Bod Péter

A nyílt, statikus input-output modell nem-lineáris általánosításairól

W. Leontief nyílt, statikus input-output modellje kétségtelenül a matematikai közgazdaságtan egyik legtöbbet tárgyalt, legtöbbet vitatott és ugyanakkor legszélesebb körben alkalmazott eszköze. Eredeti formájában a modell lineáris. Természetes ezért, hogy nem lineáris általánosítására sok kísérletet tettek.

Ebben a cikkben egy korábbi [1] tanulmányunk szemléletmódját követve áttekintjük az e téren elért fontosabb eredményeket. Ezeknek az összefüggéseknek egy része az irodalomból tehát ismert; de tárgyalásuk nem egységes. A következőkben főként matematikai programozási eszközökkel fogunk dolgozni felhasználva az ún. indifferens programozás és a ,,minimális elemmel" rendelkező halmazok elméletét. Általánosítjuk az [1] tanulmányban leírtakat, és néhány újabb összefüggésre hívjuk fel a figyelmet.

A tárgyalás során fokozatosan léptetjük be a bizonyításokhoz szükséges feltételezéseket. Ezek részben közgazdasági megfontolásokon nyugvó feltevések lesznek, részben technikai jellegűek, amelyeket a megfelelő matematikai apparátus kíván. A nem teljesen kézenfekvő fogalmakat definiáljuk és a modell tulajdonságait tételek formájában mondjuk ki. Utalunk a fontosabb irodalmi előzményekre.

A vizsgálat tárgya, alapfogalmak, előzmények

Egy Leontief típusú gazdaságot vizsgálunk. Vagyis tekintünk egy n homogén szektorból álló, külkereskedelmi kapcsolatokkal nem rendelkező gazdaságot, amelyben minden szektor a rá jellemző egyetlen használati értéket állít elő, egyetlen technológiával. A szektorok termelésük megvalósításához felhasználnak saját és más szektorok kibocsátásaiból. A vizsgálat célja: az ágazatok bruttó kibocsátásai és a rendszer végső kibocsátásai közötti kapcsolatok számszerűsítése. Ennek érdekében az alábbi fogalmakat, illetve jelöléseket vezetjük be:

$$\textit{Az ágazatok bruttó kibocsátásai:}\ x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \in R^n$$

A rendszer végső kibocsátása: $y = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_n \end{bmatrix} \in R^n.$

Az elemi ráfordítások mátrixa: $X = [X_{ij}] \in R^{n \times n}$ ahol X_{ij} megmutatja, hogy a j-ik ágazat mennyi terméket használ fel az i-ik ágazat kibocsátásából.

A fentiekben bevezetett fogalmak egymásközötti kapcsolatát a következő definíciós azonossággal írjuk le:

(1) $$x - X \cdot \mathbf{1} = y.$$

Vagyis a rendszer végső kibocsátását úgy definiáljuk, mint az ágazatok bruttó kibocsátásának és a megvalósításához eszközölt ráfordításoknak a különbségét.

Ez a definíció azonban még annyiban hiányos, hogy önmagában nem biztosítja a benne szereplő mennyiségek közgazdasági értelemben is normális viselkedését. Nyilvánvaló ugyanis, hogy olyan mennyiségek mint bruttó kibocsátás, végső felhasználás vagy ráfordítások nem lehetnek negatívak. Vagyis (1) korrektebbül így fest:

(2) $$\begin{aligned} x - X \cdot \mathbf{1} &= y \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ X_{ij} &\geq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

(2) már nem az a triviális azonosság, mint (1): hiszen minden további feltevés nélkül egyáltalában nem kézenfekvő, hogy akármilyen $x \geq 0$ bruttó termeléshez létezik (2)-t kielégítő (t.i. nem-negatív) végső kibocsátás és még kevésbé biztos, hogy tetszőlegesen előírt $y \geq 0$ végső felhasználáshoz található olyan nem-negatív bruttó kibocsátás, amely azt megvalósítja.

Hogy a (2) alatt megfogalmazott modellel kapcsolatban bármiféle érdemleges megállapításokat tehessünk: feltételezésekre van szükség az elemi ráfordítások viselkedéséről. Az elemi ráfordítások nyilván bizonyos függvények; csak az a kérdés, hogy mit célszerű e függvények argumentumának választani. Az irodalomban ennek a kérdésnek két megközelítése található: egy egyszerűbb és egy összetettebb. Az első Leontieftől ered, aki abból indult ki, hogy minden ágazatban, valamennyi ráfordítás kizárólag a felhasználó ágazat tevékenységének a mértékétől függ. Vagyis:

$$X_{ij} = X_{ij}(\xi_j) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Ha ezt tesszük fel: közvetlenül értelmezhetők az egységnyi ágazati kibocsátáshoz szükséges (fajlagos) ráfordítások:

$$a_{ij}(\xi_j) = \frac{X_{ij}(\xi)_j}{\xi_j}.$$

Leontief eredetileg éppen azt tételezte fel, hogy a fajlagos ráfordítások állandóak:

$$a_{ij}(\xi_j) = a_{ij},$$

pontosabban: nem függnek a felhasználó ágazat tevékenységének a mértékétől. Ilyen körülmények között az elemi ráfordítási függvények egyváltozós lineáris függvények és a (2) alatti egyenletekben lineáris formák állnak.

