

Mérési helyek optimális kijelölése talajvizek minőségvizsgálatában

I. Bevezetés

Az alkalmazott tudományok és így a hidrológia művelése során is gyakran találkozunk olyan adatokkal, amelyek térben és időben kiterjedő valószínűségi változók halmazával jellemezhetők. Az ötvenes évek végén és a hatvanas évek elején *Matheron* (1957, 1963) dolgozta ki a regionalizált változók elméletének alapjait, és vezette be a kriging módszer különféle változatait. A konkrét módszerek jó leírása megtalálható a szakirodalomban [*Kapolyi* (1981), *Journal* és *Huijbregts* (1978), *David* (1977)]. Azóta ezeket az eljárásokat az alkalmazott tudományok számos területén alkalmazzák. A bányászati alkalmazásokat tárgyalja *Kapolyi* (1981), *Journal* és *Huijbregts* (1978), a hidrológiai alkalmazások néhány kérdését mutatja be *Delhomme* (1978), *Gambolati* és *Volpi* (1979), talajmechanikai alkalmazásokat vizsgál *Webster* és *Burgess* (1980).

A kriging módszer szokásos változatai nemcsak a szóban forgó változó egyegy pontban felvett értékét és adott tartományokon való átlagértékét becsülik meg, hanem a becslési bizonytalanságát jellemző becslési varianciát is megadják. A módszerek nagyon fontos tulajdonsága, hogy a becslési variancia értéke nem függ közvetlenül a mérési adatoktól, csak a mérési pontok koordinátáitól. Ez más szavakkal azt is jelenti, hogy a becslési bizonytalanságot a mérések konkrét elvégzése előtt jellemezni tudjuk. A kriging-típusú módszereknek ez a tulajdonsága lehetőséget ad arra, hogy a mérési helyeket optimálisan kijelölhessük.

Mérési pontok optimális kijelölésével több szerző is foglalkozott. Egyetlen hely kijelölését *Delhomme* (1978) vizsgálta, és egy szekvenciális módszert javasolt a mérési pontok fokozatos bevonására. Több mérési hely szimultán kijelölésével először *Szidarovszky* (1981) foglalkozott, aki matematikai programozási feladatok megoldására redukálta a problémát. Egy egyszerű szám példát mutatott be a *Szidarovszky* (1982a) dolgozatban és egy konkrét bányászati alkalmazást tárgyal a *Szidarovszky* (1982b) tanulmány. A redukált matematikai programozási feladat nemkonvex, így megoldására speciális algoritmusok kidolgozása szükséges (*Szidarovszky*, 1982c, d).

Jelen dolgozatunkban egy speciális leszámplálási algoritmust ismertetünk a fenti feladat megoldására. Először a kriging módszer alapjait vázoljuk, majd a leszámplálási algoritmust részletezzük. A San Pedro folyó (Arizona) vízgyűjtőjének fluor szennyeződése mérésére alkalmazzuk ezután eljárásunkat. A dolgozatot néhány észrevétellel, következtetéssel és általánosítási lehetőséggel leírásával zárjuk.

* A tanulmány akkor készült, amikor az első szerző az Arizonai Egyetem Rendszerelméleti Tanszékén vendégelőadóként dolgozott 1981 augusztusától 1983 januárig.

2. A kriging módszer alapelve

A kriging módszerek nevüket D. G. Krige-ről kapták, aki először javasolt hasonló alapgondolatú eljárást aranybányák készletének becslésére (Krige, 1951). A módszeresalád legegyszerűbb változatát ismertetjük a továbbiakban, az általánosított eljárások a szakirodalomban megtalálhatók (Journal és Huijbregts, 1978).

