Molnár Sándor — Szidarovszky Ferenc

Többkritériumú értékfüggvényekről

1. Bevezetés

A gazdasági és műszaki élet számos területén találkozunk olyan feladatokkal, amikor véges vagy végtelen sok alternatíva közül kell egy vagy több legmegfelelőbbet kiválasztani. Ez a kiválasztás általában valamilyen optimalizációs elv alapján történik: valamilyen alkalmas feltételrendszer fennállása mellett egy célfüggvényt kell optimalizálni és az optimumhelyek határozzák meg a legmegfelelőbbnek ítélt alternatívát, vagy alternatívákat.

Bonyolultabb feladatok esetén nem elegendő egyetlen célfüggvény vizsgálata. Például a gazdasági haszon és környezeti ártalom nem azonos dimenziójú mennyiségek, így nem adhatók egyszerűen össze egyetlen célfüggvénnyé. Ilyenkor valamilyen több célú programozási módszert kell választani, és a több célú programozási feladat optimumhelyei határozzák meg a kiválasztandó döntési alternatívát.

Mind a két előző esetben — akár egy, akár több célú programozási feladatról is van szó — minden lehetséges alternatívához hozzá van rendelve egy vagy több célfüggvény értéke, azaz a döntés következménye számszerűen mérhető. Egyetlen célfüggvény esetén nyilvánvalóan az az alternatíva a kedvezőbb, amelyik kedvezőbb (nagyobb, vagy kisebb) célfüggvényértéket ad. Több célfüggvény esetén már nem ilyen egyszerű eldönteni, hogy melyik alternatíva a kedvezőbb. Tekintsünk például két maximalizálandó célfüggvényt és két alternatívát. Tegyük fel, hogy az egyes alternatívákhoz tartozó célfüggvényértékek:

$$\varphi_1(a_1) = 1, \varphi_1(a_2) = 2, \varphi_2(a_1) = 2, \varphi_2(a_2) = 1.$$

Az első célfüggvény szempontjából a második alternatíva a kedvezőbb, viszont a második célfüggvény szempontjából az első alternatíva. Minthogy a két alternatíva összehasonlítása a két célfüggvény esetében ellentmondó, pusztán a célfüggvényértékek alapján nem dönthetjük el, hogy melyikük az egyértelműen kedvezőbb.

Több célú programozási feladatok leggyakrabban alkalmazott megoldási módszere az, amikor valamilyen koncepció alapján a többféle célfüggvényt egyetlen célfüggvénnyé kapcsolják össze. A súlyozásos módszernél az eredeti célfüggvények lineáris kombinációját optimalizálják, a korlátok módszerénél pedig a legfontosabbnak ítélt célfüggvényt optimalizálják, a többire pedig korlátozó feltételeket tesznek. A szekvenciális optimalizálás módszerénél először a legfontosabbnak ítélt célfüggvényt optimalizálják, majd az optimális megoldások halmazán optimalizálják a második célfüggvényt, és így tovább. Minden lépésben csak egyetlen célfüggvény optimalizálására kerül sor. A célprogramozási és kompromisszumprogramozási módszerek esetében a célfüggvényértékekből adott vektornak egy ún. ideális ponttól való távolságát minimalizálják. Az ideális pont és a távolságfüggvény különféle megválasztásával adódnak a különböző konkrét módszerek. A [13] dolgozat és a [8], [9], [15], [16] könyvek igen jó összefoglalását adják ezeknek a módszereknek. Az eredményeknek az efficiens megoldásokhoz való kapcsolatát mutatja be a [7], [13] dolgozat. Az efficiens megoldások halmazából legmegfelelőbbnek ítélt megoldások kiválasztására a gyakorlati alkalmazások során leggyakrabban az ELECTRE módszer [1], [3] valamilyen változatát használják. E módszerek a lehetséges megoldásoknak egy félig-rendezését adják meg, az ELECTRE típusú módszerek eleve a félig-rendezést szolgáltatják, a szekvenciális optimalizálásnak a lexikografikus rendezés felel meg, a többi módszernél pedig a több célfüggvényből származtatott egyetlen célfüggvény kedvezőbb, vagy kedvezőtlenebb értéke adja a rendezést.

