

Egy terjedési típusú osztott késleltetésű modell

Bevezetés

Ebben a cikkben¹ egy új típusú osztott késleltetésű modellt mutatunk be. Az osztott késleltetésű modellek legfőbb sajátossága az, hogy a gazdasági változók közti hatásmechanizmusokban az ugrásszerűen változó körülményekhez való igazodást több időszakra elosztva, egy bizonyos tehetetlenséggel veszik figyelembe, ugyanakkor erre az igazodásra az ökonometriai modellekhez alkalmazható becslési eljárást is adnak.

Az osztott késleltetésű modellek hagyományos megalapozása [3] általában a viselkedésre vonatkozó egyszerű makroegyenletekre épül, ehhez képest az itt vizsgált modell annyival próbál többet nyújtani, hogy vissza megy a mikro-szintű folyamatokig és onnan épít fel makromodellezéshez alkalmazható osztott késleltetésű modellt.

Az egész eljárás a korábban részletesen elemzett „Hólabda” folyamatra épül [4]. Ennek lényege, hogy igen egyszerű és triviális terjedési szabályt feltételezve vizsgáltuk, hogy hogyan terjednek hírek, információk, fogyasztási szokások egy zárt közegben. A terjedési folyamat rekurzív egyenletére a

$$(1) \quad \Delta s_t = s_{t+1} - s_t = s_t - \frac{s_t^2}{N} = s_t \left(1 - \frac{s_t}{N}\right)$$

differenciaegyenlet adódott, ahol s_t azok számát jelöli, akik a t -edik időszak végéig megkapták a hírt, információt stb. . . ., N pedig a „közeg” (város, ország stb. . . .) lakóinak teljes számát. Ennél a formulánál az s_t -k várható értékeket jelölnek; a megfelelő eloszlás ugyanakkor minden idő-intervallumra explicit megadható [4]. A „Hólabda” folyamatot leíró cikkben meghatároztuk (1) megoldását is, ami trendfüggvényként is használható:

$$(2) \quad s_t = N \left[1 - \left(1 - \frac{s_0}{N}\right)^{2t} \right],$$

ahol s_0 azok számát jelenti, akik kívülről megkapták a hírt és elkezdtek terjeszteni. Ez az egyenlet a logisztikus függvényhez hasonló görbét ír le; valószínűségelméleti megalapozottsága folytán alkalmas konfidenciasáv meghatározására, ugyanakkor paraméterbecslése az (1) egyenletből kiindulva egyszerű lineáris regressziószámítással megvalósítható. Az itt vizsgálandó osztott késleltetésű modell ezekből az eredményekből indul ki.

A cikk első fejezete az osztott késleltetésű modell származtatását mutatja be, a második fejezetben a h -eloszlás (Hólabda eloszlás) néhány tulajdonságát vizs-

¹ A cikk egy OT TgI kiadvány [5] rövidített változata.

gáljuk meg. A harmadik fejezetben ismertetjük a paraméterek becslésére javasolt eljárást és azokat a Monte-Carlo kísérleteket, amelyekkel a becslési eljárás egyes tulajdonságait teszteltük. A befejező, negyedik fejezet a modell egy lehetséges alkalmazására mutat példát, amely az állami- és szövetkezeti iparban foglalkoztatottak létszámának a bérrányok eltéréseihez való igazodását próbálja leírni.

1. Egy terjedési-típusú osztott késleltetésű modell

A hagyományos keretek között az osztott késleltetésű modelleket az „adaptív várakozás” vagy a „részleges igazodás” hipotéziseiből származtatják [3]. Megközelítésünk leglényegesebb jellemzője az, hogy más kiinduló pontból jut el osztott késleltetésű modellhez, azaz terjedési folyamatot feltételez a gazdaság szereplő között. Kétségtelen, hogy a részleges alkalmazkodás hipotézise hasonló folyamatot feltételez, mindazonáltal az ilyen magatartás lényegét a diffúziós modell jobban megvilágítja.

Releváns példaként tételezzünk fel egyszerű lineáris kapcsolatot egy adott áru ára és fogyasztása között:

$$q = \alpha \cdot p + u.$$

Tételezzük fel, hogy a fogyasztók nem igazítják magatartásukat egy exogén árváltozáshoz ugyanabban az időszakban, és azok száma, akik már megváltoztatták viselkedésüket a $t + k$ időszakig valószínűségeloszlással fejezhető ki.

Ha a teljes népesség száma N , és s_k azok száma, akik magatartásukat a k -ik időszakig (azaz legkésőbb k időszakkal az adott árváltozás után) módosították, akkor

$$s_k = f\left(\frac{s_0}{N}, k\right)$$

írható fel.

Mivel a fogyasztói szokások terjedési folyamatként is felfoghatók (terjed a hír a tényleges vagy várt árváltozásokról, terjednek a helyettesítő termékek, illetve azok használata stb. . . .), okunk van arra, hogy erre a folyamatra a Hólabda függvényt alkalmazzuk:

$$s_k = N \left[1 - \left(1 - \frac{s_0}{N} \right)^{2k} \right].$$

Itt s_i/N -t \tilde{s}_i -vel helyettesítve és bevezetve az $1 - \tilde{s}_0 = \lambda$ jelölést (hiszen ez rögzített, exogén paraméterként tekinthető):

$$(3) \quad \tilde{s}_k = 1 - \lambda^{2k},$$

és $0 < \lambda < 1$, mivel $\lambda = 1 - s_0/N$ az eredeti modell jelöléseivel és $0 < s_0 < N$ természetes összefüggés volt a paraméterek közt.

Vizsgáljuk most meg a fogyasztást a különböző egymást követő időszakokban.

$$(4) \quad q(1) = q(0) + \tilde{s}_0 \alpha [p(1) - p(0)].$$

A (4) egyenlet azt mondja, hogy az 1. időszak fogyasztása egyenlő a korábbi

fogyasztással + a teljes árhatás ($\alpha[p(1) - p(0)]$) és \tilde{s}_0 szorzatával, ahol \tilde{s}_0 a népességnek az a része, amely magatartását már a kezdeti időszakban igazította az új árakhoz.

Először tekintsünk egy egyszerű árváltozás-típust: $t(0)$ -ról $t(1)$ -re az ár (Δp)-vel változik, de az új árszínvonal változatlan marad a következő időszakokban. (Ez az ármozgástípus meglehetősen jellemző a szocialista gazdaságokra.)

