Martos Béla

Nem-walrasi szabályozási modellek egy családja[1]

1. Bevezetés

A nem-walrasi szabályozási modellek alapgondolatai *Kornai János* ,,Anti-equilibrium"-ához [3] nyúlnak vissza. Az első ilyenfajta modellt *Kornai* és *Martos* [7] szerkesztette, ezt egy sorozat különböző szerzőktől származó tanulmány követte, közülük sokat a ,,Szabályozás árjelzések nélkül" [8] c. kötet tartalmazott.[2] A jelen tanulmány ezt a kutatási vonalat folytatja a formalizált szabályozási modellek egy újabb sorozatával. Bennük *Kornai* és *Martos*, *Martos*, *Bródy*, *Kornai* és *Simonovits* [8] számos gondolata megőrződik[3] és összegeződik, valamint továbbhalad a következő irányokban:

— Párhuzamosan megjelenik készletjelzés és megrendelésjelzés ugyanabban a modellben.
— Külön kereskedelmi szektor iktatódik a termelők és fogyasztók közé.
— A ,,rövidebb oldal elvének" elvetése egyes modellekben.
— A ,,nem-ár" jelzéses modellek összehasonlítása olyannal, ahol a termelők állapítják meg a (nem-walrasi) árakat.

A végső következtetés az lesz, hogy *ugyanazt a gazdaságot különböző nem-walrasi szabályozókkal lehet működtetni*. (Eltérésekkel a jelek tartalmában, az információáramlás és döntéshozás szerkezetében.)

A 2. fejezetben az alapfogalmakat és elveket vezetem be. A 3–8. fejezetekben öt modellt mutatok be, gazdasági interpretációjukkal és strukturális elemzésükkel egyetemben. A 9. fejezet tartalmazza e modellek stabilitási feltételeit, a 10. fejezetben működőképességükkel foglalkozom a 11-ben pedig általános következtetéseket vonok le. A 9. és 10. fejezetben található eredmények matematikai taglalását külön *Matematikai függelék*be tettem.

2. Fogalmak és elvek

A célból, hogy e cikk önmagában is érthető legyen, felidézek néhány fogalmat és alapelvet mind magam, mind mások régebbi írásaiból. Ezek olyan általános

[1] Ez a cikk *Gazdasági szabályozási struktúrák és működésük: a nem-walrasi eset* c. akadémiai doktori értekezésemnek egy részét dolgozza fel tömörített formában. Előadtam az ESEM'83 konferencián Pisában és a XI. Magyar Operációkutatási Konferencián Balatonfüreden.
[2] A könyv összefoglalását lást [11]-ben.
[3] Különösen a koordinálatlan döntéshozatal működőképessége és a ,,norma szerinti szabályozás" elve.

keretet vázolnak fel, amelybe a fentebb említett előzményekkel együtt ez a tanulmány is beleillik.

a) Szigorúan megkülönböztetem a gazdaság *reálszféráját*, melyben a reáltevékenységek (termelés, javak átadása, fogyasztás) folynak, a *szabályozási szférától*, ahol jelekkel (jelképzéssel, jelek átadásával, döntéshozással) van dolgunk. A két szférát egyik végükön a reálmennyiségek *megfigyelése* (mérése), másik végükön a reálfolyamatokba való *beavatkozás* köti össze.

A jelek között megkülönböztetek mennyiségi (nem-ár) jelzéseket (pl. készletekről, rendelésállományról) és árjellegű jelzéseket (pl. árak, gazdaságossági mutatók vagy más pénzben kifejezett jelzések). Mind a walrasi általános egyensúlyelmélettel, mind a nem-walrasi „adagolásos egyensúly" elméletével szemben a nem-ár jelzések itt sokkal jelentősebb szerepet játszanak.

b) Mind a reálszférának, mind a szabályozási szférának a leírása *dinamikus*, mind az *állomány*, mind a *folyam* típusú változók az idő függvényei. A szabályozás folyamaton belüli *(on-line)*, azaz a kapott jelek a döntésre és a reálfolyamatokba való beavatkozásra időtlen „tapogatózás" és „újraszerződés" nélkül hatnak. A nem-egyensúlyi reálmennyiségek és szabályozójelek ugyanabban a valódi időben befolyásolják egymást.

c) Klasszikus *visszacsatolási hurkokat* alkalmazok a résztvevők (determinisztikus) magatartásának leírására. Ebben az is benne van, hogy nem tételezek fel optimáló magatartást (ellentétben szinte az egész egyensúlyelméleti és „disequilibrium" irodalommal). Vannak exogén beállító jelek (modelljeinkben: *normák*) és a szabályozási mechanizmust az hozza mozgásba, ha különbség van az állapotváltozóknak a ténylegesen megfigyelt és a norma szerinti értéke között. Ebben a tanulmányban a termelő vállalatok input és outputkészleteinek, rendelésállományainak van normájuk, más modellekben sok másféle norma is szerepel.[4] A *norma szerinti szabályozásnak* ezt az elvét alkalmazván nem tételezem fel, hogy a normák valamiféle kívánt, szándékolt vagy optimális állapotot reprezentálnak, csak azt, hogy a döntéshozók e történelmi tapasztalat vagy megegyezés formálta értéket az alkalmazkodás mércéjéül elfogadták.

d) A különböző szabályozási mechanizmusokat három kritérium szerint értékelem:

(i) Stabilitás

(ii) Működőképesség

((iii) Szerkezeti jellemzők.

A *stabilitás* fogalma a szabályozáselméletből ered: egy rendszer akkor aszimptotikusan stabilis, ha a változók (konstans külső hatást feltételezve) valamilyen véges határértékhez tartanak, ha az idő végtelenhez tart.

A *működőképesség* azt jelenti, hogy azok a változók, amelyek közgazdasági értelmezésük szerint nem vehetnek fel negatív értékeket (pl. termelési szint, javak készletei stb.) valóban soha nem válnak negatívvá a modell szerint sem.

e) A *struktúra* szempontjából a szabályozási mechanizmusokat a jelképzés szerkezete *(döntési struktúra)* és a jelátadás szerkezete *(információs struktúra)* jellemzi. A jelképzésnél megkülönböztetek *koordinálatlan* döntéseket, melyet a résztvevők (vállalatok) elkülönülten hoznak és koordinált döntéseket, ahol vagy a reálszervezetek egymás között *interaktív* módon koordinálják döntéseiket (mint pl. a piacon) vagy pedig van egy vagy több elkülönült koor-

[4] Pl. a várakozási sor normális hossza [9]-ben, vagy egy aggregált hiány-indikátor normál értéke [6]-ban.

dináló szervezet (pl. tervhivatal, árhivatal, központi bank), ez esetben a jelátalakítás (részben vagy teljesen) *centralizált.*[5]

Ami pedig az információs struktúrát illeti, egy folyamat lehet *nem-kommunikatív,* ha a jel nem hagyja el a szervezetet, amelyben keletkezett, *tranzakciós kommunikatív,* ha a jel csak két reálszervezet között áramlik és egy tényleges vagy potenciális tranzakciójukhoz kapcsolódik, és végül *nem-tranzakciós kommunikatív* minden más esetben, különösen ha egy szabályozási szervezet is részes benne.

f) A hangsúly a termelő vállalat magatartásán van: a végső felhasználás exogén, a fogyasztói magatartást elhanyagolom.

g) Nem veszem figyelembe a források szűkösségét. Ami az elsődleges erőforrásokat, a munkaerőt és a termelési kapacitásokat illeti, ezt azért tehetem meg, mert a modellek lényegében stagnáló gazdaságokat ábrázolnak és nem fordítanak figyelmet a növekedésre. A pénzügyi források szűkösségét illetően pedig *Kornai* [4, 5] „puha költségvetési korlát" fogalmára hivatkozom.

3. A közös reálszféra

Öt különböző szabályozási mechanizmust fogok illeszteni lényegében azonos reálfolyamatokhoz. Ezért módomban áll a reálfolyamatoknak egy viszonylag egyszerű ábrázolását választani: a *nyílt statikus Leontief-gazdaságot* állandó technológia mellett. A hagyományos formától egy ponton térek el: az input és outputkészleteket külön kezelem, ez már maga is visz némi dinamikus ízt az egyébként statikus Leontief-gazdaságba.

Jelölések

n a termelők (szektorok) és a termékek száma. A latin kisbetűk vektorokat, a latin nagybetűk mátrixokat jelölnek. A kurzív betűk a t idő függvényeit jelölik, amelyek a $t \geq 0$ értékekre vannak definiálva és itt folytonosan differenciálhatók is. Az álló betűk az időtől nem függő (konstans) vektorokat és mátrixokat jelölik. A görög kisbetűk skaláris konstansok.

Reálváltozók és konstansok

r: termelési vektor
Y: transzfer mátrix (Y_{ij}: az i termék átadása a j termelőnek)
q: outputkészlet
V: inputkészlet
c: a végső felhasználás vektora (exogén)
A: inputkoefficiens mátrix
e: az összegező vektor: $[1, 1, \ldots, 1]'$
$\langle \mathrm{b} \rangle$: a b vektorból képezett diagonális mátrix
$'$: a transzpozíció jele.