A döntéselmélet és az alkalmazások során gyakran felmerül a fordított kérdés, miszerint az alternatívák, vagy azok következményeinek (azaz több célfüggvény esetén a kifizető vektoroknak) a halmazán egy félig-rendezés adott, és azt vizsgálják, vajon milyen feltételek esetén írható le ez a félig-rendezés egyetlen célfüggvénnyel. Ez a kérdés matematikailag az ún. értékfüggvények létezésének problémáját jelenti. Ha a következmények tere sztochasztikus, akkor alkalmas linearitási feltételek mellett az értékfüggvényeket hasznossági függvényeknek nevezzük. Az értékfüggvények és hasznossági függvények létezésének kérdésköre és a függvények konkrét megkonstruálásának módszerei megtalálhatók például a [4], [14] cikkekben és az [5], [10] könyvekben.

Többtényezős hasznossági függvényekkel foglalkozik többek között a [6] dolgozat. Azzal a kérdéssel foglalkozik, hogyha az alternatívák következményeinek tere $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$ direkt szorzat alakú és minden X_i $(1 \leq i \leq k)$ halmazon egy-egy U_i hasznossági függvény adott, akkor alkalmas feltételek fennállása esetén az X halmazon értelmezett U hasznossági függvény szükségképpen

$$U(\mathbf{x}) = \alpha_1 U_1(x_1) + \ldots + \alpha_k U_k(x_k), \tag{1.1}$$

vagy

$$1 + \alpha U(\mathbf{x}) = (1 + \alpha_1 U_1(x_1)) \ldots (1 + \alpha_k U_k(x_k)) \tag{1.2}$$

alakú. Az (1.1) és (1.2) alak levezetése megtalálható a [10] cikkben. Az (1.1) alakú hasznossági függvényeket lineárisnak, az (1.2) alakúakat pedig multiplikatívaknak nevezzük. Az (1.1) és (1.2) alakú hasznossági függvényeknek számos általánosítása és alkalmazása megtalálható a szakirodalomban.

Jelen dolgozatban multiplikatív értékfüggvényekkel foglalkozunk. Alkalmas feltételek fennállása esetén kimutatjuk, hogy direkt szorzat alakú következménytereken értelmezett értékfüggvények szükségképpen (1.2) alakúak.

2. A probléma megfogalmazása

Az X_i halmazokon értelmezett értékfüggvényeket v_i (x)-szel jelölve minden x alternatíva a $(v_1(\mathbf{x}), \ldots, v_k(\mathbf{x}))$ vektorral jellemezhető. Az $\mathbf{x}_1$ alternatívát az i-edik értékfüggvény szempontjából kedvezőbbnek mondjuk, mint az $\mathbf{x}_2$ alternatívát, ha $v_i(\mathbf{x}_1) > v_i(\mathbf{x}_2)$. Ha az alternatívák X halmazát leképezzük az értékfüggvények értékeiből alkotott k dimenziós vektorok halmazába, akkor az

$$E = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_k), \text{ létezik olyan } \mathbf{x} \in X, \text{ hogy}$$
$$v_i = v_i(\mathbf{x}), i = 1, \ldots, k \}$$

ún. értékteret kapjuk. Nyilvánvaló, hogy $E \subset R^k$, valamint tetszőleges $\mathbf{v} = (v_i) \in E$ esetén mindazon alternatívák, amelyekre $i = 1, \ldots, k$ esetén $v_i = v_i(\mathbf{x})$, az értékfüggvények szempontjából ekvivalensek. Tehát feltehetjük, hogy a több kritériumú döntési feladatot az E halmaz írja le. Célunk az, hogy az E halmazon megadjunk egy félig-rendezést és az azt leíró értékfüggvényt a koordinátákon értelmezett v_i értékfüggvények segítségével.

Abból a feltételezésből indulunk ki, hogy egy halmazon egy félig-rendezés megadása lényegesen bonyolultabb feladat, mint a döntéshozó által a legjobbnak vélt halmazelem kijelölése. Mint látni fogjuk, alkalmas feltételek mellett a legjobbnak tartott pontok a félig-rendezést már egyértelműen meghatározzák, és ez a félig-rendezés le is írható egy alkalmas (1.2) alakú értékfüggvénnyel.

