MEDVEGYEV PÉTER

A Neumann modell Morishima-féle általánosításról

A gazdasági növekedés Neumann modellje[1] a matematikai közgazdaságtan, ezen belül az általános egyensúlyelmélet, egyik legismertebb eredménye. A modell sokak által kritizált egyik hiányossága, hogy figyelmen kívül hagyja, elnagyoltan kezeli a keresleti — kínálati viszonyok hatását az árakra és evvel szoros összefüggésben, nem szerepelteti explicit módon a különböző társadalmi osztályokat. Neumann eredeti dolgozatának megjelenése óta (1937) számos kutató, matematikus és közgazdász, foglalkozott a modell különböző aspektusaival, általánosításaival. Az általánosítások közül talán a legismertebb M. MORISHIMA [7] modellje, mely tulajdonképpen a szabadversenyes tőkés gazdaságnak az általános egyensúlyelméleti szemléletben fogant stacionér modellje. A dolgozatban Morishima eredményeit némiképpen *általánosítjuk*, *összehasonlítjuk* más kutatók — elsősorban *J. Łoś* — eredményeivel. Morishima a modell egzisztenciáját, vagyis az egyenletek konzisztenciáját, az Eilenberg—Montgomery féle fixponttételre támaszkodva bizonyítja. Az itt követett bizonyítás fő előnye, hogy az egzisztencia-tételek bizonyítása a lényegesen egyszerűbb, ismertebb Kakutáni tételre támaszkodva végrehajtható, s így a modell tárgyalása nagyban egyszerűsíthető.

1. A modell

Legyen adva egy absztrakt gazdaság. A gazdaságban a technológia-termelési lehetőségeket egy $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ $n \times m$ típusú input-output mátrixpár fejezi ki, ahol n a gazdaságban levő áruk, jószágok; m pedig az elemi folyamatok száma. A jószágok között kitüntetett szerepet játszik a munka, melyet külön kezelünk. Legyen $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ az egyes eljárások munkaigénye. A továbbiak szempontjából elengedhetetlen annak feltételezése, hogy minden egyes termelési eljárás üzemeltetéséhez szükség van munkára, vagyis $\mathbf{v} > \mathbf{0}$. Jelölje $w > 0$ a munkabért. A gazdaságban az árak vektora $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. Az árakról feltételezzük, hogy eleget tesznek a következő nulla-profit, és komp-

[1] A modell egyenletei:

(NNF)	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0},\ \lambda > 0$
(P)	$\mathbf{Bx} \geq \lambda \mathbf{Ax}$
(D)	$\mathbf{pB} \leq \lambda \mathbf{pA}$
(PD)	$\mathbf{pBx} > 0$

$\mathbf{A}, \mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ $n \times m$ típusú konstans mátrixok.

lementaritási feltételeknek:

$$\text{(D)} \qquad \mathbf{pB} \leq (1+\beta)\,(\mathbf{pA} + w\cdot\mathbf{v})$$

$$\text{(DKF)} \qquad \mathbf{pBx} = (1+\beta)\,(\mathbf{pA} + w\cdot\mathbf{v})\mathbf{x},$$

ahol β a profitráta, és $\mathbf{x}$ az egyes eljárások intenzitásának vektora.

A termelési folyamat ráfordításigénye értékben kifejezve, eljárásonkénti bontásban $\mathbf{pA} + w\cdot\mathbf{v}$, ahol $\mathbf{pA}$ az „anyagráfordítás" és $w\cdot\mathbf{v}$ a „munkaráfordítás". Az eljárások bevétele $\mathbf{pB}$. A (D) feltevés szerint egyetlen egy eljárás sem eredményezhet extraprofitot, s másoldalról viszont, (DKF) szerint olyan eljárást, mely β-nál kevesebbet jövedelmez, nem alkalmaznak. A (D)—(DKF) feltételek alkotják a modell *duál* oldalát.

Valamivel komplikáltabbak a *primál* oldal összefüggései. A primál oldal a piaci egyensúly összefüggéseit tartalmazza.

A kínálati oldal a termelés kibocsájtásával azonos, vagyis $\mathbf{Bx}$. Ebből kell fedezni egyrészt a termelő felhasználásokat és a gazdaság bővítésének költségeit, másrészt az improduktív kiadásokat. Vegyük sorba az egyes tételeket!

A termelési folyamat anyagfelhasználása $\mathbf{Ax}$. Tegyük fel, hogy az egységnyi munkaerő piaci kereslete a $\mathbf{p}$ árrendszer mellett $\mathbf{c(p)}$. Mivel a gazdaságban felhasznált összes munkaerő $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}$, ezért a munkaerő piaci kereslete $\mathbf{c(p)}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})$, vagyis a termelési folyamat ráfordítás igénye $\mathbf{Ax} + \mathbf{c(p)}\cdot(\mathbf{vx}) = \mathbf{Ax} + (\mathbf{c(p)}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{x} = [\mathbf{A} + \mathbf{c(p)}\cdot\mathbf{v}]\cdot\mathbf{x}$.