[5] Ebben a dolgozatban csak koordinálatlan szabályozókkal foglalkozom. Ekvivalens koordinált szabályozást találhatunk [10]-ben vagy [8] 8. és 9. fejezetében.

Az output mérleg

$$(1)\qquad \dot{q} = r - Y\mathrm{e} - c,$$

azaz az outputkészletek változása egyenlő a termelt mennyiségek mínusz a transzferek a termelőkhöz és végső felhasználásra. Ez a vektoregyenlet n skalár egyenletből áll, melyek

$$\dot{q}_i = r_i - \sum_j Y_{ij} - c_i \text{ alakúak.}$$

1. FELTEVÉS: $c(t) \geq 0,\ \forall\ t \geq 0$, azaz a végső felhasználás szemipozitív.

Az input mérleg

$$(2)\qquad \dot{V} = Y - A\langle r\rangle,$$

azaz az inputkészletek változása egyenlő a transzferek (anyagvásárlások) mínusz a termeléshez használt inputok. Ez a mátrixegyenlet n^2 skaláregyenletből áll, melyek

$$\dot{V}_{ij} = Y_{ij} - A_{ij}\, r_j \quad \text{alakúak.}$$

2.FELTEVÉS: Az A mátrix eleget tesz a szokásos nem-negativitási, irreducibilitási és produktivitási (spektrálsugara $\varrho < 1$) feltevéseknek és emellett feltesszük, hogy sajátértékei egyszeresek.

Az A sajátértékeinek halmazát (spektrumát) $\mathcal{A}$-val jelöljük, úgy, hogy $\varrho = \max\ \{\ |\ \varphi\ |\ : \varphi \in \mathcal{A}\ \}$.

4. Inputkészlet és outputkészlet jelzésre működő szabályozó (1. sz. modell)

Az (1) és (2) egyenletekkel ábrázolt reálfolyamatokat véve alapul a legegyszerűbb szabályozó az lesz, amelyik megfigyeli az input- és outputkészleteket, összehasonlítja őket a megfelelő normákkal és ebből alakítja ki a termelési és anyagvásárlási döntéseket.[6]

Normák és szabályozó paraméterek

q^*: az outputkészlet normák vektora
V^*: az inputkészlet normák mátrixa
β: csillapítási tényező (skaláris szabályozó paraméter)
γ: természetes frekvencia (skaláris szabályozó paraméter).

A termelés szabályozása (a termelő által)

$$(3)\qquad \dot{r} = -\,2\beta\gamma\dot{q} - \gamma^2(q - q^*),$$

A transzferek szabályozása (a vevő által)

$$(4)\qquad \dot{Y} = -\,2\beta\gamma\dot{V} - \gamma^2(V - V^*).$$

[6] Ez a modell a [7]-ben, majd [8] 2. fejezeteként publikáltnak módosított változata.

3. FELTEVÉS: $\gamma > 0$ (az általánosság megszorítása nélkül).

EMLÉKEZTETŐ: Az 1., 2. és 3. feltevéssel a dolgozat egészében élek, akkor is, ha nem említem újra.

Értelmezés

Noha nincs bizonyítékunk rá, hogy a vállalatok a (3) és (4) magatartási szabályokat követik, e szabályok nem mondanak ellent a józan észnek. A termelő akkor növeli termelését, ha outputkészlete csökken vagy norma szerinti értéke alá esik — és fékezi a termelést az ellenkező esetben. Ugyanígy növelik ill. csökkentik anyagvásárlásaikat az inputkészletek változási sebességétől és normához képest elért szintjüktől függően.

Az, hogy az összes szabályozó egyenletekben ugyanazt a két paramétert (β és γ) szerepeltetem, nem azért van, mintha azt feltételezném, hogy az összes döntéshozók minden döntésükben egyformán viselkednek. Ez csak egy matematikai fogás, ami megkönnyíti az elemzést. Ha egy szabályozó szerkezetet jól be lehet hangolni úgy, hogy csak két hangoló gombot állítok be a megfelelő értékre, akkor kettőnél többnek az alkalmazása nem ronthatja a szervezet működését.

Mivel működőképes rendszerben a készletek nem lehetnek negatívak, a vevők mindig végre tudják hajtani termelési és vásárlási döntéseiket. Másszóval: a „rövidebb oldal elve" érvényesül ebben a gazdaságban és mindig az eladók vannak a hosszú oldalon (vevők piaca).

Strukturális elemzés

Komponensenként megnézve a (3) és (4) szabályozó egyenleteket, azonnal látható, hogy az i termelőnek csak saját outputkészleteiről kell információval rendelkeznie a termelési döntéshez és csak a j anyagból raktáron levő input készletét kell ismernie ahhoz, hogy vásárlásairól döntsön. Tehát a szabályozási folyamathoz nincs szükség koordinációra a vállalatok közt, sőt még információk cseréjére sem. Tehát a szabályozó *koordinálatlan* és *nem-kommunikatív*.

5. Inputkészlet és rendelés jelzés (2. sz. modell)

Az első modellben a szabályozó működése a nem-negatív outputkészleteken múlt, nem volt akadálya, hogy a vevők végrehajtsák vásárlási döntéseiket akár termelési célra, akár végső felhasználásra. A valóságos gazdaságban azonban vannak olyan termékek, amit soha nem termelnek raktárra, hanem csak a fogyasztó megrendelésére (pl. azért, hogy az egyedi kívánalmaknak eleget tegyenek). Másrészt az is előfordul, hogy olyan javakból, amiket általában raktárra termelnek, kifogy a készlet, a vevőknek várniok kell megrendeléseik teljesítésére és a transzferek ütemezéséről az eladó dönt. Az általános esetben e kétféle szituáció párhuzamosan is fennáll különböző javakat illetően és váltakozva is egy jószágnál különböző időszakokban. Az 1. sz. modellben az egyik szélsőséges esetet vizsgáltuk meg, most a másik szélsőséget vesszük szemügyre, amikoris az outputkészletek mindig nullák és a megrendeléseket az eladó intézkedése szerint teljesítik.[7]

A rendszer reálfolyamatait változatlanul az (1) és (2) egyenletek reprezentálják.

Szabályozási változók és normák

W: a rendelés-feladás mátrixa
K: a rendelés-állomány mátrixa
K*: a rendelés-állomány normájának mátrixa

A termelők nem tartanak outputkészletet

$$q(t) = 0 \qquad \forall t \geq 0. \tag{5}$$

A rendelésállomány mérlege (amit az eladók tartanak nyilván)

$$\dot{K} = W - Y, \tag{6}$$

azaz a rendelésállomány változása a beérkező új megrendelések és a végrehajtott transzferek különbsége.

A rendelés-feladás szabályozása (a vevő által)

$$\dot{W} = -2\beta\gamma\dot{V} - \gamma^2(V - \mathrm{V}^*), \tag{7}$$

azaz a megrendelések feladása az inputkészletek változásától és szintjétől függően változik, a már ismert formula alkalmazásával.

A transzferek szabályozása (az eladó által)

$$\dot{Y} = 2\beta\gamma\dot{K} + \gamma^2(K - \mathrm{K}^*), \tag{8}$$

azaz a transzferek a hátralékos rendelésállománytól függenek (amelyeknek van K* normájuk). Figyeljük meg a pozitív visszacsatolást: a norma feletti állomány és a hátralék növekedése növeli a kiszállítást is.

Értelmezés

A vevők és eladók magatartása ebben az esetben is ugyanolyan „ésszerű", mint a készletjelzéses modellben volt. De most van egy bökkenő: meg kell magyarázni, miért kezeljük ebben a modellben másképpen azokat, akik input anyagokat vásárolnak, szemben azokkal, akik végső felhasználásra teszik ezt. Amíg az első csoport megrendelést ad fel és várakozik, a másodiknak elsőbbsége van és a folyó termelésből azonnal kiszolgálják. A két csoport egyforma kezelése bonyolultabbá tenné a modellt, de semmi újat nem adna az elemzéséhez, ezért tartottam meg a modell itteni visszatetsző formuláját.

[7] Ehhez a modellhez egyes alapgondolatokat a *Kornai* és *Simonovits*-féle rendelésjelzéses modellből [8, 12. fej.] kölcsönöztem, de maguk a modellek formailag eltérők.

A rövidebb oldal elve ebben a modellben is érvényes, de ellenkező értelemben, mint a készletjelzéses modellnél: most az inputanyagok vásárlói vannak a hosszú oldalon (eladók piaca).

Strukturális elemzés

A (6) egyenlet könyvelési azonosság. Az eladó megfigyeli mennyit szállított vevőinek (amiről egyébként ő döntött) és jeleket (megrendeléseket) kap tőlük. Ezek birtokában folyamatosan vezetni tudja — koordináció nélkül — a teljesítetlen megrendelések hátralékát. Ezt az információt maga használja fel (tehát kommunikálnia nem kell), amikor a transzferekről dönt (8) szerint. A vevő pedig arról dönt, mekkora megrendelést adjon föl (7), miután megfigyelte saját inputkészleteit. Az előbbi döntési folyamat koordinálatlan és nem-kommunikatív, az utóbbi ugyancsak *koordinálatlan*, de *tranzakciós kommunikatív* (rendelés-jelzéssel). Ettől a szabályozási folyamat egészét is az utóbbi minősítés jellemzi.