Tegyük fel tehát, hogy az összes R^k-beli konvex, korlátos, zárt E halmazban a döntéshozó kijelöl egy-egy legjobbnak tartott $\mathbf{w}(E)$ pontot, amely eleget tesz a következő tulajdonságoknak:

1. $\mathbf{w}(E) \in E$;
2. $\mathbf{w}(E)$ efficiens pont E-ben, azaz nem létezik olyan $\mathbf{v} \in E$, amelyre $\mathbf{v} \geqq \mathbf{w}(E)$ és $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}(E)$;
3. Ha E rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy $(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) \in E$ akkor és csak akkor, ha $(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \in E$, ahol i, j két rögzített index, akkor szükségképpen $\mathbf{w}(E)$ i-edik és j-edik koordinátája is megegyezik;
4. Ha $E_1 \subset E$ olyan konvex, korlátos, zárt halmaz, amelyre $\mathbf{w}(E) \in E_1$, valamint $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén
$$\min \{ v_i \mid (v_1, \ldots, v_k) \in E \} = \min \{ v_i \mid (v_1, \ldots, v_k) \in E_1 \},$$
akkor szükségképpen $\mathbf{w}(E_1) = \mathbf{w}(E)$;
5. Ha t az R^k téren értelmezett olyan lineáris transzformáció, amelyre
$$t(v_1, \ldots, v_k) = (\alpha_1 v_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_k v_k + \beta_k)$$
($\alpha_i > 0$, β_i tetszőleges valós szám, $i = 1, \ldots, k$,) akkor szükségképpen
$$t(\mathbf{w}(E)) = \mathbf{w}(t(E)).$$

Az 1. és 2. tulajdonság azt fejezi ki, hogy a döntéshozó által E-ben legjobbnak tartott $\mathbf{w}(E)$ pont valóban E-beli és tovább nem javítható legyen. A 3. tulajdonság szemléletesen azt jelenti, hogyha egy E halmaz szimmetrikus az i és j koordinátáiban (azaz felcserélésükkel E nem változik), akkor a legjobb pont is szimmetrikus kell legyen ugyanezen koordinátákban. Más szavakkal ezt úgy is kifejezhetjük, hogyha egy döntési feladatban az i-edik és j-edik kritérium azonosként viselkedik, akkor a legjobb, optimális megoldásban sem teszünk különbséget köztük. A 4. tulajdonság a következőképpen értelmezhető. Ha az E lehetséges értékteret további feltételekkel úgy szűkítjük le, hogy a legjobb pontot nem vágjuk le és minden koordinátában a legrosszabb lehetőség sem változik meg, akkor a leszűkítéssel a legjobb pont se változzon meg. Az 5.

tulajdonság lényegében azt jelenti, hogy a mértékegységek megváltoztatásával a legjobb pontok ne változzanak.

Az axiómákkal kapcsolatban még két megjegyzést teszünk. A 4. axióma azt is mutatja, hogy a legjobb megoldás csak az egyes célfüggvények legrosszabb értékeitől függ, azaz most az „ideálisan legrosszabb" kifizetési vektorhoz, vagyis a célprogramozási eljárásokkal ellentétben nem az „ideálisan legjobb" kifizetési vektorhoz viszonyítjuk. A 3. és az 5. axióma együtt azzal a következménnyel is jár, miszerint az egyes célfüggvényeket azonos fontosságúaknak tekintjük. Amit esetünkben a 3. és az 5. axióma ilyen következménye mutat, azt az egyéb eljárások során azonos súlyok, a célvektor azonos komponensei, azonos alsó korlátok, stb. reprezentálnak.

A [12] dolgozatban bemutatott eljárás kis módosításával könnyű bebizonyítani a következő tételt.

1. *tétel.* A k dimenziós konvex, korlátos, zárt halmazokon pontosan egy $\mathbf{w}(E)$ leképezés adható meg, amely eleget tesz a fenti öt tulajdonságnak, továbbá $\mathbf{w}(E)$ egy nemlineáris programozási feladat megoldásával kapható meg a következőképpen. Legyen $I(E)$ azon indexek halmaza, amelyekre

$$w^*(E) = \min \{ v_i \mid (v_1, \ldots, v_k) \in E\} < \max \{v_i \mid (v_1, \ldots, v_k) \in E\},$$

ekkor $\mathbf{w}(E)$ koordinátáit a

$$(w_1, \ldots, w_k) \in E$$

$$g(\mathbf{w}) = \prod_{i \in I(E)} (w_i - w_i^*(E)) \to \max \tag{2.1}$$

feladat egyértelmű optimális megoldása szolgáltatja.