Jelöljön D egy tartományt az egy, két, vagy három dimenziós térben. Tegyük fel továbbá, hogy tetszőleges $x \in D$ estén létezik a $Z(x)$ valószínűségi változó, valamint tetszőleges $x, x + h \in D$ esetén

$$E[Z(x + h) - Z(x)] = 0 \quad (2,1)$$

$$\text{Var} [Z(x + h) - Z(x)] = 2\gamma(h). \quad (2,2)$$

Az első feltételből nem következik, hogy a $Z(x)$ valószínűségi változóknak létezik a várható értéke, hiszen azonos Cauchy eloszlások eleget tesznek a (2,1) feltételnek és mégsem rendelkeznek várható értékkel. A második feltétel szerint a $Z(x)$ függvény megváltozásának a varianciája a független változók megváltozásától függ. A $\gamma(h)$ függvényt variogramnak nevezzük.

A (2,1) és (2,2) feltételeknek eleget tevő sztochasztikus függvényeket *belső függvényeknek* is nevezzük (Matheron, 1973). Megjegyezzük, hogy a fenti feltételek számos általánosítását tárgyalja David (1977).

Legyen ezután V a D tartomány egy részhalmaza. A $Z(x)$ függvény V -n felvett átlagértékét a

$$Z(V) = \frac{1}{|V|} \int_V Z(x) dx \quad (2,3)$$

összefüggéssel definiálhatjuk, ahol $|V|$ jelöli a V halmaz mértékét (hosszát, területét vagy térfogatát a dimenziótól függően.) A kriging módszer alkalmazásakor a $Z(V)$ átlagértéket a $Z(x)$ függvény aktuálisan mért $Z(x_1), \dots, Z(x_n)$ értékeinek lineáris kifejezésével becsüljük:

$$Z(V) \approx Z^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i), \quad (2,4)$$

ahol a λ_i együtthatók egyelőre ismeretlenek. A (2,4) becslésről feltesszük, hogy torzítatlan és minimális szórású. A torzítatlansági feltétel nyilvánvalóan teljesül, ha

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1. \quad (2,5)$$

A minimális szórás elérése pedig a

$$\text{Var} [Z^*] \rightarrow \min \quad (2,6)$$

szélsőértékfeladat megoldását igényli. Ismeretes (ld. pl. Szidarovszky, 1981), hogy

$$\text{Var} [Z^*] = -\gamma_{vv} + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{vi} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij}, \quad (2,7)$$

ahol

$$\gamma_{ij} = \gamma(x_i - x_j), \quad \gamma_{vj} = \frac{1}{|V|} \int_V \gamma(x_i - x) dx, \quad \gamma_{vv} = \frac{1}{|V|^2} \int_{V \times V} \gamma(x - x') dx dx'. \quad (2,8)$$

Megjegyezzük, hogy pontbecslések esetén V egyetlen pontból áll, vagyis ekkor $V = \{x_0\}$, valamint a (2,8) összefüggésekben:

$$\gamma_{vi} = \gamma(x_i - x_0), \quad \gamma_{vv} = 0. \quad (2,9)$$

A (2,6) célfüggvénynek a (2,5) feltétel melletti optimalizálására a Lagrange-féle multiplikátor módszert alkalmazhatjuk (*Szép*, 1972), amely végeredményben lineáris egyenletrendszer megoldására vezet:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (2,10)$$

$$\mu + \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_{ij} = \gamma_{vi} \quad (i = 1, \dots, n),$$

ahol μ jelöli a Lagrange-multiplikátort. Az egyenletrendszer $n + 1$ egyenletből áll és $n + 1$ ismeretlent tartalmaz; numerikus megoldására jól alkalmazható számítógépes módszerek állnak rendelkezésünkre (*Szidarovszky*, 1974; *Szidarovszky* és *Yakowitz*, 1983). Az egyenletrendszer megoldásából adódó $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*$ értékek adják a (2,4) becslési együtthatókat, a megfelelő becslési varianciát pedig a (2,7)-ből könnyen származtatható

$$\text{Var}_n [Z^*] = \mu^* + \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \gamma_{vi} - \gamma_{vv} \quad (2,11)$$

kifejezés szolgáltatja. A fenti összefüggések tömör felírása érdekében vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{G}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ 1 & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Upsilon}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{v1} \\ \gamma_{v2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{vn} \end{pmatrix}. \quad (2,12)$$