Mivel egyenlő az értéktöbblet? Nyilván az összes kibocsájtás értékéből $\mathbf{pBx}$-ből le kell vonni az összes ráfordítás költségeit $\{\mathbf{pAx} + w(\mathbf{vx})\}$-et: $N = \mathbf{pBx} - \{\mathbf{pAx} + (\mathbf{vx})\}$. (DKF)-et figyelembe véve $N = \beta\{\mathbf{pAx} + w(\mathbf{vx})\}$. Ha N értéke pozitív, akkor az értéktöbbletből a gazdaság növelését illetve az improduktív kiadásokat finanszírozzák. Jelölje (1-s) az értéktöbblet improduktív célokra fordított hányadát.

Tegyük fel, hogy a gazdaságban minden egyes eljárás $(1+\alpha)$-szorosára bővül. Ennek finanszírozása $\alpha(\mathbf{Ax} + \mathbf{c(p)vx})$ pótlólagos ráfordításra van szükség. Jelölje $\mathbf{g(p)}$ az improduktív kiadások elköltésének szerkezetét. Ha I összeg áll rendelkezésre improduktív kiadásokra, akkor $I\cdot\mathbf{g(p)}$ az improduktív kiadások kereslete. $I = (1-s)N$. Ha $N \leq 0$, akkor természetesen sem improduktív, sem produktív kiadásokra nincs mód. A fentieket figyelembe véve a primál oldal:

$$\text{(P)} \qquad \mathbf{Bx} \geq (1+\alpha)\{\mathbf{A} + \mathbf{c(p)}\cdot\mathbf{v}\}\mathbf{x} + (1-s)\cdot\max\{0,\beta\}\cdot[\mathbf{pAx} + w\cdot\mathbf{vx}]\cdot\mathbf{g(p)}$$

$$\text{(PKF)} \qquad \mathbf{pBx} = (1+\alpha)\cdot\mathbf{p}\{\mathbf{A} + \mathbf{c(p)}\cdot\mathbf{v}\}\mathbf{x} + (1-s)\cdot\max\{0,\beta\}\cdot[\mathbf{pAx} + w\cdot\mathbf{vx}]\cdot\mathbf{pg(p)}.$$

A (P) feltétel szerint a kínálatnak fedezni kell a keresletet, míg a (PKF) feltétel szerint a szabad jószágok ára nulla lesz.

A primál és duál oldalt kapcsolja össze a

$$\text{(PD)} \qquad \mathbf{pBx} > 0$$

feltétel.

Nyilván teljesülnek a $\mathbf{p} \geq 0$, $\mathbf{x} \geq 0$ megkötések. Megköveteljük még az $1+\alpha > 0$, és $1+\beta > 0$ összefüggéseket.

Összefoglalva: a modellt specifikáló egyenletek a következőek:

(NNF) $1 + \alpha > 0,\ 1 + \beta > 0,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$

(D) $\mathbf{pB} \leq (1 + \beta) \cdot \{\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v}\}$

(DKF) $\mathbf{pBx} = (1 + \beta) \cdot \{\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v}\}\mathbf{x}$

(P) $\mathbf{Bx} \geq (1 + \alpha)[\mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}]\mathbf{x} + (1 - s)\max\{0, \beta\} \cdot [\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}] \cdot \mathbf{g}(\mathbf{p})$

(PKF) $\mathbf{pBx} = (1 + \alpha)\mathbf{p}[\mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p})\mathbf{v}]\mathbf{x} + (1 - s)\max\{0, \beta\} \cdot [\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx}] \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{p})$

(PD) $\mathbf{pBx} > 0.$

2. A modell Morishima-féle megoldása

Morishima a fenti egyenletek kompatibilitását a következő feltételek mellett bizonyította:

a) g folytonos függvény és $\mathbf{pg}(\mathbf{p}) = 1$, $\mathbf{g}(\mathbf{p}) \geq \mathbf{0}$, $\forall\, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$

b) $\mathbf{c}$ folytonos függvény és $\mathbf{pc}(\mathbf{p}) = w$, $\mathbf{c}(\mathbf{p}) \geq \mathbf{0}$, $\forall\, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$

c) $s > 0$

d) $w > 0, \mathbf{v} > 0$

e) **A** és **B** eleget tesz az ún. KMT feltételeknek, vagyis **A** minden oszlopában és **B** minden sorában van pozitív elem, $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$. (Kemény—Morgenstern—Thompson féle feltételek.)

A fentiekkel kapcsolatban a következő észrevételek tehetők:

1° Az a) és b) feltételek első látásra elfogadhatóaknak tűnnek. A b) lényegileg az ún. „létminimum-bér"kikötés. A munkások pontosan annyi jövedelemhez jutnak, amennyit elköltenek fogyasztási javakra. Bár ez a feltétel figyelmen kívül hagyja a munkások megtakarítását, mely reális tény, a feltevést mégsem kizárólag közgazdasági okból tartom erősnek. A fő problémát az jelenti, hogy eltekint a $\mathbf{c}(\mathbf{p}) = \mathbf{c}_0$ lehetőségtől, vagyis a konstans kereslet lehetőségétől, mely szintén nem mond ellent a tapasztalatnak. Rugalmatlan kereslet esetén a bizonyítás nem alkalmazható! A modellben szereplő nemlinearitások látszólag igen általánosak, de valójában a felmerülő matematikai nehézségek megkerülését célozzák!

