Zalai Ernő

A marxi értékrendszer (zárt) sajátérték-formákban

1. Bevezetés

A marxi értéknagyság fogalmi meghatározottságának és létezési feltételeinek tisztázásához jelentős mértékben hozzájárultak azok az elemzések, amelyek az értékeket egy input-output modell keretei között értelmezték. Kutatók hosszú sorára kellene itt hivatkozni, ha teljességre törekednénk, éppen ezért elégedjünk meg két jelentős és átfogó igényű munkára való utalással: *Bródy* [1] és *Morishima* [3].

Az értékek létezésének matematikai elemzése szinte kizárólagosan a *nyílt* input-output modellen alapult. Tudomásom szerint egyedül Bródy András kísérelte meg az értékek létezését egy zárt modell keretében, matematikai sajátértékfeladat formájában bizonyítani. Mint meg fogjuk mutatni, megoldásának érvényessége korlátozott, valójában csak az egyszerű újratermelés esetében vezet helytálló eredményre. Továbbá: a pozitív értékek létezésének bizonyítását közgazdasági szempontból a kelleténél erősebben szorító feltevésekre alapozta, így többek között az ismert irreducibilitási feltételekre.

Egy korábbi tanulmányomban [6], *Reich* [4] lényegében azonos eredményre vezető elemzésétől függetlenül, megmutattam, hogy heterogén munkaerő és egyöntetű értéktöbbletráta feltételezése esetén az értékek és az értéktöbbletráta már csak egy zárt (szimultán) egyenletrendszer formájában értelmezhető. Mindkét tanulmány *Morishima* [3] elemzéséből indult ki, s egyik sem tért ki az értékek létezési feltételeinek vizsgálatára.

A jelen dolgozat ez utóbbi kérdés elemzésére irányul. Az előzmények rövid összefoglalása után *Bródy* [1] zárt értékmodelljét külön részben elemzem. Ezt követően az értékmeghatározás nemlineáris sajátérték-alakjának két alternatív megfogalmazását vezetem be és hasonlítom össze. A két forma a Bródy, illetve Morishima által eltérően felépített teljes körű ráfordítási mátrixokon alapul. Megmutatom, hogy a kérdéses két mátrixnak az elemzés szempontjából lényeges matematikai jellemzői megegyeznek. S végül a sajátérték-feladatok egyértelmű, pozitív megoldásának létezését a [7] dolgozatomban bevezetett minimálisan elégséges feltételek (tiszta árutermelés és a teljes automatizálás lehetetlensége) mellett bizonyítom. Ezek a feltételek nem implikálják az együttható mátrixok irreducibilitását. A bizonyítás egy irreducibilis *alap*gazdaság felismerésén nyugszik, amelyet a fogalmilag *Sraffa* [5] bázistermékeivel rokon *alapjavak* határoznak meg. Érdemes már itt is utalni Sraffa bázistermékei és az itt használt alapjavak közötti lényeges tartalmi különbségre. Nevezetesen, Sraffa kizárja a bázistermékek közül a munkaerőt és a csak annak fogyasztásába bekerülő termékeket. Nálam az alapjavak között és még inkább azok definiálásában a fenti termékek kulcsfontosságú szerepet játszanak.

2. Az előzmények rövid összefoglalása

A marxi értékrendszer alapmodellje *Dmitriev, Lange, Bródy, Morishima* és mások munkássága folytán ma már közismertnek számít. Nevezetesen ezen alapmodell a következő feltevéseken nyugszik. Ismertek egyrészt a különböző (n-féle) közönséges áruk termeléséhez ugyanezen árukból társadalmilag szükséges ráfordítások: $A = (a_{ij})$, ahol a_{ij} a j-edik áru egységére jutó ráfordítás az i-edik áruból, $i, j = 1, \ldots, n$. Ismertek másrészt az absztrakt munka óráiban mért eleven munkaráfordítási igények: $m = (m_j)$, ahol m_j a j-edik áru termelésének fajlagos munkaigénye.

A fenti adatok ismeretében az értékek meghatározása például az alábbi formában írható fel:

$$p^* = p^*A + m^*, \tag{1}$$

ahol $p = (p_j)$ az értékek vektora. Az egyenlet közgazdasági tartalma: az érték egyenlő a holt- és élőmunkaráfordítások összegével.

Ha a munkaerő minden szempontból homogén, így újratermelésének ráfordítási igénye szerint is, és egy órai munka újratermeléséhez a különböző közönséges árukból $f = (f_i)$ vektorban jelzett mennyiségekre van szükség,[1] akkor a munkaerő értékét (p_0) a következő képlet szolgáltatja:

$$p_0 = p^*f. \tag{2}$$

Ha az értékek egyértelműen meghatározottak, akkor az (1) egyenletrendszert p^*-ra megoldva adódik, hogy

$$p^* = m^*(E - A)^{-1}. \tag{3}$$

Ez utóbbit (2)-be behelyettesítve egy közgazdaságilag jól értelmezhető formát nyerünk:

$$p_0 = m^*(E - A)^{-1}f. \tag{4}$$

Ebből világosan kiolvasható, hogy az egy órai munkaerő értéke nem más, mint az újratermeléséhez *szükséges munka* (marxi értelemben). Így egy óra munkavégzés során $1 - p_0$ *többletmunka* keletkezik. (Itt hallgatólagosan éltünk a $p_0 \leq 1$ feltevéssel. Ennek elégséges feltételeire még visszatérünk.[2]) Jelöljük r-rel az értéktöbblet rátáját, amelyet tehát többek között az alábbi módon is meghatározhatunk:

$$r = \frac{1 - p_0}{p_0} = \frac{1 - p^*f}{p^*f}. \tag{5}$$

Bródy [1] az egyszerű árutermelés esetét elemezve felismerte, hogy az értékek egy „*teljes körű*" *ráfordítási mátrix* sajátvektorát képezik. Abból indult ki, hogy az egyszerű újratermelés feltételei között a teljes végső kibocsátás szük-

[1] Itt egyelőre, mint szokásos, eltekintünk a munkaerő újratermeléséhez szükséges esetleges közvetlen munkaerő ráfordításoktól. Később erre a kérdésre még visszatérünk.