Érdemes megjegyeznünk, hogy a (2.1) optimumfeladat lehetséges megoldásainak halmaza konvex, korlátos, zárt és célfüggvénye kvázikonkáv, így numerikus megoldására a konvex programozás iterációs eljárásai jól alkalmazhatók.

Tekintsünk ezután egy rögzített $\mathbf{w}^* \in R^k$ vektort, és legyen

$$H = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in R^k, \mathbf{v} \geqq \mathbf{w}^* \}. \tag{2.2}$$

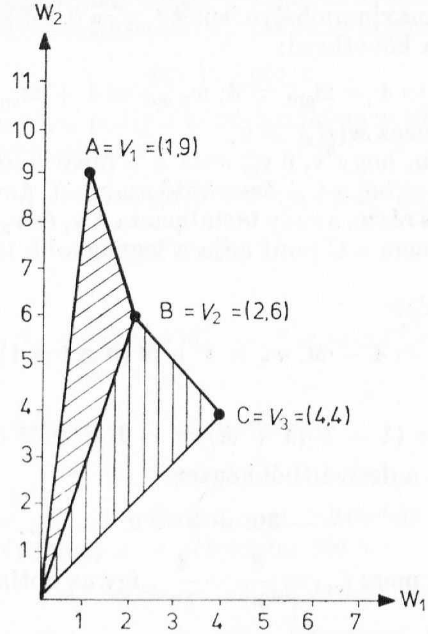
Egy ϱ bináris relációt adunk meg ezután a H halmazon. Ha $\mathbf{v}_1$ legalább egy koordinátában azonos $\mathbf{w}^*$-gal, valamint $\mathbf{v}_2$ minden koordinátában nagyobb, mint $\mathbf{w}^*$, akkor $\mathbf{v}_1 \varrho \mathbf{v}_2$. Legyen ezután $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ különböző és legyenek minden koordinátájukban nagyobbak, mint $\mathbf{w}^*$. Ekkor a $\mathbf{v}_1 \varrho \mathbf{v}_2$ reláció akkor és csak akkor áll fenn, ha létezik olyan korlátos, konvex, zárt E halmaz, amelyre

$$I(E) = \{ 1, 2, \ldots, k \}, \text{ valamint}$$

$$\begin{aligned} &\text{a) } \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}(E); \\ &\text{b) } \mathbf{v}_1 \in E; \\ &\text{c) } \mathbf{w}^*(E) = \mathbf{w}^* \end{aligned} \tag{2.3}$$

Könnyű kimutatnunk, hogy a ϱ reláció általában nem ad közvetlenül féligrendezést a H halmazon, mint azt a következő példa illusztrálja.

1. *példa.* Legyen $k = 2$, $\mathbf{w}^* = \mathbf{0}$, $v_1 = (1, 9)$; $\mathbf{v}_2 = (2,6)$ és $\mathbf{v}_3 = (4,4)$. Kimutatjuk először, hogy $\mathbf{v}_1 \varrho \mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_2 \varrho \mathbf{v}_3$. Tekintsük az 1. ábrát, és azon az AOB és



1. ábra

BOC háromszögeket. Legyen $E_1 = AOB\,\Delta$ és $E_2 = BOC\,\Delta$. Egyszerű számolással ki fogjuk mutatni, hogy

$$\mathbf{w}(E_1) = \mathbf{v}_2 \text{ és } \mathbf{w}(E_2) = \mathbf{v}_3,$$

vagyis $\mathbf{v}_1 \varrho \mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_2 \varrho \mathbf{v}_3$. Vizsgáljuk meg először az AOB háromszöget. A $\mathbf{w}(E_1)$ pont efficiens pont kell legyen, így a BA szakaszon kell lennie, aminek egyenlete:

$$w_1 = 2 - t, w_2 = 6 + 3t \qquad (0 \leqq t \leqq 1).$$

Ekkor pedig a (2.1) célfüggvény értéke:

$$w_1 w_2 = (2 - t)(6 + 3t) = -3t^2 + 12,$$

amelynek egyetlen maximumhelye van: $t_{\text{opt}} = 0$, vagyis (2.1) maximumhelye az AB szakaszon a következő:

$$w_{1,\text{opt}} = 2 - t_{\text{opt}} = 2; w_{2,\text{opt}} = 6 + 3 \cdot t_{\text{opt}} = 6,$$

vagyis a $B = \mathbf{v}_2$ pont, azaz $\mathbf{w}(E_1) = \mathbf{v}_2$. Tekintsük ezután az OBC háromszöget. Ekkor a BC oldal egyenlete