A lineáris modell legkézenfekvőbb nem-lineáris általánosítása egyszerűen ennek az utóbbi feltevésnek a feloldásából áll. Ekkor a közismert

$$[E - A]x = y$$

összefüggés helyett az

$$[E - A(x)]x = y$$

egyenlettel van dolgunk, ahol

$$A(x) = [a_{ij}(\xi_j)].$$

A modell minden egyenlete most

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j) \cdot \xi_j = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

alakú nem-lineáris, de mindenesetre szeparálható függvényeket tartalmaz: hiszen az elemi ráfordításfüggvények továbbra is egyváltozósak.

Érdemes talán a téma történetéhez megjegyezni, hogy Evans már 1954-ben, az első nemzetközi input-output konferencián *Input-Output Computations* [3] című előadásában a modellt nem-lineáris formában mutatta be, de alapjában ez a szeparábilis forma lebegett a szeme előtt. Hasonló keretben vizsgálták a modell nem-lineáris kiterjesztését Nataf [8], Bod [1], [2] és Sandberg [9].

Lehet a kérdést azonban bonyolultabb keretben is nézni. Ezt tette bizonyos fokig már Evans is, majd különösen Tamir [10]. Később Lahiri [4] majd Lahiri és Pyatt [5], akik az első Lahiri cikk bizonyos hibáit helyesbítették.

Ebben a szélesebb keretben az elemi ráfordítási függvények n változós nem-lineáris függvények. Ez a megközelítés általánosabb. Nemcsak azért, mert speciális esetként tartalmazza a korábbit; hanem főleg azért, mert lehetővé teszi ún. externalitások, tehát a különböző ágazatok technológiáira más ágazatok fejlődéséből származó hatások figyelembevételét. *Tamir* modellje $F(x) = y$ alakú, ahol

$$F(x) = x - X(x) \cdot 1.$$

Ezzel szemben *Lahiri* az $[E - A(x)]x = y$ alakból indul ki, ahol

$$A(x) = X(x) \cdot \langle x \rangle^{-1}.$$

Ennek megfelelően Tamir az $F(x)$ leképezés, Lahiri, valamint Lahiri és Pyatt az $A(x) \cdot (x)$, illetve az $1^T A(x)$ leképezések bizonyos közgazdaságilag indokolható tulajdonságait tételezik fel.

Milyen feltételek mellett oldható meg a modell?

A továbbiakban az általános — tehát nem szeparábilis — modellt vizsgáljuk. Két alapfeltevést vezetünk be, amelyeket végig érvényeseknek tekintünk. Ezek az elemi ráfordítás-függvényeket és az ezekből képzett népgazdasági ráfordításfüggvényt jellemzik.

Népgazdasági ráfordításfüggvénynek nevezzük azt a vektorértékű függvényt, amelynek komponensei megmutatják, hogy az egyes ágazatok kibocsátásaiból mekkora felhasználás szükséges valamilyen x bruttó kibocsátás megvalósításához:

$$G(x) = \begin{bmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ G_n(x) \end{bmatrix} = X(x) \cdot 1 = A(x) \cdot x \in R^n .$$

A népgazdasági ráfordításfüggvény segítségével kifejezhető a népgazdaság termelési függvénye:

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n(x) \end{bmatrix} = x - G(x) \in R^n.$$

Fenti jelölésekkel modellünk

(3) $$F(x) = y$$

alakban írható fel.

Használni fogjuk majd a következő fogalmakat:

1. *definíció:* Az $F(x) : R^n \to R^m$ leképezést *izotónnak* mondjuk, ha

$$x^1 \geq x^2 \Rightarrow F(x^1) \geq F(x^2).$$

2. *definíció:* Az $F(x) : R^n \to R^m$ leképezést *inverz izotónnak* mondjuk, ha

$$F(x^1) \geq F(x^2) \Rightarrow x^1 \geq x^2.$$

3. *definíció:* Az $F(x) : R^n_+ \to R^n$ leképezést *diagonálison kívül* antitón leképezésnek mondjuk, ha valamennyi

$$F_{ij}(\tau) = F_i(x + \tau e_j) \qquad i \neq j$$

függvény $\tau \geq 0$ növekedésével nem növekszik.

1. *alapfeltevés:* Az elemi ráfordításfüggvények R^n_+-on vannak értelmezve úgy, hogy

$$X_{ij}(x)\ \forall\ i, j\text{-re folytonos } R^n_+ \text{ belsejében}$$
$$X_{ij}(0) = 0\ \forall\ i, j\text{-re}$$
$$X_{ij}(x) \geq 0\ \forall\ i, j\text{-re, ha } |x| > 0.$$

2. *alapfeltevés:* A $G(x)$ leképezés izotón.

Az 1AF. szerint a semmit-termelés nem igényel ráfordítást, a valamit-termelés nem-negatív ráfordításokkal jár. A folytonosságot csak a nem-negatív ortáns belsejében kívánjuk meg és ez lehetővé teszi ún. fix-költségek jelentkezését is.[1]

A 2AF. értelmében nagyobb társadalmi termelés minden ágazat termeléséből többet emészt fel, mint valamely kisebb. Vegyük észre, hogy nem kívánunk izotonitást az elemi ráfordításfüggvényektől.

A $G(x)$ függvény ezen tulajdonságának a továbbiak szempontjából döntő jelentősége van. Nem gyengíthető, ha azt akarjuk, hogy a megoldhatósággal kapcsolatban pozitív eredményeink legyenek. Evans óta minden vizsgálatban feltették a ráfordítások izotonitását. Az input-output statisztikák idősoraiban néha előfordul, hogy a bruttó kibocsátás ágazatonként nő egyik évről a másikra, de a ráfordításfüggvény értéke nem minden ágazatban növekedett. Ez a jelenség — amely egyébként ritka — nem cáfolja 2AF. létjogosultságát. Az input-output statisztikák nem-homogén szektorok tevékenységét mérik és a jelzett „anomália" a szektorokon belüli termelési struktúra megváltozásával függ össze. Az elméleti tárgyalás homogenitást tételez fel — ennyiben persze elvonatkoztat a valóságtól, ahol a homogenitás valójában — akármilyen szektorbontást is alkalmazunk — soha nem érvényesül maradéktalanul.