2° Több kifogás emelhető az $s > 0$ megszorítás ellen. Ha az értéktöbbletet teljességgel improduktív módon költik el, akkor Morishima bizonyítása nem alkalmazható. Még súlyosabb a probléma, ha eleve feltételezzük, hogy a gazdaságban csak egyszerű újratermelés lehetséges. Ilyenkor értéktöbblet nem képződik. Annak bizonyításához tehát, hogy mégis létezik egyensúly, fel kell tételezni, hogy ha létezne értéktöbblet, — ami nem létezik — akkor annak pozitív részét költenék a gazdaság növekedésének finanszírozására. Ha az egyszerű újratermelést társadalmi oldalról az egyszerű árutermeléssel, a bővített újratermelést a tőkés gazdasággal azonosítom, akkor az érvelés a következőképpen hangzik:

Ahhoz, hogy az egyszerű árutermelés egzisztenciáját belássam, fel kell tennem, hogy a tőkés termelési módban — amely történetileg, logikailag követi az egyszerű árutermelést — az értéktöbblet pozitív részét fordítják a gazdaság növekedésének finanszírozására.

3° Bár a bizonyítás módja, amit Morishima használ, különösen szellemes, mégis körülményes és egy nagyon nehéz tételre, az *Eilenberg–Montgomery fixponttételre támaszkodik.*

A fenti problémák feloldását kísérelem meg a következő pontokban.

A modell egzisztenciáját a következő feltételek mellett fogom bizonyítani:

a) $\mathbf{g}$ folytonos függévny $\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{p}) \leq \mathbf{1}$, $\mathbf{g}(\mathbf{p}) \geq \mathbf{0}$

b) $\mathbf{c}$ folytonos függvény $\mathbf{c}(\mathbf{p}) \geq 0 \ \forall \ \mathbf{p}$

c) $s \geq 0$

d) $w > 0$, $\mathbf{v} > 0$

e) $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ eleget tesz a KMT feltételeknek, vagyis $\mathbf{A}$ minden oszlopában és $\mathbf{B}$ minden sorában van pozitív elem, $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$.

3. A három-mátrix modell

A Neumann-típusú modellek sem az árak nagyságát, sem a termelés szintjét nem határozzák meg, csak a megfelelő arányokat. Feltehető tehát, hogy

$$\mathbf{x} \in S_m = \left\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{m} x_j = 1\right\}, \quad \mathbf{p} \in S_n = \left\{\mathbf{p} \geq \mathbf{0} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right\}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\lambda = 1 + \alpha, \ \mu = 1 + \beta$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} + w \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} + (1 - s) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \max\{0, \mu - 1\} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{p})\{\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v}\}.$$

Ezen jelölések segítségével a modell egyenletei:

(NNF) $\xi > 0$, $\mu > 0$, $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$
(D) $\mathbf{pB} \leq \mu\mathbf{pG}$
(DKF) $\mathbf{pBx} = \mu\mathbf{pGx}$
(P) $\mathbf{Bx} \geq \lambda\mathbf{F}(\mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x}$
(PKF) $\mathbf{pBx} = \lambda\mathbf{pF}(\mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x}$
(PD) $\mathbf{pBx} > 0$.

A $\mathbf{G}$ mátrix konstans, az $\mathbf{F}$ pedig $(\mathbf{p}, \lambda, \mu)$ függvénye. Mivel a $\mathbf{c} : S_n \to R^n_+$ és $\mathbf{g} : S_n \to R^n_+$ *folytonos* függvények, ezért az $\mathbf{F}(\mathbf{p}, \lambda, \mu)$ mátrix a változó-folytonos függvénye lesz, hiszen az $\mathbf{F}(.,.,.)$ a $S_n \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ halmazon van értelmezve, s így az $\mathbf{F}$ definíciójában szereplő $1/\lambda$, mely a későbbiekben döntő szerepet játszik, az $\mathbf{F}$ folytonosságát az *értelmezési tartományon* nem befolyásolja.

Tekintsünk most el az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{G}$ mátrixok konkrét származtatásától. Definiáljuk a következő egyenleteket:

(NNF) $\mathbf{x}, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$; $\lambda, \mu > 0$
(D) $\mathbf{pB}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu) \leq \mu\mathbf{pG}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)$
(DKF) $\mathbf{pB}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x} = \mu\mathbf{pG}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x}$
(P) $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x} \geq \lambda\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x}$

(PKF) $\mathbf{pB}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{pF}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x}$
(PD) $\mathbf{pB}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x} > 0$.

