Medvegyev Péter

A féligvégtelen lineáris programozás és a matematikai közgazdaságtan

A matematikai közgazdaságtannal való első felületes ismerkedés során is nyilvánvalóvá válik, hogy a tételek túlnyomó többsége valamely lineáris tér konvex részhalmazainak tulajdonságain alapszik. Matematikai-technikai oldalról megközelítve a matematikai-közgazdasági irodalom jelentős hányada: a konvex analízis egy speciális alkalmazási területe. Némi túlzással azt is mondhatnánk, hogy miként a klasszikus mechanika a másodrendű közönséges differenciálegyenletek elméletének fizikai alkalmazása, ugyanúgy a matematikai közgazdaságtan a konvex analízis közgazdasági alkalmazása. A konvex analízis és a matematikai közgazdaságtan mélyreható összefonódása elsősorban a közgazdaságtant alapjaiban átható egyensúlyi gondolkodás eredménye. Az egyensúlyelmélet az egyensúly és a hatékonyság fogalmaira és ezen fogalmak viszonyára, kapcsolatára épül. Az egyensúly-hatékonyság párosnak a konvex analízis oldaláról a fixpont tulajdonság, illetve a szeparációs tételre épülő dualitási tételek felelnek meg. Valamely közgazdasági modell egyensúlyi megoldásának létezését tárgyaló dolgozat megírásakor egyszerű szabályt kell követni: használd a Kakutani-fixponttételt! A szeparációs tétel szerteágazó alkalmazásait vizsgálva a kép összetettebb. A szeparációs tétel különböző alakjai mellett nagyszámú, eltérő szemléletű dualitási tétellel találkozhatunk. Tovább kuszálja a képet, hogy az irodalom a poliedrikus esetet, amikor a modellekben szereplő halmazok lineáris egyenlőtlenségekkel vannak megadva, az általános esettől függetlenül és eltérően tárgyalja, és így kimondva kimondatlanul szembeállítja őket egymással. A jelen dolgozat célja, hogy néhány alkalmazáson keresztül bemutassa, miként használható az ún. féligvégtelen lineáris programozási feladat matematikai-közgazdasági tételek bizonyítására. A végtelen sok feltételt tartalmazó lineáris programozási feladat használatát egyszerűsége mellett elsősorban didaktikai okok indokolják. A matematikai közgazdaságtan világába bebocsátást kereső hallgató útja az egyetemi képzés során a lineáris algebra, lineáris programozás tárgyakon keresztül vezet. Mivel a lineáris programozás és az LP dualitási tétel tradicionálisan központi eleme a képzésnek, célszerű a haladottabb tételeket olyan eszközre alapozni, amely szemléletében közvetlen általánosítása a már alaposan megismert és besulykolt technikának.

A dolgozat első részében röviden bemutatjuk a féligvégtelen (szemi-végtelen) lineáris programozási feladatot és a dualitási tétel bizonyítását. A dolgozat következő részében három alkalmazást fogunk tárgyalni: a Gale-modell egzisztencia tételét, a M. Morishima által a marxi közgazdaságtan alaptételének nevezett tétel általánosítását, és végül az ún. nem helyettesítési tételt.

A Gale-modell egyensúlyi megoldásának létezését a megfelelő véges Neumann-modell esetére „működő" bizonyítások mintájára próbáljuk majd kimutatni. A bizonyításból egyértelműen látható, hogy a féligvégtelen LP feladat duálisában szereplő lezárás jel igen fontos esetekben nem hagyható el, és éppen e lezárás elhagyhatósága mögött meghúzódó regularitási feltételek megléte, illetve hiánya különbözteti meg a véges poliedrikus feladatokat a végtelen, nem poliedrikus esettől.

A marxi közgazdaságtan Morishima-féle alaptételére adott általánosítás, ismereteim szerint, eltér az irodalomban találhatóktól. Morishima eredeti tételét Neumann-modellek esetére fogalmazta meg. A tételt J. E. ROEMER általánosította [18], [19] konvex termelési halmazokkal megadott gazdaságokra. Modelljében a pozitív profit létezésének feltételeit vizsgálja, szemben az eredeti Morishima-féle állásponttal, amely a pozitív profitráta létezésére koncentrál. A végtelen lineáris programozási feladat második alkalmazásaként tárgyalt tétel megpróbálja áthidalni a két megközelítés közti szakadékot. Be fogjuk látni, hogy ha a szükséges munkát Morishimahoz és Roemerhez hasonlóan a munkaerő újratermeléséhez minimálisan szükséges munkával definiáljuk, a pozitív profitráta létezésének szükséges és elegendő feltétele: a munkaerő kizsákmányolhatósága.

Az utoljára tárgyalt nemhelyettesítési tétel bizonyítását hasonlóan a másik két tételhez a féligvégtelen lineáris programozás dualitási tételére alapoztuk. Az irodalomban található bizonyítások vagy a szeparációs tételre, vagy más, véleményem szerint, a féligvégtelen lineáris programozási feladat dualitási tételnél nehezebb állításokra épülnek.

1. A féligvégtelen lineáris programozási feladat

1.1. *A feladat megfogalmazása*

Mielőtt rátérnénk a közgazdasági alkalmazások bemutatására röviden foglaljuk össze a féligvégtelen *LP* feladatokkal kapcsolatos legfontosabb tudnivalókat [5], [6], [3].[1]

A féligvégtelen lineáris programozási feladatot a következőképpen definiáljuk: Legyen Γ egy tetszőleges indexhalmaz, a_γ $(\gamma \in \Gamma)$ R^n-beli vektorok és β_γ $(\gamma \in \Gamma)$ valós számok egy összessége. Tekintsük a következő feltételes szélsőérték feladatot:

$$(P) \qquad \begin{gathered} cx \to \sup \\ a_\gamma x \leq \beta_\gamma, \quad (\gamma \in \Gamma), \end{gathered}$$

ahol c az ún. célfüggvényvektor. Hangsúlyozni kell, hogy a véges *LP* feladatokkal szemben a fenti feladatban a szupremum általában nem éretik el és így nem írható a szupremum helyébe maximum. A féligvégtelen lineáris programozás elnevezést az indokolja, hogy míg a Γ halmaz számossága esetleg végtelen, addig a változók száma véges. Ha az a_γ vektorok az R^n elemei, akkor az x vektor is n elemű, és így a feladat csak „félig" végtelen. A duál feladatot a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$(D) \qquad \begin{gathered} \delta \to \min \\ (c, \delta) \in \overline{\text{con}}\, \{(a_\gamma, \beta_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}. \end{gathered}$$

[1] Ebben a pontban nagyban támaszkodom *Dancs István* jegyzeteire. A tételek bizonyítása tőle származik.

Érdemes megfigyelni, hogy a (P) feladattal szemben a (D) feladatban a szélsőérték fel is vevődik, vagyis nem infimumot, hanem minimumot kell keresni. A (D) feladatnak látszólag semmi köze sincs a véges LP megszokott duál párjához. Tételezzük fel azonban egy pillanatra, hogy a $C = \mathrm{con}\{(a_\gamma, \beta_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ kúp zárt, másképpen hogy a duál feladatban a lezárás jel elhagyható. Ekkor a kúp burok definíciója alapján a (c, δ) előállítható $\sum_{j=1}^{s} (a_{\gamma_j}, \beta_{\gamma_j}) u_j$ alakban, vagyis $c = \sum_{j=1}^{s} a_{\gamma_j} u_j$ és $\delta = \sum_{j=1}^{s} \beta_{\gamma_j} u_j$, és a (D) feladat az alábbi a közönséges lineáris programozásra már emlékeztető alakba írható:

$$\sum_j \beta_{\gamma_j} u_j \to \min$$

$$u_j \geq 0$$

$$\sum_j a_{\gamma_j} u_j = c.$$

A (P), illetve a (D) feladatot megoldhatónak mondjuk, ha a megfelelő feladatnak létezik véges optimuma. A (P) illetve a (D) feladatot lehetségesnek mondjuk, ha a megfelelő feladatnak létezik lehetséges megoldása. (Az x vektor lehetséges megoldása a (P)-nek, ha $a_\gamma x \leq \beta_\gamma$ minden $\gamma \in \Gamma$ esetén. A duál feladat lehetséges, ha létezik olyan véges δ szám, amelyre a (c, δ) eleme a $\overline{\mathrm{con}}\{(a_\gamma, \beta_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ kúpnak.)