Az alapfeltevések következtében érvényes az

1. *tétel:* $F(x)$ folytonos és diagonálison kívül antiton.[2]

$F(x)$ az elemi ráfordításfüggvények folytonos függvénye és így 1AF. értelmében maga is folytonos a nem-negatív ortáns belsejében. Tekintsük a leképezést alkotó egyik függvényt $F_i(x)$-t az $x \geq 0$ és az $x + \tau e_j$ pontokban. Minthogy $x + \tau e_j \geq x$ és $G_i(x)$ izotón, ezért $G_i(x + \tau e_j) \geq G_i(x)$. Következésként:

$$F_i(x + \tau e_j) = \xi_i - G_i(x + \tau e_j) \leq \xi_i - G_i(x) = F_i(x).$$

A kérdés már most az, hogy ilyen tulajdonságú termelési függvény mellett milyen körülmények között képes a modellel jellemzett gazdaság pozitív végső felhasználást biztosítani, illetve képes-e előírt nagyságú és összetételű végső felhasználást biztosítani.

Nyilvánvaló, hogy erre csak ún. működésképes gazdaság lehet képes.

[1] A ráfordítási függvények folytonosságát mindenki felteszi. Az eltérések csak abban vannak, hogy az elemi ráfordításfüggvényekre mondják-e ki a folytonosságot, vagy csak az összevont alakra, ami cikkünkben a $G(x)$ függvény.

[2] Ez a megállapítás először *Tamir*nál jelenik meg.

4. *definíció:* Egy a modellel jellemzett gazdaságot működőképesnek mondunk, ha $\exists\, \bar{x} \geq 0$, úgy hogy $F(\bar{x}) > 0$.

Ismeretes, hogy lineáris esetben a gazdaság működőképessége nem csak szükséges, de elégséges feltétele is annak, hogy a fenti kérdésre pozitív választ lehessen adni. Nem lineáris esetben nem ez a helyzet. Ezért itt megkülönböztetünk elérhető és nem elérhető végső kibocsátást.

5. *definíció:* Egy működőképes gazdaságban *elérhetőnek nevezzük az* $\bar{y} > 0$ végső kibocsátást, ha

$$L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq \bar{y}\} \neq \emptyset.$$

A felvetett kérdésre az $L_{\bar{y}}$ halmaz vizsgálata révén nyerünk választ.

2. *tétel:* Az $L_{\bar{y}} \neq \emptyset$ halmaz zárt a $x^0 = x^1 \cap x^2$ vektorműveletre, ahol x^1; $x^2 \in R^n_+$ és $\xi^0_i = \min\,[\xi^1_i; \xi^2_i]\ \forall i$-re.

Legyen $x^1; x^2 \in L_{\bar{y}}$. Mivel $x^1 \geq 0$; $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^0 = x^1 \cap x^2 \geq 0$. Nyilván $x^0 \leq x^1$ és $x^0 \leq x^2$, ezért

$$G(x^0) \leq G(x^1) \text{ és } G(x^0) \leq G(x^2)$$

Belátjuk, hogy x^0 minden feltételt kielégít. Tekintsük $F_i(x^0)$-t.
Ha $\xi^0_i = \xi^1_i$, akkor $F_i(x^0) = \xi^0_i - G_i(x^0) \geq \xi^1_i - G_i(x^1) \geq \eta_i$.
Ha $\xi^0_i = \xi^2_i$, akkor $F_i(x^0) = \xi^0_i - G_i(x^0) \geq \xi^2_i - G_i(x^2) \geq \eta_i$.
Tehát $x^0 \in L_{\bar{y}}$.
Felhasználjuk az alábbi tényt:

1. *segédtétel:* Ha a nem üres $H \subset R^n$ kompakt halmaz zárt a $\cap$ vektorműveletre: létezik legkisebb eleme.[3]

Tekintsük a következő szélsőértékfeladatokat:

$$\xi_i \to \min$$
$$x \in H \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Mivel H kompakt és nem üres: ezeknek a feladatoknak van megoldásuk. Legyenek ezek: $x^1; x^2; \ldots x^n$. Képezzük az $\hat{x} = \bigcap_{i=1}^{n} x^i$ vektort. A feltevésünk szerint $\hat{x} \in H$ és ugyanakkor: $\hat{x} \leq x$, $\forall\, x \in H$. Tehát $\hat{x}$ a H halmaz legkisebb eleme.

3. *tétel:* Az $L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq \bar{y}\} \neq \emptyset$ halmaznak van legkisebb eleme.

2. tétel miatt $L_{\bar{y}}$ zárt a $\cap$ vektorműveletre. Ha kompakt is, akkor az állítás az 1. Segédtétel következménye. Ha $L_{\bar{y}}$ nem kompakt: legyen $\bar{x} \in L_{\bar{y}}$, ami biztosan létezik. Tekintsük az

$$\bar{L}_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq \bar{y};\ x \leq \bar{x}\}$$

[3] A segédtétel speciális esete egy G. WINTGENtől származó tételnek [11], amely elégséges feltételt ad arra, hogy egy matematikai programozási feladatcsalád indifferens legyen a függvények egy adott osztályára nézve.

halmazt. Ez biztosan nem üres és kompakt; van tehát legkisebb eleme, amely egyben az $L_{\bar{y}}$ halmaznak is legkisebb eleme.

