n^2} \sum_i^n \sum_j^n \delta_{ij}^2 \right) \\ e_{ij} = \frac{1}{n} \left(\sum_j^n \delta_{ij} + \frac{1}{n} \sum_i^n \delta_{ij} - \delta_{ij} - \frac{1}{n^2} \sum_i^n \sum_j^n \delta_{ij} \right) \\ h_{ij} = -\frac{1}{n}, \quad i \neq j \quad \text{és} \quad h_{ii} = 1 - \frac{1}{n}.$$

A B mátrix diagonális elemei:

$$(8) \quad b_{ii} = \frac{1}{n} \sum_j^n \delta_{ij}^2 - \frac{1}{2n^2} \sum_i^n \sum_j^n \delta_{ij}^2 + c \left(\frac{2}{n} \sum_j^n \delta_{ij} - \frac{1}{n^2} \sum_i^n \sum_j^n \delta_{ij} \right) + \frac{1}{2}c^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Ha a B mátrix legnagyobb sajátértéke β_1 és a hozzá tartozó sajátvektor x_1 , akkor

$$(9) \quad Bx_1 = \beta_1 x_1.$$

MESSICK és ABELSON a nagy sajátértékeket összeadta:

$$(10) \quad \sum_i^r \beta_i = x'_1 Bx_1 + \dots + x'_r Bx_r$$

és a (10)-be beírta a (7) egyenletet, majd egyszerűsítésekkel olyan egyenlethez jutott, amelyből már a c értékét kiszámíthatta:

$$(11) \quad \sum_i^r \beta_i = \sum_i^r x'_i A x_i + c \sum_i^r x'_i E x_i + \frac{1}{2}c^2 \sum_i^r x'_i H x_i.$$

A H mátrix speciális szerkezete miatt a (11) egyenlet a következőképpen írható:

$$(12) \quad \sum_i^r \beta_i = \sum_i^r x'_i A x_i + c \sum_i^r x'_i E x_i + \frac{1}{2}rc^2.$$

Messich és Abelson a (12) egyenlet megoldásával kapta meg a konstans értéket azzal a feltételezéssel, hogy a maradék sajátértékek $(n-r)$ nullák.

Messich és Abelson megoldásának a problémáját az a feltételezés adja, hogy az „igazi” megoldásban a pozitív sajátértékeknek van egy minimális száma, a többi gyök pedig nulla. A gyakorlatban ez a feltételezés csak ritkán teljesül. Egy másik probléma adódik, ha nagy abszolút értékű negatív gyök merül fel. Ilyen esetben a kutató bajba kerül, mivel ezt nem tudja interpretálni, ha csak nem tételezi fel, hogy ez a hiba-hatás, és így nem értelmezi.

COOPER (1972) a fenti problémák miatt az additív konstans új megoldását kereste. Abból indult ki, hogy a metrikus skálázásnál van egy hiba tag:

$$(13) \quad d_{ij} = \delta_{ij} + c + e_{ij}.$$

Cooper kereste azt a konstans, amelyik a hiba tag függvényét minimalizálja:

$$(14) \quad G = \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_{j \neq i}^n e_{ij}^2 \rightarrow \min.$$

A G függvény kifejtve:

$$(15) \quad G = \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_{j \neq i}^n \left((\delta_{ij} + c)^2 \right) + \sum_k^r (x_{ik} - x_{jk})^2 - 2(\delta_{ij} + c) \left[\sum_k^r (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{1/2},$$

A G függvény c szerinti parciális deriváltja:

$$(16) \quad \frac{\partial G}{\partial c} = \sum_i^n \sum_j^n \delta_{ij} + n(n-1)c - \sum_i^n \sum_j^n \left[\sum_k^r (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{1/2} = 0.$$

Ha a különbözőségeket úgy adjuk meg, hogy átlaguk nulla, a (16) egyenletből c értékét a következőképpen határozzuk meg:

$$(17) \quad c = \frac{1}{n(n-1)} \sum_i^n \sum_j^n \left[\sum_k^r (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{1/2}.$$

A hiba függvénynek (G) az objektumok vetületei (x_{ik}) szerinti parciális deriváltjai, ha figyelembe vesszük, hogy a távolságok invariánsak a tér origójának változtatására, a következő egyenlettel fejezhetők ki (lásd részletesebben: COOPER 1972):

$$(18) \quad \frac{\partial G}{\partial x_{j^*k^*}} 2 \left[n x_{j^*k^*} - \sum_{i \neq j^*}^n (\delta_{ij^*} + c) \right] \cdot (x_{j^*k^*} - x_{ik^*}) \left(\sum_k^r (x_{j^*k} - x_{ik})^2 \right)^{1/2}.$$

Cooper a megoldást a Fletcher–Powell iterációs eljárással kereste. (Megjegyzendő, hogy a Fletcher–Powell eljárás hatékonyságát a fenti sokváltozós függvény minimalizálására GRUVAEUS és JÖRESKOG (1970) megvizsgálta, és azt hatékonyan találta.)