Dualitási tétel

(i) Ha mindkét feladat lehetséges, akkor mindkettő megoldható és az értékük megegyezik.
(ii) Ha az egyik feladat megoldható, akkor a másik lehetséges.

A következő pontban a teljesség kedvéért részletesen bemutatjuk a tétel bizonyítását. Amennyiben az olvasót csak a közgazdasági alkalmazások érdeklik, az alábbi pontot átugorhatja.

1.2. *A dualitási tétel bizonyítása*

A dualitási tétel bizonyítása a legegyszerűbben a végtelen egyenlőtlenségi rendszerekre vonatkozó úgynevezett megoldhatósági és következmény tételek segítségével végezhető el, amelyeket bizonyításukkal együtt a dualitási tétel bizonyítását megelőzően ismertetünk.

1. *lemma*: Ha az $S \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, $K \neq \emptyset$ egy kompakt konvex halmaz az R^n térben, akkor az

(1) $$Sx \leq 0, \quad Kx > 0$$

egyenlőtlenség rendszernek pontosan akkor létezik megoldása, ha a K halmaz és az $\overline{\mathrm{con}}\,(S)$ zárt kúp metszete üres.

Bizonyítás: Az (1) rendszer megoldhatóságához a $K \cap \overline{\mathrm{con}}\,(S) = \emptyset$ reláció teljesülése nyilván szükséges, hiszen az $Sx \leq 0$ egyenlőtlenség miatt $\overline{\mathrm{con}}\,(S)x \leq 0$. A feltétel azonban elégséges is, mert fennállása esetén a szeparációs tétel alapján van olyan $x \in R^n$ és $\beta \in R$, hogy $\overline{\mathrm{con}}\,(S)x < \beta$ és $Kx > \beta$. Mivel $0 \in \overline{\mathrm{con}}\,(S)$ azért $\beta \geq 0$, és mivel $\lambda\,\overline{\mathrm{con}}\,(S) \subseteq \overline{\mathrm{con}}\,(S)$ minden pozitív λ-ra, ezért $\mathrm{con}\,(S)x < \dfrac{\beta}{\lambda}$, hacsak $\lambda > 0$, amiből $\mathrm{con}\,(S)x \leq 0$ és $Kx > 0$. Tehát x megoldása az (1) rendszernek.

Következmény (megoldhatósági tétel): Legyenek $a_\gamma \in R^n$, $\beta_\gamma \in R$ $(\gamma \in \Gamma)$. Az

$$a_\gamma x \leq \beta_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma)$$

egyenlőtlenség rendszer pontosan akkor megoldható, ha a $\overline{\mathrm{con}}\,\{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ kúp nem tartalmazza a $(0, -1)$ vektort.

Bizonyítás: Az $a_\gamma x \leq \beta_\gamma\ (\gamma \in \Gamma)$ rendszer pontosan akkor megoldható, ha megoldható az $(a_\gamma, \beta_\gamma)(x, x_{n+1}) \leq 0$, $-x_{n+1} = (0, -1)(x, x_{n+1}) > 0$ egyenlőtlenség, aminek az előző lemma alapján szükséges és elegendő feltétele a $(0, -1) \notin \overline{\mathrm{con}}\{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ reláció teljesülése.

2. *lemma*: Ha az S tetszőleges nem-üres halmaz, az s_0 pedig egy pont az R^n térben, továbbá az

$$Sx \leq 0, \quad s_0 x > 0 \tag{2}$$

rendszer megoldható, akkor a

$$bx \leq 0 \tag{3}$$

egyenlőtlenség pontosan akkor következménye a (2)-nek, ha

$$b \in \overline{\mathrm{con}}\,(S) - \bigcup_{\mu \geq 0} \mu s_0.$$

Bizonyítás: A (2)-nek pontosan akkor következménye a (3), ha nincs megoldása az $Sx \leq 0$, $s_0 x > 0$, $bx > 0$ rendszernek. Definiáljuk a $K = \{x | x = \lambda b + (1 - \lambda)s_0;\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ szakaszt. Azonnal látható, hogy az utóbbi három egyenlőtlenség $Sx \leq 0$, $Kx > 0$ alakba írható. Mivel a K szakasz kompakt konvex halmaz, felhasználhatjuk az előző lemmát, amely alapján az $Sx \leq 0$ $Kx > 0$ rendszer pontosan akkor nem megoldható, ha a $K \cap \overline{\mathrm{con}}\,(S)$ metszet nem üres, másképpen ha létezik $0 \leq \lambda \leq 1$, amelyre $\lambda b + (1 - \lambda)s_0 \in \overline{\mathrm{con}}\,(S)$. A b vektort kifejezve, a keresett $b \in \overline{\mathrm{con}}\,(S) - \dfrac{1 - \lambda}{\lambda} s_0 \subset \overline{\mathrm{con}}\,(S) - \bigcup_{\mu \geq 0} \mu s_0$ tartalmazáshoz jutunk. (A λ együttható nem lehet nulla, mivel ellenkező esetben $s_0 \in \overline{\mathrm{con}}(S)$, ami az előző lemma alapján ellentmond a kiinduló feltételeknek.

2. *következmény* (következmény tétel): Ha az $a_\gamma \in R^n$, $\beta_\gamma \in R$ $(\gamma \in \Gamma)$ esetén az

$$a_\gamma x \leq \beta_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma) \tag{4}$$

egyenlőtlenség rendszernek van megoldása, akkor a

$$bx \leq \beta$$

egyenlőtlenség pontosan akkor következménye a (4)-nek, ha van olyan δ szám, amelyre

(5) $$\delta \leq \beta \text{ és } (b, \delta) \in \overline{\text{con}}\, \{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}.$$

Bizonyítás: Az $a_\gamma x \leq \beta_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ rendszernek pontosan akkor következménye az $bx \leq \beta$ egyenlőtlenség, ha az

$$(a_\gamma, \beta_\gamma)\,(x, x_{n+1}) \leq 0, \quad -x_{n+1} = (0, -1)\,(x, x_{n+1}) > 0$$

egyenlőtlenségrendszernek következménye a

$$(b, \beta)\,(x, x_{n+1}) \leq 0$$

egyenlőtlenség. Alkalmazva a második lemmát az $S = \{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ és $s_0 = (0, -1)$ választással, a

$$(b, \beta) \in \overline{\text{con}}\, \{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\} + \bigcup_{\mu \geq 0} \mu\,(0, 1)$$

tartalmazáshoz jutunk, amiből alkalmas $\mu \geq 0$ szám esetén a keresett $(b, \delta) = (b, \beta - \mu) \in \overline{\text{con}}\, \{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ tartalmazás következik. Most már minden készen áll a dualitási tétel bizonyításához.