4. *tétel:* Legyen $\bar{x}$ az $L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq \bar{y}\}$ halmaz legkisebb eleme. $\bar{x}$ egyben komplementer megoldás is, azaz

$$\bar{x}^T [F(\bar{x}) - \bar{y}] = 0.$$

Tegyük fel, hogy a komplementaritás nem áll fenn. Akkor $\exists i$ hogy $\bar{\xi}_i > 0$ és $F_i(\bar{x}) > \eta_i$.
Képezzük az $\hat{x} = \bar{x} - \delta e_i$ vektort. Elég kis δ-ra: $\hat{x} \geq 0$. $F(x)$ folytonossága miatt $F_i(\hat{x}) = F_i(\bar{x} - \delta e_i) \geq \eta_i$, ha δ nem túl nagy. Ugyanakkor a diagonálison kívüli antitonitás miatt: minden $j \neq i$ esetén

$$F_j(\hat{x}) = F_j(\bar{x} - \delta e_i) \geq F_j(\bar{x}) \geq \bar{\eta}_j$$

vagyis $F(\hat{x}) \geq \bar{y}$ és így $\hat{x} \in L_{\bar{y}}$. Azonban $\hat{x} \leq \bar{x}$, ami ellentmond annak, hogy $\bar{x}$ az $L_{\bar{y}}$ halmaz legkisebb eleme.

5. *tétel:* Az $L_{\bar{y}} \neq \emptyset$ halmaz legkisebb eleme pozitív: $\bar{x} > 0$ és ezért $\bar{x}$-ben a feltételrendszer egyenlőségre teljesül.

Tegyük fel, hogy $\bar{x} \ngtr 0$ vagyis $\exists i$ hogy $\bar{\xi}_i = 0$. Ebben az esetben azonban $\bar{x}$ nem lehet megengedett. Ugyanis

$$F_i(\bar{x}) = \bar{\xi}_i - G_i(\bar{x}) \leq 0$$

hiszen $\bar{\xi}_i = 0$ és $G_i(\bar{x}) \geq 0$. Vagyis $\bar{x}$ nem elégíti ki az $F_i(x) \geq \bar{\eta}_i$ feltételt. Ha viszont $\bar{x} > 0$, akkor a komplementaritás miatt: $F(\bar{x}) = \bar{y}$.

Az 5. tétel alapján most már levonhatjuk a következtetéseket a megoldhatóság kérdésében. Kiderül, hogy először is egy sajátos extremum tulajdonsággal találkozhatunk. Vezessük be a társadalmi termelés költségeinek a fogalmát.

6. *definíció:* A *társadalmi* termelés *költségfüggvényének* nevezünk egy R^n_+-on értelmezett $\varphi(x)$ skalárértékű függvényt, ha eleget tesz az alábbi tulajdonságoknak:

— $\varphi(0) = 0$
— $\varphi(x) > 0$ ha $|x| > 0$
— izotón, vagyis $x^1 \geq x^2 \rightarrow \varphi(x^1) \geq \varphi(x^2)$.

6. *tétel:* Egy működőképes gazdaságban minden elérhető végső kibocsátás megvalósítható olyan bruttó kibocsátással, amely azt minimális társadalmi összköltséggel éri el.

Bármilyen konkrét tartalma és formája is legyen a társadalmi termelés költségeit mérő függvénynek: az a 6. D. értelmében izotón. Márpedig minden izotón függvény minimumát a megengedett megoldások halmazának legkisebb elemében veszi fel, ha ilyen elem létezik. Így esetünkben: $\varphi(\bar{x}) \leq \varphi(x) \forall x \in L_{\bar{y}}$.[4] Így állunk tehát minden elérhető végső kibocsátás esetében. Az is könnyen belátható, hogy ha létezik elérhető végső kibocsátás a gazdaságban, akkor minden ennél kisebb végső kibocsátás szintén elérhető.

7. *tétel:* Ha $\bar{y}$ elérhető végső kibocsátás, akkor minden $0 \leq y \leq \bar{y}$ ugyancsak elérhető.[5]

Minthogy $\bar{y}$ elérhető $\exists \bar{x}$, hogy $F(\bar{x}) \geq \bar{y}$. Minthogy $y \leq \bar{y}$: $L_y = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq y\} \neq \emptyset$, mert $F(\bar{x}) \geq \bar{y} \geq y$.

Az eddig tett feltételezések alapján nem lehet pozitív választ adni arra a kérdésre, hogy tetszőleges $y > 0$ végső kibocsátás elérhető-e. Ennek biztosítása további feltételezéseket kíván, amelyek kizárják a kihozatal olyan mérvű romlását a termelés növekedésével, ahol már a termelés fenntartása annyi, vagy több ráfordítást igényel, mint amennyi a termelés eredménye. Szükséges és elégséges feltételt nem ismerünk; eddig csak elégséges feltételek láttak napvilágot. Ilyen például az

1. *kiegészítő feltevés:* A $G(x)$ függvény szubadditív vagyis

$$x^1; x^2 \geq 0\text{-ra}$$

$$G(x^1 + x^2) \leq G(x^1) + G(x^2).$$

1KF. miatt viszont $F(x)$ szuperadditív, mert

$$F(x^1 + x^2) = x^1 + x^2 - G(x^1 + x^2) \geq x^1 - G(x^1) + x^2 - G(x^2) = F(x^1) + F(x^2).$$

7. *definíció:* Egy gazdaságot *fejlődőképesnek* mondunk, ha 1KF. teljesül benne.[6]

8. *tétel:* Egy fejlődőképes gazdaságban tetszőleges végső kibocsátás: $y > 0$ elérhető.