[2] Érdemes utalni arra, hogy az A és m paraméterektől eltérően, amelyeket elsősorban az újratermelés technikai relációi határoznak meg, az f vektor elemei jórészt a termelési viszonyok függvényei. Így többek között erőteljesen függenek a munkanap hosszától, azaz a kizsákmányolás abszolút fokától. Ez a tárgyalási lehetőség elesik, ha a szükséges fogyasztást nem egy órára, hanem egy főre vetítve szerepeltetjük.

séges fogyasztásnak tekinthető. Legyen $x = (x_j)$ a termelés vektora, $x_0 = m^*x$ az összes ledolgozott órák száma. A fentiek értelmében az egyszerű árutermelés modelljében fenn kell állnia az alábbi mérlegösszefüggéseknek:

$$x_0 = m^*x \tag{6}$$

$$x = Ax + x_0 f. \tag{7}$$

Összevonva a két egyenletet azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m^* \\ f & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x \end{bmatrix}, \tag{8}$$

ahol az együttható mátrix a *teljes körű ráfordítások* Bródy-féle (kibővített) változata; a továbbiakban B-vel jelöljük.

A kapott (8) meghatározás egy közismert sajátérték-egyenlet. Ha Bródyhoz hasonlóan feltesszük, hogy B irreducibilis, továbbá, hogy x_0 és x elemei (tényszerűen) pozitívak (legalábbis elvben nem negatívak), akkor B domináns sajátértéke nyilván 1-gyel egyenlő.

A fenti feltételek mellett matematikailag is igazolható, hogy egyszerű újratermelés esetén értéktöbblet nincs, vagyis $r = 0$, azaz $p_0 = 1$. Így az értékrendszer meghatározása felírható a fenti sajátérték-feladat duálisaként:

$$[1, p^*] = [1, p^*] \begin{bmatrix} 0 & m^* \\ f & A \end{bmatrix}. \tag{9}$$

3. A Bródy-féle sajátérték-meghatározás korlátozott érvényessége

Az előző pontban megismételt, lényegében helytálló levezetést Bródy helytelenül általánosította a tőkés árutermelés esetére. (Pontosabban: a zárt formákat csak a *tőkés* viszonyok között megvalósuló *egyszerű* újratermelés esetére terjesztette ki.)

Nézzük meg közelebbről Bródy zárt formáját. Legyen F_m a (produktív) munkaerő *szükséges fogyasztása*, F_t az egyéb végső fogyasztás (improduktív fogyasztás, felhalmozás). Legyen a *munkások* egy (produktív)[3] *munkaórára jutó fogyasztása* $f_m = F_m/(m^*x)$ és Bródyt [1, 56. o.] követve $f_t = F_t/(m^*x)$ az egy produktív *munkaórára jutó* egyéb végső fogyasztás. Jelöljük továbbá m_s és m_t vektorokként az egyes ágazatokban a *szükséges* és a *többletmunka* fajlagos mennyiségeit ($m_s + m_t = m$). (Érdemes már itt felfigyelni arra, hogy ezt a felosztást Bródy adottnak veszi, noha a felosztást nyilván *csak az értékek ismereté-*

[3] Valójában Bródynál csak a produktív szférában foglalkoztatott munkaerő jelenik meg explicit formában. Megoldása úgy értelmezhető, hogy a produktívan foglalkoztatott munkaerő újratermelésének fogyasztás-igényében benne szerepel az improduktívan foglalkoztatott munkaerő fogyasztása is, mármint azoké, akiknek szolgáltatásai a produktívan foglalkoztatott munkaerő újratermeléséhez szükségesek. Alternatív megoldásként kínálkozik ezen munkaerő explicit figyelembevétele a produktív munkaerő újratermelésének munkaerő igényeként.

ben lehet elvégezni.) Bródy úgy vélte, hogy az értékek vektora az alábbi „*kibővített*" *fajlagos mátrix* egy sajátvektorának részvektora:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & m_t^* \\ 0 & 0 & m_s^* \\ f_t & f_m & A \end{bmatrix}.$$

Erről a mátrixról Bródy feltételezte, hogy 1 a domináns sajátértéke, s azt állította, hogy a hozzá tartozó bal oldali sajátvektorok között van olyan, amelynek utolsó n komponense éppen a közönséges áruk értékével azonos.

Ez azonban általában *lehetetlen.* Írjuk fel ugyanis dezaggregálva a sajátérték-egyenletet:

$$p_t = p^* f_t,$$
$$p_m = p^* f_m,$$
$$p^* = p^* A + p_m m_s^* + p_t m_t^*.$$

Vizsgáljuk meg közelebbről a kapott feltételek tartalmát. p_t az egy produktív munkaórára jutó egyéb végső felhasználás „értéke" (hogy valóban az érték vektora-e, azt még nem tudjuk). Ha p valóban az értékek vektora, akkor p_m a munkaerő értéke. Mivel f_t és f_m struktúrája és volumene általában eltérő, ezért p_t és p_m is általában különböző nagyság. A harmadik egyenletből viszont az derül ki, hogy p akkor és csak akkor lehet az értékek vektora, ha $p_m m_s^* + p_t m_t^* = m^*$. Ez utóbbi egyenlőség azonban csak véletlenszerűen teljesülhet. (Nyilván fennáll akkor, mint Bródy sajátos számpéldájában, ha $f_t = f_m$ és $p_m = p_t = 1$.)

Az értékmeghatározás Bródy-féle zárt sémája tehát csak nagyon speciális feltételek mellett helytálló. Megállapításunkat még egy oldalról alátámasztandó, nézzük meg a fenti sajátérték-forma *duálisát*, amely fényt derít a rejtett hiba lényegére. A jobb oldali sajátvektorra az alábbi összefüggéseket nyerjük:

$$x_t = m_t^* x$$
$$x_s = m_s^* x$$
$$x = Ax + f_m x_s + f_t x_t.$$

Az egyes változók és feltételek jelentése kézenfekvő. x egy termelési vektor, x_t ezen termeléshez felhasznált munkából a *szükséges munka*, x_s pedig a *többletmunka*. Az összes kifejtett munka tehát $x_t + x_s$. A foglalkoztatott munkaerő újratermeléséhez nyilván $f_m(x_t + x_s)$ fogyasztásra van szükség. Mivel azonban a végső kibocsátásból a munkások csak $f_m x_s$ mennyiségű fogyasztási cikket kapnak, ezért újratermelésük csak szűkítve lenne lehetséges.

