Kornai János—Simonovits András

Egy makronövekedési modell matematikai tulajdonságairól

1. Bevezetés

Cikkünk egy növekedési modellt elemez, amely — elmélettörténeti előzményeit tekintve — elsősorban Harrod, Neumann és Kalecki modelljeivel rokon.[1] A modell feltevéseinek, változóinak és egyenleteinek részletes közgazdasági értelmezése és indokolása a ,,Növekedés, hiány és hatékonyság'' című könyvben található.[2] Az a néhány mondat, amelyet ebben a cikkben a modell közgazdasági jellemzésére szánunk, nem pótolja a könyv megismerését. Jelen cikkünk célja a könyv közgazdasági mondanivalójának *kiegészítése* a modell néhány tulajdonságának egzakt bemutatásával, s az ezzel kapcsolatos tételek matematikai bizonyításával.

A modell makroszinten, tehát mindennemű ágazati bontás nélkül írja le a gazdaság számos fontos összefüggését. Magában foglalja mind a reálszféra, mind a szabályozási szféra leírását. (Ez utóbbiban különbözik számos más növekedési modelltől, amely csak a reálszféra leírására szorítkozik.) A reálszféra modellezésében alkalmazott feltevések eléggé általánosak; többé-kevésbé megegyeznek a lineáris növekedési modellek szokásos feltevéseivel. Ezek tehát nem mutatnak rendszer-specifikus — csak a *szocialista* gazdaságra jellemző — vonásokat. Ezzel szemben a szabályozási szféra modellje rendszer-specifikus. Olyan összefüggéseket emel ki, amelyek kifejezetten a szocialista gazdaságra jellemzőek. (Például a beruházások volumenének szabályozása különböző mennyiségi jelzések hatására stb.)

A modell szemléltetni akarja azt a gondolatot, hogy a szocialista gazdaságban meghatározott *belső szabályosságok* működnek (,,válaszfüggvények'', különböző belső jelzésekre reagáló visszacsatolások, normák stb.). E szabályosságok érvényesülése biztosítja, hogy a rendszer — meghatározott külső feltételek mellett — képes konszolidált, ,,normális'' működésre. Ha normál pályájáról letérne, a belső szabályozási mechanizmusok képesek visszaterelni oda. E gondolatokat támasztják alá — az absztrakt elemzés síkján — a jelen cikkben tárgyalt tételek a rendszer normál pályájáról és a norma szerinti szabályozás stabilitásáról.

A modell kísérletet tesz a hiány újfajta makroszintű modellezésére. A Z *szintétikus hiány index* a rendszer latens változója.[3] Összevont formában fejezi

[1] E modellek ismertetését lásd például Andorka—Dányi—Martos [2], valamint Ligeti—Sivák [4] könyveiben.

[2] A [3] könyv alapjául szolgáló modellt *Kornai János* szerkesztette, s ő végezte el az ezzel kapcsolatos közgazdasági elemzést. *Simonovits András* már a könyv írásakor is segítségére volt a modell matematikai tulajdonságainak vizsgálatában. A jelen cikk számára Simonovits András végezte el a tételek matematikai bizonyítását.

[3] A latens változók értelmezéséről és ökonometriai kezeléséről lásd például Herman Wold [5] és Aigner—Goldberger [1] könyvét. Magyarországon *Meszéna Gy.*, *Ziermann M.* és *Rimler J.* végeztek bizonyos tekintetben rokon feladatok megoldására irányuló vizsgálatokat.

ki a gazdaságban megfigyelhető sokféle részleges hiánymutató együttmozgását. A makrodinamikai modellen belül e változó kétféle szerepet játszik. Egyrészt: *információs* változó; jelzésére reagál a modell sokféle döntési változója. Másrészt: *reál*hatást gyakorol az input-output arányokra: a folyó és a beruházási inputok felhasználására és a munka termelékenységére.

A modell jelen stádiumban kizárólag az absztrakt (,,tiszta'') elméleti elemzés céljaira használható. A ,,Növekedés, hatékonyság és hiány'' c. könyv is elméleti síkon foglalkozik olyasféle kérdésekkel, mint például a rendszer (matematikai értelemben vett) stabilitása, a foglalkoztatás és a hatékonyság kérdései, a növekedés extenzív és intenzív[4] szakasza és így tovább. Ha a kutatás egy későbbi szakaszában ökonometriai alkalmazásra törekednénk, akkor ehhez a modell számottevő átalakítására lenne szükség, nem utolsósorban annak figyelembevételével, hogy milyen adatok állnak rendelkezésre a paraméterek becsléséhez.

2. Az egyenletrendszer részletes formája

Az alábbiakban ismertetjük a modell egyenletrendszerét. A közgazdasági értelmezést néhány helyen az egyenlet egyes tagjai alá tördelt rövid verbális magyarázattal adjuk meg, másutt viszont szükség lesz részletesebb kifejtésre és indokolásra.

2.1. REÁLSZFÉRA: *Készletegyenletek*

Outputkészlet

$$(2.1)\qquad \underbrace{U(t)}_{\boxed{\text{output-készlet}}} = U(t-1) + \underbrace{X(t-1)}_{\boxed{\text{termelés}}} - \underbrace{Y(t-1)}_{\boxed{\text{vállalati vásárlás}}} - \underbrace{H(t-1)}_{\boxed{\text{háztartási vásárlás}}}\,.$$

Inputkészlet

$$(2.2)\qquad \underbrace{V(t)}_{\boxed{\text{input-készlet}}} = V(t-1) + \underbrace{Y(t-1)}_{\boxed{\text{vállalati vásárlás}}} - \underbrace{A(t-1)}_{\boxed{\text{folyó input}}} - \underbrace{B(t-1)}_{\boxed{\text{beruházási input}}}\,.$$

Beruházási elkötelezettség

$$(2.3)\qquad K(t) = \sum_{\vartheta=1}^{G-1} \sum_{\tau=\vartheta+1}^{G} \beta_M(\tau) M(t-\vartheta)$$

A modell,,évjárati'' (vintage) szemléletben írja le a beruházási folyamatot. A t-edik évben $M(t)$ volumenű *beruházási évjárat* indul, amelynek megvalósítása összesen G éven át tart; a *G gesztációs idő* exogén paraméter. A volument a tervezett beruházási kiadásokkal mérjük; a tényleges beruházási ráfordítás – a hiány függvényében – eltérhet ettől, amint az majd a (2.5) egyenletből kitűnik.