Minthogy a fejlődőképes gazdaság eleve működőképes: $\exists \bar{x}$ hogy $F(x) = \bar{y} > 0$. Megmutatjuk, hogy az így elért végső kibocsátás megkétszerezhető.

[4] A 3—6. tételek speciális esetei, illetve következményei a z-függvények minimalitási és komplementaritási tulajdonságainak, amelyeket először *Tamir* vett észre. A nemlineáris input-output modell megoldásának minimalitási tulajdonsága azonban szerepel már *Evans*nál is és később *Sandberg*nél, *Lahiri*nál és természetesen *Lahiri* és *Pyatt*nál.

[5] Ezt az összefüggést már Evans észrevette.

[6] A különböző szerzők eltérő alakú, de egymáshoz nagyon hasonló tartalmi feltételekkel biztosítják, hogy tetszőleges végső kibocsátás elérhető legyen.

Nataf feltételezi, hogy az átlagos fajlagos ráfordítási együtthatók a tevékenységek növekedésével nem nőnek, és hogy ezért az $[E - A(x)]$ mátrix mindig „Leontief típusú".

*Sandberg*nél az elemi ráfordítási függvények konkávok és a mátrix mindig ún. P mátrix, ami az adott esetben azonos azzal, hogy Leontief típusú is.

Lahiri és *Pyatt* részben a $G(\lambda x) \leq \lambda G(x)$ $(\lambda > 1)$ feltevéssel élnek, részben azt teszik fel, hogy az összes fajlagos anyagfelhasználás a bruttó termelés növekedésével nem nő és mindig 1 alatt marad:

$$x^1 \geq x^2 \Rightarrow 1^T A(x^2) \leq 1^T A(x^2) < 1.$$

Ez a feltételezés is azt eredményezi, hogy az $[E - A(x)]$ mátrix „Leontief típusú" akármekkora is a bruttó termelés.

Legyen

$$\bar{\bar{y}} = \bar{y} + \bar{y} \quad \text{és} \quad \bar{\bar{x}} = \bar{x} + \bar{x}.$$

1 KF. miatt

$$F(\bar{\bar{x}}) \geq F(\bar{x}) + F(\bar{x}) = \bar{\bar{y}}$$

vagyis $L_{\bar{\bar{y}}} \neq \emptyset$. A megduplázás kellő számú megismétlésével olyan elérhető végső kibocsátáshoz jutunk: $\hat{y}$, amelyre $\hat{y} > y$. De akkor a 7. tétel alapján $L_y \neq \emptyset$.

A modell néhány tulajdonsága további kiegészítő feltevések mellett

A lineáris input-output modell nevezetes sajátossága, hogy működőképes gazdaság esetében az együtthatómátrix: mindig invertálható és inverze nem negatív. Felvetődik a kérdés, hogy a nem lineáris esetben miként nyilvánul meg ez a sajátosság.

Az eddigi vizsgálatainkhoz technikai jellegű feltételként csak az elemi ráfordításfüggvények folytonosságára volt szükség. Most pótlólag feltételezzük a modellben szereplő leképezések differenciálhatóságát és „regularitását" is.

2. *kiegészítő feltevés:* $G(x)$ a nem-negatív ortáns minden belső pontjában differenciálható.

2KF. miatt $F(x)$ is differenciálható. A differenciálhatóság következtében léteznek parciális deriváltjaik és képezhetők a megfelelő Jacobi-mátrixok:

$$\nabla G(x) \quad \text{és} \quad \nabla F(x) = E - \nabla G(x).$$

$\nabla G(x)$ elemei differenciális fajlagos ráfordítási együtthatók. Durván szólva $\dfrac{\partial G_i(x)}{\partial \xi_j}$ kifejezi azt az i-ik szektorból származó többletráfordítást, amely ahhoz szükséges, hogy a társadalmi termelést a j-ik ágazatban az x szintről egy egységgel növeljük.

Minthogy $G(x)$ izotón: $\nabla G(x) \geq 0$.

3. *kiegészítő feltevés:* A $\nabla F(x)$ mátrix a nem-negatív ortáns belsejének minden pontjában nem-szinguláris, azaz $[\nabla F(x)]^{-1}$ létezik $\dot{R}^n_+$-ban.

Megmutatjuk, hogy 2KF. és 3KF. mellett érvényes a

2. *segédtétel:* Legyen $\bar{x}$ az $L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid \bar{y} - F(x) = H(x) \leq 0\}$ halmaz legkisebb eleme. A 2. és 3. kiegészítő feltevésből következik, hogy $\bar{x}$-ben teljesül a nem-lineáris programozás elméletéből ismert Mangasarian-féle regularitási feltétel.

8. *definíció:* Adva $H(x)$ m-elemű vektorfüggvény egy $K \subset R^n$ halmazon. Azt mondjuk, hogy az $\bar{x} \in L = \{x \in K \mid H(x) \leq 0\}$ pontban teljesül a Mangasarian-féle regularitási feltétel, ha

1. $H_i(x)$ differenciálható $\bar{x}$-ben, $\forall i \in I^0(\bar{x})$.