A Fletcher–Powell eljárás felhasználásával programot is készítettek az additív konstans és az objektumok koordinátái megkeresésére COSCAL néven. A COSCAL-t FORTRAN-IV. nyelven írták IBM OS 360/91 számítógépre. A program lehetőségként megengedi kezdeti konfiguráció megadását. Különbözőben az additív konstansnak olyan becslését keresi, amelyhez olyan abszolút távolságok tartoznak, hogy a legkisebb távolságok is nagyobbak nullánál.

Az abszolút távolságokból a (2) egyenlettel számolt skaláris szorzat mátrix első r főkomponensét felelteti meg az r -dimenziós tér kezdeti konfigurációjának. Az illesztés jóságát a következő mutatóval méri:

$$(19) \quad FIT = 1 - \frac{\sum_{i < j}^n e_{ij}^2}{\sum_{i < j}^n (\delta_{ij} - \delta_{i..})^2}.$$

4.2. Az MRSCAL módszere

Az MRSCAL eljárás keresi az n pontnak azt a konfigurációját az adott r dimenzió-számú output térben, amelyre a következő összefüggés igaz:

$$(20) \quad d_{ij} = f(\delta_{ij}),$$

ahol: δ_{ij} : az i és j pont között a megfigyelési (minta) térben mért különbözőség

d_{ij} : az r -dimenziós származtatott (redukált térben mért) távolság (Minkowski metrika)

$$d_{ij} = \left\{ \sum_k^r |x_{ik} - x_{jk}|^p \right\}^{1/p}$$

f : a δ_{ij} -k megengedett függvénye.

Az MRSCAL programban az „ f ” függvény lineáris: $d = a\delta + b$, de lehetőség van a különbözőségek logaritmikus transzformációjára: $d = a(\log \delta) + b$.

Az eljárás az illeszkedés jóságát mérő K (coefficient of alienation) együtthatót minimalizálja:

$$(21) \quad K = \sqrt{1 - \frac{\left\{ \sum_{ij} d_{ij} \cdot f(\delta_{ij}) \right\}^2}{\sum_{ij} d_{ij}^2 \cdot \sum (f(\delta_{ij}))^2}}.$$

A monotonitási együtthatót a K együtthatóból a következőképpen számítja:

$$(22) \quad MU = \sqrt{1 - K^2}.$$

Az MRSCAL a K együttható minimalizálását iterációval végzi. Az iteráció két fázisból áll. Az iteráció első fázisában keressük a pontoknak azt a konfigurációját ($x^{(s+1)}$) amelyben a d_{ij} távolságok legjobban illeszkednek az $f(\delta_{ij})^{(s)}$ értékhez, amelyet az előző iteráció második fázisában számítottunk. A pontok koordinátáit a „legmeredekebb lejtő” (the steepest descent) módszerrel változtatjuk:

$$(23) \quad x_{jt}^{(s+1)} = x_{jt}^{(s)} - \alpha_s \left\{ \frac{\partial K}{\partial x_{jt}} \right\}^{(s)}$$

(Az α_s az optimálisan választott lépéshossz.)

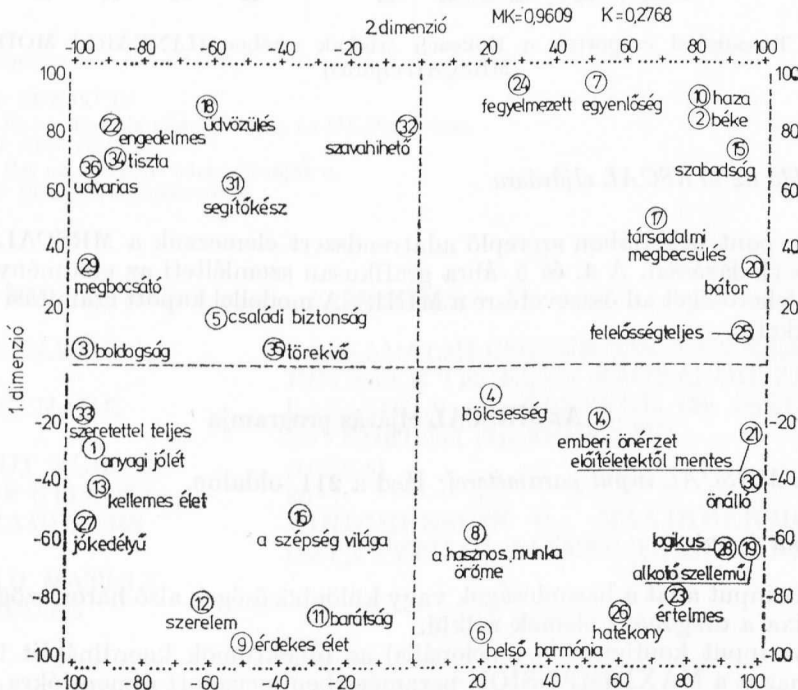
Az iteráció *második fázisában* keressük a δ_{ij} adatoknak azt a függvényét (f), amely a legjobban illeszkedik az első fázisban kapott d_{ij}^0 értékekhez. A második fázisban a legkisebb négyzetek módszere értelmében legjobban illeszkedő regressziós függvényt határozzuk meg. A kezdő lépésben megadhatunk egy kezdeti konfigurációt, vagy a programra bízhatjuk annak előállítását. Ekkor a kezdeti pontok a C mátrix főkomponensei. A C mátrix elemei:

$$(24) \quad \{c_{ij}\} = A_{ij} \sum_k \frac{\delta_{ik}^0}{a} - \frac{\delta_{ij}^0}{a}$$

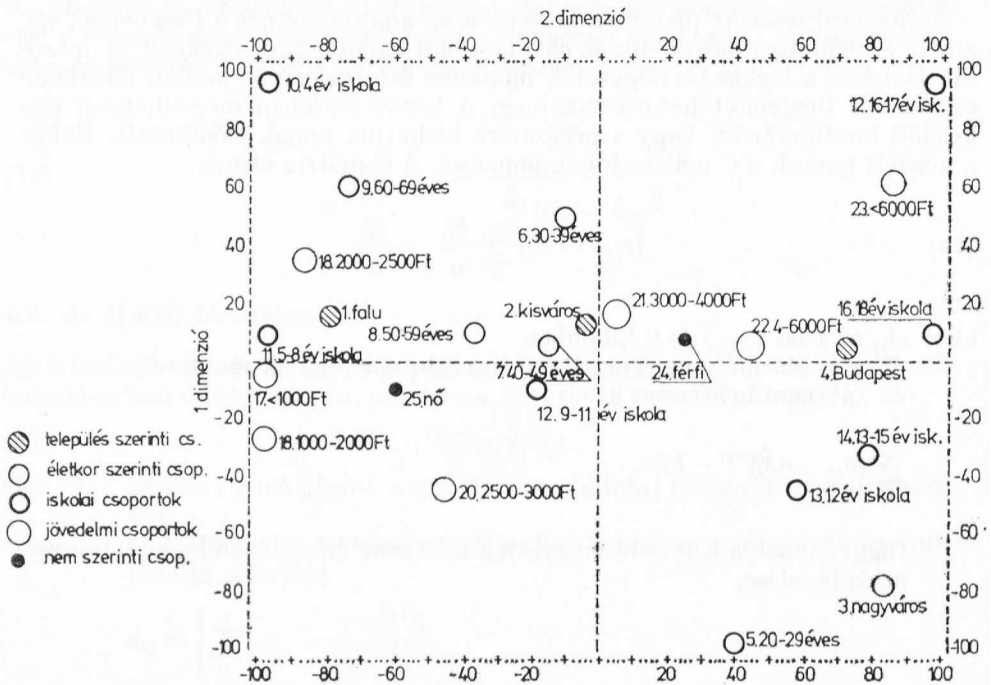
ahol $A_{ij} = 1$ ha $i = j$ és 0 különben
 δ_{ik}^0 a δ_{ik} bármely megengedhető transzformációjának maximuma az „a” nem más, mint a

$$\sum_{ij} (\delta_{ij} - a\delta_{ij}^{s-1} - b)^2$$

függvénynek a legkisebb négyzetek módszere értelmében legjobb regressziós becslése.



4. ábra. Rokeach értékek a magyar társadalomban (LINEÁRIS MODELL, MRSCAL eljárás)



5. ábra. Társadalmi csoportok a Rokeach értékek terében (LINEÁRIS MODELL, MRSCAL eljárás)

4.3. Példa az MRSCAL eljárásra

A 3.5. pont példájában szereplő adatrendszer elemzések a MRSCAL sokváltozós skálázással. A 4. és 5. ábra grafikusán szemlélteti az eredményeket, egyben lehetőséget ad összevetésre a MINISSA modellel kapott számítási eredményekkel.

5. Az MRSCAL eljárás programja

5.1. Az MRSCAL input paramétereit: lásd a 211. oldalon.

5.2. Adat input

- Az input adat a hasonlóságok vagy különbözőségek alsó háromszög mátrixa a diagonális elemek nélkül.
- Az input konfiguráció (opcionális) az objektumok koordinátáit tartalmazza a MAXDIMENSION paraméterben megadott dimenziókra.