Ekkor

$$p(1) = p(2) = \dots = p(k) = \dots = p(K)$$

$$\Delta p = p(1) - p(0) = p(2) - p(0) = \dots = p(K) - p(0)$$

és így

$$q(k) = q(0) + \tilde{s}_k \cdot \alpha \cdot \Delta p,$$

mivel \tilde{s}_k azon fogyasztók arányát jelenti, akik a k -időszak végéig már módosították magatartásukat. Így ez az alábbi egyszerű eredményhez vezet:

$$(5) \quad q(k) = q(0) + \alpha \Delta p (1 - \lambda^{2k}),$$

ami megmutatja, hogy mi lesz egy egyszeri árváltozás teljes hatása, és ez az alapja az osztott késleltetésű modellnek.

A fent vázolt egyszerű igazodási modell egyszeri árváltozást feltételez. Általában túlságosan erős korlátozó feltétel hosszabb időszakban változatlan árat feltételezni. A következőkben a fenti feltételt egy reálisabban helyettesítjük, mely árváltozást enged meg az egész időszakban és feltételezi, hogy minden egyes árváltozás egy különálló Hólabda folyamatot indít el. Azaz minden egyes időszakban egy új igazodási folyamat indul el a megváltozott feltételeknek megfelelően, és a különböző időpontokban induló igazodási folyamatok paraméterei egyenlők. Így, míg a fentebb vizsgált egyszerű modell rögzített célhoz való alkalmazkodást ír le, a jelenlegi változat úgy interpretálható, mint igazodás egy mozgó célponthoz.

Az elgondolás, ahogy makroszintű osztott késleltetésű modell konstruálható, az 1. táblázat sémájában látható.

1. táblázat

A különböző időpontokban induló terjedési folyamatok együttes sémája

$t(0)$	$t(1)$	$t(2)$	$t(3)$...	$t(i)$...
$\alpha \Delta p \tilde{s}_0$	$\alpha \Delta p \tilde{s}_1$	$\alpha \Delta p \tilde{s}_2$	$\alpha \Delta p \tilde{s}_3$...	$\alpha \Delta p \tilde{s}_i$...
0	$\alpha \Delta p (1) \tilde{s}_0$	$\alpha \Delta p (1) \tilde{s}_1$	$\alpha \Delta p (1) \tilde{s}_2$...	$\alpha \Delta p (1) \tilde{s}_{i-1}$...
0	0	$\alpha \Delta p (2) \tilde{s}_0$	$\alpha \Delta p (2) \tilde{s}_1$...	$\alpha \Delta p (2) \tilde{s}_{i-2}$...
.
.
0	0	0	0	...	$\alpha \Delta p (i) \tilde{s}_0$...

Az 1. táblázat sorai azt a hatást mutatják, amelyet egy adott árváltozás implikál a későbbi időintervallumokra (egyszerű igazodási folyamat). Pl. az első sor azt jelenti, hogy a 0-ik időszakban volt egy árváltozás (Δp) és az 1. időszak végéig a Δp árváltozás eredményeként $\alpha \Delta p \tilde{s}_1$ elmozdulás lesz a fogyasztásban,

a 2. időszak végéig ennek az árváltozásnak a teljes hatása $\alpha \Delta p \tilde{s}_2$ lesz stb. . . . A második sor azt mutatja, hogy az 1-ik időszakban egy újabb árváltozás következett be ($\Delta p(1)$) és ebben a sorban ennek hatásai figyelhetők meg.

Hasonlóan értelmezhető a táblázat többi sora is. Azt azonban, hogy egy időpontig a különböző korábbi időszakokban végbement árváltozások milyen keresletnövelő hatást fejtettek ki *összesen* a tábla oszlopai mutatják. Tekintsük példaként az i -ik oszlopot:

$$(6) \quad q(i) - q(0) = \alpha \Delta p \tilde{s}_i + \alpha \Delta p(1) \tilde{s}_{i-1} + \dots + \alpha \Delta p(i) \tilde{s}_0 + \dots,$$

vagy átrendezve:

$$q(i) = q(0) + \alpha \Delta p(i) \tilde{s}_0 + \alpha \Delta p(i-1) \tilde{s}_1 + \dots + \alpha \Delta p \tilde{s}_i.$$

(Ennél a felírásnál feltételeztük, hogy i -nél nagyobb késleltetés a folyamatban nem létezik.) Mivel az $\tilde{s}_i - k$ időben állandó paraméterek, az egyenletet az időváltozó egyszerű eltolásával az osztott késleltetésű modellek felírásánál szokásos alakra lehet hozni:

$$q(0) = q(-i) + \alpha [\Delta p \tilde{s}_0 + \Delta p(-1) \tilde{s}_1 + \dots + \Delta p(-i) \tilde{s}_i]$$

vagy feloldva a véges késleltetésre tett feltételt:

$$\begin{aligned} q(0) &= q = \alpha [\Delta p \tilde{s}_0 + \Delta p(-1) \tilde{s}_1 + \dots + \Delta p(-i) \tilde{s}_i + \dots] = \\ &= \alpha [(p(0) - p(-1)) \tilde{s}_0 + (p(-1) - p(-2)) \tilde{s}_1 + \dots + (p(-i) - p(-i-1)) \tilde{s}_i + \\ &\quad + \dots] = \alpha p(0) \tilde{s}_0 + \alpha p(-1) [\tilde{s}_1 - \tilde{s}_0] + \alpha p(-2) [\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1] + \dots + \\ &\quad + \alpha p(-i) [\tilde{s}_i - \tilde{s}_{i-1}] + \dots \end{aligned}$$

Ismét feltételezve \tilde{s}_i -kre a hólabda modell érvényességét és bevezetve a $\lambda = 1 - \tilde{s}_0$ helyettesítést

$$\begin{aligned} q &= \alpha p(0)(1 - \lambda) + \alpha p(-1) [\lambda^{2^1} - \lambda^{2^1}] + \alpha p(-2) [\lambda^{2^1} - \lambda^{2^1}] + \dots = \\ &= \alpha p(1 - \lambda) + \alpha \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) p(-i), \end{aligned}$$

és innen

$$(7) \quad q = \alpha \cdot p(1 - \lambda) + \alpha \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) p(-i)$$

alakhoz jutunk, ami egy egyparaméteres, végtelen sok késleltetést tartalmazó osztott késleltetésű modell. Ha a késleltetett változó együtthatóit (súlyparamétereit)

$$w_i = \frac{1}{\lambda} (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i})$$

vizsgáljuk $i = 1, 2 \dots \infty$ esetre, azt tapasztaljuk, hogy w_i -ik *formailag* kielégítik a valószínűségeloszlás kritériumát, így ezt h -eloszlásnak fogjuk nevezni.²

² A h -eloszlás elnevezés a Hólabda szóból ered.