A fentiekből is látható, hogy a kibővített ráfordítási mátrix Bródy-féle „dezaggregációja" nem vezet helyes eredményre. Egy esetben lesz értelmes a dezaggregáció: akkor, ha a munkaerő sorához hasonlóan a végső fogyasztást a szükséges munkát és a többletmunkát nyújtó munkaerő fogyasztásaként bontjuk meg ($f_t = f_m$). Ekkor viszont a mátrixban nem szerepel többlettermék, a domináns sajátértéke akkor és csak akkor lesz 1, ha a gazdaságban nincs többlettermelésre lehetőség. Vagyis csak az egyszerű újratermelés esetében.

4. Az értékrendszer két általános zárt formája és tartalmi azonosságuk matematikai háttere

A továbbiakban a *közönséges áruk* és a *munkaerő értékét együtt teljes értékrendszernek* fogjuk nevezni,[4] és $\hat{p}^* = (p_0, p^*)$ vektorral jelöljük. Megmutatjuk, hogy a teljes értékrendszer (és így az értéktöbbletráta) meghatározása visszavezethető sajátérték-feladatra, de általában csak parametrikus (nemlineáris) sajátérték-feladatra.

Induljunk ki az értéktöbblet-rátát meghatározó (5) egyenletből. Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$p_0 + rp_0 = 1,$$

ahol p_0 tehát a szükséges munka aránya, rp_0 pedig a többletmunkáé. Ennek megfelelően az érték (1) képletében a felhasznált munkát szükséges (megfizetett) és többletmunkára (meg nem fizetett munkára) oszthatjuk fel. Így azt kapjuk, hogy:

$$p^* = p^*A + p_0m^* + rp_0m^*. \tag{11}$$

Vegyük észre, hogy a fenti átalakítás, azaz egy új változó (r) bevezetése az értékeket meghatározó egyenletrendszert egy minőségében megváltoztatja. Nevezetesen, az addig inhomogén rendszert homogénná teszi. Ha egyszer (p_0, p) megoldás, akkor bármely (kp_0, kp) szintén megoldás (természetesen: $k > 0$). Eme művi úton előidézett homogenitást Bródy sajátérték-modellje kapcsán egyesek tévesen az értékszintek meghatározatlanságaként értelmezik. Valójában azonban nem erről van szó. Ha az értéket következetesen továbbra is az absztrakt munka óráiban mérjük, mint ezt az induló (1) egyenlet jelzi, akkor az értékek szintje kötött. Ez azonban a fenti matematikai átalakítás folytán nem mutatkozik. E hiányosságot korrigálandó a homogén formákat ki kell egészítenünk az r változót definiáló (5) feltétellel. Vagyis jelen esetben az értékeknek a (2) és (3) egyenletekkel egyenértékű teljes meghatározását a (2), (5) és (11) egyenletek adják.

A továbbiakban két, tartalmilag egyenértékű eljárás között választhatunk. Vegyük először Marx, illetve Morishima kedvelt fogását,[5] s a munkaerő értékét helyettesítsük a munkaerő fogyasztásának értékével, azaz tegyünk p_0 helyébe p^*f-et. Ekkor az értékekre az alábbi formát nyerjük:

$$p^* = p^*A + p^*fm^* + rp^*fm^*.$$

Vezessük be az fm^* diadikus szorzat jelölésére az $F = (f_{ij})$ mátrixot. f_{ij} az i-edik áru azon mennyiségét mutatja, amely az egységnyi j-edik áru előállításához felhasznált munkaerő újratermeléséhez szükséges. Az $M = A + F$ mátrix tehát ismét csak a teljes körű ráfordítások mátrixa, B-vel azonos tartalmú, de formájában attól eltérő: összevont és nem kibővített. Tartalmi azonosságuk matematikai vonatkozásaira majd később visszatérünk. A fenti

[4] A teljes értékrendszer implicite magában foglalja az értéktöbblet rátáját is, hiszen, mint láttuk, $r = (1 - p_0)/p_0$, ezért akár bele is érthetjük a teljes értékrendszer fogalmába.

[5] Megjegyezzük, hogy Morishima az értékeket nem elemezte sajátérték formájában, de előszeretettel használta elemzéseiben az összevont ráfordítási mátrixra építő formákat.

jelöléseket felhasználva az értékmeghatározást a következőképpen írhatjuk fel:

$$p^* = p^*(M + rF), \quad r = \frac{1 - p^*f}{p^*f}. \tag{12}$$

Ez utóbbi forma első egyenlete pedig nem más, mint egy speciális (nemlineáris) sajátérték-forma. Azt mutatja meg, hogy ha az értékek és az értéktöbblet rátája léteznek, akkor az $(M + rF)$ mátrix sajátértékei között van 1-gyel egyenlő, s az értékek vektora egy ehhez tartozó bal oldali sajátvektor.

Ha a másik utat követjük, akkor valamelyest Bródy Andráséhoz hasonló formákhoz jutunk. Vegyük most ismét az értékre bevezetett (1) képletet alapul és a munkaerő értékét meghatározó (4) formát. A kettő összevonásából a következő képletet nyerjük:

$$(p_0, p^*) = (p_0 p^*)\begin{bmatrix} 0 & m^* \\ f & A \end{bmatrix} + r(p_0, p^*)\begin{bmatrix} 0 & m^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A már korábban bevezetett jelölések, valamint a $\hat{p}^* = (p_0, p^*)$ és a

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 & m^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jelölés alkalmazásával az értékek meghatározását a fenti képlet alapján az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\hat{p}^* = \hat{p}^*(B + rB_m), \quad r = \frac{1 - p_0}{p_0}. \tag{13}$$

Ez ismét az előzőhöz hasonló sajátérték-forma. A különbség mindössze annyi, hogy itt explicite megjelenik a munkaerő értéke is, továbbá az *összevont* ráfordítási mátrix (M) helyett a *kibővített* ráfordítási mátrix (B) játszik kulcsszerepet. Tartalmilag azonban a két forma teljesen egyenértékű.

Megmutatjuk, hogy nemcsak az igaz, hogy a két mátrix domináns sajátértéke csak egyidejűleg lehet 1, 1-nél kisebb, vagy nagyobb, hanem az is, hogy az egyik irreducibilitása feltételezi a másikét, s a kibővített forma Leontief-inverze magában foglalja az összevont forma L-inverzét.

1. TÉTEL: Legyenek adottak az A, m és f szemipozitív ráfordítási mátrix, illetve vektorok. A belőlük képzett teljeskörű ráfordítások kibővített (B) és összevont (M) mátrixának domináns sajátértéke csak egyidejűleg lehet 1. Továbbá, a két mátrix (ir)reducibilitása feltételezi egymást. Végül: a B mátrix Leontief-inverzének utolsó $n \times n$-es blokkja az M mátrix L-inverze.