(i) Tegyük fel, hogy mindkét feladatnak van lehetséges megoldása. Definíció szerint a (D) feladat megoldhatósága alapján létezik δ szám, amelyre $(c, \delta) \in \overline{\text{con}}\, \{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$. Ez viszont, mivel a primál feladat is lehetséges, a következmény tétel szerint azt jelenti, hogy valamely $cx \leq \delta'$, $\delta \leq \delta'$ egyenlőtlenség következménye az $a_\gamma x \leq \beta_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ végtelen egyenlőtlenségi rendszernek. Másképpen valahányszor x kielégíti az $a_\gamma x \leq \beta_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ rendszert mindannyiszor $cx \leq \delta'$, vagyis a (P) feladat célfüggvénye korlátos, és így létezik szupremuma, amit δ_0-val jelölünk. Meg kell mutatni, hogy a (D) feladat minimuma éppen δ_0. Mivel a szupremum definíciója alapján a $cx \leq \delta_0$ egyenlőtlenség következménye, viszont minden $\varepsilon > 0$ szám esetén a $cx \leq \delta_0 - \varepsilon$ már nem következménye a primál feltételi egyenlőtlenségi rendszernek, ezért ismételten a következmény-tétel alapján a legkisebb δ szám, amelyre $(c, \delta) \in \overline{\text{con}}\, \{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$, éppen δ_0.

(ii) Tegyük fel, hogy a primál feladatnak létezik optimális megoldása δ_0. Ez a bizonyítás első részéhez hasonlóan azt jelenti, hogy a $cx \leq \delta_0$ egyenlőtlenség következménye az $a_\gamma x \leq \beta_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ rendszernek, ami a következmény-tétel alapján éppen a duál feladat lehetségességét jelenti.

Tegyük most fel, hogy a duál feladat megoldható, de a primál feladat nem lehetséges. A megoldhatósági tétel alapján $(0, -1) \in \overline{\text{con}}\, \{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$. Ebből a kúp tulajdonságot felhasználva minden pozitív λ esetén $(c, \delta - \lambda) \in \overline{\text{con}}\, \{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$, ami ellentmond a (D) feladat megoldhatóságának.

Megjegyzés: A tétel bizonyítása a megelőző két lemma elemi és egyszerű következménye. A lemmák bizonyításából viszont látható, hogy valójában mindkettő a szeparációs tétel direkt folyománya. Másképpen: a végtelen *LP* dualitási tétel tulajdonképpen a szeparációs tétel egy alkalmas — és esetenként igen „kézrejövő" — alakja. Egy matematikai állítás értékét elsősorban használhatósága határozza meg. Megítélésem szerint a fenti dualitási tétel számos esetben használhatóbb megfogalmazása a „dualitási–hatékonysági" elvnek, mint az eredeti „ősforrás", az elválasztási tételek. A következő három pontban a dualitási tétel néhány lehetséges alkalmazását mutatjuk be.

2. A gazdasági növekedés Neumann—Gale-modellje

Jelölje $K \subset R_+^{2n}$ a lehetséges input-output párok halmazát. A K halmazról a következő szokásos feltételeket tesszük:

Feltevések

F1. K zárt konvex kúp.
F2. Ha az x input vektor nulla, akkor az y output vektor is nulla.
F3. Minden jószág termelhető, vagyis létezik $(x, y) \in K$, amelyre $y > 0$.

Ha A és B egy Neumann-modell input és output mátrixai, akkor $K = \{(x, y) | x = Au, y = Bu, u \geq 0\}$. Ebben az esetben a K poliedrikus kúp, és így zárt. Az F2 és F3 feltételek a Neumann-modellek irodalmában rendszeresen használt Kemény–Morgenstern–Thompson feltételekkel egyeznek meg.

A Neumann—Gale-modell egyenleteit a Neumann-modell egyenleteinek analógiájára a következőképpen definiáljuk:

$$(NN) \qquad \alpha, \beta > 0; \; p, x^*, y^* \geq 0$$

$$(P) \qquad \alpha x^* \leq y^*$$

$$(PKF) \qquad \alpha p x^* = p y^*$$

$$(D) \qquad \beta p x \geq p y \quad (\forall (x, y) \in K)$$

$$(DKF) \qquad \beta p x^* = p y^*$$

$$(PD) \qquad p y^* > 0.$$

Az általánosabb Neumann–Gale-, és az eredeti Neumann-modell közti legfontosabb különbség, hogy az általános esetben az (NN)–(PD) rendszer nem feltétlenül oldható meg. A feltételek között a „fekete bárány" a (P)—(PKF) primál és a (D)–(DKF) duál oldalakat összekapcsoló (PD) egyenlőtlenség. Az irodalomban található ellenpéldák közül a legismertebb az 1972-ben Hülsmann és Steinmetz által publikált. További ellenpélda található például Makarov és Rubinov könyvében.

Próbáljuk meg a véges esetben „működő" J. Łós-tól származó bizonyítást az általános esetre „ráhúzni". A Neumann-modell bizonyítása során követett módon, az F1–F3 feltételek segítségével, egyszerűen belátható, hogy az $\alpha_c = \max\{\alpha | \alpha x \leq y, \; x \geq 0, \; (x, y) \in K\}$ maximális növekedési ütem létezik, véges és pozitív. Az $\alpha_c x \leq y$ egyenlőtlenséget kielégítő (x, y) párok között létezik olyan $(\bar{x}, \bar{y})$, amely esetén az output vektornak a legtöbb pozitív komponense van. (A K kúp és ezért ha az $\alpha_c x_1 \leq y_1$ és $\alpha_c x_2 \leq y_2$ egyenlőtlenségek teljesülnek, akkor fennáll az $\alpha_c(x_1 + x_2) \leq y_1 + y_2$ mérlegegyenlőtlenség is.) Tekintsük a

$$p \geq 0$$

$$(*) \qquad p(y - \alpha_c x) \leq 0 \quad (\forall (x, y) \in K)$$

$$p\bar{y} \to \sup$$

féligvégtelen LP feladatot. A duál feladat $(\bar{y}, \delta) \in C$, ahol

$$C = \overline{\text{con}}\,[(y - \alpha_c x, 0) \,|\, (x, y) \in K\} \cup \{(-e_i, 0) \,|\, i = 1, \ldots n\}] =$$

$$= \overline{\{(z, 0) \,|\, z = y - \alpha_c x - u,\ u \geq 0,\ (x, y) \in K\}} = \bar{Z} \times \{0\}.$$

A $p = 0$ a primál feladat lehetséges megoldása. Amennyiben a duál feladat is lehetséges, akkor a minimuma nyilván nulla, tehát a dualitási tétel alapján a $p\bar{y}$ szuprémuma is nulla és így a (PD) feltétel nem teljesülhet. Ha a duál feladat *nem lehetséges*, a primál feladat célfüggvénye nem korlátos, és így pozitív értéket is felvesz, tehát az (NN)—(PD) rendszer megoldható.

Milyen feltételek mellett nincs lehetséges megoldása a duál feladatnak, vagyis milyen feltételek mellett nincs az $\bar{y}$ vektor a $\bar{Z}$ halmazban?

Feltevés: A $Z = \{z \,|\, y - \alpha_c x - u, (x, y) \in K, u \geq 0\}$ kúp zárt.[2]

Ekkor a duál feladat nem lehetséges. Ha ugyanis a szemipozitív $\bar{y}$ vektor eleme a $\bar{Z} = Z$ halmaznak, akkor $\bar{y} = y - \alpha_c x - u$, amiből egyrészt $y \geq \alpha_c x$ másrészt az $\bar{y}$ definíciója alapján valahányszor y_i pozitív, az egyenlőtlenség szigorú. (Az $\bar{y}$ szemipozitivitása miatt az $(x, y) = (0, 0)$ eset lehetetlen.) Ez azonban ellentmond az α_c feltételezett maximalitásának. Ha azonban a Z nem zárt, akkor az $\bar{y} \in Z$ eset az imént tárgyalthoz hasonlóan kizárható, de semmilyen garancia sincs arra, hogy az $\bar{y}$ nem határpontja a Z halmaznak, és csak további feltételek segítségével biztosítható, hogy a duál feladat ne legyen megoldható, és így az eredeti Gale-modell megoldható legyen [20].