2. A h -eloszlás néhány tulajdonsága

Ebben a fejezetben a fent definiált h -eloszlás formális tulajdonságait vizsgáljuk meg.

A w_i -k pozitivitása trivális, hiszen $w_i = (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i})/\lambda$ minden $i = 1, 2, \dots, \infty$ -re, és $0 < \lambda < 1$, így $w_i > 0$ adódik.

Egyszerűen belátható az, hogy a w_i -k alkothatnak valószínűségeloszlást, hiszen az összegük 1:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} w_i &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2^{i-1}} - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2^i} = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{2^{i-1}} - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2^i} \right] = 1 + \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2^i} \right) = 1. \end{aligned}$$

Az eloszlás várható értéke az alábbi módon adódik:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} i w_i &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} i (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) = \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{i=1}^{\infty} i \lambda^{2^{i-1}} - \sum_{i=1}^{\infty} i \lambda^{2^i} \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=2}^{\infty} i \lambda^{2^{i-1}} - \sum_{i=1}^{\infty} i \lambda^{2^i} \right] = \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) \lambda^{2^i} - \sum_{i=1}^{\infty} i \lambda^{2^i} \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2^i} \right] = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2^i}. \end{aligned}$$

A második momentum hasonlóan kapható:

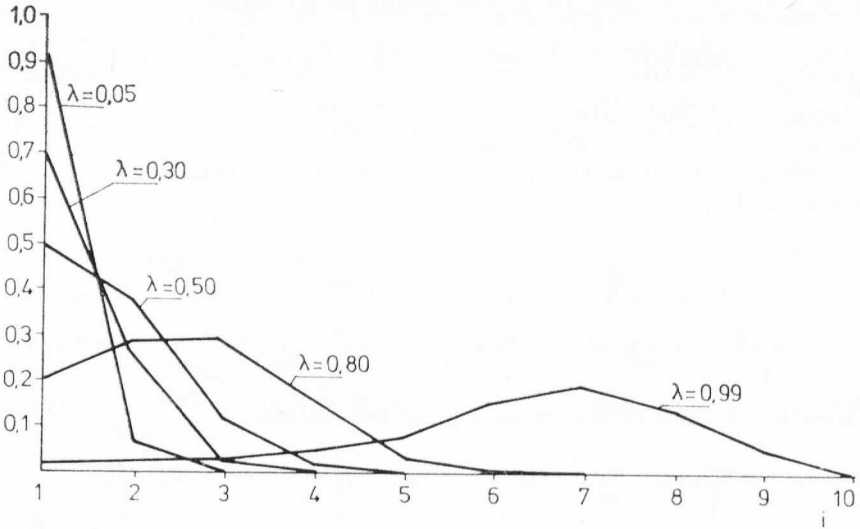
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 w_i &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) = \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=2}^{\infty} i^2 \lambda^{2^{i-1}} - \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \lambda^{2^i} \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} (1+i)^2 \lambda^{2^i} - \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \lambda^{2^i} \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} (2i+1) \lambda^{2^i} \right] = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) \lambda^{2^i}. \end{aligned}$$

A szórás az alábbi lesz:

$$\text{VAR} = \sqrt{\frac{1}{\lambda} \left[\sum_{i=1}^{\infty} (2i+1) \lambda^{2^i} - \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2^i} \right)^2 \right]}.$$

Mint a fenti formulák mutatják, az eloszlás momentumait végtelen sorok összegével fejeztük ki, s mivel nem sikerült analitikus formákat kapni, ezért a momentumokat, valamint az eloszlás értékeit különböző λ -k esetére a 2. táblázatban adjuk meg.

A 2. táblázatban a SUMMA egy ellenőrző sor, amely a csonkítás hatását teszteli, a VÁRH.ÉRT., a SZÖR.NÉGYZ. és a SZÖRÁS pedig a várható értéket, a szórásnégyzetet és a szórást jelenti. Az 1. ábra különböző jellemző λ -k mellett mutatja az eloszlást. Hangsúlyozni kell, hogy a h -eloszlás egyparaméteres eloszlás, de különböző λ -k mellett egészen eltérő görbék kaphatók. Ez az eloszlásnak előnyös tulajdonsága, mivel ilyen különböző típusokat csak több-



1. ábra. A h -eloszlás grafikonja néhány jellegzetes λ érték esetén

paraméteres eloszlások voltak képesek osztott késleltetésű modellekhez generálni (Solow Pascal-eloszlása vagy Almon polinomális függvényei).

Továbbmenve az 1. ábra azt is mutatja, hogy kis λ -k mellett (ami azt jelenti, hogy \bar{s}_0 közel van az 1-hez) az eloszlás koncentráltabb mint nagy λ -kra. Ez utóbbi eset az, amikor a népesség jelentős hányada igazítja fogyasztását az új árakhoz az első időszakban, ennél fogva λ a terjedési sebesség, illetve az intenzitás inverz mutatójának tekinthető.

3. Becslés és Monte Carlo kísérletek

Térjünk most át az osztott késleltetésű modell becslésére. Tekintsük a (7) egyenletet:

$$(8) \quad q = \alpha p(0)(1 - \lambda) + \alpha p(-1)(\lambda - \lambda^2) + \alpha p(-2)(\lambda^2 - \lambda^4) + \dots + u$$

$$q = \alpha [p(0) - \lambda \Delta p(0) - \lambda^2 \Delta p(-1) - \lambda^4 \Delta p(-2) - \dots] + u$$

ahol u -ra a standard hipotézisek érvényesek:

$$E(u) = 0, \quad E(uu') = \sigma^2 I.$$

Meg kell jegyezni, hogy (8) alkalmasabb forma a becslésre, mint (7), mivel jobb oldalán p differenciáinak késleltetett értékei szerepelnek magyarázó változóként, míg (7)-ben p és késleltettjei, ezért a két eljárás erősen különböző a multikollinearitás³ szempontjából. Mindazonáltal (8) becslése több problémát is fel-

³ Bizonyítható, hogy ha egy idősor és késleltetett sora közt ρ korreláció van, akkor a két említett sor differenciái közti korreláció $\rho_1 = (\rho - 1)/2$ lesz. Minthogy makroökonometriai idősorok esetén általában $0,5 < \rho < 1$, ρ_1 a $(-0,25, 0)$ intervallumban helyezkedik el és így $|\rho_1| < |\rho|$, ami fontos a multikollinearitás okozta károk elkerülése végett.