Bizonyítás: A Perron—Frobenius-féle sajátérték-tételekből (lásd például *Nikaido* [3]) ismert, hogy az $x \leq Ax$ egyenlőtlenségnek[6] csak akkor létezhet szemipozitív $(x \geq 0)$ megoldása, ha A domináns sajátértéke 1-nél nagyobb. Továbbá, az $x > Ax$ egyenlőtlenségnek akkor és csak akkor van szemipozitív megoldása, ha A domináns sajátértéke 1-nél kisebb. Ezek ismeretében elegendő

[6] A vektor-egyenlőtlenségek jelölésénél a $>$, $\geq$ és $\geqq$ jeleket használjuk a minden elemében nagyobb, legalább egy elemében határozottan nagyobb és egyikben sem kisebb, és az egyetlen elemében sem kisebb relációkra.

tehát azt belátni, hogy a fenti feltételek fennállása az egyik mátrix esetében implikálja azt, hogy teljesülnek a másikra vonatkozóan is.

Tegyük fel, hogy van olyan $\hat{x}_B \geq 0$ vektor, amely kielégíti az $\hat{x}_B \leq B\hat{x}_B$ egyenlőtlenséget. Részletesen kibontva kapjuk, hogy

$$x_{0B} \leq m^* x_B$$
$$x_B \leq Ax_B + fx_{0B} \leq (A + fm^*)x_B = Mx_B.$$

Azaz, a második egyenlőtlenségbe az elsőből x_{0B}-t behelyettesítve, máris belátható, hogy x_B kielégíti M vonatkozásában a kívánt egyenlőtlenséget. Szemipozitivitása nyilvánvaló, hiszen ha nulla lenne, akkor x_{0B} is, és így x_B is az lenne, feltevésünkkel ellentétben.

Fordítva: legyen $x_M \geq 0$, amely eleget tesz az $x_M \leq Mx_M$ egyenlőtlenségnek. Könnyen belátható, hogy az

$$\hat{x}_M = \begin{bmatrix} m^* x_M \\ x_M \end{bmatrix}$$

vektor kielégíti az $\hat{x}_M \leq B\hat{x}_M$ egyenlőtlenséget.

A második egyenlőtlenségek kölcsönös teljesülését a fentivel csaknem azonos módon láthatjuk be. Mindössze annyi a különbség, hogy a második lépésben

$$\hat{x}_M = \begin{bmatrix} km^* x_M \\ x_M \end{bmatrix}$$

vektort kell választanunk, ahol k 1-nél nagyobb, de ahhoz kellően közel választott skalár. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A két mátrix nevezetes strukturális sajátosságának azonosságát a következőképpen igazolhatjuk. Először is, vegyük figyelembe, hogy alkalmasan megválasztott pozitív skalárokkal beszorozva a mátrixokat, domináns sajátértéküket 1 alá szoríthatjuk, ami természetesen nem befolyásolja (ir)reducibilis jellegüket. Így a bizonyítást elegendő 1-nél kisebb domináns sajátértékek esetére elvégezni. Mármost, ha egy nemnegatív A mátrix domináns sajátértéke 1-nél kisebb, akkor Leontief-inverze, $(E - A)^{-1}$ akkor és csak akkor pozitív, ha a mátrix irreducibilis. Az $(E - B)$ mátrix inverzét, generáló elemnek elsőként a bal felső sarkában szereplő 1 elemet választva, az alábbi alakban számíthatjuk ki.

Első lépés:

$$\begin{bmatrix} 1 & -m^* \\ f & E - A - fm^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -m^* \\ f & E - M \end{bmatrix}.$$

Innen már egyszerűen adódik az inverz:

$$(E - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + m^*(E - M)^{-1}f & m^*(E - M)^{-1} \\ (E - M)^{-1}f & (E - M)^{-1} \end{bmatrix}.$$

A B mátrix Leontief-inverzének fenti alakjából világosan látszik, hogy annak a közönséges árukra vonatkozó blokkja valóban az M mátrix Leontief-inverzét tartalmazza.[7]

[7] Fordított sorrendben választva a generáló elemeket, egészen eltérő formákhoz jutunk, amelyekből a fenti azonosság fennállása korántsem szembetűnő. Ennek az útnak a tárgyalását itt mellőzzük, de ajánljuk azon olvasók számára, akik közelebbről meg kívánnak ismerkedni a kérdéses mátrixok sajátos összefüggéseivel.

Meg kell még mutatnunk, hogy a két mátrix Leontief-inverzének pozitivitása kölcsönösen feltételezi egymást. B-ből indulva az állítás nem szorul különösebb bizonyításra. Ha viszont $(E - M)^{-1} > 0$, akkor m és f feltételezett szemipozitivitása biztosítja, hogy az első sor és oszlop is csak pozitív elemeket tartalmaz.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Egy rövid megjegyzés erejéig érdemes közgazdasági oldalról is megvilágítani a Leontief-inverzek összefüggését. A Leontief-inverzek egyik szokásos értelmezéséből kiindulva az $(E - B)^{-1}$ mátrix adott oszlopát úgy értelmezhetjük, mint a vonatkozó áru egy egységnyi végső (jelen esetben a munkaerő fogyasztása is közbenső fogyasztásnak számít!) kibocsátásához szükséges teljes termelés vektorát. Az egyes árukból annyit kell előállítani, amennyi a szűkebb értelemben vett termelés és a felhasznált munkaerő fogyasztási igényén túl még egy egységnyi többletet is eredményez az adott áruból. Az M mátrix elemei, a közönséges árukra vonatkozóan, éppen ezeket az együttes 'közvetlen'[8] ráfordítási igényeket tartalmazzák összevontan. A két inverz közönséges árukra vonatkozó elemeinek azonossága tehát közgazdasági okfejtés alapján is belátható. Az első sor és oszlop pedig a teljes ráfordítási igények számításából ismert formákat tartalmazza, amelyek tartalmát felesleges lenne itt ismertetni.

A tételnek a sajátértékekre vonatkozó megállapítása az értéktöbbletráta pozitivitásában kulcsszerepet tölt be. Ezt érdemes külön tételben megvilágítani, kivételesen az irreducibilitás feltételére alapozva. Lényegében *Bródy* [1] vonatkozó eredményeit reprodukálják más megközelítésben.