[4] Ebben a dolgozatban csak az extenzív növekedési szakasszal foglalkozunk, s figyelmen kívül hagyjuk az intenzív szakaszra vonatkozó kiegészítéseket és módosításokat.

Az $M(t)$ volumenből rendre $\beta(1)\, M(t), \beta(2)\, M(t+1), \ldots, \beta(G) M(t+G-1)$ beruházási input lenne esedékes, ha a kiadások az eredeti terv szerint alakulnának, ahol $\beta(\tau)$ a beruházási évjárat *megvalósítási részaránya* ($\Sigma_{\tau=1}^{G} \beta(\tau) = 1$).

A $K(t)$ *beruházási elkötelezettség* a még megvalósítás alatt álló beruházási évjáratokból még hátralevő, esedékes inputokat összegezi.

2.2. REÁLSZFÉRA: *Input-output kapcsolatok*

Folyó input

$$A(t) = \alpha_X X(t) + \alpha_Z\big(Z(t) - Z^*(t)\big). \tag{2.4}$$

Az $A(t)$ *folyó input* két tételből tevődik össze. Az első a termeléssel arányos; α_X a *folyó input együttható*. Kizárólag a termeléstől függne a folyó input, ha a tényleges hiány egyenlő lenne a normál hiánnyal. Amennyiben a tényleges hiány nagyobb a normálisnál, akkor — az egyenlet jobb oldalának második tagja szerint — nagyobb lesz a folyó input; ellenkező esetben pedig kisebb.

Beruházási input

$$B(t) = \sum_{\vartheta=0}^{G-1} \beta_M(\vartheta+1)\, M(t-\vartheta) + \beta_Z\big(Z(t) - Z^*(t)\big). \tag{2.5}$$

beruházási input	a megvalósítás alatt álló évjáratok esedékes beruházási inputja, normál hiány mellett	a normál hiánytól való eltérés függvényében hozzáadandó (vagy levonandó) beruházási input

Munkahelyteremtés

$$J(t) = \chi \Phi^t M(t), \tag{2.6}$$

ahol $J(t)$ a t-edik évben kezdődött évjárat által teremtett *munkahelyek* száma, χ a *kezdeti munkahely-teremtési együttható*, Φ pedig a *munkahelyteremtés növekedési tényezője*. A formula azt az ismert tendenciát fejezi ki, hogy a műszaki fejlődés nyomán évjáratról-évjáratra csökken az egységnyi beruházási ráfordítás által teremtett munkahelyek száma.

Beruházási évjárati termelékenység

$$q(t) = \lambda \Psi^t \tag{2.7}$$

ahol $q(t)$ a t-edik évben kezdett beruházási *évjárat munkatermelékenysége*, λ a *kezdeti évjárati munkatermelékenységi együttható*, Ψ pedig az *évjárati munkatermelékenység növekedési együtthatója*. Ez a formula is ismert tendenciát fejez ki: a műszaki fejlődés nyomán évjáratról-évjáratra nő az újabb és újabb gépeken végzett munka termelékenysége.

Standard termelékenység

$$p(t) = \sum_{\vartheta=G}^{T+G-1} J(t-\vartheta) q(t-\vartheta) / \sum_{\vartheta=G}^{T+G-1} J(t-\vartheta) - (\Psi^t / \Gamma_Z^t)\, \Pi_Z\big(Z(t) - Z^*(t)\big). \tag{2.8}$$

A jobb oldal első tagja az évjárati termelékenységek súlyozott átlaga, mégpedig aszerint súlyozva, hogy a különböző évjáratok milyen arányban vannak képviselve a t-edik évben működő állótőkében. Minél magasabb a viszonylag új évjáratok részaránya, annál magasabb értékű a tört. Nevezzük ezt a termelés/munka hányadost *műszaki termelékenységnek*. Mérnöki számításokon alapuló előzetes becslésekre épül, amelyeket azzal a várakozással alakítottak ki, hogy a hiány normális intenzitású lesz.

A második tag korrigálja a műszaki termelékenységet, attól függően, hogy a tényleges hiány erősebb-e vagy enyhébb a normálisnál. A hiány hatásával korrigált műszaki termelékenységet jelöljük $p(t)$-vel és nevezzük *standard termelékenységnek*.

Munkaerő-kereslet

$$(2.9)\qquad \underbrace{L_D(t)}_{\boxed{\text{munkaerő-kereslet}}} = \underbrace{\sum_{\vartheta=G}^{T+G-1} J(t-\vartheta)}_{\boxed{\text{munkahelyek száma}}}.$$

A T exogén paraméter az *állótőke élettartamát* adja meg. A jobb oldal a t-edik évig már befejezett évjáratok által teremtett és még mindig „élő" állótőkéhez tartozó munkahelyeket összegezi.

Foglalkoztatás

$$(2.10)\qquad \underbrace{N(t)}_{\boxed{\text{foglalkoztatás}}} = \underbrace{L_D(t)}_{\boxed{\text{munkaerő kereslet}}}.$$

Ez az egyenlet csupán a szocialista gazdaság extenzív növekedési periódusára érvényes. (Ezen a helyen nem foglalkozunk azokkal a módosításokkal, amelyeket az intenzív periódus modellezésekor kell alkalmaznunk.)

Hiány

$$\begin{aligned}(2.11)\qquad \underbrace{Z(t)}_{\boxed{\text{hiány}}} = \underbrace{Z^*(t)}_{\boxed{\text{normál hiány}}} &+ \underbrace{\zeta_K\big(K(t)-K^*(t)\big)}_{\boxed{\text{a normál beruházási elkötelezettségtől való eltérés hatása}}} + \\ &+ \underbrace{\zeta_U\big(U(t)-U^*(t)\big)}_{\boxed{\text{a normál outputkészlettől való eltérés hatása}}} + \\ &+ \underbrace{\zeta_V\big(V(t)-V^*(t)\big)}_{\boxed{\text{a normál inputkészlettől való eltérés hatása}}} + \\ &+ \underbrace{\zeta_Z\big(Z(t-1)-Z^*(t-1)\big)}_{\boxed{\text{a normál hiánytól való múltbeli eltérés hatása}}}.\end{aligned}$$