Megjegyzés: Ha eltekintünk a (PD) feltételtől az egyensúly létezését egyszerűen beláthatjuk. Tekintsük a $(*)$ szemivégtelen lineáris programozási feladatot, de $\bar{y}$-nak ne a maximális pozitív komponenssel rendelkező kibocsájtási vektort válasszuk, hanem $\bar{y}$ legyen egy tetszőleges, de határozottan pozitív vektor. A duál feladat pontosan akkor lehetséges, ha $\bar{y} \in \bar{Z}$. Mivel az $\bar{y}$ pozitív, a $\bar{Z}$ is tartalmaz szigorúan pozitív elemet, — ami ellentmond az α_c maximalitásának. Tehát a duál feladat nem megoldható, és így a $(*)$ optimális megoldása végtelen. Következésképpen a $(*)$-nak létezik szemipozitív lehetséges megoldása, amely az α_c definíciója alapján az $\alpha = \beta = \alpha_c$ választás mellett megoldása a (P)—(DKF) egyenlőtlenségnek.

[2] A Neumann-modell esetén Z a $D = \{(B - \alpha_c A)\, u \,|\, u \geq 0\}$ poliedrikus kúp és az ugyancsak poliedrikus R^n_- kúpok összege, és így zárt halmaz.

3. A marxi közgazdaságtan Morishima-féle alaptétele

A Neumann-típusú modellek egzisztenciatételei általában csak a pozitív növekedési tényező és a pozitív kamattényező létezését garantálják, de megengedik, hogy e két tényező valamelyike esetleg egynél kisebb legyen. Egyszerűbben fogalmazva az egzisztenciatételek csak az arányos növekedést biztosító megoldások létezésével foglalkoznak, de nem vizsgálják, hogy az egyensúlyban az újratermelés bővített-e vagy sem. A M. Morishima által belátott és általa a „marxi közgazdaságtan alaptételének" nevezett tétel szerint alkalmasan választott Neumann-modellekben a gazdaság növekedési üteme pontosan akkor nagyobb egynél, ha az egységnyi munkaerő újratermeléséhez minimálisan szükséges munka kevesebb, mint az általa kifejtett munka mennyisége, és ez utóbbi viszont szükséges és elegendő feltétele a profitráta pozitivitásának. [15], [16] Tudomásom szerint Morishima eredménye az egyetlen olyan tétel, amely Neumann-modell esetén a bővített újratermelés létezésének kérdését érdemben tárgyalja. Morishima eredményeihez kapcsolódva J. E. Roemer [18], [19] vizsgálta a marxi közgazdaságtan alaptételét konvex termelési halmazokkal rendelkező gazdaságokra. Megmutatta, hogy az általa definiált, és az Arrow—Debreu-modell szemléletéhez közelálló, gazdaságban a pozitív profit létezésének szükséges és elegendő feltétele a munkaerő kizsákmányolhatósága. Vegyük észre, hogy bár Morishima és Roemer eredménye igen hasonló, de mégis eltérő problémát feszeget. Amíg Morishima *pozitív profitrátát* tud garantálni, addig Roemer csak *pozitív profit* létezéséről beszél. Nyilván ha a profitráta pozitív a profittömeg is pozitív lesz, de abból, hogy a profit pozitív még nem következik, hogy a profitráta is pozitív lesz. Roemer dolgozatának részletes bemutatása túlságosan nagy kitérőt jelentene, és így eltekintünk tőle. Az érdeklődő olvasó forduljon az irodalomjegyzékben felsorolt művekhez. Annyit azonban érdemes megjegyezni, hogy a pozitív profitráta és a pozitív profit létezése közti különbség gyökere a két szerző eltérő egyensúly fogalmában van. Véleményem szerint Marx eredeti gondolatmenetéhez a Morishima-féle megközelítés áll közelebb. Marx szerint a gazdaság egyensúlyának egyik feltétele, hogy minden szektorban azonos legyen a profitráta. Véleménye szerint, ha az egységnyi tőke hozadéka a különböző szektorokban eltérő, ez a kiegyenlítődés irányába ható tőkemozgást implikál, így a pozitív profitráta létezése a gazdaság működőképességének feltétele.

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy a Morishima által belátott tétel egyszerűen átvihető konvex termelési halmazok esetére is. A bizonyítás magja ismét a féligvégtelen lineáris programozási feladat dualitási tétele. A figyelmes olvasó könnyen észreveheti, hogy az érvelés számos ponton az eredeti, Morishima-féle, indoklás által kijelölt úton halad, bizonyítva, hogy megfelelő technikai felkészültség esetén, a véges *LP* feladatok segítségével belátott állítások lényegesen szélesebb modellkörben is hatékonyan működnek.

3.1. *Alapfogalmak és a tétel kimondása*

Az előző fejezetben tárgyalt Gale-modellhez hasonlóan tegyük fel, hogy a gazdaságban n jószágot termelnek, amelyeket egyúttal inputként is felhasználnak. Továbbá a gazdaság működése során egyetlen külső erőforrást használ fel a munkát. Ha a nemnegatív x jelöli a közönséges jószágokból alkotott input vektort, y pedig az output vektort, és ha az $x \mapsto y$ transzformáció munkaigénye

δ, akkor a termelési folyamatot az $(x, y, \delta) \in R_+^{2n+1}$ hármassal reprezentáljuk. A gazdaság által megvalósítható termelési eljárások összességét jelölje P. A P termelési halmazról a következő feltételeket tesszük:

Feltevések

F1. A $P \subset R_+^{2n+1}$ halmaz konvex és tartalmazza az origót. (nem növekvő hozadék, és a tétlenség lehetségessége)

F2. Tetszőleges $z \in R_+^n$ vektorhoz létezik olyan $(x, y, \delta) \in P$ termelési eljárás, amelyre $y \geq x + z$. (produktivitás)

F3. Létezik olyan $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\delta}) \in P$, amelyben a munkaráfordítás pozitív. (Létezik nem automatizált termelési eljárás.)

Ahhoz, hogy belássuk az egyensúlyi növekedési ütem és a garantált profitráta pozitivitásának ekvivalenciáját szükségünk lesz az F3 feltételt implikáló alábbi szigorúbb megkötésre:

F4. Bármely $(x, y, \delta) \in P$ és $g > 0$ szám esetén, ha $(1+g)x \leq y$, és y szemipozitív, akkor a δ munkaráfordítás pozitív. (Munka nélkül nincs növekedés.)

Morishima és Roemer definícióját követve egy b vektor által reprezentált jószágegyüttes értékét az újratermeléséhez minimálisan szükséges munkával határozzuk meg, tehát

$$\text{l.v.}(b) \triangleq \inf\{\delta \mid y \geq x + b, (x, y, \delta) \in P\}. \tag{1}$$

Legyen c az egységnyi munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztói kosár. Mivel $\bar{\delta}$ egységnyi munkaerő újratermeléséhez $\bar{\delta}c$ jószág szükséges, ezért a munkaerő értékének definíciója alapján a $\bar{\delta}$ munkaerő értéke $\text{l.v.}(\bar{\delta}c) = \inf\{\delta \mid y \geq x + \bar{\delta}c, (x, y, \delta) \in P\}$. (A munkaerő értéke az újratermeléséhez szükséges javak értékével azonos.)

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $(x, y, \delta) \in P$ pontban a munkaerő kizsákmányolható, ha $\delta > \text{l.v.}(\delta c)$, vagyis ha a kifejtett munka nagyobb, mint a munkaerő értéke.