Összehasonlítva a Neumann modell szokásos egyenleteivel két szembetűnő eltérést tapasztalhatunk.
1° A modell aszimmetrikus
2° A modell mátrixai a változók ($\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu$) függvényei. Tegyük fel, hogy a mátrixok a *változók folytonos függvényei.*

Az aszimmetrikus modellek vizsgálatát J. Łoś kezdeményezte[2] [1], [3], [5]. Az általa követett bizonyítás — mely a Kakutani-féle fixponttételre támaszkodik — könnyűszerrel általánosítható arra az esetre, ha ($\mathbf{F}, \mathbf{B}, \mathbf{G}$) a ($\mathbf{p}, \mathbf{x}$) változók folytonos függvénye, de a λ és a μ bekapcsolása az általa követett módon nem lehetséges. Jegyezzük meg, hogy a modell aszimmetriája miatt λ és μ — szemben a szimmetrikus esettel — nem azonos. MORISHIMA[3] [1], [6], [7] olyan általános modell vizsgálatát végezte el, melyben a modell mátrixai (p, λ)-nak folytonos függvényei, de a modell szimmetrikus. Az itt követett megközelítés a fenti két ,,irányzat'' egyesítésén alapszik.

Legyen $X = S_m \times S_n \times (0, \infty) \times (0, \infty)$. Definiálok egy $\Phi : X \to X$ ponthalmaz leképezést, melynek fixpontja a modell egyensúlyi megoldása. Φ-t négy leképezés direkt szorzataként definiálom.

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \mu) = V \times W \times \{\tilde{\lambda}\} \times \{\tilde{\nu}\}.$$

Az áttekinthetőség végett vezessük be a

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu) = \nu \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, 1/\nu) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, 1/\nu)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, 1/\nu) - \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, 1/\nu)$$

[2] Az általa vizsgált modell:

(NNF) $\mathbf{x}, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$, $\lambda > 0, \mu > 0$
(P) $\mathbf{Bx} \geq \lambda\mathbf{Fx}$
(D) $\mathbf{pB} \leq \mu\mathbf{pG}$
(PKF) $\mathbf{pBx} = \lambda\mathbf{pFx}$
(DKF) $\mathbf{pBx} = \mu\mathbf{pGx}$
(PD) $\mathbf{pBx} > 0$

$\mathbf{F} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{G} \geq \mathbf{0}$ konstans mátrixok. A modell egzisztenciáját az alábbi feltételek mellett bizonyítja:

1° ($\mathbf{F}, \mathbf{B}$) eleget tesz a KMT feltételeknek.
2° $\mathbf{G} + \mathbf{B} > \mathbf{0}$.
3° $\exists \xi > 0$, $\mathbf{F} \leq \xi\mathbf{G}$.
2°—3° nyilván teljesül, ha $\mathbf{G} > \mathbf{0}$. Az irodalomban J. Łoś feltételeit a $\mathbf{G} > \mathbf{0}$ feltétellel szokás idézni.

[3] A modell egyenletei:

(NNF) $\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{p} \geq 0$, $\lambda > 0$
(P) $\mathbf{Bx} \geq \lambda\mathbf{M}(\mathbf{p}, \lambda)\mathbf{x}$
(D) $\mathbf{pB} \leq \lambda\mathbf{pM}(\mathbf{p}, \lambda)$.

A modell megoldhatóságát biztosító feltételek:

1° ($\mathbf{M}(\mathbf{p}, \lambda), \mathbf{B}$) eleget tesz a KMT feltételeknek.
2° $\mathbf{M}(\mathbf{p}, \lambda)$ folytonosan kiterjeszthető $S_n \times (0, \infty)$ -ről $S_n \times [0, \infty]$-re.

mátrixokat. Felhívom a figyelmet a ν illetve az $1/\nu$ tag szerepeltetésére. Jelölje $m(\mathbf{u})$ az $\mathbf{u}$ vektor maximális komponensét, $m(\mathbf{u}) = \max_i (u_i)$

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) = \{\tilde{\mathbf{p}} \in S_n \mid \{\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu) \cdot \mathbf{x}\} \to \max\}$$

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) = \{\tilde{\mathbf{x}} \in S_m \mid \{\mathbf{p}\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu) \cdot \tilde{\mathbf{x}}\} \to \max\}$$

$$\tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) = \frac{\lambda + \max\{0, -\mathbf{p}\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x}\}}{1 + \max\{0, m(\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x})\}}$$

$$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) = \frac{\nu + \max\{0, -\mathbf{p}\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x}\}}{1 + \max\{0, m(\mathbf{p}\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu))\}}$$

TÉTEL: Ha $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*) \in X$ a Φ-nek fixpontja, vagyis ha $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*) \in \Phi(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)$ akkor $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)$ kielégíti az (NNF)—(PKF) feltételeket.