2. táblázat
A h-closzlás táblázata

$\lambda =$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
I = 1	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
I = 2	0,0499	0,0990	0,1466	0,1920	0,2344	0,2730	0,3071	0,3360	0,3589	0,3750
I = 3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0268	0,0422	0,0624	0,0874	0,1172
I = 4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
I = 5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Summa	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Várh. ért.	1,0501	1,1010	1,1534	1,2080	1,2657	1,3272	1,3935	1,4656	1,5449	1,6328
Szór. négyz.	0,0479	0,0928	0,1366	0,1808	0,2266	0,2750	0,3270	0,3834	0,4452	0,5138
Szórás	0,2188	0,3046	0,3696	0,4252	0,4760	0,5244	0,5718	0,6192	0,6673	0,7168

$\lambda =$	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
I = 1	0,4500	0,4000	0,3500	0,3000	0,2500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500	0,0100
I = 2	0,3836	0,3840	0,3754	0,3570	0,3281	0,2880	0,2359	0,1710	0,0926	0,0197
I = 3	0,1512	0,1880	0,2256	0,2606	0,2884	0,3023	0,2935	0,2507	0,1590	0,0382
I = 4	0,0151	0,0275	0,0475	0,0776	0,1201	0,1745	0,2332	0,2724	0,2350	0,0720
I = 5	0,0001	0,0005	0,0016	0,0047	0,0132	0,0342	0,0809	0,1677	0,2594	0,1278
I = 6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0065	0,0368	0,1644	0,2014
I = 7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0380	0,2519
I = 8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0015	0,2020
I = 9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0712
I = 10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0058
I = 11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Summa	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Várh. ért.	1,7317	1,8445	1,9752	2,1301	2,3189	2,5579	2,8786	3,3526	4,2139	6,3777
Szór. négyz.	0,5907	0,6781	0,7789	0,8970	1,0384	1,2128	1,4365	1,7426	2,2167	2,9774
Szórás	0,7686	0,8235	0,8826	0,9471	1,0190	1,1013	1,1985	1,3201	1,4888	1,7255

vet, ilyenek pl.: α -ban és λ -ban nemlineáris a modell (a két paraméter szorzódik); a λ hatványai által a modellre kényszerített nemlineáris korlátok; és végül a késleltetések és a magyarázó változók végtelen száma. Másik oldalról (8) előnyös tulajdonsága, hogy λ korlátos intervallumban helyezkedik el. Ezért az alábbi egyszerű „rács-technikát” alkalmaztuk:

Legyen $t(\lambda)$ a λ -nak a függvénye, melyet így definiálunk:

$$t(\lambda) = p(0) - \lambda \Delta p(0) - \lambda^2 \Delta p(-1) - \lambda^4 \Delta p(-2) - \dots$$

Számítsuk ki $t(\lambda)$ -t különböző λ -k mellett. Minden egyes λ és $t(\lambda)$ értékhez a klasszikus legkisebb négyzetek módszerével becsülhető $\hat{\alpha}$ a

$$q = \alpha t(\lambda) + u$$

egyenletből. Mivel λ lehetséges megoldásai jól definiált intervallumban helyezkednek el ($0 < \lambda < 1$), ezt a halmazt M pontra osztjuk fel és mindegyikéhez ($i = 1, 2, \dots, M$) meghatározva a minimális $u^{(i)} \cdot u^{(i)}$ -t, a legkisebb négyzetek értelmében optimális $\hat{\alpha}$ és $\hat{\lambda}$ értékek könnyen megkaphatók.

Tekintettel arra, hogy a modell bonyolultságánál fogva a becslési eljárás jellemzőit analitikusan úton nem tudjuk meghatározni, ismeretük azonban a későbbi alkalmazások szempontjából fontos, — *Monte Carlo* szimulációt végzünk, amelynek viszonylag részletes bemutatását ezen cikk keretében azért tartjuk indokoltnak, mivel magyar ökonometriai kutatások során a becslési eljárások vizsgálatára még nem alkalmazták.

A módszer alapelve roppant egyszerű: ismertnek tételezve fel egy alapmodellt, elkészítjük annak K db. realizációját (megfelelő, ismert eloszlású véletlen minták segítségével), majd ezekből a mintákból becsüljük az alapmodell elméleti jellemzőit. Itt látható a *Monte Carlo* módszernek az a nagy előnye, amely az egyszerű, gyakorlati példákön való számolások fölé emeli: az ismétlések lehetősége, az igazi kísérletezés. Hiszen az alapmodellnek tetszés szerinti sok realizációja állítható elő, melyek egymástól csak a véletlen hatásokban különböznek, így a becslési eljárás tulajdonságai csakis körülmények közt vizsgálhatók. Esetünkben ez a következőt jelentette.

Tekintsük a (7) alapegyenletet, q és p helyett az ökonometriában szokásos y és x változókat használva:

$$y = \alpha \left[(1 - \lambda)x + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) x(-i) \right] + u.$$

x idősorát ismertnek feltételezve α és λ értékeket adunk meg (rögzítünk egy mintában), és specifikáljuk u eloszlását is. Ekkor K db. y -t generálunk, majd ezek segítségével mind a K db. mintából a javasolt eljárás segítségével becsüljük $\hat{\alpha}_i$ -t és $\hat{\lambda}_i$ -t ($i = 1, 2, \dots, K$). A K db. becsült paraméterkészletből meghatározzuk azok várható értékét és szórását [$M(\hat{\alpha})$, $M(\hat{\lambda})$, $D(\hat{\alpha})$, $D(\hat{\lambda})$] és ezekből következtetünk a becslés tulajdonságaira. Látható, hogy a módszer egyszerű, más hasonló ökonometriai problémák vizsgálatánál is jól használható.

Ami a kísérletek konkrét megvalósítását illeti, kezdjük a leírást x idősor specifikálásával. A szakirodalomban (pl. [1], [2], [7]) x -ről általában feltételezik, hogy az elsőrendű autoregresszív folyamat, ismert (pontosabban: adott) paraméterrel és ismert eloszlású véletlen változóval. Ilyen kiinduló feltételezések mellett általában minden mintához más-más x idősort becsülnek és ezeket

használják fel az y -ok előállításához. Ebben a kísérletsorozatban némiképp másként jártunk el. Mi ugyanis:

- Az x -et minden mintában rögzítettnek vettük, azaz csak egy x -et generáltunk és ezt használtuk fel a számítások egész menetében. Ezt a választást egyszerűsége mellett az indokolja, hogy az ökonometria gyakran él azzal a hipotézissel, hogy x nem valószínűségi változó;
- A rögzített x -et úgy generáltuk, hogy exponenciális trendet képeztünk 4%-os évi növekedéssel és ezt zavartuk meg additív módon egy, a $[-4; +4]$ intervallumban egyenletes eloszlású,⁴ véletlen változóval. Mivel az x nagyságrendjét 100 körül rögzítettük (lásd később részletesen), a $-4, +4$ határok kb. egy időszaki növekedésnek felelnek meg;
- A mesterséges x idősort 30 elemét generáltuk a fenti módon, ezekből az utolsó 20-at használtuk fel a szimulációra, az első 10 db. csak a késleltetések előállításához kellett;
- Az x idősor 11. elemét rögzítettük 100-ra, azaz azt feltételeztük, hogy az x bázisindexsort reprezentál, ahol a bázis a tényleges számítások (becslések) kezdeti időpontja.