Megjegyzések:

(i) Ha a P halmaz nem kúp, előfordulhat, hogy bizonyos δ ráfordítás mellett a munkaerő kizsákmányolható, de más δ munkaráfordítások mellett nem.

(ii) Az általunk tett (F1)–(F4) feltételek teljesülése mellett nem garantálható, hogy az (1) egyenletben szereplő infimum el is éretik, vagyis, hogy a munkaerő értéke, mint a legkisebb munkaráfordítás definiálható. (ROEMER dolgozatában [18, 2.1. Proposition] azonban az olvasó egy megfelelő enyhe, ámbár az általunk tett feltételeknél erősebb feltétellel találkozhat, amely már garantálja, hogy az (1)-ben az infinum helyébe minimumot írjunk.)

Térjünk rá a garantált profitráta definíciójára. A p termelési ár vektort, és a π^w garantált profitrátát az alábbi szélsőérték feladat segítségével adjuk meg:

$$\pi^w = \min\{\pi \mid \exists p \geq 0, \text{ hogy } \forall (x, y, \delta) \in P \text{ esetén } (1+\pi)p(x+\delta c) \geq py\}. \tag{2}$$

Az F2 produktivitási feltétel szerint létezik olyan $(x, y, \delta) \in P$ termelési eljárás, amelyben az y output vektor pozitív. Következésképpen (2)-ben minden π

lehetséges megoldás nagyobb, mint -1. Egyszerű kompaktsági megfontolásokkal belátható, hogy ha a (2)-nek van lehetséges megoldása, úgy egyúttal van optimális megoldása is. Ha (2)-nek nincs lehetséges megoldása, akkor definíció szerint π^w legyen plusz végtelen. A π^w közgazdasági tartalma világos. A π^w az összes számbajöhető profitráták közül a legkisebb, és így a π^w pozitivitása implikálja (garantálja) a gazdaságban uralkodó tényleges profitráta pozitivitását. Általában a valóságos profitrátáról nem tudunk semmit, csak annyit, hogy nagyobb mint a garantált.

Végezetül térjünk rá a gazdaság növekedési képességét jellemző g_c maximális növekedési ütem meghatározására.

$$g_c \triangleq \sup \{g \mid \exists (x, y, \delta) \in P, \text{ amelyre } y \geq (1 + g)(x + \delta c),\ x + \delta c \geq 0\}. \tag{3}$$

Ismételten hangsúlyozni kell, hogy a (3) feladatban sem a g_c végessége, sem az, hogy ténylegesen eléretik nem garantálható, — még akkor sem, ha a P halmaz zárt. (A P-ről nem tettük fel, hogy zárt halmaz!) Ha a P *zárt konvex kúp*, amely teljesíti az F4 feltételt, továbbá ha a c szemipozitív, akkor, miként az egyszerűen belátható, a $\tilde{P} = \{(z, y) \mid z = x + \delta c, (x, y, \delta) \in P\}$ kúp is zárt halmaz, továbbá ha a z kibővített input vektor nulla, akkor az y output is nulla lesz. Ebben az esetben a $\tilde{P}$ kielégíti a Gale-tétel feltételeit és ez alapján a maximális g_c létezik, és egyúttal véges is [8], [17].

Az imént definiált fogalmak segítségével a marxi közgazdaságtan alaptételét az alábbi módon általánosítjuk:

TÉTEL: Az F1—F3 feltételek teljesülésekor a következő két állítás ekvivalens:

(i) A π^w garantált profitráta pozitív (esetleg plusz végtelen).

(ii) Létezik olyan $(x, y, \delta) \in P$ termelési eljárás, amelyben a munkaerőt kizsákmányolják, vagyis amely esetén $\delta >$ l.v.(δc).

Ha az F3 mellett az F4 teljesülését is megköveteljük, akkor az alábbi (iii) ekvivalens lesz a fenti (i), (ii) állításokkal.

(iii) A g_c maximális növekedési üteme pozitív (esetleg plusz végtelen).

3.2. *A tétel bizonyítása*

A tétel bizonyítása során többször hivatkozni fogunk az alábbi féligvégtelen LP feladatra:

$$\begin{gathered} p \geq 0 \\ py \leq px + \delta, \quad (\forall (x, y, \delta) \in P) \\ pc \to \sup. \end{gathered} \tag{4}$$

A (4) duálisa a következő:

$$\begin{gathered} (c, \delta) \in C \\ \delta \to \min, \end{gathered} \tag{5}$$

ahol

$$\begin{aligned} C &= \overline{\text{con}}\left(\{(y - x, \delta) \mid (x, y, \delta) \in P\} \cup \{(-e_i, 0) \mid i = 1, 2, \ldots n\}\right) = \\ &= \overline{\text{con}}\ \{(z, \delta) \mid z = y - x - u, (x, y, \delta) \in P, u \geq 0\} = \\ &= \overline{\text{con}}\ \{(z, \delta) \mid y \geq x + z, (x, y, \delta) \in P\}. \end{aligned}$$

A marxi közgazdaságtan alaptétele a következő lemma egyszerű következménye. A lemma a (4)–(5) *LP* feladat tulajdonságait írja le.

Lemma: Az F1–F3 feltételek teljesülése esetén a (4)–(5) féligvégtelen *LP* feladatnak létezik optimális megoldása, és az optimális megoldás a (4)-ben felvétetik. Ha a (4)–(5) közös optimális megoldása kisebb mint egy, akkor létezik olyan $(x^*, y^*, \delta^*) \in P$, amelyre $\delta^* > \text{l.v.}(\delta^* c)$.

A lemma bizonyítása: Mivel az F2 miatt az (5)-nek létezik lehetséges megoldása, és a $p = 0$ kielégíti a (4) feltételi rendszerét, ezért a dualitási tétel alapján a (4)–(5) pár megoldható. Megmutatjuk, hogy a (4)-ben az optimális célfüggvényérték eléretik. Ennek belátásához elegendő bebizonyítani, hogy a primál feltételi halmaz $X = \{p \geq 0 \mid py \leq px + \delta, (x, y, \delta) \in P\}$ kompakt, mivel akkor a folytonos cx célfüggvény felveszi a maximumát rajta. Mivel az X nyilván zárt, elegendő belátni, hogy az X korlátos. Mivel azonban az F2 alapján létezik olyan $(x, y, \delta) \in P$, amelyre az $y - x$ különbség pozitív, ezért a nemnegatív vektorokból álló X halmaz szükségszerűen korlátos kell hogy legyen.

Tegyük fel most, hogy az optimális célfüggvényérték δ_0 kisebb mint egy. Először megmutatjuk, hogy a $\{(c, \alpha) \mid \alpha \in R\}$ egyenes belemetsz a C kúp belsejébe. Ha ez nem lenne így, a (c, R) és C konvex halmazokat el lehetne szeparálni egy hipersíkkal, vagyis létezne egy olyan $(q, \tau) \in R^{n+1}$ vektor, amelyre

$$(*) \qquad qc + \tau\alpha \geq q(y - x - u) + \tau\delta,$$

valahányszor $u \geq 0$, $\alpha \in R$ és $(x, y, \delta) \in P$. Mivel α tetszőleges, ezért a τ szükségszerűen nulla, és így a $(*)$ az alábbi módon egyszerűsödik:

$$qc \geq q(y - x - u),$$

valahányszor $(x, y, \delta) \in P$ és $u \geq 0$. Ez azonban lehetetlen, hiszen az $\{z \mid z = y - x - u, (x, y, \delta) \in P, u \geq 0\}$ halmaz az F2 miatt tartalmazza (és így megegyezik vele) az $R^n_+ - R^n_+ = R^n$ teret.