2. Létezik olyan $c \in R^m$ vektor, amelyre

$$c^T \nabla H_i(\bar{x}) \geq 0; \quad \text{ha} \quad i \in I^{01}(\bar{x}),$$

$$c^T \nabla H_i(\bar{x}) > 0, \quad \text{ha} \quad i \in I^{02}(\bar{x}),$$

ahol $I^0(\bar{x})$ az x pontban aktív (egyenlőségre teljesülő) feltételek indexhalmaza, $I^{01}(\bar{x})$ az $\bar{x}$ pontban pszeudokonkáv aktív feltételek indexhalmaza és $I^{02}(\bar{x})$ az $\bar{x}$ pontban nem-pszeudokonkáv aktív feltételek indexhalmaza.

A mi esetünkben $H_i(x)$ minden feltételben aktív, hiszen az 5. tétel szerint $F(\bar{x}) = \bar{y} \rightarrow H(\bar{x}) = 0$ és $\bar{x} > 0$. $H(x)$ értelemszerűen a nem-negatív ortánsban differenciálható. Mivel $\nabla H(x) = -\nabla F(x)$, legyen $c = -[\nabla F(x)]^{-1} \cdot 1$. Ez kielégíti határozott egyenlőtlenség formájában a regularitási feltétel 2. követelményét:

$$\nabla H(\bar{x}) \cdot c = -\nabla F(\bar{x})\{-[\triangle F(\bar{x})]^{-1}\} \cdot 1 = 1 > 0.$$

A regularitás biztosítja, hogy a modell termelési függvényének Jacobi-mátrixa nem-negatív inverzzel rendelkezzék bizonyos pontokban.

9. tétel: Legyen $\bar{x}$ az $L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ | \bar{y} - F(x) \geq 0\} \neq \emptyset$ halmaz legkisebb eleme. $F(x)$ Jacobi mátrixa $\bar{x}$-ben nem szinguláris és inverze nem negatív.

A nemszingularitás a 3KF. következménye. Minthogy $\bar{x}$ legkisebb eleme $L_{\bar{y}}$-ben, ezért $\bar{x}$ optimális megoldása az alábbi programozási feladatoknak:

$$\xi_i \rightarrow \min! \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$H(x) = \bar{y} - F(x) \leq 0$$

$$x \in R^n_+.$$

Minthogy $\bar{x} > 0$ és teljesül a Mangasarian-féle regularitási feltétel, teljesülnek az optimalitás szükséges feltételeiként az ún. Kuhn—Tucker feltételek. Léteznek tehát olyan $u_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vektorok, hogy a célfüggvények gradiensei $\bar{x}$-ben megegyeznek az aktív feltételek gradiensei nem-pozitív lineáris kombinációval. Áll tehát, hogy

$$e_i = -\nabla H(\bar{x}) u_i; \ \forall i\text{-re}.$$

Legyen

$$U = [u_1; u_2; \ldots u_n].$$

Akkor:

$$E = -\nabla H(\bar{x}) U = \nabla F(\bar{x}) \cdot U$$

$$[\nabla F(\bar{x})]^{-1} = U \geq 0.$$

Biztosítható-e a termelési függvény Jacobi mátrixának nem-negatív inverze a pozitív ortáns minden pontjában? További feltételezések nélkül ez általában nem érhető el.

Mindeddig azonban semmiféle lényeges kikötést sem tettünk a modellben szereplő függvények típusáról. Legyen most:

4. *kiegészítő feltevés:* $F(x)$ kvázikonvex R^n_+-ban.

Ez annyit jelent, hogy ha x^1 és x^2 a társadalmi termelés két különböző szintje és $x^0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ $(0 < \lambda < 1)$ valamilyen átlagos szint a kettő között, akkor ez az átlagos bruttó kibocsátás egyetlen termékből sem biztosíthat nagyobb végső kibocsátást, mint a kiinduló tevékenségek által biztosított végső kibocsátások közül a nagyobbik.

Új feltételünk megszorító jellegű, de sok gyakorlati tapasztalat alátámasztani látszik. Ugyanakkor ez a feltevés sem támasztható alá egyértelműen statisztikai adatokkal.

Ellentmondó jelenségek főként a mezőgazdaságnál mutatkoznak. Ami érthető is, ha meggondoljuk, hogy a mezőgazdasági ágazatok kihozatala a ráfordítások által nincsen úgy meghatározva, mint pl. az iparban. Az időjárási viszonyok ugyanis lényegesen befolyásolják a technológia tényleges hatékonyságát.

Az $F(x)$ leképezés Jacobi mátrixának nem negatív invertálhatósága szoros kapcsolatban van azzal, hogy $F(x)$ inverz izotón-e vagy sem. A termelési függvény inverz izotonitása annyit jelent, hogy nagyobb végső kibocsátás eléréséhez nagyobb bruttó termelésre van szükség.

10. *tétel:* 2., 3. és 4KF. feltételezése mellett legyen az $F(x)$ Jacobi mátrixa a pozitív ortáns minden pontjában nem-negatívan invertálható. Ekkor $F(x)$ inverz izotón.[7]

Legyen x^1 és x^2 $\dot{R}^n_+$ két tetszőleges pontja úgy, hogy

$$F(x^1) \geq F(x^2).$$

A leképezés kvázikonvexitása miatt

$$(x^2 - x^1)^T \nabla F(x^1) \leq 0.$$

Azonban $[\nabla F(x^1)]^{-1} \geq 0$. Így $x^2 - x^1 \leq 0$ és $x^1 \geq x^2$. Tehát

$$F(x^1) \geq F(x^2) \to x^1 \geq x^2$$

A tétel állításának megfordításához nem szükséges a kvázikonvexitás feltételezése. A Jacobi mátrix inverzének nem-negativitását a leképezés inverz izotón volta biztosítja, amint ezt Moré és Rheinboldt [7]-ben bizonyították.