2. TÉTEL: Adottak az A, f, m szemipozitív ráfordítási együttható mátrix és vektorok. A belőlük képzett teljes körű ráfordítási mátrixok irreducibilisek. Pozitív értékek és értéktöbbletráta együttes létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a teljes körű ráfordítási mátrixok domináns sajátértéke 1-nél kisebb legyen.

Bizonyítás: A bizonyítást az 1. tétel alapján elegendő csak egyik forma esetére megadni. Válasszuk az összevont formát, s mutassuk meg először a szükségességet. Tegyük fel, hogy p vektor és r skalár pozitív. Mivel M nem negatív, irreducibilis és az F mátrix szemipozitív, ezért $M + rF$ is irreducibilis. A Perron—Frobenius-tételek folytán egy nemnegatív irreducibilis mátrixnak csak a domináns sajátértékéhez tartozhat pozitív sajátvektor, ezért tehát az $M + rF$ mátrixnak 1 szükségképpen domináns sajátértéke. Ugyanezen tételekből ismert az is, hogy a domináns sajátérték a mátrix bármely elemének szigorúan monoton növekvő, folytonos függvénye. Ebből adódik, hogy M domináns sajátértékének szükségképpen 1-nél kisebbnek kell lenni.

Az elégségességet hasonlóan láthatjuk be. Ha ugyanis M domináns sajátértéke 1-nél kisebb, akkor a jelzett tulajdonságok folytán az $M + rF$ mátrix domináns sajátértéke r-nek szigorúan növekvő, folytonos függvénye, ha $r > -1$. [Ugyanis az $A + (1 + r)F$ mátrixról van szó, amelynek struktúrája M-ével azonos r fenti értékei mellett]. $r = 0$ értéknél ezen sajátérték 1-nél kisebb, tehát valamely pozitív r mellett szükségképpen felveszi az 1 értéket.

[8] Nem keverendő össze az ÁKM irodalomban meghonosodott közvetlen ráfordítási igénnyel, noha a tartalmi rokonság szembetűnő.

Ezen r érték nem más, mint az értéktöbbletráta. Az $M + rF$ mátrixnak az 1 (domináns) sajátértékéhez tartozó, arányaiban egyértelműen meghatározott bal oldali sajátvektora pedig, szintjét az (5) egyenletnek megfelelően normálván, az értékek vektorát szolgáltatja.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A tétel bizonyításából az *irreducibilitás* feltétele szinte elengedhetetlennek mutatkozik. Általában, mint ismert, a Perron—Frobenius-tételek csak irreducibilis mátrixokra vonatkozóan garantálják a kihasznált előnyös tulajdonságokat (szigorú monotonitás, pozitivitás, egyértelműség). Nem véletlen tehát, hogy Bródy is mindig él ezen feltevéssel, mind az érték, mind a termelési ár modelljében. Feltevését igen frappánsan, de megint csak az egyszerű újratermelés esetében tökéletesen helytállóan a következő mögöttes feltevésekkel indokolja. Minden áru újratermelése emberi munkát kíván, s közvetve vagy közvetlenül emberi fogyasztásra kerül. Ez azonban nem mindig helytálló érvelés. A teljes körű ráfordítások ugyanis *csak* a munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztást ölelik fel, ezért az irreducibilitáshoz az is kell, hogy minden áru a munkaerő újratermeléséhez szükséges, s nem általában vett emberi fogyasztás tárgya legyen. Tőkés újratermelés esetén ez a feltétel aligha teljesül, gondoljunk csak a luxustermékekre, hadikiadásokra.

A következőkben éppen azt fogom megmutatni, hogy a fentiek ellenére mégsem indokolatlan esetenként, az egyszerűség kedvéért a teljes körű mátrixok irreducibilitását feltételezni. Ez az indok a luxus- vagy pusztán hadi célú termékek egy mélyebb indokban gyökeredző elhanyagolhatóságában rejlik, éspedig az árutermelő gazdaság egy fundamentális alrendszerének sajátosságaiban.

5. Az értékrendszer egyértelműségének és pozitivitásának bizonyítása a reducibilis esetben

Egy korábbi dolgozatomban [7] az értékek létezését, pozitivitását, egyértelműségét és fogalmi-logikai megalapozottságát pusztán a marxi szabadpiaci árutermelés modelljének immanens feltevéseire (az emberi munka nélkülözhetetlensége és átlagban nem veszteséges árutermelés) alapozva bizonyítottam be a *nyílt* alapmodell keretei között. Nyilván azt várjuk, hogy ugyanazok a feltevések elegendőek lesznek a zárt, nemlineáris sajátértékfeladatra is. Ha pedig ez így van, akkor meg kell találnunk azokat a formális (matematikai) és tartalmi (közgazdasági) okokat, amelyek a vizsgált sajátérték-formákból adódó sajátvektorokat egyértelművé és pozitívvá teszik.

Ezeket az okokat röviden a következőkben foglalhatjuk össze. Egy gazdaságban „normális" feltételek között *mindig* van egy olyan árucsoport (alapjavak), amelyek előállításához csak ugyanezen árukra van szükség, viszont *minden áru termeléséhez* közvetve vagy közvetlenül *szükség van* ezen *alapjavakra*. Ezen alapjavak között szerepel a *munkaerő* is. A vizsgált gazdaságból a nem alapjavak és -tevékenységek elhagyásával nyert *alapgazdaság* kibővített ráfordítási mátrixa viszont *irreducibilis* lesz. Következésképpen az alapjavak értéke pozitív, s így minden áru értéke pozitív lesz. Azt is meg fogjuk mutatni, hogy az *értéktöbblet rátája* csak ezen alapgazdaság ráfordítási viszonyaitól függ.

Melyek lesznek ezek az áruk? Nos, megmutatjuk, hogy ezek a *munkaerő* és a *munkaerő újratermeléséhez közvetlenül vagy közvetve szükséges áruk*, amelyeket a továbbiakban *alapjavaknak*[9], az általuk definiált szűkebb gazdaságot pedig *alapgazdaságnak* fogjuk nevezni. A következő tétel fényt derít az *alapgazdaság* kulcsfontosságú szerepére.

3. TÉTEL: Ha egy gazdaságban minden áru előállítása (közvetlenül vagy közvetve) igényel munkaráfordítást, *akkor*

i) alapgazdaságának ráfordítási mátrixa irreducibilis;

ii) a teljes gazdaságban csak akkor létezhetnek az értékek, ha annak alapgazdaságában is léteznek;

iii) a teljes gazdaság értéktöbbletrátája megegyezik alapgazdaságának értéktöbbletrátájával;

iv) minden áru termeléséhez szükség van, közvetlenül vagy közvetve, minden alapjószágra.