$$w_1 = 4 - 2t, w_2 = 4 + 2t \ (0 \leqq t \leqq 1)$$

a (2.1) célfüggvény megfelelő értéke pedig

$$w_1 w_2 = (4 - 2t)(4 + 2t) = 16 - 4t^2,$$

amelynek egyértelmű maximumhelye ismét $t_{\text{opt}} = 0$. Ekkor pedig az optimális pont a BC szakaszon a következő:

$$w_{1,\text{opt}} = 4 - 2t_{\text{opt}} = 4;\ w_{2,\text{opt}} = 4 + 2t_{\text{opt}} = 4,$$

vagyis a $C = \mathbf{v}_3$ pont, azaz $\mathbf{w}(E_2) = \mathbf{v}_3$.

Azt látjuk be ezután, hogy $\mathbf{v}_1 \bar{\varrho}\, \mathbf{v}_3$, azaz a ϱ bináris reláció nem feltétlenül tranzitív. Tekintsük e célból a CA összekötő szakaszt, amely tetszőleges olyan konvex E halmaznak is része, amely tartalmazza a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_3$ pontot. Kimutatjuk, hogy a CA szakaszon nem a C pont adja a legnagyobb (2.1) függvényértéket, azaz $\mathbf{w}(E) \neq \mathbf{v}_3$.

A CA szakasz egyenlete

$$w_1 = 4 - 3t,\ w_2 = 4 + 5t\ (0 \leqq t \leqq 1),$$

ekkor pedig

$$w_1 w_2 = (4 - 3t)(4 + 5t) = -15t^2 + 8t + 16,$$

amely minimumhelyét a deriváltból képzett

$$-30t + 8 = 0$$

egyenletből kaphatjuk meg: $t_{\text{opt}} = \dfrac{8}{30} = \dfrac{4}{15}$, így az optimumhely a CA szakaszon a következő:

$$w_{1,\text{opt}} = 4 - 3 \cdot t_{\text{opt}} = \frac{16}{5};\ w_{2,\text{opt}} = 4 + 5 \cdot t_{\text{opt}} = \frac{16}{3},$$

amely valóban különbözik a $\mathbf{v}_3$ ponttól.

Vezessük be ezután a H halmazon a $\prec$ relációt a következőképpen. Legyen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in H$, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2$ reláció fennáll, ha létezik oly véges sorozat:

$$\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \ldots, \mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}, \text{ amelyre}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1;\ \mathbf{v}'_1 \varrho\, \mathbf{v}'_2;\ \mathbf{v}'_2 \varrho\, \mathbf{v}'_3;\ \ldots;\ \mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)-1} \varrho\, \mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)} = \mathbf{v}_2. \tag{2.4}$$

A következő paragrafusban kimutatjuk, hogy a $\prec$ reláció már valóban félig-rendezést szolgáltat és bebizonyítjuk, hogy ez a félig-rendezés egy alkalmas multiplikatív értékfüggvénnyel írható le.

3. A $\prec$ reláció vizsgálata

Bebizonyítjuk először a következő tételt.

2. *tétel.* A $\prec$ reláció rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

a) $\mathbf{v} \not\prec \mathbf{v}$;

b) $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2 \not\Rightarrow \mathbf{v}_2 \prec \mathbf{v}_1$;

c) $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_2 \prec \mathbf{v}_3 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_3$,

azaz $\prec$ félig-rendezés a H halmazon.

Bizonyítás. Az a) és b) tulajdonság fennállása nyilvánvaló, hiszen az 1. tétel és a $\prec$ reláció definíciójának alapján $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2$ esetén a (2.1) célfüggvény értékére

$$g(\mathbf{v}_1) < g(\mathbf{v}_2). \tag{3.1}$$

A c) tulajdonság igazolása pedig a következőképpen történhet. Minthogy $\mathbf{v}_1 \prec \prec \mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_2 \prec \mathbf{v}_3$, létezik olyan $\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}$ és $\mathbf{v}''_1, \ldots, \mathbf{v}''_{r(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)}$ sorozat, hogy

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1; \ \mathbf{v}'_1 \, \varrho \, \mathbf{v}'_2; \ldots; \mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)-1} \, \varrho \, \mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)};$$

$$\mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)} = \mathbf{v}_2,$$

valamint

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}''_1; \ \mathbf{v}''_1 \, \varrho \, \mathbf{v}''_2; \ldots; \mathbf{v}''_{r(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)-1} \, \varrho \, \mathbf{v}''_{r(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)};$$

$$\mathbf{v}''_{r(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)} = \mathbf{v}_3.$$

Ekkor pedig szükségképpen $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_3$, hiszen a

$$\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}, \mathbf{v}''_2, \ldots, \mathbf{v}''_{r(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)}$$

sorozat kielégíti a $\prec$ reláció definíciójának feltételeit.