Ekkor a (2,10) egyenletrendszer a tömör

$$\mathbf{G}_n \boldsymbol{\lambda}_n = \boldsymbol{\Upsilon}_n \quad (2,13)$$

alakban írható fel, valamint

$$\text{Var}_n [Z^*] = \boldsymbol{\Upsilon}_n^T \boldsymbol{\lambda}_n - \gamma_{vv} = \boldsymbol{\Upsilon}_n^T \mathbf{G}_n^{-1} \boldsymbol{\Upsilon}_n - \gamma_{vv}. \quad (2,14)$$

A módszer alkalmazásának két alapvető tulajdonságával foglalkozunk ezután. Tegyük fel, hogy a meglevő x_1, \dots, x_n pontokon kívül egy további x_{n+1} mérési helyet vonunk be a becslési eljárásba. Ekkor a \mathbf{G}_n mátrix egy újabb

oszloppal és sorral, valamint γ_n és λ_n egy-egy újabb elemmel bővül, vagyis

$$\mathbf{G}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_n & \mathbf{g} \\ \mathbf{g}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_{n+1} = \begin{pmatrix} \Upsilon_n \\ \gamma_{v, n+1} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

ahol

$$\mathbf{g}^T = (1, \gamma_{n+1, 1}, \dots, \gamma_{n+1, n}). \quad (2.16)$$

Könnyen kimutathatjuk, hogy az $n + 1$ pontra épülő egyenletrendszer megoldását az n pontra épülő egyenletrendszer megoldásából közvetlenül is megkaphatjuk az egyenletrendszer ismételt megoldása nélkül, ezzel jelentősen csökkenthetjük a szükséges számítások mennyiségét. Keressük ennek érdekében a \mathbf{G}_{n+1} mátrix inverzét is a hasonló blokkosított alakban:

$$\mathbf{G}_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & s \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Ekkor az inverz definíciója alapján $\mathbf{G}_{n+1} \mathbf{G}_{n+1}^{-1} = \mathbf{I}_{n+1}$, azaz

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_n \mathbf{X} + \mathbf{g} \mathbf{y}^T &= \mathbf{I}_n, \\ \mathbf{G}_n \mathbf{y} + \mathbf{g} s &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}^T \mathbf{X} &= \mathbf{0}^T, \\ \mathbf{g}^T \mathbf{y} &= 1, \end{aligned} \quad (2.18)$$

ahol \mathbf{I}_n és \mathbf{I}_{n+1} jelöli az n és $n + 1$ dimenziós egység-mátrixot. Ismeretes (Szidarovszky és Yakowitz, 1978), hogy a (2.18) összefüggések alapján

$$\begin{aligned} s &= \frac{-1}{\mathbf{g}^T \mathbf{m}}, \\ \mathbf{y} &= -\mathbf{m} s, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}_n^{-1} + \frac{1}{s} \mathbf{g} \mathbf{y}^T,$$

ahol $\mathbf{m} = \mathbf{G}_n^{-1} \mathbf{g}$. Egyszerű számolással kimutatható továbbá (Szidarovszky, 1974), hogy az $n + 1$ pontra épülő kriging rendszer megoldása:

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= s(\gamma_{v, n+1} - \mathbf{g}^T \lambda_n^*), \\ \lambda_n &= \lambda_n^* - \mathbf{m} \lambda_{n+1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

ahol most λ_n^* jelöli az n pontra épülő (2.13) egyenletrendszer megoldását; továbbá

$$\text{Var}_{n+1} [Z^*] = \text{Var}_n [Z^*] + \frac{1}{s} \cdot \lambda_{n+1}^2. \quad (2.21)$$

Vegyük észre, hogy a fenti formulák felhasználásával n^2 nagyságrendű művelet végrehajtásával az együtthatómátrix inverzét, a megoldást és a megfelelő becslési varianciát is meghatározhatjuk. Megjegyezzük, hogy az egyenletrendszer közvetlen megoldása n^3 nagyságrendű művelet elvégzését igényelné (Szidarovszky, 1972).