Az x ilyen kialakításával azt próbáltuk elérni, hogy lehetőleg minden szempontból olyan „idősort” kapjunk, amely nagyságrendjét, tendenciáját, hosszúságát, azaz minden lényeges jellemzőjét tekintve egy átlagos, reprezentáns, éves makrogazdasági idősortnak felel meg. Úgy véljük, hogy az x idősor valóban megfelel ezeknek a követelményeknek.

A többi paraméterek közül λ természetes intervalluma $0 < \lambda < 1$. Mivel az eloszlás elméleti vizsgálata megmutatta, hogy más-más λ -k eltérő alakú és tulajdonságú eloszlásokhoz vezetnek, a szimuláció során több jellemző λ értékre végeztünk számításokat. Az α paraméter ezzel szemben lényegileg skálafaktor-nak is tekinthető, így szerepe lényegesen kisebb. Korábbi — itt nem részletezendő — vizsgálatok azt mutatták, hogy az eljárás különféle nagyságrendű α -k esetén meglehetősen érzéketlen erre a változásra (pontosabban akkor, ha a véletlen változó szórását ennek megfelelően választjuk meg), így α elméleti értékét az összes vizsgálat során 2-re rögzítettük.

A véletlen változó (u) a standard ökonometriai hipotézisek szerint 0 várható értékű, autokorrelálatlan, σ szórású, normális eloszlású változó. Itt csak σ a priori kijelölése volt a feladat. Úgy jártunk el, hogy ismét az átlagos makromodelleket tekintve, feltételeztük, hogy a modell relatív hibájának hozzávetőlegesen 0,5 és 4% között kell lennie. Ebből — a már rögzített paraméterek alapján — visszaszámolva az adódott, hogy a $4 \leq \sigma \leq 32$ intervallumban kell megválasztanunk a szórás elméleti értékét.

A szimuláció mintanagyságát, azaz a kísérletek ismétlésének számát elméleti megfontolások alapján igen nagyra, több ezerre kellene tenni. Gyakorlati, ökonometriai munkákban a kísérletszám az 50—200 intervallumban szóródik ([1], [2], [7]). Ezt tekintettük mi is alapnak; de egyes esetekben — számítástechnikai korlátok következtében — valamivel ez alá is kellett mennünk.

Az esztimátor tulajdonságainak jellemzésére — a hasonló vizsgálatokkal összhangban — az alábbi mutatókat számítottuk ki a kísérletek eredményeiből:

- a paraméterek várható értéke; $M(\hat{\lambda})$ és $M(\hat{\alpha})$, ahol pl.

⁴ Az egyenletes eloszlású és a későbbiekhez szükséges normális eloszlású pszeudo-veletlen számokat az OTSzk által készített szubrutinnal generáltuk. A számítások az OTSzk ICL System 4/70 számítógépén készültek.

$$M(\hat{\lambda}) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^k \hat{\lambda}_i;$$

— a paraméterek szórása = az esztimátor standard hibája:

$S_1(\hat{\lambda})$ és $S_1(\hat{\alpha})$, pl.

$$S_1(\hat{\lambda}) = \sqrt{M(\hat{\lambda} - M(\hat{\lambda}))^2} = D(\hat{\lambda})$$

— az esztimátor torzítása: $B(\hat{\lambda})$ és $B(\hat{\alpha})$, pl.

$$B(\hat{\lambda}) = \lambda - M(\hat{\lambda});$$

— a torzítás abszolút százalékos mértéke: $BP(\hat{\lambda})$ és $BP(\hat{\alpha})$, pl.

$$BP(\hat{\lambda}) = |B(\hat{\lambda})| \lambda;$$

— az elméleti érték körüli átlagos hiba: $S_2(\hat{\lambda})$ és $S_2(\hat{\alpha})$, pl.

$$S_2(\hat{\lambda}) = \sqrt{M(\hat{\lambda} - \lambda)^2};$$

— a reziduumok várható értéke és szórása: $M(\hat{u})$ és $D(\hat{u})$.

A vázolt becslési eljárás $M = 100$ paraméterrel, azaz 0,01-es pontossági követelménnyel végeztük el; ez a viszonylag durva becslés a nagyszámú kísérlet esetén jelentős gépidő megtakarítást jelentett. Gyakorlati becsléseknél természetesen a pontosság gond nélkül fokozható. Végül a $t(\lambda)$ végtelen sort 8 tagú (7 késleltetett differenciát tartalmazó) véges formulával helyettesítettük, ugyanis a h eloszlás táblázata azt mutatta, hogy $\lambda = 0,9$ -ig az eloszlásnak legfeljebb az első 7 tagja ad értékes jegyet a 4. tizedesben.

A fenti módon specifikált kísérletsorozattal arra a kérdésre kerestük a választ: a becslési eljárás (esztimátor) hogyan reagál a modell egyes paramétereinek különböző értékeire; a fenti keretek közt a h -eloszlású folyamatok becslése mennyire megbízható; milyen intervallumban mozog a becslések szórása; és végül összefoglalóan mennyire megbízhatók a kapott becslések. Ezeknek a kérdéseknek a tükrében vizsgáljuk most meg a kapott eredményeket!