Bizonyítás: A bizonyítást a kibővített forma esetére közöljük. Az alapgazdaság ráfordítási mátrixa: B_{11}, azaz a kibővített ráfordítási mátrixnak az alapjavak által meghatározott almátrixa. Ha az alapgazdaság a teljes gazdaság *valódi* részhalmaza (nem maga a teljes gazdaság),[10] akkor (szükség esetén a javak sorrendjét megváltoztatva) a kibővített ráfordítási mátrix az alábbi alakban dekomponálható:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & m_1^* & m_2^* \\ f_1 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Először igazoljuk, hogy A_{21} valóban csak 0 lehet. Tudjuk, hogy a nem alapjavak között csak közönséges áruk szerepelhetnek. Ha mármost a vizsgált almátrixban lenne pozitív elem, ez azt jelentené, hogy a sor szerinti *nem alapjószágra* valamely alapjószág termeléséhez szükség lenne. De akkor közvetve szükség lenne ezen árura a munkaerő újratermeléséhez is, tehát maga is alapjószág lenne. (Megjegyezzük még, de ennek igazolását az olvasóra bízzuk, hogy B_{12} nem lehet 0, mert különben a nem alapjavak termeléséhez nem lenne szükség munkára).

i) Az alapgazdaság ráfordítási mátrixának irreducibilitása könnyen igazolható. Egyrészt képzési szabályából következik, hogy az alapgazdaságban a munkaerő újratermeléséhez minden árura szükség van. Másrészt feltettük, hogy minden áru igényel munkaráfordítást. Ezek viszont éppen Bródy idézett feltételei, amelyek szükségesek és elégségesek B_{11} irreducibilitásához. A formai bizonyítást a következő megfigyelésre alapozhatjuk. Ha egy nem negatív mátrix irreducibilis, ez egy és ugyanazt jelenti, hogy Leontief-inverze pozitív (lásd például Nikaido [3]). Mivel az irreducibilitás csupán

[9] Az alapjavak itt bevezetendő fogalma szoros rokonságban áll *Sraffa* [5] bázistermékeivel. Sraffa a bázistermékeket a közönséges javak körére szűkíti, s azokat a termékeket nevezi bázistermékeknek, amelyekre minden termék előállítása során közvetlenül vagy közvetve szükség van (pl. villamosenergia). A mi esetünkben az alapjavak között szerepel a munkaerő is.

[10] Vagyis a teljes gazdaság értéktöbbletrátája független a nem alapjavak termelési feltételeitől. Ez ismét egy olyan megállapítás, amely szoros kapcsolatban van Sraffa hivatkozott elemzéseivel. (Nála a profitráta adódik függetlennek a nem bázistermékek termelési feltételeitől.)

a nulla és nem nulla elemek struktúrájától függ, ezért az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy B_{11} domináns sajátértéke 1-nél kisebb. (Ellenkező esetben a vizsgált mátrixnak alkalmasan megválasztott skalárral való beszorzása révén erre az esetre vezethetjük vissza a bizonyítást.) A B_{11} mátrix Leontief-inverzét az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$(E - B_{11})^{-1} = \begin{bmatrix} s & sm_1^*(E - A_{11})^{-1} \\ s(E - A_{11})^{-1}f_1 & (E - A_{11})^{-1} + s(E - A_{11})^{-1}f_1 m_1^*(E - A_{11})^{-1} \end{bmatrix},$$

ahol

$$s = \frac{1}{1 - m_1^*(E - A_{11})^{-1}f_1}.$$

A feltevések miatt mind $(E - A_{11})^{-1}f_1$, mind $m_1^*(E - A_{11})^{-1}$ határozottan pozitív vektor. Ezekből viszont már valóban könnyen belátható, hogy $(E - B_{11})^{-1}$ is határozottan pozitív. Vegyük figyelembe, hogy $1/s$ volt a második lépésben választott generáló elem, ezért $s = 0$ nem lehetett. Viszont egy produktív mátrix L-inverze nemnegatív, vagyis végül is az s skalár szükségképpen pozitív.

ii) Az alapgazdaságban az értékeket definiáló összefüggés:

$$p_1^* = p_1^* A_{11} + m_1^*$$

és ez részét képezi a teljes gazdaság értékegyenletének is, mivel $A_{21} = 0$. Így a teljes gazdaságban csak akkor lehet az érték értelmezett, ha az alapgazdaságban is az.[11]

iii) Tudjuk, hogy a munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztásban csak alapjavak szerepelnek. Ezért a munkaerő értéke, p_0 az alapgazdaságban és a teljes gazdaságban megegyezik. Mint láttuk, a munkaerő értéke egyértelműen meghatározza az értéktöbblet rátáját $[r = (1 - p_0)/p_0]$, tehát az alap- és a teljes gazdaság értéktöbbletrátája is szükségképpen megegyezik.

iv) Mivel minden áru előállításához szükség van közvetve vagy közvetlenül munkaráfordításra, a munkaerő újratermeléséhez pedig hasonló módon minden alapjószágra, ezért valóban minden áru termeléséhez követlenül vagy közvetve szükség van minden alapjószágra.

A fentebbi tulajdonság belátása után most már közvetlenül rátérünk a pozitív értékek létezését biztosító elégséges feltételek elemzésére, s megmutatjuk, hogyan vonják ezen feltételek maguk után azt, hogy a sajátérték-formák megoldásai a reducibilitás ellenére is rendelkeznek a kívánatos unicitási és pozitivitási tulajdonságokkal.

4. TÉTEL: Legyenek adottak egy gazdaság fajlagos ráfordítási együtthatói az A, m^* és f szemipozitív mátrix, illetve vektorok által. Tegyük fel, hogy az adott fajlagos ráfordítási viszonyok mellett nem képzelhető el a gazdaság teljes automatizálása (azaz nincs olyan $q \geq 0$, amely esetén $q \geq Aq$ és $m^*q = 0$). Teljesüljön továbbá az alábbi két, (i) és (ii) feltétel közül valamelyik.

[11] Nyilvánvaló, hogy ha minden áru igényel munkaráfordítást, akkor a pozitív értékek létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy mind A_{11}, mind A_{22} produktív mátrix legyen. Ennek igazolását az olvasóra hagyjuk.