Bizonyítás: Ha $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*) \in X$ a Φ fixpontja, akkor

$$1^\circ \quad \mathbf{x}^* \in V(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)$$

$$2^\circ \quad \mathbf{p}^* \in W(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)$$

$$3^\circ \quad \lambda^* = \frac{\lambda^* + \max\{0, -\mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*\}}{1 + \max\{0, m(\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*)\}}$$

$$4^\circ \quad \nu^* = \frac{\nu^* + \max\{0, -\mathbf{p}^*\mathbf{D}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*\}}{1 + \max\{0, m(\mathbf{p}^*\mathbf{D}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*)\}}.$$

A 3°-t átrendezve:

$$\lambda^* \cdot \max\{0, m(\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*)\} = \max\{0, -\mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*\}.$$

Meg fogom mutatni, hogy $\mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* = 0$. A bizonyítást indirekt úton végzem el. Ha $\mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* > 0$, akkor mivel $0 < \lambda^* < \infty$, ezért $0 \geq m(\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* > 0$ Ha $\mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*) \times \times \mathbf{x}^* < 0$, akkor $m(\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*) > 0$, vagyis $0 < e_{j0}\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* \leq \leq \mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* < 0$, hiszen $\mathbf{p}^* \in W(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*, \lambda^*, \nu^*) = \{\tilde{\mathbf{p}} \in S_n | \tilde{\mathbf{p}}\{\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*\} \to \max\}$. Tehát $\mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* = 0$. Ebből ismét a $\mathbf{p}^* \in \in W(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)$ relációt figyelembe véve $\mathbf{e}_j\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* \leq 0$, vagyis $\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* \leq 0$.

Teljesen analóg módon érvelve $\mathbf{p}^*\mathbf{D}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*) \leq 0$, $\mathbf{p}^*\mathbf{D}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*) \times \times \mathbf{x}^* = 0$.

Behelyettesítve $\mathbf{C}$ és $\mathbf{D}$ definícióját:

(P) $\quad \mathbf{B}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)\mathbf{x}^* \geq \lambda^*\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)\mathbf{x}^*$
(PKF) $\quad \mathbf{p}^*\mathbf{B}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)\mathbf{x}^* = \lambda^*\mathbf{p}^*\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)\mathbf{x}^*$
(D) $\quad \nu^*\mathbf{p}^*\mathbf{B}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*) \leq \mathbf{p}^*\mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)$
(DKF) $\quad \nu^*\mathbf{p}^*\mathbf{B}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*\mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)\mathbf{x}^*.$

$\mu^* = 1/\nu^*$ választással azonnal látható, hogy $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \mu^*)$ valóban egyensúlyi megoldás.

Megjegyzés: A későbbiek szempontjából ki kell emelni, hogy pl. a (P)—(PKF) reláció belátásához csakis a 2°—3° és a $0 < \lambda^* < \infty$ relációkra kellett támaszkodni, s pl. ν^* értékét nem kellett figyelembe venni.

4. Milyen feltételek mellett létezik Φ-nek fixpontja?

TÉTEL: A Φ pont-halmaz leképezés felülről félig folytonos, nem üres konvex képhalmazokkal.

Bizonyítás: A $\tilde{\lambda}, \tilde{\nu}$ nyilván folytonos függvények. Nyilván $W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$ és $V(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$ nemüres, konvex halmazok, hiszen — rögzített $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$-re —egy lineáris függvénynek egy konvex kompakt halmazon való optimumhelyeinek halmazaiként definiálódtak.

Lemma: $W : X \to S_n$ és $V : X \to S_m$ felülről félig folytonos pont-halmaz leképezések.

Bizonyítás: Elegendő pl. csak W felülről félig folytonosságát belátni, a V-re vonatkozó állítás teljesen analóg.

Legyen $\{(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n, \lambda_n, \nu_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ és $\lim\limits_n (\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n, \lambda_n, \nu_n) = (\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty, \lambda_\infty, \nu_\infty) \in X$. Legyen $\tilde{p}_n \in W(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n, \lambda_n, \nu_n)$ és $\lim\limits_n \tilde{\mathbf{p}}_n = \tilde{\mathbf{p}}_\infty$. Azt kell belátni, hogy $\tilde{\mathbf{p}}_\infty \in$ $\in W(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty, \lambda_\infty, \nu_\infty)$. Mivel $\tilde{\mathbf{p}}_n \in W(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n, \lambda_n, \nu_n)$, ezért $\tilde{\mathbf{p}}_n\{\mathbf{C}(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n, \lambda_n, \nu_n)\mathbf{x}_n\} \geq$ $\geq \tilde{\mathbf{p}}\{\mathbf{C}(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n, \lambda_n, \nu_n)\mathbf{x}_n\}$, $\forall\, \tilde{\mathbf{p}} \in S_n$. Mivel $\mathbf{C}$ folytonos, ezért a határátmenetet elvégezve $\tilde{\mathbf{p}}_\infty\{\mathbf{C}(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty, \lambda_\infty, \nu_\infty)\mathbf{x}_\infty\} \geq \tilde{\mathbf{p}}\{\mathbf{C}(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty, \lambda_\infty, \nu_\infty)\mathbf{x}_\infty\}$, $\forall\, \tilde{\mathbf{p}} \in S_n$, vagyis $\tilde{\mathbf{p}}_\infty \in W(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty, \lambda_\infty, \nu_\infty)$.

A $\Phi = V \times W \times \{\tilde{\lambda}\} \times \{\tilde{\nu}\}$ X-ből X-be ható pont-halmaz leképezés, mely a Kakutani fixponttétel feltételeinek „majdnem" eleget tesz. Az egyetlen probléma, hogy X nem kompakt. Az $X = S_m \times S_n \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ homeomorf az $X' = S_m \times S_n \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ halmazzal. A homeomorfizmus legyen f. A $\Phi' = f \circ \Phi \circ f^{-1}$ pont-halmaz leképezés X'-t X'-re képezi, s nyilván továbbra is felülről félig folytonos leképezés konvex, nemüres képhalmazokkal. Φ-nek akkor és csakis akkor van fixpontja, ha Φ'-nek van fixpontja.