2.3. SZABÁLYOZÁSI SZFÉRA: *Szabályozási egyenletek*

Beruházási évjárat volumene

$$(2.12)\qquad \underbrace{M(t) - M^*(t)}_{\boxed{\text{a beruházási évjárat volumenének eltérése a normálistól}}} = \mu_H\underbrace{\big(H(t-1) - H^*_{\text{plan}}(t-1)\big)}_{\boxed{\text{a háztartási vásárlás eltérése a normálistól}}} - \mu_K\underbrace{\big(K(t - K^*(t)\big)}_{\boxed{\text{a beruházási kötelezettség eltérése a normálistól}}} - \mu_Z\underbrace{\big(Z(t) - Z^*(t)\big)}_{\boxed{\text{a hiány eltérése a normálistól}}}.$$

A beruházás szabályozásának fenti egyenlete — a modell formális keretei között — azt fejezi ki: a beruházásokat normális növekedésükhöz képest lefékezik, ha elmaradás mutatkozik az életszínvonal megszokott növekedéséhez képest; ha feszült a helyzet a beruházási piacon, illetve, amikor általában kiéleződött a hiány. (Lásd ezzel kapcsolatban *Bauer Tamás, Soós K. Attila* és *Lackó Mária* munkáit.)

Termelés

$$(2.13)\qquad X(t) - X^*(t) = -\xi_U\big(U(t) - U^*(t)\big) + \xi_Z\big(Z(t) - Z^*(t)\big).$$

Vállalati vásárlás

$$(2.14)\qquad Y(t) - Y^*(t) = -\eta_V\big((V(t) - V^*(t)\big) - \eta_Z\big(Z(t) - Z^*(t)\big).$$

Háztartási vásárlás

$$(2.15)\qquad H(t) - H^*_h(t) = -\chi_Z(Z(t) - Z^*(t))$$

A termelő a hiány kiéleződésére azzal felel, hogy a normál termelésnél, $X^*(t)$-nél többet termel; „rohammunkázik", túlóráztat stb. Ezzel szemben a vevők — mind a vállalati, mind a háztartási szektor — azzal reagálnak a hiány kiéleződésére, hogy a normálishoz képest visszafogják a vásárlást. A hiány miatt rosszabb összetételű, a keresletüktől nagyobb mértékben eltérő kínálatot kevésbé hajlandók átvenni. (A normálisnál enyhébb hiány esetén a hatások iránya fordított.)

Reálbéralap

$$(2.16)\qquad W(t) - W^*(t) = -\omega_H\big(H(t-1) - H^*_{\text{plan}}(t-1)\big).$$

A reálbérek emelkedése meggyorsul, ha a háztartási fogyasztás elmarad a tervezők által normálisnak tartott fogyasztási pályától.

2.4. SZABÁLYOZÁSI SZFÉRA: *Szabályozási változók normál értéke*

Beruházási évjárat normál volumene

$$M^*(t) = \Gamma_M M^*(t-1) = \Gamma_M^t M_0^*. \tag{2.17}$$

Modellünkben a beruházási volumen normál értékét exogén módon visszük rá egy exponenciális növekedési pályára.

Normál termelés

$$\underbrace{X^*(t)}_{\boxed{\text{normál termelés}}} = \underbrace{p(t)}_{\boxed{\text{standard termelékenység}}} \times \underbrace{N(t)}_{\boxed{\text{foglalkoztatás}}}. \tag{2.18}$$

Vállalati normál vásárlás

$$\underbrace{Y^*(t)}_{\boxed{\text{vállalati normál vásárlás}}} = \underbrace{\Gamma_Y}_{\boxed{\text{normál növekedési tényező}}} \times \underbrace{Y(t-1)}_{\boxed{\text{korábbi tényleges vállalati vásárlás}}}. \tag{2.19}$$

Háztartási normál vásárlás (a reálbérből levezetve)

$$\underbrace{H_h^*(t)}_{\boxed{\text{háztartási normál vásárlás}}} = \underbrace{\chi_W}_{\boxed{\text{költési hányad}}} \times \underbrace{W(t)}_{\boxed{\text{reálbéralap}}}. \tag{2.20}$$

Normál reálbéralap

$$\underbrace{W^*(t)}_{\boxed{\text{normál reálbéralap}}} = \underbrace{\omega_N}_{\boxed{\text{kezdeti reálbérráta}}} \times \underbrace{\Omega^t}_{\boxed{\text{normál növekedési tényező}}} \times \underbrace{N(t)}_{\boxed{\text{foglalkoztatás}}}. \tag{2.21}$$

2.5. SZABÁLYOZÁSI SZFÉRA: *A visszacsatolásokban szereplő jelzések normál értéke*

Normál outputkészlet

$$U^*(t) = \varrho\big(H(t-1) + Y(t-1)\big). \tag{2.22}$$

Normál inputkészlet

$$V^*(t) = \sigma\big(A(t-1) + B(t-1)\big). \tag{2.23}$$

A ϱ és σ paraméterek az összes értékesítéshez, illetve az összes inputhoz tartozó normál készlet együtthatók.

Normál beruházási elkötelezettség

$$(2.24)\qquad \underbrace{K^*(t)}_{\text{normál beruházási elkötelezettség}} = \underbrace{\Gamma_K}_{\text{növekedési tényező}} \times \underbrace{K(t-1)}_{\text{korábbi beruházási elkötelezettség}}.$$

Normál fogyasztás

$$(2.25)\qquad \underbrace{H^*_{\text{plan}}(t)}_{\text{normál fogyasztás}} = \underbrace{\Gamma_H}_{\text{növekedési tényező}} \times \underbrace{H(t-1)}_{\text{korábbi fogyasztás}}.$$

Míg a (2.20) egyenlet a reálbérből vezeti le a háztartás normál vásárlását, (2.25) a tervező elvárását fejezi ki: a lakossági fogyasztás növekedjék exponenciális növekedési pályán.

Normál hiány

$$(2.26)\qquad Z^*(t) = \Gamma_Z Z^*(t-1) = \Gamma_Z^t Z_0^*.$$

Akárcsak (2.17) esetében, itt is a Γ_Z növekedési tényező révén exogén módon visszük rá a hiány normál értékét egy exponenciális növekedési pályára.

3. Tételek és bizonyítások

Ebben a részben kimondjuk és bebizonyítjuk tételeinket.