6. Inputkészlet, outputkészlet és megrendelés jelzés (3. sz. modell)

Az első két modellben két szélsőséges esetet vizsgáltam: az egyikben soha nem volt teljesítetlen megrendelés, mivel a termelők outputkészletet tartottak, a másikban soha nem volt outputkészletük, de volt teljesítetlen megrendelésük. Az első a vevők piacáról, a második az eladók piacáról adott absztrakt képet. Közelebb jutunk a valósághoz (vö. [2]), ha azt tételezzük fel, hogy minden jószágból egyszerre van outputkészlet is, teljesítetlen megrendelés is. Így a szabályozó az előző kettő kombinációja lesz.

A rendelésállomány mérlege (amit az eladók tartanak nyilván)

(9) $$\dot{K} = W - Y$$

A termelés szabályozása (a termelő által)

(10) $$\dot{r} = -2\beta\gamma\dot{q} - \gamma^2(q - q^*).$$

A rendelés-feladás szabályozása (a vevő által)

(11) $$\dot{W} = -2\beta\gamma\dot{V} - \gamma^2(V - V^*),$$

A transzferek szabályozása (az eladó által)

(12) $$\dot{Y} = 2\beta\gamma\dot{K} + \gamma^2(K - K^*).$$

A (9)—(12) egyenletek azonosak a (6), (3), (7) és (8) egyenletekkel ebben a sorrendben, így értelmezésüket nem kell itt megismételni. Csak a végső felhasználók prioritása itt egyszerűsödik: őket az outputkészletből elégítik ki.

A rövidebb oldal elve itt már nem érvényesül, vevők és eladók egyként a hosszú oldalon vannak. Az eladók outputkészleteket tartanak az elsőbbséget élvező vevők ellátására, tehát van túlkínálat, és ugyanakkor a teljesítetlen megrendelések ugyanabból a cikkből túlkeresletről tanúskodnak.

Strukturális elemzés

Az 1. és 2. modell elemzésére hivatkozva itt csak leszögezem, hogy ez a szabályozó is *koordinálatlan* és *tranzakciós-kommunikatív* (rendelés-jelzéssel).

7. Külön kereskedelmi szektor (4. sz. modell)

Az előző két modell kissé önkényes prioritási feltevésétől megszabadulhatunk azzal, hogy egy külön kereskedelmi szektort iktatunk a modellbe. Feladata az, hogy a termelő szektorok helyett outputkészletet tartson. Ilyen modell megszerkesztését az az érzésem is motiválta, hogy a piac legtöbb elméleti modelljében a kereskedelemnek vagy nincs nélkülözhetetlen szerepe, vagy legfeljebb másodhegedűst játszik. Mégsem állíthatom, hogy ezzel a modellel demonstrálnám, hogy a kereskedelmi szektor beiktatása elkerülhetetlen, de azt talán igen, hogy milyen természetes módon illeszkedik be a forgalom szabályozásába.

A reálszféra átértelmezése

Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egyetlen kereskedő forgalmazza az összes cikkeket. (Ettől eltérő feltevések is ugyanilyen jó szolgálatot tesznek.) A reálfolyamatok (1) és (2) egyenletei formálisan érvényben maradnak, de értelmezésük megváltozik.

Feltesszük, hogy a termelő ágazatok teljes outputjukat azonnal átadják a kereskedőnek. Tehát az r termelési vektor egyúttal a termelőktől a kereskedőhöz irányuló transzfert is reprezentálja. q most a kereskedő által tartott készlet, amelyből mind a termelők input vásárlásait, mind a végső felhasználásra irányuló keresletet kielégíti. Így az Y mátrix most a kereskedőtől a termelőkhöz irányuló inputanyag transzfereket reprezentálja.

Mivel a termelők maguk nem tartanak outputkészletet, a kereskedőnek megrendeléseket kell feladnia. A w vektor képviseli a kereskedő megrendeléseinek folyamát, a k vektor pedig a hátralékos megrendelések állományát.

A rendelésállomány mérlege (melyet a termelők tartanak nyilván)

$$\dot{k} = w - r, \tag{13}$$

azaz a hátralék változása egyenlő a bejövő rendelésekkel mínusz a termelés, amit azonnal átadnak a kereskedőnek.

A megrendelés-feladás szabályozása (a kereskedő által)

$$\dot{w} = -2\beta\gamma\dot{q} - \gamma^2(q - \mathrm{q}^*), \tag{14}$$

azaz a feladott megrendelések a kereskedő készleteitől függenek.

A kereskedőtől kimenő transzferek szabályozása (a termelő mint vevő által)

(15) $$\dot{Y} = -2\beta\gamma\dot{V} - \gamma^2(V - \mathrm{V}^*),$$

mint (8)-ban.

A termelés szabályozása (a termelők által)

(16) $$\dot{r} = 2\beta\gamma\dot{k} + \gamma^2(k - \mathrm{k}^*),$$

azaz a termelők termelési szintjüket, és ezzel a kereskedőhöz menő kiszállításaikat is, a náluk felgyülemlett hátralékos megrendeléstől függően változtatják.

Értelmezés

E rendszerben elválik egymástól a ,,nagybani'' és a ,,kicsinybeni'' piac. Az előbbin a termelő az eladó és a kereskedő a vevő, aki a hosszú oldalon van. A kicsinybeni piacon a termelők (és a végső felhasználók) a vevők, a kereskedő az eladó, ismét csak a hosszú oldalon. Így a rövidebb oldal elve a két piacon, külön-külön véve, érvényben van, de érvényét veszti, ha a kettőt együtt tekintjük. Minden termékből az egyik piacon túlkereslet, a másikon túlkínálat van.

Strukturális elemzés

A szabályozó szerkezetileg itt is — hasonlóan a 3. sz. modellhez — *koordinálatlan* és *tranzakciós-kommunikatív*. Az egyetlen különbség, hogy a jelek (megrendelések) most a kereskedő és a termelők között áramlanak (nem pedig csupán a termelők között) és ez megtakarítást eredményez az információk mennyiségében (n számú jel n^2 helyett).

8. Egy eladói ár jelzéses modell (5. sz. modell)

Mindeddig figyelmen kívül hagytam a walrasi rendszerek fő szabályozó eszközét: az árakat, és kizárólag mennyiségi (nem-ár) jellegű jelekkel dolgoztam. Arra a hibás következtetésre lehetne jutni, hogy mihelyt bevezetjük a (nem ragadós) árakat, a walrasi egyensúly elérhető lesz. A mostani modellel azt mutatom meg, hogy az eladók által képezett árak, bármilyen gyorsan követik is a készletek változását, hasonló eredményekhez vezetnek, mint a nem-ár jelzéses (vagy változatlan áras) szabályozók.

Ár és hozzáadott érték

Az eddig használt mennyiségi jelek mellé most belép az árjelzések p vektora, amelyhez a termelési döntésekben alkalmazkodnak (de a transzferek feletti döntésekben nem). Egy termék gazdaságosságát a ,,termékegységre eső hozzáadott érték'' mutatójával mérjük, amelyet a termék ára és a felhasznált anyagok költsége különbségeként definiálunk:[8]

[8] Ezt *Bródy*tól ([8] 6. fejezet) kölcsönöztem, ő egyszerűbb modellek keretében használja.

(17) $$g = p - \mathrm{A}'p = (\mathrm{E} - \mathrm{A}')p,$$

ahol A′ az A input-koefficiens mátrix transzponáltja, E pedig az egységmátrix.

Az árak bevezetéséből nem következik, hogy a pénzbeli folyamatokat is figyelembe vennénk. A pénzforrások korlátozatlanok maradnak. Az ár itt nem más mint egy jel, amit a termelési döntésben használnak fel.

Az előbbi feltevéshez, hogy ti. az árak befolyásolják a termelt mennyiségeket, de a vásárlásokat (legalábbis közvetlenül) nem, hozzávesszük még azt az egyszerűsítő feltevést, hogy az inputkészleteket állandó szinten tartják.

Az inputkészletek állandósága

(18) $$\dot{V} = 0,$$

azaz $V = \mathrm{V}^0 = \mathrm{V}^*$.

Ármegállapítás (a termelő, mint eladó által)

(19) $$\dot{p} = -2\beta\gamma\dot{q} - \gamma^2(q - \mathrm{q}^*),$$

azaz az eladó az árakat outputkészletei nagyságától és változási sebességétől függően változtatja.

Gazdaságossági számítás

(20) $$q = (\mathrm{E} - \mathrm{A}')p,$$

azaz a termelési döntés előtt a termelő kiszámítja a termék gazdaságossági mutatóját.

Termelési döntés

(21) $$\dot{r} = \alpha\dot{g},$$

ahol $\alpha > 0$ egy újabb szabályozó paraméter, és a termelési szint arányosan változik a gazdaságosság változásával.