Az imént kapott ellentmondás alapján létezik tehát olyan α_0 szám, amelyre $(c, \alpha_0) \in \text{int}\,(C)$. Mivel a C konvex halmaz, minden $0 < \lambda < 1$ szám esetén a $(c, \delta_\lambda) = \lambda(c, \alpha_0) + (1 - \lambda)(c, \delta_0)$ is a C belsejébe esik. Mivel a δ_0 a kiinduló feltételek szerint kisebb mint egy, ezért alkalmas λ számra a δ_λ is egynél kisebb lesz. Mivel

$$\text{int}\,(C) \subseteq \bigcup_{\mu > 0} \mu\{(z, \delta) \mid z = x - y - u,\ (x, y, \delta) \in P, u \geq 0\},$$

ezért létezik olyan $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\delta}) \in P$ termelési eljárás és $\mu > 0$ szám, amelyekre

$$(6) \qquad \mu\tilde{y} \geq \mu\tilde{x} + c \text{ és } \mu\tilde{\delta} = \delta_\lambda < 1.$$

Legyen $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\delta}) \in P$ az F3 feltételben szereplő termelési folyamat. Tegyük fel először, hogy $\mu\hat{\delta} \leq 1$. Az F1 feltételből következik, hogy az $(x, y, \delta) \triangleq (1 - \mu\hat{\delta})0 + \mu\hat{\delta}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\delta})$ is eleme a (P)-nek, és a (6) alapján $y \geq x + \hat{\delta}c$, és $\delta < \hat{\delta}$. Tehát az $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\delta})$ pontban a munkaerő kizsákmányolható. Végezetül induljunk ki abból az esetből, amikor $\mu\hat{\delta}$ nagyobb mint egy. Ekkor nyilván a $\delta^* \triangleq 1/\mu$ kisebb mint $\hat{\delta}$. Ismételten felhasználva az F1 feltételt, léteznek olyan $x^*, y^* \in R^n_+$

vektorok, amelyekre $(x^*, y^*, \delta^*) \in P$. A δ^* definíciója alapján $\tilde{y} \geq \tilde{x} + \delta^* c$, és $\delta^* > \tilde{\delta}$. Ez utóbbiból azonban a $\delta^* > \tilde{\delta} \geq$ l.v.$(\delta^* c)$ egyenlőtlenséghez jutunk. Tehát az (x^*, y^*, δ^*) pontban a munkaerő kizsákmányolható, és ez éppen az, amit be akartunk látni.

Itt az idő, hogy rátérjünk a tétel bizonyítására.

A tétel bizonyítása: A tétel bizonyítása négy egyszerű észrevételből tevődik össze: (ii) ⇒ (i), (i) ⇒ (ii), (iii) ⇒ (ii) és (i) ⇒ (iii).

(ii) ⇒ (i)

Tegyük fel, hogy $\pi^w \leq 0$. Definíció szerint létezik olyan szemipozitív p vektor, amelyre

$$p(x + \delta c) \geq py, \tag{7}$$

valahányszor $(x, y, \delta) \in P$. A (7)-ben a pc szorzat pozitív, ellenkező esetben (7) a $px \geq py$ alakúvá egyszerűsödik, ami azonban lehetetlen, hiszen az F2 alapján létezik olyan $(x, y, \delta) \in P$, amelyre $y > x$. Be fogjuk bizonyítani, hogy minden $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\delta}) \in P$ termelési eljárás esetén $\bar{\delta} \leq$ l.v.(δc).

Legyen $(x, y, \delta) \in P$ az (1) egy lehetséges megoldása ($b = \bar{\delta} c$). Az $y \geq x + \delta c$ egyenlőtlenségből $py \geq px + \delta pc$. Összevetve ezt a (7)-tel a $(pc)\delta \geq (pc)\bar{\delta}$ relációhoz jutunk, amiből — kihasználva, hogy a pc pozitív — a kívánt $\delta \geq \bar{\delta}$ egyenlőtlenség adódik.

(i) ⇒ (ii)

Tegyük fel, hogy a π^w pozitív, és tekintsük a (4) LP feladatot. A lemma alapján elegendő belátni, hogy a $p_0 c = \delta_0$ optimális megoldás kisebb egynél. Induljunk ki az ellenkező esetből, és tegyük fel, hogy a $\delta_0 = p_0 c$ nagyobb vagy egyenlő mint egy. A p vektor nyilván nem lehet nulla, és így szemipozitív. A (4) alapján

$$p_0 y \leq p_0 x + \delta \leq p_0 x + (p_0 c)\delta = p_0(x + \delta c),$$

valahányszor $(x, y, \delta) \in P$. Ebből azonban következik, hogy a

$$\pi^w = \min\{\pi \,|\, (1 + \pi)p(x + \delta c) \geq py, \forall (x, y, \delta) \in P, p \geq 0\}$$

érték nem lehet pozitív. Ez azonban ellentmond a kiinduló feltételeknek.

(iii) ⇒ (ii)

Tegyük fel, hogy a g_c pozitív. Ekkor léteznek olyan pozitív g és $(x, y, \delta) \in P$ elemek, amelyekre

$$\begin{gathered} x + \delta c > 0 \\ y \geq (1 + g)(x + \delta c). \end{gathered} \tag{8}$$

A lemma alapján elegendő belátni, hogy a (4)-es optimális megoldása $p_0 c = \delta_0$ kisebb mint egy. A (8) és a (4) egybevetéséből $p_0 x + \delta \geq p_0 y \geq (1 + g)\big(p_0 x + \delta(p_0 c)\big) = (1 + g)\,(p_0 x + \delta\delta_0)$, amiből egyszerű átrendezéssel a $0 \leq g(p_0 x) \leq \delta\big(1 - (1 + g)\delta_0\big)$ egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel az $x + \delta c$ input vektor szemipozitív, és a g pozitív, az F4 alapján a δ munkaráfordítás is pozitív kell hogy legyen. Következésképpen az $\big(1 - (1 + g)\delta_0\big)$ kifejezés nemnegatív, ami csak úgy lehetséges, ha a δ_0 optimális célfüggvényérték nem nagyobb, mint $1/(1 + g)$, tehát kisebb mint egy.

(i) $\Rightarrow$ (iii)

Elegendő belátni, hogy a π^w nem nagyobb, mint a g_c. Ha a g_c végtelen, akkor nincs mit bizonyítani. Ha a g_c véges, akkor az előző rész végén található megjegyzéshez hasonlóan belátható, hogy létezik szemipozitív p vektor, amelyre $py \leq (1+g_c)(x+\delta c)$ valahányszor $(x, y, \delta) \in P$, és így mivel π^w a minimális kamatláb $\pi^w \leq g_c$.

Az ismétlések elkerülése végett a bizonyítás pontos kidolgozását az olvasóra bízzuk.

4. A nem helyettesítési tétel

A nem helyettesítési tételt (nonsubstitution theorem) eredeti formájában — hagyományos differenciálható termelési függvényekre — SAMUELSON [11] mondta ki. A tételt később többen általánosították tetszőleges konvex halmazok esetére: ARROW [1], MIRRLEES [14], KOOPMANS [12], GEORGESCU—ROEGEN [10]. A tétel klasszikusnak mondható, több könyvben szereplő bizonyítása a szeparációs tételen alapszik és eléggé hosszadalmas (pl. NIKAIDO [17, 187—194. old.], CORNWALL [2, 133—137]). Az általános esetre vonatkozó másik — az alább bemutatásra kerülő bizonyításhoz közelálló — bizonyítást talált *Diewert* 1975-ben. Diewert bizonyítása (CORNWALL [2]) a Fenchel-féle dualitási tételre épül. Diewert gondolatmenete egyszerű és könnyen áttekinthető, de megítélésem szerint a bizonyítás alapjául szolgáló tétel miatt az eredeti bizonyításhoz hasonlóan nehezen emészthető. Más oldalról az általánosnál egyszerűbb Neumann—Leontief-modellek esetén a bizonyítás a lineáris programozás dualitási tételével röviden elintézhető (ASMANOV [22]). Az alábbi bizonyítás lényege, hogy a véges esetben követett eljárást „ráhúzzuk" a végtelen esetre is, és az LP dualitási tétel helyett a szemi-végtelen LP-re vonatkozó megfelelő dualitási tételt használjuk.