Az *eredmények értékelését* azzal kell kezdeni, hogy több kisebb, itt tételesen nem vizsgált, számítást végeztünk annak érdekében, hogy jól körülhatároljuk a vizsgálandó eseteket. Hiszen maga a probléma túl sok paramétert tartalmaz ahhoz, hogy minden lehetséges kombinációt külön-külön is megvizsgáljunk. Ezen előzetes vizsgálatok egyikére már utaltunk azzal, hogy α értékére az eljárás érzéketlen, míg a másik fontos megállapításunk az, hogy a paraméterek (elsősorban a λ) torzítása nagyon érzékeny a véletlen változó szórására. Az összefüggés nemlineáris: a véletlen változó szórásával progresszive nő a paraméterek torzítása. Ezeket kiegészítően utalunk arra a vizsgálatra, amely ugyan közvetlenül nem hasonlítható össze a később részletesen bemutatandó eredményekkel (más x értékekkel dolgoztunk és a csontkítási eljárás némiképp eltérő volt), de amely viszonylag nagy minta ($K = 180$) esetén azt mutatta, hogy $\hat{\lambda}$ eloszlása kb. 4%-os relatív hiba a priori specifikálásával meglehetősen „diffuz”. Azaz még ez a mintanagyság sem elegendő ahhoz, hogy az eloszlás jellegzetességét kidomborítsa, sőt ilyen szórás feltételezésével — úgy tűnik — nagyságrendileg nagyobb kísérletszám lenne szükséges megbízható következte-

tések levonására. Minthogy erre a számítástechnikai lehetőségeink pillanatnyilag nem megfelelőek, inkább az a priori specifikált véletlen szórást csökkentettük le, így a $\sigma = 4$ (kb. 0,7% relatív hiba) és $\sigma = 12$ (kb. 2% relatív hiba) értékekkel számoltunk a továbbiakban.

A főbb eredményeket a 3. táblázat ($\sigma = 12$) és a 4. táblázat ($\sigma = 4$) tartalmazza.

A táblázatok számai közt az alábbi fontosabb összefüggésekre, tendenciákra hívjuk fel a figyelmet:

— λ kis értékei esetén (főleg $\sigma = 12$ -nél) a $\hat{\lambda}$ esztimátorának torzítása és szórása olyan nagy, hogy az eljárás gyakorlatilag használhatatlan. Igen fontos és

3. táblázat

A szimuláció fontosabb eredményei I.

Paraméterek: $\sigma = 12$, $\alpha = 2,0$, $K = 40$.

$\lambda =$	0,20	0,35	0,50	0,70	0,90
$M(\hat{\lambda})$	0,3432	0,4875	0,5670	0,5687	0,8200
$B(\hat{\lambda})$	-0,1432	-0,1375	-0,670	0,1313	0,0800
$BP(\hat{\lambda})$	71,6	39,29	13,40	18,76	8,89
$S_1(\hat{\lambda})$	0,3143	0,3181	0,2587	0,3153	0,2232
$S_2(\hat{\lambda})$	0,3453	0,3465	0,2672	0,3489	0,2371
$M(\hat{\alpha})$	2,0261	2,0309	2,0297	2,0014	1,9964
$B(\hat{\alpha})$	-0,0261	-0,0309	-0,0297	-0,0014	0,0036
$BP(\hat{\alpha})$	1,31	1,54	1,48	0,07	0,18
$S_1(\hat{\alpha})$	0,0574	0,0480	0,0573	0,0600	0,0600
$S_2(\hat{\alpha})$	0,0630	0,0570	0,0645	0,0601	0,0601
$M(\hat{u})$	0,0145	-0,0919	-0,1002	0,0572	-0,0866
$D(\hat{u})$	10,91	11,16	11,57	10,60	11,72

4. táblázat

A szimuláció fontosabb eredményei II.

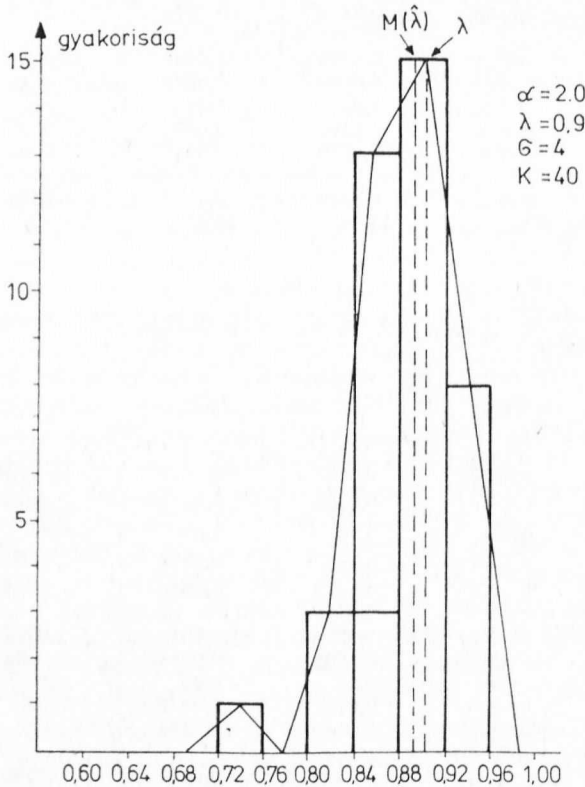
Paraméterek: $\sigma = 4$, $\alpha = 2,0$, $K = 40$.

$\lambda =$	0,20	0,35	0,50	0,70	0,90
$M(\hat{\lambda})$	0,2015	0,3195	0,4927	0,6790	0,8895
$B(\hat{\lambda})$	-0,0015	0,0305	0,0073	0,0210	0,0105
$BP(\hat{\lambda})$	0,75	8,75	1,46	3,00	1,17
$S_1(\hat{\lambda})$	0,1201	0,1405	0,1353	0,1105	0,0424
$S_2(\hat{\lambda})$	0,1201	0,1438	0,1355	0,1125	0,0436
$M(\hat{\alpha})$	2,0016	1,9995	2,0018	1,9996	1,9982
$B(\hat{\alpha})$	-0,0016	0,0005	-0,0018	0,0004	0,0018
$BP(\hat{\alpha})$	0,80	0,25	0,90	0,20	0,90
$S_1(\hat{\alpha})$	0,0100	0,0141	0,0173	0,020	0,0236
$S_2(\hat{\alpha})$	0,0100	0,0141	0,0174	0,020	0,0237
$M(\hat{u})$	0,0087	0,0449	0,0531	-0,0585	-0,0008
$D(\hat{u})$	3,89	3,84	3,77	3,73	3,72