Ily módon a termelés szabályozása egymást követő három alfolyamatra oszlik:

outputkészlet → ár → hozzáadott érték → termelési szint.

Értelmezés és strukturális elemzés

A (18) egyenlet a termelőknek, mint vevőknek azt a feltételezett magatartását írja le, hogy inputkészleteiket változatlan szinten tartják, ehhez nincs szükség sem koordinációra, sem kommunikációra. Úgy foghatjuk fel, mint a vevők döntését arról, hogy nem bocsájtkoznak (árváltozásokra számítva) spekulációs vásárlásokba — és mivel tudják, hogy a számukra szükséges input anyagokat az outputkészletekből késedelem nélkül megkapják, nincs célja annak, hogy inputkészleteiket változtassák.

A (2) és (18) egyenletekből azt kapjuk, hogy

(22) $$Y = \mathrm{A}\,\langle r\rangle,$$

és ez megmutatja, hogy a termelők, amikor termelési szintjükről döntenek, egyben döntenek vásárlásaikról is, és ehhez másra, mint saját inputkoefficienseik (technológiájuk) ismeretére nincs is szükségük. Így ez a döntés is koordinálatlan és nem-kommunikatív.

Az ármegállapításnál (19) a termelő ismeri meglevő outputkészleteit, így koordinálásra itt sincs szükség. De a hozzáadott érték kiszámításához (20) nemcsak saját termékének árát kell ismernie, hanem mindazokét az anyagokét is, amelyet inputként használ. E célból az eladóknak közölniök kell áraikat a vevőkkel, ez tranzakciós kommunikációt teremt köztük. Ezután magát a kalkulációt a termelők már elszigetelten végezhetik és ugyanígy hozzák meg termelési döntéseiket. E két részfolyamat tehát koordinálatlan és nem-kommunikatív. Végülis a szabályozó egésze *koordinálatlan* és *tranzakciós* (ár) *kommunikációt* tartalmaz.

9. Stabilitás és állandósult állapot

Most stabilitási feltételeket adok meg az előző fejezetben bemutatott öt szabályozó szerkezetre. Fő kérdésnek ugyan a működőképességet, azaz a rendszerek által produkált trajektóriák nem-negativitását tekintem, de a stabilitás a lokális működőképesség elégséges feltételeinek egyike.[9]

Ebben a fejezetben a matematikai elemzésnek csak a végeredményét közlöm, a részletek és a bizonyítások a Matematikai függelékben találhatók.

Jelölések

Jelöljük $\mathcal{R}^{\vartheta}$-val ($\vartheta = 1, 2, 3, 4$) az alábbi karakterisztikus egyenletek megoldásainak halmazát, ahol a ϑ felső index az első négy modell sorszámára utal.

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}^1 = \{\, \sigma \mid (\sigma - 1)^2 = \varphi \in \mathcal{A} \,\} \\ (23)\qquad &\mathcal{R}^2 = \{\sigma \mid \sigma^2 - \sigma + 1 = \varphi \in \mathcal{A} \,\} \\ &\mathcal{R}^3 = \mathcal{R}^4 = \{\sigma \mid -\sigma^3 + 2\sigma^2 - 2\sigma + 1 = \varphi \in \mathcal{A}\,\}, \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{A}$, mint már mondtuk, az A input-koefficiensmátrix spektruma. Legyen továbbá

$$(24)\qquad \beta^{\vartheta} = \max\left\{ \frac{|\,\mathrm{Im}\,\sigma\,|}{2\,|\,\sigma\,|\sqrt{\mathrm{Re}\,\sigma}} \,\middle|\, \mathrm{Re}\,\sigma > 0,\ \sigma \in \mathcal{R}^{\vartheta} \right\} \quad (\vartheta = 1, 2, 3, 4)$$

[9] Bizonyos feltételek mellett formálisan létezhetnek instabil és mégis működőképes rendszerek. De jogosnak tartom, hogy kizárjam őket a vizsgálatból, hiszen létezésüket csak az erőforrások korlátozatlansága, azaz a jelen elemzés egy fogyatékossága teszi lehetővé. Ez a gondolatmenet jogosít fel arra is, hogy kizárjam a Ljapunov-stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis rendszereket (amelyek szintén lehetnek működőképesek), mivel az ilyen rendszerek az instabilitás határán vannak.

és

$$
(25) \quad \begin{aligned}
\underline{\beta}^1 &= \beta^1 \\
\underline{\beta}^2 &= \max\,\{\beta^2, \sqrt{6}/4\} \\
\underline{\beta}^3 &= \max\,\{\beta^3, \sqrt{6}/4\} \\
\underline{\beta}^4 &= \beta^4 \\
\underline{\beta}^5 &= 0.
\end{aligned}
$$

1. TÉTEL: *Stabilitás.* A ϑ sorszámú modell ($\vartheta = 1, 2, 3, 4, 5$) akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis (a 2. és 3. feltevés mellett), ha fennáll a következő két feltétel:

$$
(26) \quad \begin{aligned}
&\text{(i) } \beta > \underline{\beta}^\vartheta \quad (\vartheta = 1, 2, 3, 4, 5) \\
&\text{(ii) } \operatorname{Re}\varphi + (\operatorname{Im}\varphi)^2 < 1, \text{ minden } \varphi \in \mathcal{R}\text{-ra}, \ \vartheta = 2.
\end{aligned}
$$

A stabilitási tétel azt mondja, hogy mind az öt modellnél csak a β paramétertől függ a stabilitás és hogy β-t elég nagyra választva mind stabilissá tehetők. A β-ra megadott alsó korlátok (fáradságosan) kiszámíthatók A sajátértékeiből. Kivételt képez a 2. sz. modell, ahol még a (ii) feltételt is ki kell elégíteniök ezeknek a sajátértékeknek. Ez a modell az A sajátértékeinek bizonyos konfigurációja esetén minden β értékre instabilitást mutathat.[10]

1. KOROLLÁRIUM: *Állandósult állapot.* Ha a ϑ sorszámú modell ($\vartheta = 1, 2, 3, 4, 5$) aszimptotikusan stabilis és a végső felhasználás vektora konstans, azaz $c(t) = \mathrm{c}$, $\forall t \geq 0$, akkor az egyes modellek változói a következő állandósult állapotukhoz tartanak $t \to \infty$ esetén (az állandósult állapotot ∞ alsó indexszel jelöljük meg):

$$
(27) \quad \begin{aligned}
&\mathrm{q}_\infty = \mathrm{q}^* && \mathrm{r}_\infty = \mathrm{Lc} && (\vartheta = 1, 2, 3, 4, 5) \\
&\mathrm{V}_\infty = \mathrm{V}^* && \mathrm{Y}_\infty = \mathrm{A}\langle \mathrm{Lc} \rangle && (\vartheta = 1, 2, 3, 4, 5) \\
&\mathrm{K}_\infty = \mathrm{K}^* && \mathrm{W}_\infty = \mathrm{A}\langle \mathrm{Lc} \rangle && (\vartheta = 2, 3) \\
&\mathrm{k}_\infty = \mathrm{k}^* && \mathrm{w}_\infty = \mathrm{Lc} && (\vartheta = 4)
\end{aligned}
$$

ahol $\mathrm{L} = (\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}$, a Leontief-inverz.

Az állandósult állapot az (1)—(16) és (19) egyenletekből számítható ki, úgy hogy minden deriváltat nullával teszünk egyenlővé.

A korollárium azt mondja, hogy a (q, V, K, k) állapotváltozóknál, amelyekre van norma, az állandósult állapot egyenlő vele, azaz nincs szabályozási hiba. Az r és w szabályozási változóknál az állandósult állapot egyenlő a konstans végső felhasználásnak megfelelő teljes termeléssel, a Y és W változóknál pedig azzal az anyagfelhasználással, ami ennek a termelési szintnek megfelel.

[10] A (ii) feltétel fennállásához elégséges, ha $\varrho < \sqrt{3}/2 \sim 0{,}866$. Ugyanis ebben az esetben $|\varphi|^2 < 3/4$ minden $\varphi \in \mathcal{R}$-ra és $\operatorname{Re}\varphi + (\operatorname{Im}\varphi)^2 < \operatorname{Re}\varphi + \frac{3}{4} - (\operatorname{Re}\varphi)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \operatorname{Re}\varphi\right)^2 \leq 1$. Mivel pedig *nyilt* modellekben a ϱ rendszerint jóval $\sqrt{3}/2$ alatt van, a (ii) feltétel gyakorlatilag nem jut szerephez.