Tekintsük az $\bar{X}' = S_m \times S_n \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ halmazt. Tegyük fel, hogy Φ'-t ki tudjuk terjeszteni X'-ről $\bar{X}'$-re úgy, hogy:

1° Φ' továbbra is felülről félig folytonos pont-halmaz leképezés nemüres, konvex képhalmazokkal.
2° Φ'-nak nincs fixpontja $\bar{X}'/X'$-ben.

Ekkor, mivel $\Phi' : \bar{X}' \to \bar{X}'$ a Kakutani tétel alapján rendelkezik fixponttal, ezért Φ-nek is van fixpontja.

A továbbiakban — az egyszerűség végett — az **f** homeomorfizmustól eltekintek, s közvetlenül Φ-nek $S_n \times S_m \times (0, \infty) \times (0, \infty)$-ről $S_n \times S_m \times [0, \infty] \times \times [0, \infty]$-re való kiterjesztéséről fogok beszélni.[4]

Φ-nek X-ről $\bar{X}$-ra való kiterjesztését „komponensenként" célszerű elvégezni. A

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) = S_n \qquad (\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) \in \bar{X}/X$$

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) = S_m \qquad (\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) \in \bar{X}/X$$

definícióval W-t és V-t egyszerűen kiterjesztjük X-ről $\bar{X}$-ra, s a leképezések nyilván továbbra is felülről félig folytonosak maradtak, s a képhalmazok pedig konvexek és nemüresek.

Több gondot jelentenek a $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\nu}$ függvények. Ha $\tilde{\lambda}$-ot és $\tilde{\nu}$-ot folytonosan ki tudjuk terjeszteni X-ről $\bar{X}$-ra akkor a Φ'-nek létezik $\bar{X}$-ben fixpontja. Legyen ez $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$. Ha $0 < \lambda, \nu < \infty$, akkor a fixpont nem eshet $\bar{X} \setminus X$-be, vagyis csak X-be eshet.

A fixpont létezésének feltételei tehát két csoportba oszthatók:

1° $\tilde{\lambda}$ és $\tilde{\nu}$ folytonos kiterjeszthetőségét biztosító feltételek,
2° a fixpontok elhelyezkedését biztosító „peremfeltételek".

Megjegyzés: A $\tilde{\lambda}$ és $\tilde{\nu}$ függvényeknek mint többváltozós függvényeknek kell folytonosaknak lenniök és nem elegendő, ha parciálisan folytonosan kiterjeszthetőek. Másképpen: az hogy pl. a $\lim\limits_{\lambda \to 0} \tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu)$ létezik, még nem jelenti azt, hogy $\tilde{\lambda}$ kiterjeszthető a $\lambda = 0$ pontra. Ha azonban a fenti határérték a többi változóban *egyenletes*, akkor — az analízis egy ismert tétele alapján — az így kiterjesztett függvény folytonos lesz.

Foglalkozzunk először a Morishima modellel:

$$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \cdot, \nu) = \frac{\nu + \max\{0, \mathbf{pGx} - \nu\mathbf{pBx}\}}{1 + \max\{0, m(\nu\mathbf{pB} - \mathbf{pG})\}}.$$

$\tilde{\nu}$ nem függ λ-tól. Legyen

$$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \nu) = \begin{cases} \mathbf{pGx}, & \text{ha} \quad \nu = 0 \\ \dfrac{1}{m(\mathbf{pB})}, & \text{ha} \quad \nu = \infty. \end{cases}$$

$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \nu)$ folytonos. A $\nu = 0$ pontban a folytonosság nyilvánvaló.

$$\lim_{\nu \to \infty} \tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \nu) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1 + \max\left\{0, \dfrac{\mathbf{pGx}}{\nu} - \mathbf{pBx}\right\}}{\dfrac{1}{\nu} + \max\left\{0, m\left(\mathbf{pB} - \dfrac{\mathbf{pG}}{\nu}\right)\right\}} = \frac{1}{m(\mathbf{pB})}.$$

$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, 0) = \mathbf{pGx} = \mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx} > 0$, hiszen $w\mathbf{v} > 0$ és $\mathbf{x}$ szemipozitív.

[4] $[0, \infty]$-t mint a $[0, \infty)$ egy pont kompaktifikációjaként képzeljük el, vagyis a ∞ pont egy környezete pl. $K_\lambda = \{\mu \mid \lambda \leq \mu\}$ halmaz.

$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \infty) < +\infty$ hiszen $\mathbf{B}$ minden sorában van pozitív elem és így $m(\mathbf{pB}) > 0$.
$\tilde{\lambda}$ kiterjesztése előtt alakítsuk át $\mathbf{F}$-et — küszöböljük ki μ-t.