Tegyük fel ezután, hogy az x_1, \dots, x_{n+1} pontok közül az x_{n+1} pontot kihagyjuk a becslésből. Ekkor a \mathbf{G}_{n+1} inverzmátrix (azaz a \mathbf{X} , \mathbf{y} blokk és s konstans), a λ_{n+1} megoldás és a $\text{Var}_{n+1}[Z^*]$ becslési variancia ismeretes. Az x_{n+1} pont elhagyásával adódó újabb \mathbf{G}_n^{-1} inverz, λ_n megoldás és a becslési variancia a fenti egyenlőségek átrendezésével adódnak:

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{s} \mathbf{y},$$

$$\mathbf{G}_n^{-1} = \mathbf{X} - \frac{1}{s} \mathbf{y} \mathbf{y}^T, \quad (2.22)$$

$$\lambda_n^* = \lambda_n + \mathbf{m} \lambda_{n+1},$$

$$\text{Var}_n[Z^*] = \text{Var}_{n+1}[Z^*] - \frac{1}{s} \cdot \lambda_{n+1}^2.$$

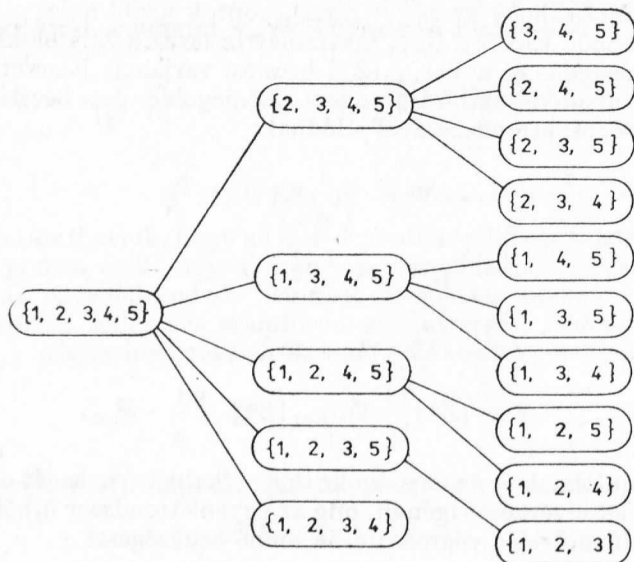
Ezeknek a formuláknak és azonosságoknak az alkalmazása ismét csak n^2 nagyságrendű művelet elvégzését igényli, míg az egyenletrendszer újbóli megoldása n^3 nagyságrendű művelet végrehajtását tenné szükségessé.

3. Mérési pontok optimális telepítése

Jelölje most x_1, x_2, \dots, x_n a meglevő helyeket, valamint tegyük fel, hogy k további mérési helyet kívánunk kijelölni. Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre állnak a t_1, t_2, \dots, t_N mérési hely alternatívák; közülük kívánjuk kijelölni a legjobb k darabot a becslési variancia minimalizálása alapján. A *Szidarovszky* (1981, 1982a,b) dolgozatokban vegyes és tiszta egészértékű programozási modellek felírására került sor, amelyek megoldása az optimális mérési hely kijelölését adja meg. A továbbiakban a probléma megoldására egy speciális leszámítási algoritmust javasolunk.