Kulcsszó	Belső érték	Funkció
MINDIMENSION	2	Az elemzés minimális dimenziójának a száma
MAXDIMENSION	4	Az elemzés maximális dimenziójának a száma. A megoldás a MAXDIMENSION-tól a MINDIMENSION-ig történik
DATA TYPE	0	0: ha az input adatok hasonlóságok 1: ha az input adatok különbözőségek
PLOT	1	0: nem ad ábrát az outputon 1: ábrát ad az outputon
PUNCH	0	0: kilyukasztja a koordinátákat 1: a végső megoldás koordinátáit kilyukasztja
LINEAR TRANSFORMATION	0	0: Nem végez lineáris transzformációt 1: Lineáris transzformációt végez
LOG TRANSFORMATION	0	0: Nem végez logaritmikus transzformációt 1: Logaritmus transzformációt végez
CRITERION	0,00001	Kritérium érték az iteráció terminálásához
MINKOWSKI METRIC	2	A Minkowski metrika paramétere ($p = 2$ esetben egyenlő az euklideszi távolsággal)
MATFORM	0	(Csak akkor érvényes, ha READ CONFIG utasítást használjuk) 0: Az input konfiguráció sora az objektumok az oszlopai a dimenziók 1: Az input konfiguráció sorai a dimenziók, az oszlopai az objektumok

Megjegyzés:

OF SUBJECTS

Ez az utasítás nem érvényes az MRSCAL-ban.

OF STIMULI

Ezt az utasítást felcserélhetjük a

OF POINTS utasítással.

5.3. Példa egy futás inputjának megadására

RUN NAME	TÁRSADALMI CSOPORTOK A ROKEACH
TASK NAME	ÉRTÉKEK TERÉBEN MAGYARORSZÁGON
INPUT FORMAT	LAKÓHELY (4), ÉLETKOR (5), ISKOLA (6),
N OF STIMULI	JÖVEDELEM (7), FÉRFI, NŐ
PARAMETERS	(10F8.5)
READ MATRIX	25
COMPUTE	MINDIMENSION (2), MAXDIMENSION (3), DATA TYPE (1), LINEAR TRANSFORM (1)

5.4. Az MRSCAL outputja

1. A paraméterek beállított értékeinek a listája.
2. Az adatok logaritmikus transzformációja (ha kértük).
3. A kezdeti konfiguráció mátrixa.
4. A monotonitási együttható (MU) táblázata.
5. A végső konfiguráció koordinátái és a MU és K együtthatók értéke.
6. A reprodukált távolságok a Minkowski metrikával.
7. A különbözőségeknek a transzformált mátrixa.
8. Az objektumok pontábrája.

A program a 4–8. pontokat ismétli a különböző dimenziószámú megoldásokra, eredményeinek nyomtatásakor.

(Beérkezett: 1981. május 4-én.)

IRODALOM

- COMBS, C. H.—KAO, R. C.: On a Connection between Factor Analysis and Multidimensional Unfolding. PSYCHOMETRIKA — Vol. 25. No. 3. Sept. 1960.
- FLETCHER, R. and POWELL, M. J. D.: A rapidly converging descent method for minimization. Computer Journal, 2, 163—168., 1963.
- GRUVAEUS, G. T. and JÖRESKOG, K. G.: A computer program for minimizing a function of several variables. Educational Testing Service Research Bulletin. RB-70-14., 1970.
- KRUSKAL, J. B.: Multidimensional Scaling by optimising goodness of fit to a non-metric hypothesis. PSYCHOMETRIKA, 29, 1—27, 115—129., 1964.
- KRUSKAL, J. B.: The Relationship between Multidimensional Scaling and Clustering in Classification and Clustering. ed by I. Van RYZIZ Academic Press; New York 1977.
- LIFF, C. N.: Orthogonal rotation to congruence. PSYCHOMETRIKA, 31, 33—42., 1966.
- MESSICK, B. J. and ABELSON, R. P.: The additive constant problems in multidimensional scaling. PSYCHOMETRIKA, 21, 1—17., 1956.
- RICHARDSON, M. W.: Multidimensional psychophysics PSYCHOLOGICAL BULLETIN 35., 1938.
- ROSKAM, E. E.: MESCAL: An algorithm for multidimensional scaling by metric transformation of data. Nijmegen: PROGRAM BULLETIN 70%, (106) 659—660., (1972a).
- SCHÖNEMANN, P. H.: A generalized solution of the orthogonal procrustes problem. PSYCHOMETRIKA, 21, 1—10., 1966.
- ROGERSON, W. S.: Theory and Methods of Scaling. New York, 1958.
- YOUNG, G. and HOUSEHOLDER, A. S.: Discussion of a set of points in terms of their mutual distances. PSYCHOMETRIKA, 3., 19—22., 1938.