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} + \frac{(1-s)}{\lambda} \max\{0, \mu - 1\}\, \mathbf{g}(\mathbf{p})[\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v}] =$$

$$= \mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} + \frac{(1-s)}{\lambda} \max\left\{0, \frac{\mathbf{pBx}}{\mathbf{pGx}} - 1\right\} \mathbf{g}(\mathbf{p})[\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v}]$$

$\left(\text{Felhasználtam a } \mu = \dfrac{\mathbf{pBx}}{\mathbf{pGx}} \text{ relációt (DKF) és } \mathbf{pGx} > 0\text{-t.}\right)$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda) = (\tilde{\lambda}\mathbf{p}, \mathbf{x}, \infty) = \frac{1}{m(\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \infty))} = \frac{1}{m([\mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p})\mathbf{v}]\mathbf{x})} < \infty$$

$$\tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, 0) = \lim_{\lambda \to 0} \tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda) =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda + \max\{0, \mathbf{pBx} - \lambda\mathbf{pFx}\}}{1 + \max\{0, m(\lambda\mathbf{Fx} - \mathbf{Bx})} =$$

$$= \frac{\max\{0, \mathbf{pBx} - \lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda\mathbf{pFx}\}}{1 + \max\{0, m(\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda\mathbf{Fx} - \mathbf{Bx})\}} =$$

$$= \frac{\max\left\{0, \mathbf{pBx} - (1-s)\max\left\{0, \dfrac{\mathbf{pBx}}{\mathbf{pGx}} - 1\right\} \mathbf{pg}(\mathbf{p})\mathbf{pGx}\right\}}{1 + \max\left\{0, m\left[(1-s)\max\left\{0, \dfrac{\mathbf{pBx}}{\mathbf{pGx}} - 1\right\} \mathbf{g}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{pGx} - \mathbf{Bx}\right]\right\}} \geq$$

$$\geq \frac{\max\{0, \mathbf{pBx} - (1-s)\max\{0, \mathbf{pBx} - \mathbf{pGx}\}\}}{1 + \max\{0, m[(1-s)\max\{0, \mathbf{pBx} - \mathbf{pGx}\} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{p}) - \mathbf{Bx}]\}} \geq$$

$$\geq \frac{\min(\mathbf{pBx}, \mathbf{pGx})}{1 + K(\mathbf{p}, \mathbf{x})}.$$

Megjegyzés: Csak $\tilde{\lambda}$ és $\tilde{\nu}$ parciális kiterjeszthetőséget ellenőriztem. $\tilde{\lambda}$ és $\tilde{\nu}$ mint többváltozós függvények azért folytonosak, mivel a kiterjesztés során kiszámolt határértékek $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ szerint nyilván egyenletesek.

Legyen $(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu)$ a $\Phi : \bar{X} \to \bar{X}$ leképezés fixpontja. Ekkor $\nu = \tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \nu)$. Mivel $\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, 0) \neq 0$ és $\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \infty) < \infty$, ezért $0 < \nu < \infty$. Az előző paragrafus tételében követett megfontolásokat megismételve belátható, hogy $\nu\mathbf{pBx} = \mathbf{pGx}$. Mivel $\mathbf{pGx} > 0$ és $0 < \nu < \infty$ ezért $\mathbf{pBx} > 0$. Ebből $\tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, 0) > 0$. Mivel $\lambda = \tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda)$, ezért $0 < \lambda < \infty$, vagyis $(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) \in X$. Tehát a modellnek létezik egyensúlya.

Most térjünk rá az általános három — mátrix modell vizsgálatára.

Feltétel

1° $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu), \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu), \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$ folytonosan kiterjeszthetőek $X = S_m \times S_n \times (0, \infty) \times (0, \infty)$-ről $\bar{X} = S_m \times S_n \times [0, \infty] \times [0, \infty]$-re.
2° $\{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu), \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\}$ eleget tesz a KMT feltételeknek az egész $\bar{X}$ halmazon.
3° $\mathbf{pG}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x} > 0$ az egész $\bar{X}$ halmazon.

Ezek a feltevések J. Łoś és Morishima által tett feltevések „egyesítéséből" származnak.

Mivel a $\tilde{\lambda}$ és $\tilde{\nu}$ definíciójában szereplő kifejezések folytonosan kiterjeszthetőek X-ről $\bar{X}$-ra könnyűszerrel belátható, hogy $\tilde{\lambda}$ és $\tilde{\nu}$ is kiterjeszthető $\bar{X}$-ra

$$\tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, 0, \nu) = \mathbf{pB}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, 0, \nu)\mathbf{x}$$

$$\tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \infty, \nu) = \frac{1}{m(\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \infty, \nu))} < \infty$$

$$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, 0) = \mathbf{pG}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, 0)\mathbf{x} > 0$$

$$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \infty) = \frac{1}{m(\mathbf{pF}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \infty))} < \infty.$$

Felhasználva a 2°–3° feltételeket, — és megismételve az előző paragrafus tételének bizonyítását — beláthatjuk, hogy ha $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$ fixpont, akkor

$$\nu\mathbf{pB}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x} = \mathbf{pG}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x} > 0,$$

amiből
$$0 < \nu < \infty \text{ és } \mathbf{pB}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x} > 0,$$
és így
$$0 < \lambda < \infty, \text{ vagyis } (\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu) \in X.$$