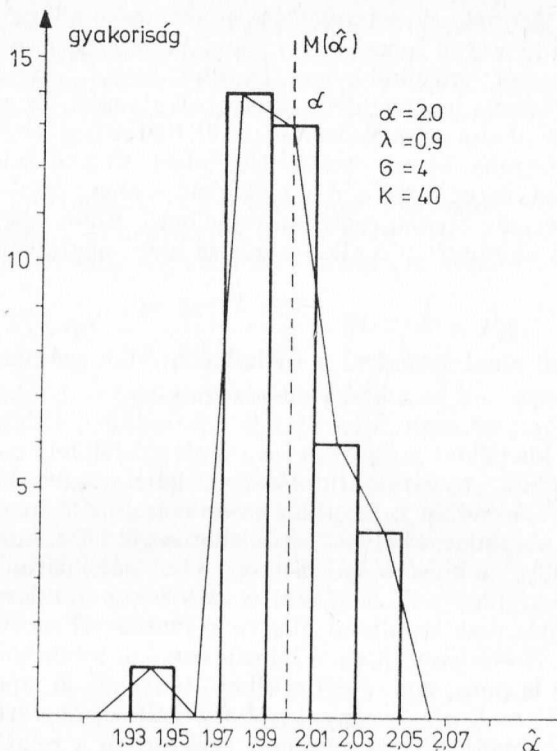
érdekes eredmény, hogy a véletlen szórás harmadára való csökkentése a paraméter szórását nagyjából *arányosan* csökkentette, mígnem a torzítást (és a relatív torzítást) ennél lényegesen nagyobb mértékben;

- mindkét táblán látható, hogy λ növekedésével a relatív torzítás tendenciászerűen csökken. Nagy λ esetén még a $\sigma = 12$ szórásnál is elfogadható, 10 %-on belüli relatív torzítás adódik;
- mindkét táblából kitűnik, hogy kis λ értékek mellett az esztimátorok eloszlása meglehetősen „diffuz”, nagy a szórásuk, laposak. Tekintve, hogy a további, itt nem közölt számítások is ezt a tendenciát mutatják, arra következtethetünk, hogy ez nem kizárólag a kis minta következménye, hanem más, reális oka is van.

Figyelembe véve, hogy a gyakorlati alkalmazások során ismétlésekre nincs lehetőségünk, csak egy becslés eredménye áll rendelkezésünkre, és az itteni eredmények egyáltalán nem biztatóak. Az eredmények azonban azt is mutatják, hogy λ növelésével a szórás számottevően csökken; az eloszlás sokkal nagyobb mértékben koncentrálódik a várható érték körül, bár meg kell említeni azt is, hogy $\sigma = 12$ esetén még mind a torzítás, mind pedig a szórás eléggé számottevő. Ugyanakkor, mint az a 2. ábrán is látható, ilyen λ érték mellett a várható érték és a módusz igen közel esik egymáshoz, ami kedvező becslési tulajdonság. *Összefoglalva* a λ becsléséről mondottakat, úgy tűnik, hogy különösen



2. ábra. $\hat{\lambda}$ eloszlásának hisztogramja

3. ábra. $\hat{\alpha}$ eloszlásának hisztogramja

kisebb λ -k esetén, az a felület, amelynek minimumát keressük λ -ban meglehetősen lapos, viszonylag kis véletlen elmozdulások nagy mértékben befolyásolják a minimum helyét.

Amennyire kritikus volt λ becslése, annyira jó eredményeket adott α becslése, bár ez kevésbé lényeges paraméter. Itt a százalékos torzítások átlagosan 1% alatt maradtak, de kis szórás esetén *mindig* ez alatt a szint alatt maradtak. Az egyetlen említésre méltó tendencia itt az, hogy α megnövekedésével inkább valamit romlottak a becslési eredmények (pl. szórás), de még a legrosszabb esetben is messze elfogadható értékeket produkáltak. Erre csak egy példát mutatunk be a 3. ábrán.

Az eredmények ismertetését az \hat{u} reziduumokra vonatkozó eredményekkel zárjuk. Ezek jelentősége abban áll, hogy az u eloszlásának nem csupán várható értékét, de szórását is a priori ismerjük. Másrészt a reziduumokra jóval nagyobb minta áll rendelkezésünkre, mint az egyes paraméterekre (hiszen $K \cdot T$ reziduumot határozunk meg minden kísérletsorozatban). Így ezekből már némiképp megbízhatóbb következtetéseket lehet levonni, elsősorban a Monte Carlo módszer értékére vonatkozóan. Az $M(\hat{u})$ abszolút értéke mindenütt (egy kivétellel) 0,1 alatt marad, általában ennél sokkal kisebb értéket vesz fel. Mivel $\sigma = 12$ esetén 1% relatív eltérésnek 0,1, $\sigma = 4$ esetén pedig kb. 0,04 felel meg, azt állíthatjuk, hogy a reziduumok várható értékének eltérése az elméleti 0-tól elhanyagolható.

A becslésre és a Monte Carlo szimulációra vonatkozó eredmények összefoglalásul csak annyit tehetünk hozzá az elmondottakhoz, hogy a kísérletek egyértelműen bebizonyították: inkább csak lassúbb, kisebb intenzitású terjedési folyamatok esetén lehet a fenti modellt sikerrel alkalmazni. Ez azt jelenti, hogy a modell gyakorlati alkalmazása elsősorban havi, illetve negyedéves folyamatok vizsgálatánál jöhet szóba, hiszen ezeknél feltételezhető a több időszakra kiterjedő alkalmazkodás, és ugyanakkor a megfelelő szabadságfok biztosításához szükséges mintanagyság is ezek esetében remélhető. Ennél fogva a következő fejezetben röviden bemutatandó alkalmazás is havi megfigyelésű idősorokon nyugszik.

5. Példa a modell alkalmazására: a foglalkoztatottak számának igazodása a bérek eltéréseihez

Befejezésül egy kis példát mutatunk be a fenti modell lehetséges alkalmazására. A példa a foglalkoztatottak áramlását vizsgálja a szövetkezeti iparból az állami iparba. Mivel mindkét szektorban hasonló szakmák, iparágak és vállalatok léteznek, nem alaptalan a helyettesítés lehetőségét feltételezni. Annak érdekében, hogy elkerüljük a külső tényezők zavaró hatását (iparon kívülre történő áramlást, illetve a kívülről való belépést), a változókat standardizáltuk: a képzett új változók már csak az állami, illetve szövetkezeti szektorban dolgozók arányát tükrözik. Hasonlóan, mivel a bérszínvonalak különbözők a megfigyelési időszak elején is (más, nem-megfigyelhető tényezők kompenzálják az alacsonyabb béreket), csak a bérarányok relatív változását vettük figyelembe.

Hipotézisünk a következő: ha valamely szektorban a relatív bérek nőnek, ez az aránytalanság egy terjedési-igazodási típusú folyamatot indít el, munkaerőáramlást a jobb szektor felé. Így, ha a hipotézis igaz, a bérek és a foglalkoztatottak számának összefüggése h -eloszlású osztott késleltetésű modellel írható le.