Ha A valamelyik eleme, mondjuk A_{ij} nullával egyenlő, azaz az i anyagot nem használják a j termék előállításánál, akkor ésszerű feltenni, hogy $V^0_{ij} = V^*_{ij} = K^0_{ij} = K^*_{ij} = Y^0_{ij} = W^0_{ij} = 0$, azaz hogy a megfelelő inputkészletek, rendelésállományok, transzferek és rendelés feladások mind nulla kezdő értékkel és (ahol van norma) nulla értékű normával rendelkeznek. Ekkor könnyen belátható, hogy ezekre a változókra $V_{ij}(t) = K_{ij}(t) = Y_{ij}(t) = W_{ij}(t) = 0$, $\forall t$ áll, azaz minden időpontban nulla szinten maradnak. Az ilyen változókat *irrelevánsnak* nevezzük,[11] míg az összes többi változót (beleértve *q, r, k, w*-t is) *relevánsnak.*

4. FELTEVÉS: *A releváns normák pozitivitása*

$$\begin{array}{llll} & \text{(i) } A_{ij} > 0 \rightarrow V^*_{ij} > 0 & \forall(i, j), & (\vartheta = 1, 2, 3, 4, 5) \\ (28) & \text{(ii) } A_{ij} > 0 \rightarrow K^*_{ij} > 0 & \forall(i, j), & (\vartheta = 2, 3) \\ & \text{(iii) } q^* > 0 & & (\vartheta = 1, 3, 4, 5) \\ & \text{(iv) } k^* > 0 & & (\vartheta = 4). \end{array}$$

2. KOROLLÁRIUM: *A releváns változók állandósult állapotának pozitivitása.* Ha a ϑ sorszámú modell ($\vartheta = 1, 2, 3, 4, 5$) aszimptotikusan stabilis és az 1. 2. és 4. feltevések fennállnak, akkor minden releváns változó állandósult állapota pozitív.

Ez a korollárium egyenesen következik a feltevésekből, hiszen $L = (E - A)^{-1} > 0$ a 2. feltevés értelmében, és így $Lc > 0$ minden szemipozitív c-re. Az állandósult állapot pozitivitása fontos szerepet játszik a működőképesség most következő elemzésében.

10. Működőképesség

Mint már említettem, számos olyan változó van, aminek esetleges negatív értékét közgazdaságilag nem lehet értelmezni. Ez a helyzet minden input- és outputkészlet változóval (*q, V*), a rendelésállománnyal (*K, k*) és a termeléssel (*r*). Egyes modellekben értelmezhető lenne viszont a negatív transzfer (valamilyen input-anyag visszaküldése a termelőjének) vagy negatív rendelésfeladás (egy teljesítetlen megrendelés visszavonása), másokban, közgazdasági megfontolásokból, ez sem. Egyszerűség kedvéért azonban eltekintek ettől a megkülönböztetéstől és feltételezem, hogy az összes transzfer változóra (*Y*) és rendelésfeladási változóra (*W, w*) is fennáll a nem-negativitás követelménye.

Lokális működőképesség és működőképes indulási tartomány. Egy aszimptotikusan stabilis rendszert *lokálisan működőképes*nek nevezünk, ha változói (vagy közgazdasági megfontolások alapján kiválasztott egyes változói) nem vesznek fel negatív értéket (semmilyen $t \geq 0$-ra) akkor, ha az induló állapot eléggé közel van az állandósult állapothoz (a megfelelő dimenziójú tér valamilyen metrikája értelmében).

[11] $q(t)$ irreleváns $\vartheta = 2$-re (5) miatt és itt $q^* = 0$ kényszerűen (és ésszerűen) feltételezendő.

Működőképes indulási tartománynak nevezzük azoknak a pontoknak a halmazát (az imént említett térben), amelyekből mint induló állapotból működőképes (nem-negatív) trajektoriák indulnak.

2. TÉTEL: *Lokális működőképesség.* Ha a ϑ sorszámú modell ($\vartheta = 1$, 2, 3, 4, 5) eleget tesz az alábbi feltételeknek:

a) aszimptotikusan stabilis (1. tétel),

b) a végső felhasználás szemipozitív (1. feltevés) és konstans,

c) a releváns normák pozitívak (4. feltevés),

akkor

(i) a rendszer minden (q, V, K, k, r, Y, W, w) változójában működőképes és

(ii) a működőképes indulási tartomány tartalmaz egy, az állandósult állapot köré írt pozitív élhosszúságú kockát.

Ez a tétel azt mondja, hogy konstans végső felhasználás esetén a rendszer aszimptotikus stabilitása lényegében elégséges[12] a lokális működőképességhez. A tétel fogyatékossága az, hogy nem mond semmit a működőképes indulási tartomány terjedelméről, sem arról, hogyan lehet ezt a β és γ paraméterek megfelelő megválasztásával befolyásolni.

Az árak nem-negativitása

Az 5. sz. modellben árak is szerepelnek változóként és nemnegativitásukat nem követeltük meg, mint a működőképesség feltételét. Valóban mindaddig, amíg az árak csak kalkulatív célokat szolgálnak, negatív árak is megengedhetők lennének; de eleget tehetünk annak a közgazdaságilag mégiscsak ésszerű követelménynek is, hogy az árak ne váljanak negatívvá. Ehhez az eddig elhanyagolt α paramétert hívjuk segítségül.

3. TÉTEL: *Az árak nem-negativitása.* Ha az 5. sz. modellre állnak a 2. tétel a, b és c feltételei, továbbá, ha az induló árak pozitívak ($p(0) > 0$), és az α szabályozó paraméter eléggé nagy, akkor az árak trajektoriája nem-negatív, azaz $p(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$.

11. Következtetések

Öt különböző szabályozót illesztettünk ugyanahhoz a reálszférához, a nyílt statikus Leontief-gazdasághoz. A szabályozók sok tekintetben hasonlítottak egymásra, nevezetesen:

— A „norma szerinti szabályozás" elvét alkalmazták.

— Arányos és integráló tagokból álló (PI) lineáris visszacsatolást tartalmaztak.

— A döntési folyamatok koordinálatlanok voltak.[13]

[12] A bizonyítás a matematikai függelékben csak a változók korlátosságára és folytonosságára támaszkodik.

[13] *Kawasaki* és mások [2] empirikusan tesztelték az output-készlet és rendelés-állomány jelzések rövidtávú hatását iparvállalatok termelésére és árképzésére, egy olyan keretben, ami lényegében a „norma szerinti szabályozás" elvét alkalmazta.

Különböztek azonban egymástól a döntéshozatal és az információáramlás szerkezetében:

(i) Különböző mennyiségi (inputkészlet, outputkészlet, megrendelés) és ár (eladó által képzett ár, hozzáadott érték) jelzéseket alkalmaztunk a különböző modellekben. Az 1. sz. modellben kommunikáció sem volt a résztvevők között, másokban megrendeléseket (2. 3. és 4. sz. modell) ill. árakat (5. sz. modell) közöltek egymással.

(ii) Egyes modellek a vevők piacát ábrázolták (1. és 5. sz. modell), egy az eladók piacát (2. sz.), egyesekben pedig a ,,rövidebb oldal elve'' (a ,,disequilibrium-elmélet'' egy kedvenc feltevése) nem is érvényesül (3. és 4. sz.).

Mind az öt modellről bebizonyosodott, hogy a β paraméter megfelelő választásával, nem túl erős feltevések mellett, aszimptotikusan stabilisak, és ekkor lokálisan működőképesek is.

A stabilis modellek egyensúlyi (állandósult) állapota nem-walrasi, hiszen magukban foglalnak olyan pozitív inputkészleteket, amiket a rendszertelen szállítások nem indokolnak, outputkészleteket, amik nem szükségesek a vevők kiszolgálásához és hátralékos megrendeléseket, amit sem termelési átfutási idő, sem korlátos kapacitás nem indokol. Így rendszereink eredendően nem-walrasiak. Még azt is kimondhatjuk, hogy ez az elmélet ,,még kevésbé walrasi'' mint az ,,adagolásos egyensúlyelmélet'' [1] modelljei, noha nincs bennük sem ,,adagolási séma'', sem pedig nem vezettük be az ,,effektív kereslet'' fiktív fogalmát.[14]

Összefoglalva: Bebizonyosodott, hogy ugyanazt a gazdaságot sokféle nem-walrasi szabályozási mechanizmussal lehet működtetni koodináció nélkül (az absztrakciónak a tanulmányban alkalmazott fokán), *amelyek különböző jelzőrendszerekre, információáramlási és döntési struktúrákra támaszkodnak.*

Matematikai függelék

1. *Előkészület*

A modellek elemzésében a következő, *redukált alak*nak nevezett általános sémának gyakorta hasznát vesszük majd:

(F. 1) $\dot{x} = \mathrm{R}u + z$ (Szabályozott szakasz)

(F. 2) $\dot{u} = -2\beta\gamma\dot{x} - \gamma^2(x - \mathrm{x}^*)$, (Szabályozó)

ahol x: állapotvektor
u: a beavatkozójelek vektora
z: külső hatások vektora
x^*: a beállítójelek vektora
R: a szabályozott szakasz négyzetes input-mátrixa (N-ed rendű)
β, γ: skaláris szabályozó paraméterek ($\gamma > 0$).

[14] Ez a részleges összevetés nem kérdőjelezi meg az adagolásos egyensúlyelmélet egészét, ami sok tekintetben általánosabb és sok olyan esetre is kiterjed, amit én nem tárgyaltam. A motivációk, alapelvek, hatókörök, feltevések és következtetések széleskörű összevetése külön tanulmányt igényelt volna.