Az eljárás konkrét ismertetése előtt képezzük a következő irányított gráfot. A gráf csúcspontjainak az $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ halmaz legalább k elemű részhalmazai felelnek meg, a kezdőpontot a teljes halmazzal azonosítjuk. A gráf irányított éleit a következőképpen definiáljuk. Az $\mathbf{I} = \{i_1 < i_2 < \dots < i_r\}$ részhalmaznak megfelelő csúcsból akkor és csak akkor vezet közvetlen él a $\mathbf{J} = \{j_1 < j_2 < \dots < j_s\}$ részhalmaznak megfelelő csúcsba, ha $s = r - 1$, valamint az $(\mathbf{N} - \mathbf{J}) - (\mathbf{N} - \mathbf{I})$ halmaz egyetlen olyan elemből áll, amely nagyobb $(\mathbf{N} - \mathbf{I})$ összes eleménél. Ezt a tulajdonságot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a \mathbf{J} halmaz \mathbf{I} -ből egyetlen olyan elem elhagyásával adódik, amely nagyobb, mint az \mathbf{I} halmaz esetében elhagyott elemek mindegyike. Az $N = 5$, $k = 3$ esetnek megfelelő gráfot a 3.1 ábra mutatja be. Vegyük észre, hogy az \mathbf{I} csúcspontból közvetlen éllel elérhető csúcspontokat az elhagyott elemek nagyságrendje szerint rendeztük. Például a kezdőpontból az 1 elem elhagyásával a $\{2, 3, 4, 5\}$ pont adódik, a 2 elem elhagyásával $\{1, 3, 4, 5\}$, 3 elhagyásával $\{1, 2, 4, 5\}$, a 4 elhagyásával $\{1, 2, 3, 5\}$ és végül 5 elhagyásával adódik az $\{1, 2, 3, 4\}$ csúcspont. Ezeket a csúcspontokat pedig ebben a sorrendben ábráztuk felülről lefelé.

A leszámítási eljárást a gráf kezdőpontjánál kezdjük, amikor kiszámítjuk a hozzátartozó kriging rendszer együtthatómátrixának inverzét, a becslési



3.1 ábra. Az algoritmus irányított gráfja

együtthathókat és varianciát. Minden lépésben pedig egy-egy csúcsból egy szomszédosba haladunk a következő szabály szerint:

a) Tegyük fel, hogy a következő feltételek közül legalább egy fennáll:

(i) az illető csúcsból kiinduló valamennyi él végpontjában már jártunk, vagy az illető csúcsból nem indul ki újabb él (azaz a csúcshoz pontosan k elem tartozik);

(ii) a csúcsponthoz tartozó becslési variancia érték nem kisebb, mint az eddig már megvizsgált k elemű halmazokhoz tartozó legkisebb varianciaérték.

Ekkor haladjunk vissza az ebbe a csúcsponthoz befutó él mentén.

b) Ha a fenti feltételek egyike sem teljesül, akkor haladjunk előre a gráf mentén az első olyan csúcsponthoz, amelyet még nem vizsgáltunk meg.

c) Az eljárás akkor ér véget, ha az $\{1, 2, \dots, k\}$ csúcsponthoz is megvizsgáltuk.

Optimálisnak pedig azt a pontosan k elemű részhalmazt fogadjuk el, amely a legkisebb becslési varianciát szolgáltatja. Ha $\{i_1, \dots, i_k\}$ jelöli azt a részhalmazt, akkor a $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ újabb mérési pontokat tekintjük optimálisnak.

Az algoritmussal kapcsolatban néhány további megjegyzést teszünk. Az a) eset (i) feltétele akkor teljesül, ha az illető csúcsponthoz nem tudunk újabb csúcsba közvetlen előre haladással eljutni. A (ii) feltétel szerint az illető csúcsponthoz tartozó becslési variancia nem jobb, mint az eddig talált optimum. Ekkor pedig nem érdemes újabb mérési pontokat elhagynunk, hiszen ekkor a becslési variancia tovább romlana. A c) eset akkor teljesül, ha a kezdőponthoz kiinduló utolsó él végpontját is megvizsgáltuk, amelyből már további él nem indul ki. Bármelyik él mentén is haladunk előre, az él végpontja egyetlen mérési pont elhagyásával adódik a kezdőponthoz, visszafelé történő haladás