Kimutatjuk ezután, hogy a $\prec$ félig-rendezés a

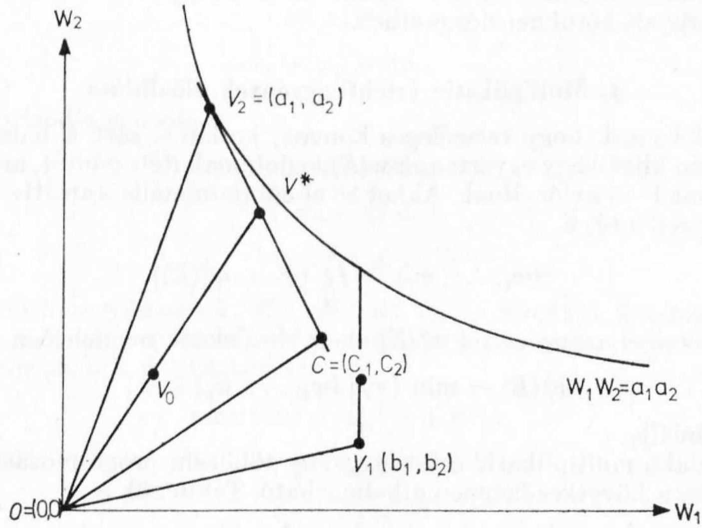
$$v(w_1, \ldots, w_k) = (w_1 - w_1^*)(w_2 - w_2^*) \ldots (w_k - w_k^*) \tag{3.2}$$

értékfüggvénnyel írható le, azaz fennáll a következő tétel.

3. *tétel.* $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow v(\mathbf{v}_1) < v(\mathbf{v}_2)$.

Bizonyítás

a) Tegyük fel először, hogy $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2$. Ekkor az előző tétel bizonyításában láttuk, hogy $g(\mathbf{v}_1) < g(\mathbf{v}_2)$, vagyis $v(\mathbf{v}_1) < v(\mathbf{v}_2)$.



2. ábra

b) Tegyük fel ezután, hogy $v(\mathbf{v}_1) < v(\mathbf{v}_2)$. Azt fogjuk kimutatni, hogy ekkor $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2$, vagyis létezik olyan véges $\mathbf{v}_1', \ldots, \mathbf{v}_{r(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}'$ sorozat, amely eleget tesz a (2.4) feltételeknek. Ezt az állítást először a $k = 2$ speciális esetben bizonyítjuk be és megmutatjuk ezután, hogyan általánosítható a bizonyítás az általános esetben. Legyen $\mathbf{v}_1 = (b_1, b_2)$ és $\mathbf{v}_2 = (a_1, a_2)$, valamint $\alpha = a_1a_2$ és $\beta = b_1b_2$. Tekintsük a $w_1w_2 = a_1a_2$ görbét (2. ábra). Kimutatjuk először, hogyha ehhez a görbéhez érintőt húzunk az (a_1, a_2) pontban, és (c_1, c_2) ennek az érintőnek egy tetszőleges pozitív koordinátákkal rendelkező pontja, akkor a $\mathbf{v}_2 0 \mathbf{c}$ háromszögben a v_2 pont adja a legnagyobb v függvényértéket. Ez az állítás azonnal adódik abból a tényből, hogy a $w_1w_2 = a_1a_2$ görbe konvex, az érintő a görbe alatt van, így az érintő bármely pozitív koordinátákkal rendelkező pontja kisebb v értéket ad, mint a görbéhez tartozó $v = a_1a_2$ érték. Ekkor pedig a $\mathbf{v}_2\, 0\, \mathbf{c}$ háromszögben is $\mathbf{v}_2$ adja a legnagyobb függvényértéket, hiszen, ha $\mathbf{v}_0$ a háromszög tetszőleges pontja, akkor az $0\,\mathbf{v}_0$ sugár mentén a $\mathbf{v}_0$-hoz tartozó függvényérték tovább növelhető az érintő egy pontjáig, amit az ábrán $\mathbf{v}^*$-gal jelöltünk.