Jelöljük L_1 -el és L_2 -vel az állami, illetve szövetkezeti szektorban dolgozók számát. Hasonló módon w_1 és w_2 a megfelelő bérszínvonal. Legyenek

$$l_1 = L_1/(L_1 + L_2), \quad l_2 = L_2/(L_1 + L_2)$$

a két szektor foglalkoztatottjainak részarányai és legyen $w = w_1/w_2$ az átlagbérek hányadosa.

Ezekkel a jelölésekkel hipotézisünk

$$l_1 = f(w)$$

alakot ölti, feltéve, hogy f egy h -eloszlású osztott késleltetésű függvény α és λ paraméterekkel, azaz az

$$l_1 = \alpha \left[(1 - \lambda)w + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) w(-i) \right] + u$$

modell releváns.

Az adatok az 1980–1982. évek havi megfigyeléseiből származnak, mind a foglalkoztatottak számára, mind a bérekre vonatkozóan, így 36 elemű minta állt rendelkezésünkre.⁵ A viszonylag nagy minta lehetővé tette, hogy elfogadható szabadságfok mellett 7 késleltetett értékkel dolgozzunk.

⁵ Forrás: Statisztikai Havi Közlemények 1980–1982. KSH, Budapest.

A becsült paraméterek $\hat{\alpha} = 0,6910$ -nak és $\hat{\lambda} = 0,9530$ -nak adódtak, s ez azt mutatja, hogy egy igen lassú terjedés ment végbe a modellben.

A modell érvényességét tesztelendő a $\lambda = 0$ nullhipotézist vizsgáltuk meg a jól ismert F próba egy kissé módosított változatával. (8)-ból

$$q = \alpha p - \alpha r(\lambda) + u$$

írható fel, és a jobb oldalon álló 2 tagot két magyarázó változónak tekintve, de felső korlátként a szabadságfokot úgy tekintettük, mintha $r(\lambda)$ 7 elemből állt volna. Így a második tag szignifikáns voltára készített F próba

$$F(\text{emp}) = \frac{21,6025}{0,0071} \cdot \frac{19}{10} = 5780,95 > F_{19}^{10}(1\%)$$

módon számítható. F magas tapasztalati értéke azt mutatja, hogy a 0 hipotézist minden szignifikancia-szinten el kell vetni, azaz az alaphipotézis elfogadható.

Végül érdemes megjegyezni, hogy ebben az esetben világos, hogy a modell, kiváltképp magas λ -kra, egyfajta simítófüggvényként funkcionál és a magas F érték részben annak következménye, hogy a bérek szórása viszonylag nagy, a foglalkoztatottak száma viszont simán alakult.

(Beérkezett: 1983. október 10-én.)

IRODALOM

1. CORRADI, C.—GAMBETTA, G.: Ritardi distribuiti ed errori di specificazione: un esperimento di simulazione. *Statistica*, XXXVIII. (1978) (Università di Bologna, Padova e Palermo) pp. 207—222.
2. GÓRSKA-HALADAJ, E.: *Properties of estimators of parameters for the models with geometric lag distribution. Some Monte Carlo results*. Paper presented at the Meeting of the University of Łódź, Blazejewko, 1978.
3. GRILICHES, Z.: Distributed lags: A survey. *Econometrica*, vol. 35. (1967) pp. 16—49.
4. HUNYADI L.: Egy terjedési folyamat elemzése (A hólabda modell) *Sigma*, XI. (1978). 191—199. o.
5. HUNYADI L.: *A h-closzlású osztott késleltetésű modell* Országos Tervhivatal, Tervgazdasági Intézet. Budapest, 1982.
6. MESZÉNA GY.—ZIERMANN M.: *Matematikai statisztika* Budapest, 1981. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
7. PAIZS J.: *Paraméterbecslési módszerek kisminta-tulajdonságai és specifikációs hibákkal szembeni érzékenysége* (Kézirat) Laboratóriumi Munkanyagok, 8. szám. Budapest, 1969. KSH Statisztikai és Matematikai Módszerek Közgazdasági Alkalmazásának Laboratóriuma.

A DIFFUSION TYPE DISTRIBUTED LAG MODEL

The article presents the setup and estimation of a distributed lag model of a new type. The traditional foundation of the distributed lag models relies most frequently on adjustment and expectation behaviour. The present model derives the distributed lags from a diffusion process. The diffusion process underlying the model is the so-called snowball process published earlier. Setting out from it the article presents the origin of the distributed lag model with h -distribution. The author suggests a "scanning"-type estimation procedure for this distributed lag model and discusses in some detail also the Monte-Carlo experiments which serve to analyse some properties of the estimation procedure. The

main lesson of these is that the proposed estimation procedure promises success in such cases when we are facing a distribution covering relatively many periods, that is, the diffusion is slow relative to the period observed. Confronting this with the considerations deriving from the degree of freedom of the estimation we may reach the conclusion that the application of the model may be proposed mainly in the case of monthly or quarterly observations. The application of the model is therefore presented through an example relying on monthly observations: it is shown that the flow of labour between the state-owned and the cooperative industry that may be attributed to shifts in relative wages, can be well described with the distributed lag model of the diffusion type considered here.

МОДЕЛЬ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ТИПА РАСПРОСТРАНЕНИЯ

В статье выводится и оценивается новый тип модели с распределенным запаздыванием. Традиционное обоснование моделей с распределенным запаздыванием чаще всего основано на поведении приспособления и ожидания, анализируемая в статье модель выводит распределенные запаздывания из процесса распространения. Служащий основной модели процесс распространения представляет собой уже известный по прежним публикациям процесс снежного кома. Исходя из этого, в статье представлено происхождение т.н. модели с распределенным запаздыванием с распространением h , а затем показываются некоторые особенности распространения h . Делается предложение метода оценки модели с распределенным запаздыванием при распределении h типа «сканирования» и относительно подробно рассматриваются эксперименты Монте-Карло, которые служат анализу отдельных особенностей метода оценки. Их основная особенность в том, что предлагаемый метод оценки может успешно применяться в тех случаях, когда мы имеем дело с распределением медленным относительно данного периода. Сравнивая это со степенью свободы оценки, можно прийти к выводу, что модель можно рекомендовать к применению в первую очередь при месячных и квартальных наблюдениях. Поэтому применение модели показывается на примере, основанном на месячных наблюдениях: показано, что переток рабочей силы между государственной и кооперативной промышленностью, вытекающий из сдвига пропорций заработной платы, можно хорошо описать с помощью рассматриваемой модели с распределенным запаздыванием типа распространения.