A nem helyettesíthetőségi tételben szereplő gazdaságban n közönséges jószágot termelnek egyetlen erőforrás segítségével. Az erőforrást az egyszerűség kedvéért nevezzük munkának. A gazdaság legfontosabb tulajdonsága, hogy egyetlen rendelkezésre álló eljárás sem termel ikerterméket. Az ikertermelés kizárása mellett azonban megengedjük, hogy az egyes jószágok alternatív módon is előállíthatók legyenek. A j-dik jószágot előállító termelési folyamatok összességét jelölje T_j. Mivel nincs ikertermelés a T_j halmazok száma egyenlő a jószágok számával. A termelési eljárásokat állapot (stock) szemléletben ábrázoljuk. A szokásoknak megfelelően a $t \in T_j$ vektort (x, y, δ) alakban írjuk fel, ahol $x \geq 0$ a közönséges jószágokból álló input vektor, $y \geq 0$ az output vektor és $\delta \geq 0$ a munkaráfordítás mértékét fejezi ki. A teljes gazdaság termelési lehetőségeit a $T = \sum_{j=1}^{n} T_j$ halmaz írja le, és a nemnegatív nettó termelési lehetőségek halmazát a

$$T_+ = \{(z, \delta) \mid z = y - x,\ y \geq x,\ (x, y, \delta) \in T\}$$

egyenlőséggel definiáljuk. Jelölje T_+^e a T_+ hatékony pontjainak összességét. (Definíció szerint $(z, \delta) \in T_+^e$, ha valahányszor $(u, \mu) \in T_+$ és $(u, -\mu) \geq (z, -\delta)$, akkor $(z, \delta) = (u, \mu)$.)

A nem helyettesítési tétel bizonyításához az alábbi feltételekre lesz szükségünk:

Feltevések

F1. Nincs ikertermelés: ha $(x, y, \delta) \in T_j$ egy termelési folyamat, akkor az y output vektor i-dik komponense y_i nulla, ha $i \neq j$.

F2. A munka szükséges a termeléshez, ha $(x, y, \delta) \in T_j$, és a δ munkaráfordítás nulla, akkor y is nulla.

F3. $T_+ \subset R_+^{n+1}$ konvex zárt kúp, és a T_j konvex kúp.

F4. A T technológiai halmaz produktív, vagyis létezik $(x, y, \delta) \in T$, amelyre $y > x$.

Megjegyzés: Az F3 feltétel túl erősnek tűnik. Bebizonyítható (pl. NIKAIDO [17]), hogyha a T_j halmazok mindegyike konvex zárt kúp, akkor az F2 már implikálja a T_+ halmaz zártságát. Mivel ennek bizonyításához hosszadalmas, rutinszerű és a jelen dolgozat tárgyához nem kapcsolódó megfontolások szükségesek, ezért az egyszerűség kedvéért eltekintünk tőle.

TÉTEL (nem helyettesítési tétel): Az F1–F4 feltételek teljesülése esetén léteznek olyan $(x_j, y_j, \delta_j) \in T_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ eljárások, amelyekre

$$T_+^e = \left\{(z, \delta) \geq 0 \mid (z, \delta) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j, \delta_j)u_j,\ u_j \geq 0\right\} =$$
$$= \operatorname{con}\{(y_j - x_j, \delta_j) \mid j = 1, 2, \ldots, n\} \cap R_+^{n+1}.$$

Bizonyítás: A bizonyítás alapjául az az igen egyszerű észrevétel szolgál, amely szerint a T_+ halmazban – az ikertermék hiánya, és a munka szükségessége miatt – a hatékony és a munkaráfordítást minimalizáló megoldások egybeesnek. Pontosabban fogalmazva legyen $(z_0, \delta_0) \in T_+$. A (z_0, δ_0) pár akkor és csakis akkor hatékony eleme a T_+ nettó termelési halmaznak, ha

$$(1) \qquad \delta_0 = \min\{\delta \mid (z, \delta) \in T_+ z \geq z_0\} = \min\left\{\delta \mid (z_0, \delta) \in T_+ - R_+^n \times \{0\}\right\}.$$

Valóban, ha (z_0, δ_0) hatékony, az (1) nyilván teljesül. Induljunk ki most az ellenkező állításból, és legyen $(z, \delta) \in T_+$ olyan vektor, amelyre $(z, -\delta) \geq$ $\geq (z_0, -\delta_0)$. A minimalitási tulajdonság miatt $\delta = \delta_0$. Tegyük fel, hogy valamely j indexre $z_j > z_{0j}$. Nyilván $(z, \delta) = (z' + z_j, \delta' + \delta_j)$, ahol $z_j = y_j - x_j$ és $(x_j, y_j, \delta_j) \in T_j$ és $(z', \delta') = \sum_{i \neq j} (y_i - x_i, \delta_i)$.

Az F1 feltétel alapján a j-diket kivéve az y_j minden komponense nulla. Mivel az y_j nem nulla, az F2 alapján a δ_j pozitív. Elegendően kicsi, de még pozitív λ esetén $z'' = z' + (1 - \lambda)(y_j - x_j) \geq z' + (1 - \lambda)y_j - x_j \geq z_0$, és $(z'', \delta'') =$ $= (z'', \delta' + (1 - \lambda)\delta_j) \in T_+$, ami ellentmond az (1) egyenlőségnek. Következésképpen $z = z_0$, tehát (z_0, δ_0) valóban a T_+ hatékony eleme.

Tekintsük a

$$(2) \qquad \begin{gathered} p \geq 0 \\ pz \leq \delta, \quad (\forall (z, \delta) \in T_+) \\ pz_0 \to \sup \end{gathered}$$

féligvégtelen lineáris programozási feladatot. Belátjuk, hogy (1) éppen a (2) duálisa. A (2) duálisa

$$\begin{gathered} \delta \to \min \\ (z_0, \delta) \in C, \end{gathered}$$

ahol $C = \overline{\text{con}}\big(\{(z,\delta)\,|\,(z,\delta)\in T_+\}\cup\{(-e_i,0)\,|\,i=1,2,\ldots n\}\big) = \overline{T_+ - R_+^n\times\{0\}}$.

Az utóbbi állítás bizonyításához elegendő megmutatni, hogy a lezárás jel felesleges, vagyis, hogy a $T_+ - R_+^n\times\{0\}$ kúp zárt. Tegyük fel, hogy

$$(v_k,\delta_k)\in T_+ - R_+^n\times\{0\},\ \lim_n (v_n,\delta_n) = (v_\infty,\delta_\infty).$$

Definíció szerint $v_n = z_n - u_n$, ahol $(z_n,\delta_n)\in T_+$ és az u_n nemnegatív. Megmutatjuk, hogy a z_n sorozat korlátos. Ha nem, akkor a $\{z_n\}$ egy alkalmas $\{z_{n_k}\}$ részsorozatára $||z_{n_k}||\to\infty$. Mivel a T_+ kúp, ezért $\frac{1}{||z_{n_k}||}(z_n,\delta_n)\in T_+$. Mivel a $\frac{z_{n_k}}{||z_{n_k}||}$ sorozat korlátos, így létezik torlódási pontja: (z^*,δ^*). Mivel $||z_{n_k}||\to\infty$, ezért a δ^* nyilván nulla. Az $\left\|\frac{z_{n_k}}{||z_{n_k}||}\right\| = 1$, $z_{n_k}\geq 0$ alapján a z^* szemipozitív. A T_+ F3 szerint zárt, így tartalmazza a $(z^*,0)$ vektort, ami azonban az F2 alapján lehetetlen. Tehát a $\{z_n\}$ korlátos, és ezért létezik konvergens részsorozata. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy már az eredeti sorozat is konvergens. Mivel a $v_n = z_n - u_n$ sorozat is konvergens, ezért az u_n sorozat is konvergál. Ismételten felhasználva a T_+ zártságát a $(v_\infty,\delta_\infty) = \lim_n (v_n,\delta_n) = \lim_n (z_n,\delta_n) - \lim (u_n,0)\in T_+ - R_+^n\times\{0\}$ tartalmazáshoz jutunk, ami éppen a $T_+ - R_+^n\times\times\{0\}$ kúp zártságát jelenti.