Vegyük észre azután, hogy a $w_1w_2 = \gamma$ görbesereg jelenti a

$$w_2' = -\frac{w_2}{w_1}$$

differenciálegyenlet megoldását, és ez a differenciálegyenlet eleget tesz az I intervallumon az Euler-módszer konvergencia-feltételeinek (ld. [17]). Tehát az I intervallumon a $w_1w_2 = a_1a_2$ görbe tetszőlegesen jól közelíthető érintőkből álló és az (a_1, a_2) kezdőponttal rendelkező véges poligonnal. Így elérhető, hogy a poligon (b_1 pontbeli) végpontjának ordinátája nagyobb legyen, mint b_2. Ekkor pedig a poligon csúcspontjai a (b_1, b_2) ponttal kiegészítve eleget tesznek a (2.4) relációknak.

Magasabb dimenzió esetén a bizonyítás ugyanígy megy, azzal a különbséggel, hogy ekkor a (w_1, w_2) koordinátasík helyett a $\mathbf{v}_2$, 0 és $\mathbf{v}_1$ pontok által meghatározott kétdimenziós síkban kell dolgoznunk. A bizonyítás többi lépése analóg az előbb tárgyalt kétdimenziós esethez.

4. Multiplikatív értékfüggvények előállítása

Tegyük fel most, hogy tetszőleges konvex, korlátos, zárt E halmaz esetén a döntéshozó kijelöl egy egyértelmű $\mathbf{w}(E)$ legjobbnak ítélt pontot, amely eleget tesz a 2. pont 1—5 axiómáinak. Akkor az ebből (minimális tranzitív bővítéssel) adódó félig-rendezés a

$$v(w_1, \ldots, w_k) = \prod_{i=1}^{k} (w_i - w_i^*(E)) \tag{4.1}$$

értékfüggvénnyel azonos, ahol $w_i^*(E)$-ot az előzőeknek megfelelően a

$$w_i^*(E) = \min \{w_i \mid (w_1, \ldots, w_k) \in E\} \tag{4.2}$$

reláció definiálja.

A (4.1) alakú multiplikatív értékfüggvény többcélú programozási feladatok megoldására a következőképpen alkalmazható. Tekintsük a

$$\max_{x \in X} \varphi_i(x) \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{4.3}$$

többcélú programozási feladatot. Tegyük fel, hogy a döntéshozónak a célfüggvények fontosságát illető preferenciája a $v_i(\varphi_i)$ értékfüggvényekkel írható le. Ha az értéktéren definiált 1–5 axiómákat a döntéshozó elfogadja, akkor a többcélú programozási feladatot a következő algoritmussal oldjuk meg:

1. *lépés.* $i = 1, \ldots, k$ esetén oldjuk meg a

$$\min_{x \in X} v_i(\varphi_i(x))$$

feladatot, és jelölje w_i^* az optimális célfüggvényértéket.

2. *lépés.* Oldjuk meg ezután a

$$\max_{x \in X} \prod_{i=1}^{k} (v_i(\varphi_i(x)) - w_i^*)$$

egyetlen célfüggvénnyel rendelkező feladatot.

A dolgozat befejezéseként az itt bemutatott módszert illusztráljuk egy numerikus példán.

2. *példa.* Tekintsük a

$$\max 3x_1 + x_2 \text{ és } x_1 + 3x_2$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

$$x_1 + x_2 \leqq 18$$

két célfüggvénnyel rendelkező lineáris programozási feladatot.

Az 1. lépésben először a

$$\min 3x_1 + x_2$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

$$x_1 + x_2 \leqq 18$$

feladatot, másodszor pedig a

$$\min x_1 + 3x_2$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

$$x_1 + x_2 \leqq 18$$

problémát kell megoldanunk. Nyilvánvaló, hogy mindkét feladat optimális megoldása: $x_1 = x_2 = 0$ és az optimális célfüggvényértékek egyaránt zérust adnak. Ekkor pedig a 2. lépésben a

$$\max (3x_1 + x_2)(x_1 + 3x_2)$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

$$x_1 + x_2 \leqq 18$$

feladatot kell megoldanunk. Könnyen kimutatható, hogy az egyetlen optimális megoldást a $x_1 = x_2 = 9$ pont szolgáltatja, és a hozzá tartozó optimális célfüggvény értékek:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 36.$$

Megjegyezzük végül, hogy a [18] dolgozat egy hasonló alapelven működő, de a konkrét numerikus realizálás szempontjából ettől eltérő megoldási módszert javasol.