3.1. *A részletes és a tömör-modell*

A 2. fejezetben leírt 26 egyenletes modellt *részletes* modellnek nevezzük. A modell *rekurzív*, azaz egyenletei olyan sorrendben is felírhatók, hogy minden időszakban az egyenletek *egymásután* adják a megfelelő változók értékét a korábbi időszakok és a jelen időszak már kiszámított változóinak függvényeként. Itt bizonyítás nélkül megadunk egy ilyen sorrendet. Mindenekelőtt megemlítjük, hogy $T+G+7$ kezdőérték határozza meg a rendszert: $U(0)$, $V(0)$, $Z(0)$, $H(0)$, $H(-1)$, $Y(0)$, $Y(-1)$, $M(0)$, $M(-1)$, $\ldots$, $M(-G-T+1)$.

A $(t-1)$-edik időszak végéig kiszámított változókból közvetlenül meghatározhatók a következő új változók: $U(t)$, $V(t)$, $K(t)$, $U^*(t)$, $V^*(t)$, $K^*(t)$, $H^*_{\text{plan}}(t)$, $Z^*(t)$, $Y^*(t)$, $p(t)$, $L_D(t) = N(t)$, $q(t)$, $X^*(t)$, $M^*(t)$. Most következik az egyetlen bonyodalom: $W^*(t) \to W(t) \to H^*_h(t)$ lánc ill. $Z(t)$. A megmaradó szabályozási egyenletekből adódik $M(t)$, $X(t)$, $Y(t)$, $H(t)$, s végül az inputegyenletekből $A(t)$, $B(t)$, $J(t)$.

Ez a részletes modell nagyon kényelmes a közgazdasági elemzésnél, de túlságosan széteső a matematikai vizsgálat esetén. Ezért bevezetünk egy *tömör* modellt, amely csak 6 változóból és 6 egyenletből áll. A 6 „főváltozó" a következő: U, V, Z és M, Y, H. A többi változót „segédváltozónak" nevezzük.

Mielőtt fölírnánk a 6 „főegyenletet", elvégezzük a következő behelyettesítéseket.

(2.9)-be helyettesítsük be (2.6)-ot és (2.7)-et.

$$N(t) = \varkappa \sum_{\vartheta=G}^{G+t-1} \Phi^{t-\vartheta} M(t-\vartheta). \tag{3.1}$$

(2.18)-ba helyettesítsük be (2.6–8)-at és (3.1)-et:

$$X^*(t) = m \sum_{\vartheta=G}^{G+T-1} (\Phi\Psi)^{t-\vartheta} M(t-\vartheta) - \left(\frac{\Psi}{\Gamma_z}\right)^t \sum_{\vartheta=G}^{G+T-1} \Phi^{t-\vartheta} M(t-\vartheta)\hat{Z}(t), \tag{3.2}$$

ahol $m = \varkappa\lambda$.

A főváltozók egyenletébe behelyettesítve a segédváltozókat – a terjedelme miatt kivéve $X(t)$-t – a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$U(t) = U(t-1) + X(t-1) - H(t-1) - Y(t-1) \tag{3.3}$$

(3.4)

$$V(t) = V(t-1) - \alpha_X X(t-1) + Y(t-1) - \sum_{\vartheta=1}^{G} \beta_M(\vartheta) M(1-\vartheta) - \gamma\hat{Z}(t)$$

ahol $\gamma = \alpha_Z + \beta_Z$.

$$\begin{aligned}\hat{Z}(t) = {} & \zeta_K \sum_{\vartheta=1}^{G-1} \bar{\beta}_M(\vartheta)\left[M(t-\vartheta) - \Gamma_M^{t-\vartheta} M_0\right] + \gamma_Z \hat{Z}(t-1) - \\ & - \zeta_U\{U(t) - [H(t-1) + Y(t-1)]\} - \\ & - \zeta_V\{V(t) - [\alpha_X X(t-1) + \sum_{\vartheta=1}^{G} \beta_M(\vartheta) M(t-\vartheta) + \gamma\hat{Z}(t)]\}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

ahol $\bar{\beta}_M(\vartheta) = \sum_{\tau=\vartheta+1}^{G} \beta_M(\tau)$.

$$\begin{aligned}M(t) = {} & \Gamma_M^t M_0 + \mu_H[H(t-1) - \Gamma_H H(t-2)] - \\ & - \mu_K \sum_{\vartheta=1}^{G-1} \bar{\beta}_M(\vartheta)[M(t-\vartheta) - \Gamma_M^{t-\vartheta} M_0] - \gamma_Z \hat{Z}(t).\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}Y(t) = {} & \Gamma_Y Y(t-1) - \eta_V\{V(t) - [\alpha_X X(t-1) + \\ & + \sum_{\vartheta=1}^{G} \beta_M(\vartheta) M(t-\vartheta) + \gamma\hat{Z}(t)]\} - \eta_Z \hat{Z}(t).\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}H(t) = {} & \chi_W \omega_N \varkappa \sum_{\vartheta=G}^{G+T-1} \Phi^{t-\vartheta} M(t-\vartheta) - \chi_W[H(t-1) - \\ & - \Gamma_H H(t-2)] - \chi_Z \hat{Z}(t),\end{aligned} \tag{3.8}$$

ahol

$$\begin{aligned}X(t) = {} & \sum_{\vartheta=G}^{G+T-1} (\Phi\Psi)^{t-\vartheta} M(t-\vartheta) - \\ & - \left[\Pi_Z \varkappa \left(\frac{\Psi}{\Gamma_Z}\right)^t \sum_{\vartheta=G}^{G+T-1} \Phi^{t-\vartheta} M(t-\vartheta) - \eta_Z\right]\hat{Z}(t) - \\ & - \xi_U\{U(t) - \varrho[H(t-1) + Y(t-1)]\}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Megjegyzések. A tömör modell (3.3—3.8) egyenletei szintén rekurzívak és a részletes modellnél említett kezdeti értékek határozzák meg a főváltozók pályáit is. Könnyű belátni, hogy a főváltozók pályája egyértelműen meghatározza a segédváltozók pályáját is, azaz a részletes és a tömör modell egymással *ekvivalens*.

A félreértések elkerülése végett megjegyezzük, hogy a főváltozók száma *egyértelmű*, azonban a főváltozók halmaza nem egyértelmű. Például $Y(t)$ helyett $X(t)$ is szerepelhetne főváltozóként, s ekkor az egyenletek is más alakúak volnának.