(i) A tényleges (pozitív) *termelés* ($x > 0$) *pótlást meghaladó* szinten folyik, azaz keletkezik külső felhasználásra átadható termék ($x \geq Ax$) és *nem* folyik *öncélú termelés* a gazdaságban.[12]

(ii) A gazdaság tényleges (pozitív) árai ($p_a^* > 0^*$) és bérrátája ($w_a > 0$) mellett egyetlen áru termelése sem volt veszteséges *(tiszta árutermelés)*.

A fenti gazdaságban *minden áru értéke pozitív*. A közönséges áruk és a munkaerő értéke, valamint az értéktöbblet rátája egyértelműen meghatározott az alábbi feltételekkel:

$$\lambda(M + rF) = 1,\ p^* = p^*(M + rF),\ p^*f = \frac{1}{1+r} = p_0,$$

ahol (λ) a domináns sajátértéket jelöli. A kibővített formában felírva a teljes értékrendszert egyértelműen meghatározó feltételeket azt kapjuk, hogy:

$$\lambda(B + rB_m) = 1,\ p^* = p^*(B + rB_m),\ p_0 = \frac{1}{1+r}.$$

Bizonyítás: Az (i) vagy (ii) és a nem teljes automatizálhatóság feltételeiből (lásd [7], 2. és 4. tételeket) következik, hogy az A mátrix domináns sajátértéke 1-nél kisebb. Ebből, valamint a teljes automatizálás lehetetlenségéből viszont az következik (lásd [7], 3. tétel), hogy minden áru termeléséhez szükség van, közvetlenül vagy közvetve munkaráfordításra. Fentebb a 3. tételben igazoltuk, hogy ekkor az alapgazdaság teljes körű ráfordítási mátrixa irreducibilis. Vegyük például az összevont formából adódó mátrixot, pontosabban annak az alapgazdaságra vonatkozó részét, M_{11}-et. Mivel $M_{21} = 0$, ezért az alapjavak értékére vonatkozó sajátérték-egyenletek az alábbi formát öltik:

$$p_1^* = p_1^*(M_{11} + rF_{11}) = p_1^*[A_{11} + (1 + r)F_{11}]. \tag{14}$$

Mivel M_{11} irreducibilis, ezért $(M_{11} + rF_{11})$ is az lesz, valahányszor $r > -1$. Ezért ebben az intervallumban a mátrix domináns sajátértéke szigorúan monoton nő r-rel. Mivel A domináns sajátértéke 1-nél kisebb, ezért A_{11}-é is 1-nél kisebb. Ebből következik, hogy r-et (-1)-hez kellően közel választva $(M_{11} + rF_{11})$ domináns sajátértéke is kisebb lesz 1-nél. Ugyanis van olyan $q_1 > 0$, hogy $q_1 > A_{11}q_1$, ezért $(1 + r)$ megválasztható pozitívnak úgy, hogy $q_1 > [A_{11} + (1 + r)F_{11}]q_1$ is fennálljon, ami elegendő állításunk igazolásához. Van tehát olyan $r > -1$ érték, amely mellett a vizsgált mátrix domináns sajátértéke 1 lesz, és így van olyan, arányaiban egyértelműen meghatározott $p_1 > 0$, amely a (14) egyenletet a nevezett r érték mellett kielégíti. Válasszuk meg p_1 szintjét úgy, hogy $p_1^*f_1 = 1/(1 + r)$ legyen. Ezt nyilván megtehetjük, mert $1/(1 + r) > 0$, és $f_1 \geq 0$. Mivel pedig F_{22} és A_{21} szükségképpen 0, és

$$p_1^* = p_1^*A_{11} + (1 + r)p_1^*f_1m_1^* = p_1^*A_{11} + m_1^*,$$

ezért p_1^* nem más, mint a közönséges alapjavak értéke; $p_1^*f_1$ a munkaerő értéke; r pedig az értéktöbblet rátája.

[12] Az öncélú termelés fogalmát és a Leontief-mátrixszal összefüggő tulajdonságait lásd [7] dolgozatomban. Röviden: öncélú termelésről akkor beszélünk, ha egy x termelési vektornak és egy A ráfordítási mátrixnak van olyan particiója, amelyben $x_1 \leq A_{11}x_1$ és $x_1 > 0$.

A sajátérték-egyenletek nem alapjavakra vonatkozó része viszont a következő formában írható fel:

$$p_2^* = p_1^* M_{12} + p_2^* A_{22} + r p_1^* F_{12} = p_1^* A_{12} + p_2^* A_{22} + m_2^*.$$

Mivel A produktív, ezért A_{22} is az, így van szemipozitív L-inverze, tehát p_2^*-ot a fenti összefüggésből egyértelműen meghatározhatjuk az alábbi számítás révén:

$$p_2^* = p_1^*(M_{12} + rF_{12})(E - A_{22})^{-1} = (p_1^* A_{12} + m_2^*)(E - A_{22})^{-1}.$$

Nyilvánvaló, hogy p_2^*, a *nem-alapjavak* értéke szükségképpen pozitív lesz, mivel minden áruhoz szükség van munkaráfordításra. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A 4. tétel feltételei csak az értékek pozitivitását és egyértelműségét biztosítják. Az r skalárról csak annyit tudunk, hogy (-1)-nél nagyobb. A pozitív értéktöbblet-ráta létezésére vonatkozó elégséges feltételeket és állítást külön tételben fogalmazzuk meg.

5. TÉTEL: Teljesüljenek a 4. tétel feltételei, azzal a módosítással, hogy az (i) és (ii) feltételek helyett az alábbi két feltétel szerepel:

a) van *többlettermék* és nincs öncélú termelés ($x > 0$, $x \geq Ax + Fx = Mx$)

b) legalább egy áru előállítása nyereséges, de egyiké sem veszteséges az átlagos ráfordítási feltételek mellett, azaz

$$p_a^* \geq p_a^* A + w_a m^*, \quad (p_a^* > 0^*, \; w_a > 0),$$

továbbá a munkabér legalább akkora, mint a munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztás értéke (árösszege), azaz

$$w_a \geq p_a^* f.$$

Egy ilyen gazdaságban a 4. tételben megfogalmazott állítások igazak maradnak, továbbá az értéktöbbletráta (r) pozitív.[13]

Bizonyítás: Mivel *a)* illetve *b)* tartalmazza (i)-t, illetve (ii)-t, ezért a 4. tétel állításai valóban igazak maradnak.