Megjegyzés: A folytonos kiterjesztés feltétele rendkívül elegáns, könnyen megjegyezhető. Sajnos a Morishima modell *általánosított* formájára nem alkalmazható, hiszen az $\mathbf{F}$ mátrixra — a definíciójában szereplő $1/\lambda$ tag miatt — a folytonos kiterjeszthetőség feltétele nem áll fenn. Ha a modell konzisztenciáját egy általános tételből kívánjuk levezetni, akkor $\mathbf{F}$ kiterjeszthetőségét a következő módon kell megkövetelni:
1°′ $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$ folytonosan kiterjeszthető az $X = S_m \times S_n \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ halmazról az $\bar{X} = S_m \times S_n \times [0, \infty] \times [0, \infty]$ halmazra *megengedve*, hogy egyes komponensek $+\infty$-nel legyenek egyenlőek, de megkívánva, hogy $\lambda\mathbf{F}$ a $\lambda = 0$ pontban folytonos legyen és $\lim_{\lambda \to 0} \lambda\mathbf{pFx} < \mathbf{pBx}$ valahányszor $\mathbf{pBx} > 0$.

5. A Morishima féle megoldással való összevetés

Térjünk vissza a Morishima féle feltételekhez. Tekintsük a következő három-mátrix modellt:

$$\mathbf{B}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} + w\,\mathbf{1} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + w \cdot \mathbf{c}(\mathbf{p})\mathbf{v} + (1 - s)\max\left\{0, \frac{\lambda - 1}{\lambda s}\right\}\mathbf{g}(\mathbf{p})(\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v}).$$

A $\max\left\{0, \frac{\lambda-1}{\lambda s}\right\}$ folytonosan kiterjeszthető $(0, \infty)$-ről $[0, \infty]$-re, s így az $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ három-mátrix modell együtthatói folytonosan kiterjeszthetők X-ről $\bar{X}$-ra, tehát létezik egyensúlyi pont. Az egyensúlyi pont egyenleteit felírva, és kihasználva a $\mathbf{pc}(\mathbf{p}) = \mathbf{pg}(\mathbf{p}) = 1$ relációkat:

(NNF) $\quad \mathbf{p}, \mathbf{x} \geq 0, \quad \lambda, \mu > 0$

(P) $\quad \mathbf{Bx} \geq \lambda[\mathbf{A} + w \cdot \mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}]\mathbf{x} + \frac{(1-s)}{s} \max(0, \lambda - 1) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{p}) \times \times (\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx})$

(PKF) $\quad \mathbf{pBx} = \lambda[\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx}] + \frac{(1-s)}{s} \max(0, \lambda - 1) \times \times (\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx}) = \left(\lambda + \frac{(1-s)}{s} \max(0, \lambda - 1)\right) (\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx})$

(D) $\quad \mathbf{pB} \leq \mu(\mathbf{pA} + w\mathbf{v})$

(DKF) $\quad \mathbf{pBx} = \mu(\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v})\mathbf{x}$

(PD) $\quad \mathbf{pBx} > 0.$

A PKF – DKF relációkat összevetve

$$\mu = \lambda + \frac{(1-s)}{s} \max(0, \lambda - 1), \text{ amiből}$$

$\max\left(0, \frac{\lambda-1}{s}\right) = \max(0, \mu - 1)$. Behelyettesítve P-be és PKF-be kapjuk, hogy $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)$ a modell egyensúlyi megoldása.

(Beérkezett: 1982. február 3-án)

IRODALOM

1. Bauer, L.: Consumption in von Neumann matrix models. [2] 13–27 p.
2. Łoś, J.—Łoś, M. W.: Mathematical models in economics. North-Holland-American Elsevier, 1974.
3. Łoś, J.: Labour, consumption and wages in von Neumann models. [2] 67–73 p.
4. Łoś, J.—Łoś, M. W.: Computing equilibria: how and why? North-Holland-American Elsevier, 1976.
5. Łoś, J.: Extended von Neumann models and game theory. [4] 141–159 p.
6. Morishima, M.: Economic expansion and the interest rate in generalized von Neumann models, Econometrica 28. 352–363 p.
7. Morishima, M.: Theory of economic growth, Clarendon Press, 1969.

ON MORISHIMA'S GENERALIZATION OF THE NEUMANN MODEL

The paper contains a new generalization of von Neumann's model enabling a unified approach to various well-known general models of the von Neumann-type (M. Morishima, J. Łoś). The existence of an equilibrium solution of the generalized model relies on Kakutani's fixed point theorem.

ОБОБЩЕНИЕ МОРИШИМА МОДЕЛИ НЕЙМАННА

Рассматриваемая работа содержит некоторое обобщение модели Неймана, которая позволяет рассмотрение общих моделей, по типу являющихся неймановскими (М. Моришима, Е. Лош) и известных по специальной литературе в рамках единого подхода. Существование сбалансированного решения обобщенной модели базируется на теореме фиксированной точки Какутани.