3.2. *Megvalósíthatóság és növekedőképesség*

Közgazdasági modellekben a modell konzisztenciáján kívül a pálya pozitivitása, gyakran növekvő volta is elengedhetetlen az értelmezhetőséghez. Szükségünk lesz tehát a következő definícióra:

Definíció: A rendszer *megvalósítható* pályán halad, ha minden változója minden $t \geq 1$ évre nemnegatív értéket vesz fel, és kielégíti a reálszférát leíró (2.1)—(2.11) rendszert.

1. *Tétel: Megvalósíthatóság. A rendszer megvalósítható pályán képes haladni, sőt képes növekedni, ha a reálparaméterek kielégítik a következő feltételt:*

$$(1 - \alpha_X)mT > 1 + \chi_W \omega_N \varkappa T_\Phi, \tag{3.10}$$

ahol

$$T_\Phi = \frac{\Phi^{-G+1} - \Phi^{-G-T+1}}{\Phi - 1}, \tag{3.11}$$

ahol Φ egy pozitív szám.

Megjegyzés: A (3.10) feltétel meglehetősen nehezen értelmezhető önmagában. Ezért talán nem felesleges a következő magyarázat. Szorítkozzunk egy *stacioner* pályára, ahol a változók az időben állandóak. Ekkor $(1 - \alpha_X)mT = (1 - \alpha_X)X/M$ és $\chi_W\omega_N\varkappa T_\Phi = H/M$. Ekkor a (3.10) bal oldalán a netto kibocsátás és M hányadosa áll, míg (3.10) jobb oldalán a beruházás(i évjárat) és M hányadosa plusz a fogyasztás és M hányadosa áll. Stacioner esetben természetesen (3.10) két oldala egyenlő, növekvő gazdaságban pedig egyenlőtlenség várható. Jelenleg azonban nem tudjuk matematikailag igazolni azt a nyilvánvalónak látszó tényt, hogy a (3.10) feltétel nemcsak elégséges, de szükséges is a megvalósíthatósághoz, (az utóbbi feltételbe beleértve az egyenlőség esetét is!) A bizonyításban speciális szerkezetű pályára szorítkozunk, s ez a körülmény indokolja a következő kitérőt.

3.3. *Normál pálya, Harrod—Neumann pálya*

A kitérőt két definícióval kezdjük:

Definíció: A rendszer *normál pályán* halad, ha mindegyik szabályozási változó tényleges értéke egybeesik normál értékével, ahol a normál érték a (2.17)—(2.21) rendszerből adódik.

Képletben

$$
(3.12)\qquad
\begin{aligned}
M(t) &= M^*(t) && \text{(beruházási évjárat volumene)}\\
X(t) &= X^*(t) && \text{(termelés)}\\
Y(t) &= Y^*(t) && \text{(vállalati vásárlás)}\\
H(t) &= H^*(t) && \text{(háztartási vásárlás)}\\
W(t) &= W^*(t) && \text{(reálbéralap).}
\end{aligned}
$$

Definíció: A rendszer *Harrod–Neumann pályán* (röviden: H–N pályán) halad, ha minden újratermelhető stock- és flow-változója egyöntetű és állandó ütemben nő, vagyis ha

$$
(3.13)\qquad
\begin{aligned}
M(t) &= \Gamma^{*t} M_0^* && \text{(beruházási évjárati volumen)}\\
X(t) &= \Gamma^{*t} X_0^* && \text{(termelés)}\\
Y(t) &= \Gamma^{*t} Y_0^* && \text{(vállalati vásárlás)}\\
H(t) &= \Gamma^{*t} H_0^* && \text{(háztartási vásárlás)}\\
U(t) &= \Gamma^{*t} U_0^* && \text{(outputkészlet)}\\
V(t) &= \Gamma^{*t} V_0^* && \text{(inputkészlet),}
\end{aligned}
$$

ahol $\Gamma^* > 1$ az *általános növekedési tényező*, a nulla indexű szimbólumok pedig a szóbanforgó változók kezdő (azaz nulladik évbeli) értékei.

A következő megállapítást tehetjük.

2. *Tétel*: *A* (3.10) *feltétel mellett akkor és csak akkor* létezik megvalósítható normál pálya, (amely egyben Harrod–Neumann *pálya), ha teljesül a következő feltétel-hármas*:

$$
(3.14)\qquad
\begin{aligned}
&\text{A)}\ \Gamma_M = \Gamma_Y = \Gamma_K = \Gamma_H = \Gamma^*\\
&\text{B)}\ \Psi \;= 1/\Phi\\
&\text{C)}\ \Omega \;= \Psi.
\end{aligned}
$$

Megjegyzések: Modellünk abban tér el a szabályozáselmélet szokásos normál pályáitól, hogy csak két változó normál értékét definiáljuk exogén módon, adott esetben exponenciális pályával: a $Z^*(t)$ normál hiányt, melynek növekedési tényezőjét, Γ_Z-t szintén Γ^*-gal definiáljuk, és az $M^*(t)$ beruházási évjárati normál volument.

Az A) feltételben a Γ^* általános növekedési tényező szerepel egyöntetűen a különböző szabályozási változók normál értékének meghatározásánál, lehetővé téve, hogy a normál pálya H–N pálya legyen. Ennek ellenére ez az összefüggés nem triviális.

Elég sok olyan feltevés van modellünkben, amely megkülönbözteti azt a Harrod- és a Neumann-modellektől: bonyolult késleltetési szerkezet, a beruházások „évjárati" felbontása, az input- és az outputkészletek szerepeltetése. Megnyugtató, hogy ennek ellenére „visszakapjuk" az egyenletes növekedésre vonatkozó Harrod–Neumann eredményeket.

A B) feltétel egyszerűen azt fejezi ki, hogy a műszaki fejlődés során egységnyi évjárati beruházás éppen annyiszor teremt kevesebb munkahelyet, amennyiszer termelékenyebb egységnyi munkahely: Harrod-semlegesség.

Bizonyítás: a) *Szükségesség* Először azt bizonyítjuk be, hogy a normál pálya exponenciális pálya, nem feltétlenül azonos növekedési tényezőjű elemekkel. Normál pályán — melynek változóit **-gal különböztetjük meg — (2.17) szerint $M^{**}(t) = \Gamma_M^t M_0^*$, (2.19) szerint $Y^{**}(t) = \Gamma_Y^t Y_0^t$, (2.21) szerint $W^{**}(t) = \omega_N \Omega^t N^{**}(t) = \omega_N \Omega^t (\Gamma_M \Phi)^t N_0^*$, ahol figyelembe vettük a (3.1) összefüggést is.