Az értéktöbbletráta pozitivitásához viszont elegendő azt igazolni, hogy M domináns sajátértéke 1-nél kisebb. Ezt viszont az a) feltétel és a Leontief-mátrixokra [7]-ben igazolt produktivitási tétel biztosítja. A b) feltétel esetén viszont w_a helyébe $p_a^* f$-t helyettesítve az első egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy $p_a^* \geq p_a^* M$, amely a teljes automatizálás lehetetlenségével együtt ismét egy [7]-ben igazolt produktivitási feltétel. Ezért a b) feltételekből is következik, hogy M domináns sajátértéke 1-nél kisebb. A bizonyítást ezzel befejeztük.

A sajátérték és az értéktöbbletráta, valamint a gazdaság (teljes körű) termelési és ráfordítási feltételei között fennálló összefüggéseket feltárva meg-

[13] Ha az *a)* és *b)* feltételekben szereplő egyenlőtlenségek helyett mindenhol egyenlőség szerepelne, akkor az egyszerű újratermelés modelljének feltételeivel lenne dolgunk. Bródy, mint arra utaltunk, ezt az esetet elemezte az irreducibilitás feltétele mellett. Ebben az esetben, az értéktöbblet rátája (r) természetesen 0 lesz, ennek egzakt bizonyítását azonban az olvasóra bízzuk. A dolog érdekessége az, hogy ezen esetben a *b)* feltételben szereplő érvényes árrendszer (a bért is beleértve) egyszersmind értékárrendszer is, vagyis az értékektől csupán egy skaláris szorzó erejéig térhet el.

mutattuk, hogy az értékrendszer és a ráfordítási együtthatók összefüggéseinek teljes körű és egyidejű vizsgálatához a matematikai sajátérték-formák adekvát eszközt szolgáltatnak. Utaltunk arra is, hogy heterogén munkaerő esetén a sajátérték-formák jelentősége még az itt mutatkozónál is nagyobb, mivel heterogén munka és egyöntetű (általános) értéktöbbletráta érvényesülése esetén az értékrendszert nem is lehet másképpen meghatározni, csak szimultán jelleggel, sajátérték-formákkal. Itt, az alapmodell keretei között — mint tudott — a sajátérték-formák még valójában nélkülözhetők.

Végezetül, a dolgozat tételei egyszersmind rámutatnak arra is, hogy az irreducibilitás feltételezése egyes elemzésekben nemcsak kényelmi szempontokkal indokolható. Tartalmilag is teljesen jogosult, mivel úgy tekinthető, hogy a vizsgálatban csupán a természeténél fogva irreducibilis *alapgazdaságra* összpontosítjuk figyelmünket. Ennek ugyanis olyan kulcsszerepe van például az értékrendszer meghatározásában, hogy az alapgazdaság értékrendszere és a nem alapgazdaság technikai paraméterei a nem-alapjavak értékeit egyszerűen diktálják.

(Beérkezett: 1983. április 21-én.)

IRODALOM

1. BRÓDY, A.: *Érték és újratermelés.* Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. MORISHIMA, M.: *Marx's Economics.* Cambridge, 1973. Cambridge University Press.
3. NIKAIDO, H.: *Convex Structures and Economic Theory.* New York, 1968. Academic Press.
4. REICH, U. P.: From Heterogenous to Abstract Labour and the Definition of Segmentation. *Acta Oeconomica,* Vol. 23 (3–4), 1979.
5. SRAFFA, P.: *Áruk termelése áruk révén.* Budapest, 1975. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
6. ZALAI, E.: A heterogén munka kérdéséhez *Egyetemi Szemle,* 1980/3.
7. ZALAI, E.: Nemnegatív Leontief-inverz létezésének két közgazdasági kritériuma *Szigma,* 1982/4.

MARXIAN LABOR VALUES IN (CLOSED) EIGENVALUE MODELS

The existence and positivity of the Marxian labor values has traditionally been discussed and proven in the framework of an open Leontief system. The only notable exception is Bródy, who addressed these questions in an eigenvalue formulation. His analysis, however, turns out to be correct only for the special case of simple commodity production and also relies on unnecessarily restrictive assumptions (e.g., irreducibility of the augmented input-output matrix). Reich and Zalai have independently shown, without existence proofs, that the case of heterogenous labor under the assumption of a uniform rate of exploitation leads to a special (parametric) eigenvalue problem.

In this paper two alternative eigenvalue forms of the labor values are developed and confronted with that of Bródy. The two differ in the treatment of labor only and, consequently, in the way the global commodity input-output coefficient matrices are defined. First, the basic identity of some crucial mathematical properties of the two matrices are proven. Second, the existence, uniqueness and positivity of solutions is discussed under very general assumptions (perfect competition and impossibility of full automation). These assumptions do not imply irreducible structures for the coefficient matrices in the eigenvalue forms. Nevertheless, uniqueness and strict positivity of the eigenvectors (labor values) is guaranteed by the existence of a special, irreducible sub-economy (basic economy) defined by the commodities directly or indirectly needed in the reproduction of labor power.

СИСТЕМА ТРУДОВОЙ СТОИМОСТИ МАРКСА В ФОРМЕ (ЗАМКНУТОЙ) СОБСТВЕННОЙ СТОИМОСТИ

Трудовая стоимость Маркса традиционна анализировалась в рамках открытой модели «затраты-выпуск». А. Броди был единственным, кто попытался доказать существование стоимости в замкнутой модели. Однако этот анализ действует лишь для случая простого воспроизводства, кроме того доказательства основаны на более сильных, чем необходимо, предпосылках (например, на ирредуцибильности). Рейх и Залаи независимо друг от друга и без экзистенционального доказательства показали, что в случае неоднородной рабочей силы и одинаковой нормы прибавочной стоимости естественной формой анализа системы стоимости является нелинерная (параметрическая) задача собственной стоимости.

В статье система стоимости сводится к двум альтернативным задачам собственной стоимости, существенно отличающимся от соответствующей модели Броди. Две формы отличаются лишь в подходе к рабочей силе, что дает различные полные матрицы затрат. Показывается, что с точки зрения анализа математические характеристики этих матриц одинаковы. Существование решения задач собственной стоимости доказывается при весьма общих посылках (чисто товарное производство и невозможность полной автоматизации). Ирредуцибильность матричных коэффициентов не имплицируется. Доказательство строгой позитивности и однозначности стоимостей, т.е. собственных векторов, основано на признании ирредуцибильной частной экономики (основной экономики), которая определяется непосредственно и косвенно необходимыми для воспроизводства рабочей силы товарами.