Jelölje

$$\mathcal{R} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N\}$$

az R mátrix spektrumát (sajátértékeinek halmazát).

1F. LEMMA: Az (F.1)—(F.2) redukált alak akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis, ha

$$\text{(i)} \quad \operatorname{Re}\sigma > 0,\ \forall\ \sigma\varepsilon\,\mathcal{R} \text{ és}$$

$$\text{(ii)}\ \beta > \max\left\{\frac{|\operatorname{Im}\sigma|}{2\,|\sigma|\sqrt{\operatorname{Re}\sigma}}\ \Big|\ \sigma\varepsilon\,\mathcal{R}\right\}.$$

Az 1F. lemma bizonyítása:

Helyettesítsük $\dot{x}$-ot (F.1)-ből (F.2)-be, így a következő állapotegyenletet kapjuk

$$\text{(F.3)} \qquad \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{u}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \mathrm{R}\\ -\gamma^2\,\mathrm{E} & -2\beta\gamma\,\mathrm{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ u\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathrm{E} & 0\\ -2\beta\gamma\,\mathrm{E} & \gamma^2\,\mathrm{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\ \mathrm{x}^*\end{bmatrix}.$$

Az aszimptotikus stabilitás akkor és csak akkor áll fenn, ha a

$$\text{(F.4)} \qquad \begin{bmatrix}0 & \mathrm{R}\\ -\gamma^2\,\mathrm{E} & -2\beta\gamma\,\mathrm{R}\end{bmatrix}$$

rendszermátrix minden sajátértékének negatív a valós része. Legyen $\sigma \in \mathcal{R}$ és s a hozzátartozó jobb oldali sajátvektor, azaz

$$\text{(F.5)} \qquad \mathrm{Rs} = \sigma \mathrm{s}.$$

Először azt bizonyítjuk, hogy az

$$\text{(F.6)} \qquad \omega^2 + 2\beta\gamma\sigma\omega + \gamma^2\sigma = 0$$

karakterisztikus egyenlet két ω gyöke az (F.4) rendszermátrix két sajátértékét szolgáltatja és a hozzájuk tartozó sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix}\sigma\mathrm{s}\\ \omega\mathrm{s}\end{bmatrix}.$$

Ugyanis

$$\begin{bmatrix}0 & \mathrm{R}\\ -\gamma^2\,\mathrm{E} & -2\beta\gamma\,\mathrm{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma\mathrm{s}\\ \omega\mathrm{s}\end{bmatrix} = \omega\begin{bmatrix}\sigma\mathrm{s}\\ \omega\mathrm{s}\end{bmatrix}$$

azt adja, hogy

$$\omega\mathrm{Rs} = \omega\sigma$$

$$-\gamma^2\sigma\mathrm{s} - 2\beta\gamma\omega\mathrm{Rs} = \omega^2\mathrm{s},$$

ez pedig (F.5), (F.6) és s $\neq 0$ miatt fennáll.
(F.6)-ot ω-ra megoldva azt kapjuk:

$$\text{(F.7)} \qquad \omega = \gamma(-\beta\sigma \pm \sqrt{\beta^2\sigma^2 - \sigma}).$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\zeta = \beta^2\sigma^2 - \sigma$$
$$\mu = \mathrm{Re}\,\sigma \tag{F.8}$$
$$\nu = \mathrm{Im}\,\sigma,$$

ekkor

$$\mathrm{Re}\,\zeta = \beta^2(\mu^2 - \nu^2) - \mu$$
$$\mathrm{Im}\,\zeta = \nu(2\beta^2\mu - 1). \tag{F.9}$$

Mivel feltettük, hogy $\gamma > 0$, a $\mathrm{Re}\ \omega < 0$ stabilitási feltétel (F.7) szerint a következő:

$$\pm\ \mathrm{Re}\sqrt{\zeta} > \beta\mu, \tag{F.10}$$

ami mindkét előjelre csak akkor állhat fenn, ha

$$\beta\mu > 0. \tag{F.11}$$

Tekintsük most a Moivre-formula segítségével könnyen belátható

$$\mathrm{Re}\sqrt{\zeta} = \sqrt{\frac{1}{2}(|\,\zeta\,| + \mathrm{Re}\,\zeta)} \tag{F. 12}$$

formulát, alkalmazzuk ezt (F.10)-re és emeljük négyzetre.
Átrendezve kapjuk

$$|\,\zeta\,| < 2\beta^2\mu^2 - \mathrm{Re}\,\zeta.$$

Az alábbi (F.13) feltétel miatt a jobb oldal mindenképp pozitív lesz, így újból négyzetre emelhetünk. (F.9) szerint helyettesítve újabb átrendezés után ezt kapjuk:

$$\nu^2 < 4\beta^2\mu(\mu^2 + \nu^2).$$

Ebből következik, hogy

$$\mu = \mathrm{Re}\ \sigma > 0 \tag{F.13}$$

és ezzel a lemma (i) feltételének szükségességét bebizonyítottuk. Az (F.11) és (F.13) következtében

$$\beta > 0. \tag{F.14}$$

Tehát

$$\beta^2 > \frac{\nu^2}{4(\mu^2 + \nu^2)\,\mu} = \frac{(\mathrm{Im}\ \sigma)^2}{4\,|\,\sigma\,|^2\,\mathrm{Re}\ \sigma}$$

áll minden $\sigma \in \mathfrak{R}$-re. Tekintettel (F.14)-re a lemma (ii) feltételének szükségessége is bizonyítva van. Bizonyításunkból az is következik, hogy a (i) és (ii) feltételek együttesen elégségesek is az (F.1)—(F.2) rendszer stabilitásához. (Vége a bizonyításnak.)

Az 1F. lemmát használjuk fel az 1. tétel (stabilitás) bizonyításában az 1—4. sz. modelleket illetően, míg az 5. sz. modellre másfajta bizonyítást adunk majd.

2. *Az* 1. *tétel bizonyítása* $\vartheta = 1, 2, 3, 4$*-re*

Szorozzuk meg a (2), (4), (6), (7), (8), (9), (11), (12), (15) egyenleteket jobbról $e = [1, 1, \ldots, 1]'$-vel, ami azt jelenti, hogy a kérdéses mátrixegyenleteket vektor-egyenletekké aggregáljuk. A redukált alak (F.1) szabályozott szakasza és (F.2) szabályozója ezek után a következő egyenletekből fog állni, ahol az ^{a} felső index a megfelelő egyenletnek a fentiek szerint aggregált alakjára utal:

Modell sorszáma (ϑ)	Szabályozott szakasz (F.1)	Szabályozó (F.2)
1	(1), (2^a)	(3), (4^a)
2	(2^a), $(6^a)^b$	(7^a), (8^a)
3	(1), (2^a), (9^a)	(10), (11^a), (12^a)
4	(1), (2^a), (13)	(14), (15^a), (16)

b) A (6^a) egyenlet a következő alakot ölti $Ve = (E - A)Ye - Ac$, miután (5) figyelembevételével (1)-ből elvégezzük az $r = Ye + c$ helyettesítést a (6)-nak e-vel jobbról megszorzott alakjába.

Szorozzuk most a (6^a), (9^a) és (13) egyenleteket (-1)-gyel és Ke, ill. k helyett tekintsük ($-K$e)-t, ill. ($-k$)-t az x vektor komponensének. Ekkor a $\vartheta\,(= 1, 2, 3, 4)$ modell R^ϑ input-matrixaként a következőket kapjuk:

$$R^1 = \begin{bmatrix} E & -E \\ -A & E \end{bmatrix} \qquad R^2 = \begin{bmatrix} 0 & E-A \\ -E & E \end{bmatrix}$$

$$\text{(F.15)}$$

$$R^3 = \begin{bmatrix} E & 0 & -E \\ -A & 0 & E \\ 0 & -E & E \end{bmatrix} \quad R^4 = \begin{bmatrix} 0 & -E & E \\ 0 & E & -A \\ -E & 0 & E \end{bmatrix}.$$

Nem nehéz belátni, hogy a (23) szerint definiált $\mathcal{R}^\vartheta$ halmazok valóban az (F.15)-beli R^ϑ mátrixok spektrumát adják $\vartheta = 1, 2, 3, 4$-re, ha segítségül hívjuk a $\sigma \in \mathcal{R}^\vartheta$ sajátértéknek megfelelő s^ϑ sajátvektorok alábbi előállítását (ahol f a $\varphi \in \mathcal{A}$-nak megfelelő sajátvektora A-nak):

$$s^1 = \begin{bmatrix} f \\ (1-\sigma)f \end{bmatrix}, \quad s^2 = \begin{bmatrix} (1-\sigma)f \\ f \end{bmatrix}, \quad s^3 = \begin{bmatrix} f \\ (1-\sigma)^2 f \\ (1-\sigma)f \end{bmatrix}, \quad s^4 = \begin{bmatrix} (1-\sigma)f \\ (1-\sigma+\sigma^2)f \\ f \end{bmatrix}.$$

Most pedig félbeszakítom az 1. tétel bizonyítását, hogy a folytatáshoz szükséges lemmát bizonyítsam előbb.