esetén egyetlen újabb mérési pontot vonunk be a kriging becslésbe. Mindkét esetben a megfelelő kriging rendszer együtttható-mátrixának inverze, a rendszer megoldása és a becslési variancia az előző paragrafusban bemutatott egyszerűsített módszerekkel származtatható a kriging rendszer újbóli megoldása helyett. Ha a számítógép memóriájában elegendő hely áll rendelkezésünkre, akkor visszafelé haladáskor nem kell a fenti mennyiségeket újra meghatározunk, hiszen a megfelelő újabb csúcspontot a korábbiak során már megvizsgáltuk. Vegyük azt is észre, hogy ez esetben maximálisan $N - k + 1$ mátrixot kell egyszerre tárolnunk, amelyek megfelelnek a kezdőpontból az illető csúcsba vezető útvonal csúcspontjaihoz tartozó adatoknak.

Az imént bemutatott eljárás többféleképpen is módosítható és általánosítható (Szidarovszky, 1982c, d). Megjegyezzük végül, hogy a leszámlálási eljárás fentiekben is alkalmazott alapelve a korlátozás és szétválasztás (Forgó, 1974) módszerének egy alkalmas adaptálása.

4. A San Pedro folyó vízgyűjtőjének vizsgálata

A San Pedro folyó Mexico Sonora államában ered, és észak felé folyik át az Egyesült Államokba, ahol az arizonai Gila folyóval egyesülve még kb. 150 mérföldet halad észak felé, ahol eltűnik a sivatagban. A San Pedro vízgyűjtője kb. 4483 négyzetmérföldet tesz ki, amelyből kb. 696 négyzetmérföld Mexicohoz tartozik. A folyó felső szakaszát fogjuk vizsgálni, amely mintegy 65 mérföld hosszan, váltakozó, 15-től 65 mérföld szélességben terjed el az Arizona állam Cochise megyéjében, és északról a Winchester hegység, valamint nyugatról a Rincon, Whetstone és Huachuca hegység határolja.

A vízgyűjtőhöz jelentős mennyiségű talajvíz tartozik, amely a sivatagi klíma miatt alapvető fontosságú az ivóvíz ellátás és mezőgazdasági öntözés szempontjából. A talajvíz általában jó minőségűnek tekinthető, azonban St. David – Benson környékén fluorral szennyezett. Ez a fluor szennyezés káros hatásokkal, például esontkárosodással járhat (Smith és Commack Smith, 1932). Éppen ezért alapvető fontosságú a fluor szennyeződés állandó ellenőrzése. A St. David környéki átlagos fluortartalom becslését kutak adataival végzik. Esetünkben tehát $Z(x)$ az x helyen jelentkező fluorszennyeződés mértékét jelenti, a V tartomány a St. David környékét. Az átlagszennyeződés a (2,3) átlagértékkel jellemezhető.

A kutak közül 33-ban mérik rendszeresen a fluor szennyeződés mértékét, így e kutak helyét tekintjük létező mérési pontnak, azaz esetünkben $n = 33$. A fluor szennyeződés eredete ismeretlen és a szennyeződés helyi elterjedésében semmilyen trend sem ismeretes. A (2,1), (2,2) feltételek teljesülését a mért adatok alapján hipotézis vizsgálattal ellenőriztük. Első lépésként a variogramot határoztuk meg. Először a mért adatok alapján tapasztalati variogramot konstruáltunk (Szidarovszky, 1982a), majd szférikus függvényt (Szidarovszky, 1982a) illesztettünk a legkisebb négyzetek módszerével. Eredményül a

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & \text{ha } h = 0 \\ a_0 + \frac{w}{2} \left[\frac{3h}{a} - \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right], & \text{ha } 0 < h \leq a \\ a_0 + w, & \text{ha } h \geq a \end{cases} \quad (4.1)$$

függvény adódott, ahol $a_0 = 1,0$, $w = 2,8$ és $a = 8,0$ (mérőföld).

A vizsgált területen még 10 olyan kút létezik, amelyet a vízszennyeződés mérésére konkrétan nem használnak. Feladatunk az volt, hogy a 10 meglévő kútból kiválasszuk azt a hatot, amelyet a továbbiak során bevonnának a mérési gyakorlatba. Tehát $N = 10$ és $k = 6$.