Összegezve: $W^{**}(t) = (\Omega \Gamma_M \Phi)^t W_0^*$.

Némileg bonyolultabban igazolható $H^{**}(t) = H_{\text{plan}}^{**}(t)$ felhasználásával, hogy $H^{**}(t) = \Gamma_H^t H_0^*$. Hasonlóan következik (3.2)-ből $X^{**}(t) = (\Phi \Psi \Gamma_M)^t X_0^*$. Ezzel beláttuk, hogy a normál pálya exponenciális pálya.

Nem nehéz belátni, hogy a növekedési tényezők azonosak, azaz az A) feltétel szükséges. Valóban, (2.1) és (2.21) szerint X^{**} Y^{**} és H^{**} lineáris kombinációja. Két különböző kitevőjű exponenciális pálya lineáris kombinációja viszont nem adna újabb exponenciális pályát, vagyis mindhárom növekedési tényező egyenlő: $\Gamma_Y = \Gamma_H = \Phi \Psi \Gamma_M$. Hasonló gondolatmenettel adódik (3.4) és (2.22) összevetéséből $\Gamma_Y = \Gamma_M$. Végül $\Gamma_K = \Gamma_M$ közvetlenül adódik (2.3)-ból.

A B) és a C) feltétel szükségessége a fentiekből következik.

b) *Elégségesség* Tegyük föl, hogy teljesül a (3.14) feltétel-hármas. Levezetjük azt az egyenletet, amelyet Γ^*-nak ki kell elégítenie ahhoz, hogy az általános növekedési tényező legyen.

(2.1) és (2.21) értelmében

$$X_0^* = \left(1 + \varrho \frac{\Gamma^* - 1}{\Gamma^*}\right) (H_0^* + Y_0^*) \,.$$

(3.4) és (2.22) értelmében

$$Y_0^* = \left(1 + \sigma \frac{\Gamma^* - 1}{\Gamma^*}\right) \left(\alpha_X X_0^* + \sum_{\vartheta=0}^{G-1} \beta_M(\vartheta + 1) \Gamma^{*-\vartheta} M_0^*\right) .$$

Figyelembe véve, hogy $X_0^* = \lambda \varkappa T_{\Gamma^*} M_0^*$ és $H_0^* = \chi_W \omega_N \varkappa T_{\Phi\Gamma^*} M_0^*$, (vö.: az 1. Tételhez fűzött megjegyzéssel) helyettesítsük be az Y_0-ra vonatkozó egyenletet az X_0^*-ra vonatkozó első egyenletbe. Ekkor csak az M_0^* változó marad meg, ezzel azonban egyszerűsíthetünk; s így a következő egyenletet kapjuk Γ^*-ra:

$$\text{(3.15)} \qquad \lambda \varkappa T_{\Gamma^*} = \left(1 + \varrho \frac{\Gamma^* - 1}{\Gamma^*}\right) \chi_W \omega_N \varkappa T_{\Phi\Gamma^*} +$$

$$+ \left(1 + \varrho \frac{\Gamma^* - 1}{\Gamma^*}\right) \left(1 + \sigma \frac{\Gamma^* - 1}{\Gamma^*}\right) \left[\alpha_X \lambda \varkappa T_{\Gamma^*} + \sum_{\vartheta=0}^{G-1} \beta_M(\vartheta + 1) \Gamma^{*-\vartheta}\right].$$

Figyelembe véve a (3.11) jelölést, leolvasható, hogy a (3.15) egyenlet $(G + T + 1)$-ed fokú polinom. Jelenleg keveset tudunk e polinom gyökeinek elhelyezkedéséről, nevezetesen arról, hogy a közgazdaságilag értelmezhető $(1, +\infty)$ intervallumba a polinomnak hány gyöke esik. A (3.10) elégséges feltétel úgy adódik (3.15)-ből, hogy $\Gamma^* = 1$-et írunk az utóbbiba és az egyenlőségjelet $>$ jellel pótoljuk. Mivel $\Gamma^* = +\infty$ esetén (3.15)-ben ellenkező értelmű egyenlőtlenség áll, Bolzano-tétele értelmében létezik legalább egy Γ^* növekedési tényező, amely kielégíti (3.15)-öt. Egyszerű számolással belátható, hogy több gyök létezése esetén bármelyik gyököt véve, az összes változó pozitívnak adódik. Felhívjuk a figyelmet, hogy ezzel a bizonyítással az 1. Tételt is igazoltuk. Megjegyezzük, hogy nem nyilvánvaló (3.10) szükségessége, ugyanis a (3.15)-beli polinom nem feltétlenül monoton. Logikailag elképzelhető olyan eset is, hogy a (3.10) feltétel nem áll fönn, de a polinom annyira nő, hogy legalább kétszer nullává válik, mielőtt a $-\infty$-hez tartana. Mivel mindegyik megoldás pozitív lesz, nem tudjuk kizárni több pozitív megoldás létezését. Megnyugtatásul csak annyit mondunk, hogy az egyértelműség bizonyítható, ha vagy a) nincsenek készletek: $\varrho = \sigma = 0$ vagy b) nincs késleltetés: $G = T = 1$.

3.4. *Szabályozás és stabilitás*

Az előző alfejezetben beláttuk, hogy rendszerünkben létezik normál pálya (sejtésünk szerint egy) és hogy ennek a pályának Harrod–Neumann tulajdonságai vannak. A modell szerkezete azonban megengedi, hogy a rendszer más pályán haladjon. Sőt, ha a rendszer nem a normál pályáról indul, akkor épp az a szabályozás feladata, hogy rávezesse a rendszert a normál pályára (szabályozhatóság) vagy legalább a normál pálya tetszőleges közelébe vezesse (stabilizálja). Teljesíthetők-e a szabályozás fent említett feladatai? Mielőtt a kérdésre válaszolnánk, pontosabban fogalmazzuk meg magát a kérdést.

Definíció: Bármely *szabályozási rendszer* két alrendszerből áll: a *szabályozott alrendszerből* és a *szabályozó alrendszerből*. 1) A szabályozott alrendszerben az állapotváltozásokat a döntések határozzák meg, míg 2) a szabályozó alrendszerben a döntéseket az állapotok határozzák meg.