2F. LEMMA. Ha a 2. feltevés áll (azaz $|\varphi| \leq \varrho < 1$ minden $\varphi \in \mathcal{A}$-ra) és $\vartheta = 2$-re áll az 1. tétel (ii) egyenlőtlensége, akkor Re $\sigma > 0$, minden a (29) szerint definiált $\sigma \in \mathcal{R}^\vartheta$-ra, $\vartheta = 1, 2, 3, 4$.

A 2F. lemma bizonyítása

$\vartheta = 1$. Mivel az $\mathfrak{R}^1$ definíciójából a karakterisztikus egyenletünk $(1 - \sigma)^2 = \varphi$, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{Re} \sigma = \operatorname{Re} (1 \pm \varphi^{1/2}) = 1 \pm \operatorname{Re} \varphi^{1/2} \geqq 1 - |\varphi^{1/2}| \geqq 1 - \varrho^{1/2} > 0.$$

$\vartheta = 2$. $\mathfrak{R}^2$-ből a karakterisztikus egyenlet

$$\sigma^2 - \sigma + 1 = \varphi$$

melynek megoldása

$$\sigma = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4\varphi - 3}).$$

Ebből az (F.12) formula alkalmazásával

$$\operatorname{Re} (2\sigma) = \operatorname{Re} (1 \pm \sqrt{4\varphi - 3}) = 1 \pm \operatorname{Re} \sqrt{4\varphi - 3} =$$

$$= 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}(|4\varphi - 3| + 4 \operatorname{Re} \varphi - 3)} > 0$$

akkor és csak akkor, ha

$$|4\varphi - 3| < 5 - 4\operatorname{Re} \varphi.$$

Mivel a jobb oldal pozitív, vehetjük mindkét oldal négyzetét, és ebből:

$$(4\operatorname{Re} \varphi - 3)^2 + (\operatorname{Im} \varphi)^2 < (5 - 4\operatorname{Re} \varphi)^2.$$

Átrendezés után ez megegyezik az 1. tétel (ii) feltételével.

$\vartheta = 3, 4$. $\mathfrak{R}^3$ és $\mathfrak{R}^4$ közös karakterisztikus egyenlete:

$$-\sigma^3 + 2\sigma^2 - 2\sigma + 1 = \varphi.$$

Az (F. 8) alatt bevezetett jelöléssel és némi számolgatással ezt kapjuk:

$$|\varphi|^2 = \nu^6 + (3\mu^2 - 4\mu)\nu^4 + (3\mu^4 - 8\mu^3 + 8\mu^2 - 2\mu)\nu^2 + (\mu^3 - 2\mu^2 + 2\mu - 1)^2.$$

Ki kell elégítenünk a $|\varphi|^2 \leq \varrho^2 < 1$ egyenlőtlenséget. De ez $\mu \leq 0$ esetén nem állhat, mivel akkor a jobb oldal első három tagja nem-negatív, az utolsó pedig egy 1-nél abszolút értékben nem kisebb szám négyzete. Tehát $\mu = \operatorname{Re} \sigma > 0$. (Vége a lemma bizonyításának.)

Az 1. tétel bizonyítása $\vartheta = 1, 2, 3, 4$-re. (Folytatás)

Bebizonyítottuk, hogy ami az 1–4. sz. modellek aggregált alakját illeti, az 1F. lemma (i) feltétele ki van elégítve, ha az 1. tétel (ii) feltétele áll. Tehát az 1F. lemma (ii) feltétele elégséges és szükséges is az aggregált modellek stabilitásához. Ezzel az eredeti (aggregálatlan) modellek stabilitása is bizonyítva van a q, r, k, w vektorváltozókban a $\beta > \underline{\beta}^\vartheta$ ($\vartheta = 1, 2, 3, 4$) feltétel mellett [lásd (24)]. De a V, K, Y, W mátrixváltozók vonatkozásában csak a Ve, Ke, Ye, We aggregátumok stabilitását bizonyítottuk. Ezt tehát még ki kell terjeszteni az eredeti változókra. De ha a q, r, k, w vektorváltozókat adottaknak tekintjük, akkor a mátrixváltozókra vonatkozó egyenletek szétesnek komponensenként az alább következő skaláris egyenletekből álló rendszerekké.

$$\text{(F.16)} \qquad \left.\begin{aligned} \dot{V}_{ij} &= Y_{ij} - \mathrm{A}_{ij} r_j \\ \dot{Y}_{ij} &= -2\beta\gamma \dot{V}_{ij} - \gamma^2(V_{ij} - V^*_{ij}) \end{aligned}\right\} \quad (\vartheta = 1,4)$$

$$\text{(F.17)} \qquad \left.\begin{aligned} \dot{V}_{ij} &= Y_{ij} - A_{ij} r_j \\ -\dot{K}_{ij} &= -W_{ij} + Y_{ij} \\ \dot{W}_{ij} &= -2\beta\gamma \dot{V}_{ij} - \gamma^2(V_{ij} - \mathrm{V}^*_{ij}) \\ \dot{Y}_{ij} &= -2\beta\gamma(-\dot{K}_{ij}) - \gamma^2(-K_{ij} + \mathrm{K}^*_{ij}) \end{aligned}\right\} \quad (\vartheta = 2, 3)$$

Ezek is (F.1)—(F.2) alakú redukált formáknak tekinthetők, a következő specifikálással

$$\text{(F.18)} \qquad \mathrm{R}^\vartheta = [1], \qquad \text{ha } \vartheta = 1,4$$

$$\text{(F.19)} \qquad \mathrm{R}^\vartheta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{ha } \vartheta = 2, 3$$

Az (F.18) alatt egy degenerált (1-szer 1-es) mátrixot találunk, melynek egyetlen sajátértéke $\sigma = 1$, és így $\mathrm{Re}\,\sigma > 0$. Továbbá az 1F. lemma alkalmazásával a $\beta > 0$ feltételt kapjuk, ami a $\beta > \underline{\beta}^\vartheta(\vartheta = 1, 4)$ feltételből amúgy is következik. Így $\beta > \beta^\vartheta = \underline{\beta}^\vartheta(\vartheta = 1, 4)$ elégséges és szükséges feltétele az 1. és 4. sz. modellek stabilitásának, miként ezt az 1. tétel (i) állítása mondja.
(F.19)-ben a

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$$

sajátértékeknek ugyancsak pozitív a valós része és a 2F. lemma (ii) feltételét alkalmazva rá a

$$\beta > \frac{\sqrt{6}}{4} \sim 0{,}6123$$

pótlólagos feltételt kapjuk. Tehát a $\beta^\vartheta = \max\left\{\underline{\beta}^\vartheta, \frac{\sqrt{6}}{4}\right\}$ deficíniót figyelembe véve az 1. tétel (i) feltétele szükséges a stabilitáshoz, ha $\vartheta = 2, 3$; elégséges, ha $\vartheta = 3$, és a (ii) feltétellel együtt elégséges, ha $\vartheta = 2$. (Vége az 1. tétel bizonyításának a $\vartheta = 1, 2, 3, 4$ esetre.)

3. *Az* 1. *tétel bizonyítása* $\vartheta = 5$*-re*

Helyettesítsük Y-t (22)-ből (1)-be:

$$\text{(F.20)} \qquad \dot{q} = (\mathrm{E} - \mathrm{A})r - c.$$

Helyettesítsük ezután g-t (20)-ból (21)-be, majd $\dot{p}$-ot (19)-ből az így előálló egyenletbe:

$$\text{(F.21)} \qquad \dot{r} = \alpha(\mathrm{E} - \mathrm{A}')[-2\beta\gamma\dot{q} - \gamma^2(q - \mathrm{q}^*)].$$

Ha itt $\beta/\sqrt{\alpha}$-t írunk β helyére és $\gamma/\sqrt{\alpha}$-t γ helyére, akkor α formálisan eltűnik,

(α szerepére még visszatérek). Ha ezekután $\dot{q}$-ot (F.20)-ból (F.21)-be helyettesítjük, a következő rendszert kapjuk:

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \mathrm{E}-\mathrm{A}\\ -\gamma^2(\mathrm{E}-\mathrm{A}') & -2\beta\gamma(\mathrm{E}-\mathrm{A}')(\mathrm{E}-\mathrm{A})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\ r\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}-c\\ \gamma^2(\mathrm{E}-\mathrm{A})\,\mathrm{q}^*+2\beta\gamma(\mathrm{E}-\mathrm{A}')\,c\end{bmatrix}. \tag{F.22}$$

Jelöljük most $\mathfrak{D}$-vel az $(\mathrm{E}-\mathrm{A}')\,(\mathrm{E}-\mathrm{A})$ mátrix spektrumát, és jelölje $\delta\in\mathfrak{D}$ egy sajátértékét, d pedig a megfelelő sajátvektort. Mivel az $(\mathrm{E}-\mathrm{A}')\,(\mathrm{E}-\mathrm{A})$ Gram-féle mátrix szimmetrikus, δ valós szám, és mivel pozitív definit is, $\delta>0$ minden $\delta\in\mathfrak{D}$-re. Az (F.22)-nek megfelelő H rendszermátrix:

$$\mathrm{H}=\begin{bmatrix}0 & \mathrm{E}-\mathrm{A}\\ -\gamma^2(\mathrm{E}-\mathrm{A}') & -2\beta\gamma(\mathrm{E}-\mathrm{A}')(\mathrm{E}-\mathrm{A})\end{bmatrix},$$

spektrumáról pedig beláthatjuk, hogy a következő alakú:

$$\mathcal{H}=\{\chi\mid\chi^2+2\beta\gamma\delta\chi+\gamma^2\delta=0,\ \delta\in\mathfrak{D}\} \tag{F.23}$$

Ez úgy látható be, hogy behelyettesítjük a

$$\mathrm{h}=\begin{bmatrix}(\mathrm{E}-\mathrm{A})\,\mathrm{d}\\ \chi\mathrm{d}\end{bmatrix}$$

sajátvektort a $\mathrm{Hh}=\chi\mathrm{h}$ egyenletbe.