(Beérkezett: 1982. szeptember 19-én.)

IRODALOM

1. Abi-Ghanem, G.—L. Duckstein—L. Hekman (1978) *Multiobjective analysis of a vegetation management problem using ELECTRE II.* Working paper, 78—19, Systems and Ind. Eng. Dept., Univ. of Arizona, Tucson, USA.
2. Cohon, J. L.—D. Marks (1975) A review and evaluation of multiobjective programming techniques. *Water Resources Research,* 11 (2), 208—220. old.
3. Dávid L.—L. Duckstein (1976) Multi-criterion ranking of alternative long-range water resources systems. *Water Resources Bulletin,* 12 (4), 731—754. old.
4. Fishburn, P. C. (1967) Methods for estimating additive utilities. *Man. Sci.,* 13 (7) 435—453. old.
5. Fishburn, P. C. (1970) *Utility theory for decision making.* John Wiley, New York.
6. Fishburn, P. C. (1978) A survey of multiattribute/multicriterion evaluation theories. In S. Zionts (ed.) *Multiple criteria problem solving,* Proceedings, Buffalo, N. Y., USA.
7. Gershon, M. (1981) *Model choice in multiobjective decision making in natural resource systems.* PhD Dissertation, Systems and Ind. Eng. Dept., Univ. of Arizona, Tucson, USA.
8. Goicoechea, A.—D. Hansen—L.Duckstein (1982) *Introduction to multiobjective analysis with engineering and business applications.* John Wiley, New York.
9. Hwang, Ch. L.—A. S. Md. Masud (1979) *Multiple objective decision making — Methods and applications.* Springer, Berlin.
10. Keeney, R. L.—H. Raiffa (1976) *Decisions with multiple objectives preferences and value tradeoffs.* John Wiley, New York.
11. Szidarovszky F. (1977) *Játékelmélet.* Tankönyvkiadó, Budapest.
12. Szidarovszky F. (1977) A Nash-féle kooperatív megoldási koncepció általánosításáról. *SZIGMA,* 69—74. old.
13. Szidarovszky F. (1980) *Weak and strong dominance in multiobjective programming.* Working paper, 80—20, Systems and Ind. Eng. Dept., Univ. of Arizona, Tucson, USA.
14. Szidarovszky, F. (1980) *On the utility axioms of J. von Neumann, O. Morgenstern and P. Fishburn.* Working paper, 80—21, Systems and Ind. Eng. Dept., Univ. of Arizona, Tucson, USA.
15. Szidarovszky F.—Szabadkai A. (1983) *Döntéselőkészítési módszerek alkalmazása.* Mezőgazdasági Könyvkiadó, Budapest.
16. Szidarovszky F.—Molnár S. (1983) *Játékelméleti és többcélú programozási módszerek műszaki alkalmazásokkal.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, megjelenés alatt.
17. Szidarovszky F. (1974) *Bevezetés a numerikus módszerekbe.* Közg. és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
18. Forgó F. (1981) Döntés több kritérium alapján, egy játékelméleti megközelítés. *SZIGMA,* 29—38. old.

MULTICRITERIA VALUE FUNCTIONS

The paper deals with the existence of multiplicative value and utility functions. The authors first prove that by designating the most preferred element a semi-order satisfying an adequate system of axioms may be directly defined on convex, bounded and closed sets instead of using pairwise comparisons. Furthermore, it is proved that this semi-order can be described by a multiplicative value function. These theoretical results may be well applied to the solution of multi-objective programming problems.

О ФУНКЦИЯХ СТОИМОСТИ С НЕСКОЛЬКИМИ КРИТЕРИЯМИ

Статья занимается вопросом существования мультипликативных функций стоимости и полезности. Авторы статьи сначала указывают на то, что полупорядочение, которое соответствует какой-нибудь подходящей системе аксиом, может быть дано непосредственно вместо по-парного сравнения путём определения наиболее предпочитаемого элемента из выпуклого, ограниченного, замкнутого множества. В дальнейшем авторы доказывают, что это полупорядочение можно описать мультипликативной функцией стоимости. Описанные теоретические результаты возможно применить для решения проблем многоцельного программирования.