11. *tétel:*[8] Teljesüljön 2KF., 3KF. és legyen $F(x)$ inverz izotón: akkor $[\nabla F(x)]^{-1} \geq 0$ $\forall x \in \dot{R}^n_+$-ban.

Válasszuk az s irányt úgy, hogy $\nabla F(x) \cdot s > 0$. Minthogy $\nabla F(x)$ nemszinguláris, ilyen irány létezik. Ekkor

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{1}{\tau} [F(x + \tau s) - F(x)] = \nabla F(x) \cdot s > 0.$$

[7] MORÉ és RHEINBOLDT [7]-ben konvex leképzésre bizonyították, hogy az akkor és csak akkor inverz izotón, ha $[\nabla F(x)]^{-1}$ létezik és nem-negatív valamilyen $D \subset R^n$ nyílt, konvex halmazon. A tétel elégséges feltételt adó részéhez csak kvázikonvexitást kell feltételezni.

[8] A 11. tétel és bizonyítása *Moré*tól és *Rheinboldt*tól származik.

Így elég kicsiny $\tau > 0$-ra $F(x + \tau s) > F(x)$ és a feltételezett inverz-izotonitás miatt $s \geq 0$. Legyen már most $\nabla F(x) \cdot s \geq 0$. Képezzük az $s^\varkappa - \frac{1}{\varkappa}[\nabla F(x)]^{-1} \cdot 1$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$ sorozatot. Ekkor

$$\nabla F(x) \cdot s^\varkappa = \nabla F(x)\left[s + \frac{1}{\varkappa}[\nabla F(x)]^{-1} \cdot 1\right] > 0.$$

Így az előzők miatt $s^\varkappa \geq 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$, aminek következtében

$$s = \lim_{\varkappa \to \infty} s^\varkappa \geq 0.$$

Tehát $\nabla F(x)$ olyan mátrix, hogy $\nabla F(x) \cdot s \geq 0 \to s \geq 0$. Ez viszont azt jelenti, hogy $[\nabla F(x)]^{-1} \geq 0$.

12. *tétel:* Ha $F(x)$ inverz izotón: az $F(x) = y$ egyenletrendszer megoldása minden elérhető végső kibocsátásnál egyértelmű.

Legyen $\bar{x}$ az $L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ | F(x) \geq \bar{y}\} \neq \emptyset$ halmaz legkisebb eleme. Az 5. tétel következtében: $F(\bar{x}) = \bar{y}$. Tegyük fel $\exists \hat{x} \neq \bar{x}$ úgy, hogy $F(\hat{x}) = \bar{y}$. Minthogy $\bar{x}$ a halmaz legkisebb eleme, $\bar{x} \leq \hat{x}$. Az inverz izotonitás miatt $F(\bar{x}) \geq F(x) \Rightarrow \bar{x} \geq \hat{x}$, ami ellentmond annak, hogy $\bar{x} \leq \hat{x}$.

4KF.-ben bizonyos korlátot állítottunk a kihozatal, vagy ha tetszik a bruttó termelés hatékonysága, növekedésének. Nem tűnik kevésbé indokolhatónak a hatékonyság eetleges csökkenésének a korlátozása sem. Ezért a továbbiakban legyen

$$\min\,[F(x^1); F(x)^2] \leq F(x^0) \leq \max\,[F(x^1); F(x^2)].$$

Ez annyit jelent, hogy ha a bruttó termelés valamilyen x^1 szintről valamilyen x^2 szintre változik: közben

$$x^0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2\text{-re} \qquad (0 < \lambda < 1)$$

— mindig elérünk legalább akkora végső kibocsátást, mint a kisebb szintű végpontban és

— mindig legfeljebb akkora végső kibocsátást érünk el, mint a magasabb szintű végpontban.

5. *kiegészítő feltevés:* Legyen $F(x) R^n_+$-ben kvázimonoton.

3. *segédtétel:* Ha $H(x)$ alulról félig folytonos m elemű kvázimonoton vektorfüggvény egy $P \subset R^n$ poliéderen, akkor az $L = \{x \in P \,|\, H(x) \leq b\}$ halmaz minden $b \in R^m$ mellett maga is poliéder.

A 3. segédtétel bizonyítását lásd MARTOS [6] könyvének 78. oldalán.

13. *tétel:* 5KF. mellett minden $L_y = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq y\}$ halmaz: poliéder. 1AF. miatt $F(x)$ folytonos; a segédtételben szereplő poliéder szerepét a nemnegatív ortáns tölti be; a kvázimonotonitást pedig feltételeztük.

Szigorítsuk meg valamelyest 5KF-t.

5a. *kiegészítő feltevés:* Legyen $F(x)$ úgy kvázimonoton, hogy egyidejűleg pszeudokonvex is $\mathring{R}^n_+$-ban.

14. *tétel:* 5aKF. mellett minden elérhető végső felhasználáshoz tartozó $L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq \bar{y}\} \neq \emptyset$ halmaz megegyezik a

$$K_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid (x - \bar{x})^T \nabla F(\bar{x}) \geq 0\}$$

poliéderrel, ahol $\bar{x}$ az $L_{\bar{y}}$ halmaz legkisebb eleme. Legyen $x \in L_y$ akkor: $x \geq 0$ és $F(x) \geq \bar{y}$, ugyanakkor: $F(\bar{x}) = \bar{y}$, tehát a kvázikonkavitás miatt:

$$F(x) \geq F(\bar{x}) \Rightarrow (x - \bar{x})^T \nabla F(\bar{x}) \geq 0.$$

Vagyis: $x \in K_{\bar{y}}$.