Példa: A tömör modellben a (3.3)–(3.5) egyenletrendszer írja le az U, V, Z állapotváltozók változását az M, Y, H szabályozási (döntési) változók függvényében. A (3.6)–(3.9) egyenletrendszer a „visszacsatolást" írja le.
Először csak a szabályozott alrendszert vesszük adottnak és tetszőleges szabályozási mechanizmusokat mérlegelünk.

Definíció: Egy szabályozott alrendszer *szabályozható*, ha tetszőleges kezdő állapothoz található a szabályozási változóknak olyan véges időbeni sorozata, amely a rendszert elvezeti egy tetszőlegesen kijelölt végállapotba. Esetünkben a kijelölt végállapot mindig a normál pálya valamelyik pontja.

Megjegyzés: A rendszer szabályozhatósága elemi tulajdonság, teljesülése nélkül reménytelen a rendszer mindennemű szabályozása. A legtöbb rendszer szerencsére szabályozható.

3. *Tétel*: *A* (3.3)–(3.5) *rendszer szabályozható.*

Ebben az állításban meglepő sincs, hiszen 3 állapotváltozóra 3 szabályozási változó jut. A formális bizonyításra azonban csak később kerítünk sort.
A szabályozhatóság meglétéből még nem következik az, hogy egy rendszert ténylegesen úgy kell szabályozni, hogy véges időn belül a normál pályára kerüljön. A szóbanforgó szabályozás általában nehezen határozható meg és gyakran értelmezhetetlen közgazdaságilag. Ez utóbbi megállapítás súlyosan esik latba egy olyan deskriptív megközelítésnél, mint amilyen a mienk. Modellünkben nemcsak a szabályozott alrendszer, hanem a szabályozó rendszer is adott. Mi a szabályozási rendszer stabilitását vizsgáljuk.

Definíció: Egy szabályozási rendszer *aszimptotikusan lokálisan stabilis* (röviden: stabilis), ha létezik a normál kezdő értékeknek egy olyan környezete, hogy bármelyik pontjából indítva el a rendszert, az hosszútávon a normál pályájához tart.

Jelenleg nem ismerünk jól használható *általános* stabilitási feltételt rendszerünkre. Numerikus tapasztalatok alapján azonban azt *sejtjük*, hogy létezik a visszacsatolási paramétereknek, μ_H, μ_K, μ_Z, ξ_U, ξ_Z, η_V, η_Z, χ_Z, ω_H-nak egy olyan együttese, amelynek mind a kilenc eleme határozottan pozitív, közgazdaságilag értelmezhető nagyságú és stabilizálja a rendszert.

E sejtés bizonyítása helyett meg kell elégednünk egy szerényebb stabilitási tétellel, ahol csak három rövidtávú hiány-reakció paraméter különbözik nullától és melyeknek pozitivitása kérdéses.

4. *Tétel: Az* 1. *Tétel feltételei mellett, a* (3.6)—(3.9) *szabályozási alrendszerben megadható olyan* χ_Z, η_Z *és* ξ_Z *visszacsatolási együttható-hármas, amely mellett a* (3.3)—(3.5) *szabályozott alrendszer stabilis, sőt két év alatt a normális pályára vezérelhető (szabályozható)*:

$$\mu_H = \mu_K = \mu_Z = \xi_U = \eta_V = \omega_H = 0.$$

Bizonyítás: A tömörség kedvéért a változókat a H—N (kétcsillagos) pályától mért eltéréseként írjuk föl. Jelölés: $\tilde{X} = X - X^{**}$ stb.
A modell *szabályozási egyenletei* a következők:

$$\tilde{H}(t) = -\chi_Z\hat{Z}(t) \tag{3.16}$$

$$\tilde{Y}(t) = -\eta_Z\hat{Z}(t) \tag{3.17}$$

$$\tilde{X}(t) = (\xi_Z - \tilde{\Pi})\hat{Z}(t), \tag{3.18}$$

ahol (3.9) lokális linearizálásából következően

$$\tilde{\Pi} = \Pi_Z \varkappa T_{\Phi\Gamma *} M_0^*.$$

A modell *állapotegyenletei* a következők:

$$\tilde{U}(t) = \tilde{U}(t-1) + \tilde{X}(t-1) - \tilde{Y}(t-1) - \tilde{H}(t-1) \tag{3.19}$$

$$\tilde{V}(t) = \tilde{V}(t) - \alpha_X\tilde{X}(t-1) + \tilde{Y}(t-1) - \gamma\hat{Z}(t-1) \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\hat{Z}(t) = &-\zeta_U\{\tilde{U}(t) - \varrho[\tilde{Y}(t-1) + \tilde{H}(t-1)]\} - \\ &- \zeta_V\{\tilde{V}(t) - \sigma[\alpha_X\tilde{X}(t-1) + \gamma\hat{Z}(t-1)]\} + \zeta_Z\hat{Z}(t-1).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Helyettesítsük be (3.19)-et és (3.20)-at (3.21)-be:

$$\begin{aligned}\hat{Z}(t) = &-\zeta_U\{\tilde{U}(t-1) + \tilde{X}(t-1) - (1+\varrho)[\tilde{Y}(t-1) + \\ &+ \tilde{H}(t-1)]\} - \zeta_V\{\tilde{V}(t-1) + \tilde{Y}(t-1) - (1+\sigma)\times \\ &\times [\alpha_X\tilde{X}(t-1) + \gamma\hat{Z}(t-1)]\} + \zeta_Z\hat{Z}(t-1).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Helyettesítsük be (3.16)-ot, (3.17)-et és (3.18)-at (3.19)-be, (3.20)-ba és (3.22)-be, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\varphi = \zeta_Z - \tilde{\Pi} + \eta_Z + \chi_Z \tag{3.23}$$

$$\psi = \alpha_X(\xi_Z - \tilde{\Pi}) + \eta_Z + \gamma \tag{3.24}$$

$$\delta = \zeta_Z - \zeta_U[(\xi_U - \tilde{\Pi}) + (1 + \varrho)(\eta_Z + \chi_Z)] + \\ + \zeta_V\{\eta_Z + (1 + \sigma)[\alpha_X(\xi_U - \tilde{\Pi}) + \gamma)\}. \tag{3.25}$$