Az előző paragrafusban leírt leszámítási eljárást alkalmaztuk a konkrét esetre, és az optimális 6 további kút bevonása esetén becslési varianciának 0,1236 adódott.

Mint hogy a variogram paraméterei bizonytalanok (véges sok érték alapján történő becsléssel és simítással adódtak), a teljes számításot kissé megváltoztatott paraméterértékek mellett többször megismételtük. Egyetlen esettől eltekintve mindig ugyanazok a mérési helyek adódtak optimálisnak, az egyetlen kivétel az a_0 értékének drasztikus csökkentésekor adódott. A becslési variancia pedig esetről esetre változott. Ezzel mi is alátámaszthatjuk a kriging módszerének alkalmazásánál gyakran hangoztatott körülményt, miszerint a módszer igen stabil a függvény becslésekor, viszont instabil a becslési varianciát illetően.

A konkrét számításokat az Arizonai Egyetem, Tucson (U.S.A.) CDC Cyber 175 típusú számítógépén végeztük. A teljes számítás összesen 3,5 másodperc gépidőt vett igénybe, amely tisztán mutatja az eljárás gyorsaságát és gyakorlati alkalmazhatóságát.

5. Következtetések

A dolgozat elméleti eredményeiből és az esettanulmányból az alábbi következtetések adódnak:

a) A kriging módszer és a mérési pontok optimális kijelölését biztosító eljárás hasznosan alkalmazható a hidrológiában és egyéb földtudományokban. További alkalmazásokat tervezünk többek között a következő területeken:

- bányászati fúrólukák optimális telepítése;
- kőzetmechanikai adatok mérése;
- talajvízszint és vízminőség becslése;
- csapadék mennyiségének becslése;
- meteorológiai mérések optimalizálása.

b) Ha az adatok trenddel rendelkeznek, akkor az univerzális kriging módszerét alkalmazhatjuk (*Matheron*, 1969).

c) Az itt bemutatott eljárás többcélú kiterjesztése a következő esetekben célszerű;

— egyszerre több korrelált függvény szimultán becslésekor a cokriging (*Journal* és *Huijbregts*, 1978) módszerét kell alkalmaznunk, és a különböző függvények becsléseinek varianciái jelentik a célfüggvényeket;

— egyetlen függvény értékét egyszerre több pontban vagy tartományon is becsülhetjük, ilyenkor az egyes becslések varianciái adják a célfüggvényeket. Például terület lehatárolásakor és izovonalak szerkesztésekor egy előre adott hálózat pontjaiban becsüljük a függvény értékét;

— az előző két eset összevonásakor több függvényt becsülünk egyszerre több ponton vagy tartományon.

d) A bizonytalan variogram paraméterek hatása nemcsak az esettanulmányban bemutatott érzékenységi vizsgálattal elemezhető, hanem a bayes döntésmélet számos módszerét is alkalmazhatjuk (*de Groot*, 1970).

(Beérkezett: 1984. február 20-án.)