Legyen $x \in K_{\bar{y}}$, tehát $x \geq 0$ és $(x - \bar{x})^T \nabla F(\bar{x}) \geq 0$. Ekkor a pszeudokonvexitás miatt: $F(x) \geq F(\bar{x}) = \bar{y}$. Vagyis: $x \in L_{\bar{y}}$.

(Beérkezett: 1982. február 17-én)

IRODALOM

1. Bod P.: Nem-lineáris ágazatközi kapcsolatok matematikai vizsgálata. SZIGMA (1974) 261—261.
2. Bod P.: Néhány megjegyzés a lineáris modellek segítségével történő gazdasági elemzés továbbfejlesztéséhez. Döntési Modellek II. Közgazdasági és Jogi Kiadó (1969) 237—250.
3. Evans, W. D.: Input Output Computations. The Structural Interdependence of the Economy. ed. T. Barna. New York. John Wiley and Sons. (1954)
4. Lahiri, S.: Input Output Analysis with Scale-Dependent Coefficients. ECONOMETRICA 44 (1976) 947—962.
5. Lahiri, S.—Pyatt, G.: On the Solution of Scale-Dependent Input Output Models. ECONOMETRICA 49 (1980) 1827—1821.
6. Martos, B.: Non-linear Programming. Akadémiai Kiadó (1975).
7. Moré, J.—Rheinboldt, W.: On P- and S-Functions and Related Classes of n-dimensional Non-linear Mappings. Linear Algebra and its Applications 6 (1973) 45—68.
8. Nataf, A.: Systèmes économiques de production à rendement croissant. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris. Vol. IX. Fasc. 2. (1960) 161—170.
9. Sandberg, I. W.: A Non-linear Input Output Model of Multisectoral Economy. ECONOMETRICA 41. (1973) 1167—1182.
10. Tamir, A.: Minimality and Complementarity Properties Associated with Z-Functions and M-Functions. Mathematical Programming. 7 (1974) 17—31.
11. Wintgen, G.: Indifferente Optimierungsprobleme. MKÖ Tagung, Konferenzprotokoll. (1964) Teil II. 3—6.

ON NONLINEAR GENERALIZATIONS OF THE OPEN, STATIC INPUT-OUTPUT MODEL

We give a survey on several nonlinear generalizations of the open, static input-output model. We consider that form of the model in which all inputs depend on the activity levels of each sector. Properties of the model will be proven directly in a unified framework. The model has the following form:

$$[x - G(x)] = F(x) = y$$

where G and F represent continuous mappings from R^n_+ into R^n.

We show that the statements proven in [1] for a specific model, in which each input depends only on the activity level of the consuming sector, are still valid for the general scheme. So among others:

— there exists a gross output vector: x_0 with minimum social cost for each reachable final output;

— if x_0 is a regular point: the Jacobian of the mapping $F(x)$ has nonnegative inverse.

Further properties of the model can be proven under certain assumptions concerning the behaviour of the mapping $F(x)$ over the nonnegatéve orthant:

— if $F(x)$ is quasiconvex in $\mathring{R}^n_+$: $F(x)$ is inverse isotonic

— if $F(x)$ is inverse isotonic in $\mathring{R}^n_+$: it has a nonnegative inverse in the positive orthant

— if $F(x)$ is inverse isotonic and the equation $F(x) = y$ has solution: the solution is unique

— if $F(x)$ is quasimonotonic in $\mathring{R}^n_+$: the feasible gross outputs belonging to a given final output form a polytope.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ОТКРЫТОЙ, СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВВОД-ВЫВОД

В рассматриваемой работе дается обзор наиболее существенных результатов, достигнутых в отношении нелинейных обобщений открытой, статической модели ввод-вывод. В аспекте унифицированного подхода дается непосредственное доказательство на ту форму модели, в которой все затраты зависят от уровня деятельности всех отраслей, т. е. от вектора общественной валовой продукции.

По своей форме модель является следующей:

$$[x - G(x)] = F(x) = y$$

где

G и F представляют собой непрерывное отображение R^n_+ в R^n.

Указывается, что и в отношении этой более обобщенной модели являются справедливыми все те выводы, которые в нашей статье, обозначаемой как (1) были отнесены к такой специальной модели, в которой все затраты зависили исключительно от деятельности потребляющей отрасли. Так, например,

— относительно любого достигнутого конечного потребления существует такая валовая продукция x_0, которая реализуется при минимальных совокупных общественных затратах;

— если x_0 является регулярной точкой $F(x)$, то в x_0 матрица Якоби функции $F(x)$ имеет неотрицательную обратную матрицу.

Наряду с различными предположениями относительно поведения отображения $F(x)$ в неотрицательное множество устанавливаются и другие свойства модели. Например,

— если $F(x)$ в $\mathring{R}^n_+$ квазивыпуклая, то она, вместе с тем и обратило изотонна;

— если $F(x)$ в $\mathring{R}^n_+$ обратило изотонна, то в положительном квадранте ее матрица Якоби обладает неотрицательной обратной матрицей;

— если $F(x)$ обратимо изотонна, то решение системы уровнения $F(x)$-у — если оно вообще существует — является однозначным;

— если $F(x)$ в $\mathring{R}^n_+$ является квазимонотонным, то допустимое валовая продукция, относящаяся к какому-то конечному выпуску образует многогранник.