Az (F.23)-beli karakterisztikus egyenlet megoldásaként azt kapjuk, hogy

$$\chi=\gamma[-\beta\delta\pm\sqrt{\beta^2\,\delta^2-\delta}],$$

és mivel $\delta>0$, Re $\chi<0$ akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\beta>\underline{\beta}^5=0.$$

Mivel pedig a rendszer stabilitása ezek szerint csak β előjelén múlik, utólag igazolódott α kiküszöbölésének jogossága. (Vége az 1. tétel $\vartheta=5$ eset bizonyításának.)

4. *A* 2. *tétel bizonyítása*

Ebben a bizonyításban a

$$\|\,\mathrm{b}\,\|=\max_i\,|\,\mathrm{b}_i\,|$$

ún. kocka-vektornormát fogom használni, a hozzá tartozó természetes mátrixnormával együtt:

$$\|\,\mathrm{B}\,\|=\max_i\sum_j|\,\mathrm{B}_{ij}\,|$$

úgy, hogy az ismert

$$\|\,\mathrm{Bb}\,\|\le\|\,\mathrm{B}\,\|\cdot\|\,\mathrm{b}\,\| \tag{F. 24}$$

egyenlőtlenség érvényes lesz.

A dolgozatban tárgyalt mindegyik modell

$$\dot{x} = \mathrm{P}x + \mathrm{R}\mathrm{u} \tag{F. 25}$$

alakra hozható, ahol

x: a releváns változók vektora (úgy hogy a mátrix alakú változók elemeit oszloponként egymás alá írjuk és az irreleváns változókat elhagyjuk),

u: a bejövő jelek vektora, ami konstans akkor, ha a c végső felhasználás konstans.

P: a rendszermátrix, amely minden modellünk esetében nemszingulárisnak bizonyul.

Az eredeti modellek átírása az (F.25) alakra fáradságos munka, amely behelyettesítéseket és a változók átrendezését követeli meg, éppen ezért itt nem részletezem. Ha az eredeti rendszerek stabilisak saját változóikban, akkor (F.25) alakjukban is azok x-ben. Mivel pedig P mind az öt modellben nem-szingulárisnak adódik, állandósult állapotukat

$$\mathrm{x}_\infty = -\mathrm{P}^{-1}\mathrm{R}\mathrm{u} \tag{F.26}$$

alakban írhatjuk. Mivel pedig x csak a releváns változókat tartalmazza és a 4. feltevés is áll, a 2. korollárium értelmében:

$$\mathrm{x}_\infty = -\mathrm{P}^{-1}\mathrm{R}\mathrm{u} > 0. \tag{F. 27}$$

Tegyük most fel, hogy valamilyen $\delta > 0$-ra

$$||\mathrm{x}^0 - \mathrm{x}_\infty|| < \delta, \tag{F. 28}$$

azaz az x^0 induló állapot eléggé közel van az állandósult állapothoz.

(F. 25) megoldása felírható a következő alakban

$$x(t) = \mathrm{x}_\infty + \exp(\mathrm{P}t)(\mathrm{x}^0 - \mathrm{x}_\infty). \tag{F. 29}$$

Ha a rendszer aszimptotikusan stabilis, akkor az $\exp(\mathrm{P}t)$ mátrix elemei mindannyian korlátosak alulról is és felülről is $t \geq 0$-ra, tehát $||\exp(\mathrm{P}t)|| \leq \psi$, $\forall t \geq 0$, ahol $\psi > 0$ és nem függ az időtől. (F 29)-ből ezt kapjuk:

$$||x(t) - \mathrm{x}_\infty|| = \exp(\mathrm{P}t)(\mathrm{x}^0 - \mathrm{x}_\infty) \leq ||\exp(\mathrm{P}t|| \cdot ||\mathrm{x}^0 - \mathrm{x}_\infty|| \leq \psi\delta,$$

ahol (F. 24)-et és (F. 28)-at vettük figyelembe.

Az $x(t)$ trajektória tehát teljes egészében benne fekszik egy olyan kockában, amelynek középpontja a pozitív x_∞ pont, élhosszúsága pedig $2\psi\delta$ ugyancsak pozitív. Ha mármost δ elég kicsiny, akkor az egész kocka úgy összezsugorodik, hogy beleessék a nem-negatív ortánsba, és így $x(t) \geq 0$ minden $t \geq 0$-ra. (Vége a bizonyításnak.)

5. *A 3. tétel bizonyítása*

Integráljuk (21)-et $\tau = 0$-tól $\tau = t$-ig és helyettesítsük be (20)-ból g-t:

$$r - \mathrm{r}^0 = \alpha(\mathrm{E} - \mathrm{A}')(p - \mathrm{p}^0).$$

Ebből azt kapjuk, hogy:

$$p = \mathrm{p}^0 + \frac{1}{\alpha}\mathrm{L}'(r - \mathrm{r}^0).$$

Aszimptotikus stabilitás esetén r korlátos $[0, \infty]$-ben és így $p^0 > 0$ maga után vonja, hogy $p(t) \geq 0$, $\forall t$, ha α eléggé nagy. (Vége a bizonyításnak.)

(Beérkezett: 1984. március 8-án.)

IRODALOM

1. BENASSY, J.-P.: *The Economics of Market Disequilibrium.* London, 1982. Academic Press.
2. KAWASAKI, S., J. McMILLAN—K. F. ZIMMERMANN: „Disequilibrium Dynamics: An Empirical Study" *American Economic Review* 72 (1980) 992—1003.
3. KORNAI J.: *Anti-equilibrium* Budapest, 1971. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
4. KORNAI J.: *A hiány* Budapest, 1980. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
5. KORNAI J.: „Hard and Soft Budget Constraint", *Acta Oeconomica*, 25 (1980) 231—247.
6. KORNAI J.: *Növekedés, hiány és hatékonyság* Budapest, 1982. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
7. KORNAI, J.—B. MARTOS: „Autonomous Functioning of the Economic System", *Econometrica*, 41 (1973) 801—820.
8. KORNAI J.—MARTOS B. (szerk.) *Szabályozás árjelzések nélkül* Budapest, 1981. Akadémiai Kiadó.
9. KORNAI J.—J. W. WEIBULL: „A piac normál állapota hiánygazdaságban: egy sorbanállási modell" *Szigma* 11 (1981) 1—32.
10. MARTOS, B.: „Comparison of Economic Control Systems" in *Models and Decision Making in National Economies*, ed. by J. M. L. Janssen, L. F. Pau and A. Straszak, Amsterdam, 1979. North-Holland.
11. MARTOS, B.: „Non-Price Control (Report on a Research Trend)" in *Dynamic Modelling and Control of National Economies*, ed. by J. M. L. Janssen, L. F. Pau and A. J. Straszak, Oxford, 1980. Pergamon Press.

A FAMILY OF NON-WALRASIAN CONTROL MODELS

A series of five new control models is presented in the spirit of the papers collected in the volume "Non-Price Control". Different control mechanisms are fitted to the same open static Leontief-economy. The controllers are characterized by uncoordinated decision making and by the application of the "control by norm" principle. Quantity signals (on input stocks and backlog orders) play primary role in the information processes. Conditions for the asymptotic stability of non-Walrasian equilibria are given and local viability of the transient responses proved.

СЕМЕЙСТВО МОДЕЛЕЙ РЕГУЛИРОВАНИЯ НЕ ТИПА ВАЛЬРАСА

В статье представлено пять новых моделей, разработанных в духе сборника статей «Регулирование без ценовых сигналов». Автор применяет для регулирования открытого, статического хозяйства Леонтьева различные механизмы. Регуляторы характеризуются некоординированным принятием решений и применением принципа «нормативного регулирования». В информационном процессе первостепенную роль играют количественные сигналы (входная и выходная информация о запасах и заявках). Автор описывает условия асимптотической стабильности состояния равновесия не типа Вальраса, а также доказывает локальное действие транзитивных ответов.