IRODALOM

1. DAVID, M. (1977) *Geostatistical Ore Reserve Estimation*. Elsevier Scientific Publ. Co., New York.
2. DE GROOT, M. H. (1970) *Optimal Statistical Decisions*. Mc. Graw Hill Book Co., New York.
3. DELHOMME, J. P. (1978) Kriging in the Hydrosociences. *Advances in Water Resources*, Vol. 1, No. 5, pp. 251—266.
4. FORGÓ F. (1974) *Nemkonvex és diszkrét programozás*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
5. GAMBOLA TI, G.—G. VOLPI (1979) Groundwater Contour Mapping in Venice by Stochastic Interpolation, 1. Theory. *Water Resources Research*, Vol. 15. No. 2, pp. 281—290.
6. JOURNEL, A. G.—CH. J. HUIJBREGTS (1978) *Mining Geostatistics*. Academic Press, New York.
7. KAPOLYI L. (1981) *Ásványi eredetű nyersanyagok rendszer- és függvényszemlélete*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
8. KRIGE, D. G. (1951) *A Statistical Approach to Some Mine Valuation and Allied Problems on the Witwatersrand*. Master's thesis. Johannesburg, Univ. of Witwatersrand, 136 p.
9. MATHERON, G. (1957) Theorie lognormale de l'échantillonnage systématique des gisements. *Ann. Mines*, pp. 566—584.
10. MATHERON, G. (1963) Principles of Geostatistics. *Econ. Geol.* Vol. 58, pp. 1246—1266.
11. MATHERON, G. (1969) Le krigeage universel. *Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique*, No. 1, ENSMP, Paris. 82. p.
12. MATHERON, G. (1973) The Intrinsic Random Functions and their Applications. *Adv. in Appl. Prob.* Vol. 5, pp. 439—468.
13. SMITH, H. V.—M. COMMACK SMITH (1932) Mottled Enamel in Arizona and its Correlation with the Concentration of Fluorides in Water Supplies. Univ. of Arizona Agr. Exp. Station, *Techn. Bull.* 43, July.
14. SZÉP J. (1972) *Analízis*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
15. SZIDAROVSKY F. (1974) *Bevezetés a numerikus módszerekbe*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
16. SZIDAROVSKY F. (1981) *Az univerzális kriging módszer néhány fontos tulajdonsága*. KBF1 kutatási jelentés, 1981 aug.
17. SZIDAROVSKY F. (1982a) Új módszer kísérletke optimális tervezésére. *Statistikai Szemle*, 1114—1121. o.
18. SZIDAROVSKY F. (1982b) Optimal Data Management in Geostatistics and Underground Hydrology. Paper presented at the SIAM 30th Anniversary Meeting, July 1982, Stanford, California és *Applied Mathematical Modelling*, Megj. alatt.
19. SZIDAROVSKY F. (1982c) Optimal Data Management in the Theory of Regional Variables. Paper presented at the ORSA-TIMS Meeting, Oct. 1982. San Diego, Calif.
20. SZIDAROVSKY F. (1982d) Multiobjective Observation Network Design for Regionalized Variables. *International Journal of Mining Engineering*, (megj. alatt) és Working paper 82—36, Systems and Ind. Eng. Dept., Univ. of Arizona, Tucson, AZ., 85721
21. SZIDAROVSKY F.—S. YAKOWITZ (1978) *Principles and Procedures of Numerical Analysis*. Plenum Publ. Comp., New York—London.
22. SZIDAROVSKY F.—S. YAKOWITZ (1983) *An Introduction to Numerical Computations* Megj. alatt.
23. WEBSTER, R.—T. M. BURGESS (1980) Optimal Interpolation and Isarithmic Mapping in Soil Properties. III. Changing Drift and Universal Kriging. *J. of Soil Sciences*, Vol. 31, pp. 505—524.

OPTIMUM LOCATION OF MEASURING POINTS IN THE
QUALITY ANALYSIS OF GROUNDWATER

The regular checking of the quality of groundwater is a highly costly process. Thus, the cheapest possible implementation of the measurements is an important task. The study proposes a method for the solution of this problem. The procedure is based on the principles of modern geostatistics and relies on the Kriging method. First the bases of the Kriging method are reviewed and then the methodology of the optimum location of measuring points is discussed. Finally the application of the procedure is presented in a case study.

ОПТИМАЛЬНОЕ НАХОЖДЕНИЕ МЕСТ КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ГРУНТОВЫХ ВОД

Систематический контроль качества грунтовых вод весьма дорогостоящий процесс. Как можно более дешево получить нужных данных измерений является очень важной практической задачей. В статье предлагается метод решения данной проблемы, который базируется на основных принципах современной геостатистики, на метода Кригинга. Сначала излагаются основы метода Кригинга, а затем рассматривается методика оптимального определения мест измерений. В заключение описывается конкретный случай практического использования упомянутых методов.