Jelöléseink segítségével az új egyenletek röviden fölírhatók:

$$\tilde{U}(t) = \tilde{U}(t-1) + \varphi\hat{Z}(t-1) \tag{3.26}$$

$$\tilde{V}(t) = \tilde{V}(t-1) - \psi\hat{Z}(t-1) \tag{3.27}$$

$$\hat{Z}(t) = -\zeta_U\tilde{U}(t-1) - \zeta_V\tilde{V}(t-1) + \delta\hat{Z}(t-1). \tag{3.28}$$

A (3.26), (3.27) és (3.28) egyenletek egy harmadrendű lineáris rendszert képeznek, amelynek stabilitása a hozzátartozó karakterisztikus polinom viselkedésétől függ:

$$F(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}^2 - (1 + \delta)\tilde{\lambda} + \delta + \zeta_U\varphi - \zeta_V\psi. \tag{3.29}$$

A stabilitás szükséges és elégséges feltétele a következő:

$$F(1) > 0,\ F(-1) > 0 \text{ és } F(0) < 1. \tag{3.30}$$

A (3.30) feltételbe behelyettesítve a (3.29) polinomot, a következő feltételhármashoz jutunk:

$$\zeta_U\varphi > \zeta_V\psi \tag{3.31}$$

$$2 + 2\delta + \zeta_U\varphi - \xi_V\psi > 0 \tag{3.32}$$

$$\delta + \zeta_U\varphi - \zeta_V\psi < 1. \tag{3.33}$$

A (3.31)–(3.33) stabilitási feltétel a (3.23)–(3.25) jelölések segítségével visszavezethető olyan feltétel-rendszerre, amelyben csak a modell eredeti paraméterei szerepelnek. Ez az átalakítás azonban csak bonyolultabbá teszi a feltételeket.

Talán egyetlen speciális esetre érdemes elvégezni ezt az átalakítást, amikor nincs *visszacsatolás*:

$$\mu_H = \mu_K = \mu_Z = \xi_U = \xi_Z = \eta_V = \eta_Z = \omega_H = \chi_Z = 0, \tag{3.34}$$

Ekkor (3.31)–(3.33) a következő alakot ölti:

$$\zeta_U\tilde{\Pi} < \zeta_V(\alpha_X\tilde{\Pi} - \gamma) \tag{3.35}$$

$$2 + 2[\zeta_Z + \zeta_U\tilde{\Pi} + \zeta_V(1 + \sigma)(\alpha_X\tilde{\Pi} - \gamma)] - \zeta_U\tilde{\Pi} + \zeta_V(\alpha_X\tilde{\Pi} - \gamma) > 0 \tag{3.36}$$

$$\zeta_Z + \zeta_V\sigma(\alpha_X\tilde{\Pi} - \gamma) < 1. \tag{3.37}$$

Látható, hogy visszacsatolás nélkül nem mindegyik rendszer stabilis, pl. $\zeta_Z > 1$ esetén biztosan nem az.

Rátérünk a szabályozhatóság bizonyítására.

Állításunk ekvivalens azzal, hogy létezik olyan számhármas, amelynél a (3.29) polinom két együtthatója nullává válik. Mivel két együtthatóról van szó, amely három paraméter lineáris függvénye, állításunkban semmi meglepő nincs. A precíz igazoláshoz elegendő a legegyszerűbb $\xi_Z = \tilde{\Pi}$ esetre szorítkozni, amikor a termelés azonos a H—N termeléssel. Ekkor az $F(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}^2$ feltételből adódó kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer determinánsa $\zeta_U \zeta_V \varrho$, tehát nullától különböző, ezért az egyenletnek mindig van megoldása.

IRODALOM

[1] AIGNER, D. J. és GOLDBERGER, A. S. (szerk.) *Latent Variable in Socio-Economic Models*, North-Holland, Amszterdam, 1977.

[2] ANDORKA R., DÁNYI D. és MARTOS B.: *Dinamikus közgazdasági modellek*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1967.

[3] KORNAI J.: *Növekedés, hiány és hatékonyság*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1982.

[4] LIGETI I. és SIVÁK J.: *Növekedés, szabályozás és stabilitás a gazdasági folyamatokban*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[5] WOLD, H.: *Model Construction and Evaluation when Theoretical Knowledge is Scarce*, sokszorosítva, Faculté des Sciences Economiques et Sociales, Université de Genève, 1979.

ON THE MATHEMATICAL PROPERTIES OF A MACROECONOMIC GROWTH MODEL

Harrod's, *Kalecki's* and *Neumann's* models are suitable for an abstract description of the process of economic growth but do not deal with the control of this process. One of the authors of the present article, János *Kornai* examined the control of growth process in the socialist economy in his book entitled "Growth, shortage and efficiency". Propositions of the book requiring more complicated proof were given without proof in the book, while the present article presents these proofs. (Sect. 4) Prior to this notations of the model are presented (Sect. 2) as well as its equations (Sect. 3).

The article does not deal with the interpretation of assumptions, equations and results of the model but this is contained in the book. Theorems of the article may be briefly characterized as follows:

1. Parameters of the model have to satisfy a certain inequality (4.10) so that the *existence of growth paths* may be proved.
2. A *normal growth path* does exist if and only if norms and growth factors conform with each other (4.14).
3. *The real sphere is controllable.*
4. Choosing appropriate reaction parameters the *feedback control of the system by norms is stable.*

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЯХ ОДНОЙ МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Модели Хэррода, Калецкого и Наймана пригодны для абстрактного представления процесса экономического роста, но не рассматривают *регулирование* этого процесса. Один из авторов данной статьи, Янош Корнаи, в своей книге «Рост, дефицит и эффективность», провел анализ регулирования процесса росга в социалистической экономике. Теоремы книги, требующие сложных доказательств, приводятся в книге без доказательств, которые содержит настоящая статья [4]. Однако им предшествуют условные обозначения модели [2] и ее уравнения [3].

В статье не даны толкования гипотезы, уравнений и вытекающих из них положений модели, так как они содержатся в книге. Представленные в статье положения могут быть кратко охарактеризованы следующим образом:

1. Параметры модели должны удовлетворять определенному неравенству (4.10) для того, чтобы можно было доказать существование *траекторий роста*.
2. *Нормальная траектория роста* существует тогда и только тогда, когда нормы и факторы роста согласованы между собой (4.14).
3. *Реальная сфера управляема.*
4. При выборе соответствующих параметров реакции *обратная связь* системы устойчива.