A nem helyettesítési tétel bizonyítása az (1)—(2) duális pár alábbi három egyszerű tulajdonságán múlik:

(i) A (2) primál feladat feltételi halmaza nemüres kompakt halmaz, hiszen a $p=0$ lehetséges megoldása (2)-nek, és az F4 feltétel alapján létezik olyan $(x,y,\delta)\in T$, amelyre az $(y-x,\delta)\in T_+$ pozitív, és így a feltételi halmaz korlátos. (A zártság nyilvánvaló, hiszen zárt félterek metszete.) Legyen $z_0 = y - x > 0$ tetszőleges. A (2) primál feltételi halmaz kompaktsága miatt az (1)—(2) párnak létezik optimális megoldása.

(ii) Legyen először $(\tilde z,\delta_0)$ a duál feladat optimális megoldása. Definíció szerint léteznek $(x_j,y_j,\delta_j)\in T_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ vektorok, amelyekre $\sum_{j=1}^{n}(y_j-x_j) = \tilde z \geq z_0$, és $\delta_0 = \sum_{j=1}^{n}\delta_j$. A z_0 pozitivitása, és az ikertermelés hiányát kimondó F1 feltétel alapján egyetlen y_j vektor sem nulla, tehát ha y_{jj} jelöli az y_j vektor j-dik komponensét, akkor $y_{jj}>0$. Jelölje w az y_{jj} számokból alkotott n dimenziós vektort. Definiáljuk az $A = \left(\frac{1}{y_{jj}}x_j\right)_{j=1}^{n}$ mátrixot. Nyilván $0<\tilde z = w - Aw$, következésképpen az A mátrix produktív és így az $(E-A)^{-1}$ inverz mátrix létezik és nemnegatív [1], [17].

(iii) Jelölje $\tilde p$ a (2) optimális megoldását. Ekkor

$$(*)\qquad \sum_{j=1}^{n}\delta_j = \delta_0 = \tilde p z_0 \leq \tilde p\tilde z = \sum_{j=1}^{n}\tilde p(y_j-x_j).$$

Mivel a $\tilde z$ pozitív és a T_j kúp, ezért alkalmas λ-ra a $\lambda\tilde z + y_j - x_j$ nemnegatív és ezért $(\lambda\tilde z + y_j - x_j, \lambda\delta_0 + \delta_j)\in T_+$. A (P) definíciója alapján $\lambda\tilde p\tilde z + \tilde p(y_j - x_j)\leq$

$\leq \lambda\delta_0 + \delta_j$. A ($*$) egyenlőtlenséggel összevetve a rendkívül fontos $\tilde{p}(y_j - x_j) = \delta_j$ komplementaritási feltételhez jutunk.

Ennyi előkészület után a tétel bizonyítása már egyszerű. Tegyük fel először, hogy a (z^e, δ^e) a T_+ hatékony eleme. Mivel az $(E - A)^{-1}$ létezik és nemnegatív, ezért a $v = (E - A)^{-1} z^e$ is nemnegatív. Nyilván

$$z^e = (E - A)v = \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) \frac{v_j}{y_{jj}} = \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) u_j.$$

Meg kell mutatni, hogy egyúttal a $\delta^e = \sum_{j=1}^{n} \delta_j u_j$ is teljesül. Mivel a (z^e, δ^e) hatékony, ezért $\delta^e = \min \{\delta \mid (z, \delta) \in T_+, z \geq z^e\} = \max \{pz^e \mid pz \leq \delta,\ (z, \delta) \in T_+, p \geq 0\} \geq \tilde{p} z^e = \tilde{p} \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) u_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_j u_j$. Ebből a $\delta^e = \sum_{j=1}^{n} \delta_j u_j$ egyenlőség nyilvánvaló.

Megfordítva tegyük fel, hogy a nemnegatív $(\hat{z}, \hat{\delta})$ pár felírható $\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j, \delta_j) u_j$ alakban. Tekintsük az alábbi becsléseket, amelyekből a bizonyítás elején tett megjegyzés alapján a $(\hat{z}, \hat{\delta})$ hatékonysága már következik.

$$\min \{\delta \mid z \geq \hat{z}, (z, \delta) \in T_+\} = \max \{p\hat{z} \mid pz \leq \delta, (z, \delta) \in T_+, p \geq 0\} \geq \tilde{p}\hat{z} = \tilde{p} \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) u_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_j u_j = \hat{\delta}.$$

(Beérkezett: 1984. dec. 22-én.)

IRODALOM

1. ARROW, K. J.: „Alternative Proof of the Substitution Theorem for Leontief Models in the General Case" [11]-ben.
2. CORNWALL, R. R.: *Introduction to the Use of General Equilibrium Analysis.* North Holland, Amsterdam 1984.
3. DANCS, I.: *Végtelen egyenlőtlenségek* (Kézirat) 1970.
4. DIEWERT, W. E.: „The Samuelson nonsubstitution theorem and the computation of equilibrium prices", *Econometrica,* 43 (1975) 57—64. o.
5. DUFFIN, J. R.: „Infinite programs" [13]-ban
6. FAN, K.: „On Infinite Systems of Linear Inequalities" *Journal of Math. Anal. and Appl.* 21, (1968) 457—478. o.
7. FUJIMORI, Y.: *Modern Analysis of Value Theory* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, Berlin 1982.
8. GALE, D.: „The closed linear model of production" [13]-ban
9. GALE, D.: *The Theory of Linear Economic Models.* Mc Graw-Hill, New York 1960.
10. GEORGESCU-ROEGEN, N.: „Some properties of a Generalized Leontief Model" [11]-ben
11. KOOPMANS, T. C. (szerk.): *Activity Analysis of Production and Allocation.* Wiley, New York 1951.
12. KOOPMANS, T. C.: „Alternative Proof of the Substitution Theorem of Leontief Models in the Case of Three Industries" [11]-ben
13. KUHN, H. W.—TUCKER, A. (szerk.): *Linear inequalities and related systems.* Princeton University Press, Princeton 1956.
14. MIRRLESS, J. A.: „The Dynamic Nonsubstitution Theorem" *Review of Economic Studies,* 36 (1969) 67—79. o.
15. MORISHIMA, M.: „Marx in the Light of Modern Economic Theory." *Econometrica,* 42 (1974) 611—633. o.

16. MORISHIMA, M.—CATEPHORES, G.: *Value, exploitation and growth.* McGraw-Hill, London 1978.
17. NIKAIDO, H.: *Convex Structures and Economic Theory.* Academic Press, New York 1968.
18. ROEMER, J. E.: „A General Equilibrium Approach to Marxian Economics" *Econometrica,* 48 (1980) 505—531. o.
19. ROEMER, J. E.: *Analitical foundation of Marxian economic theory* Cambridge University Press, Cambridge 1981.
20. SOYSTER, A. L.: „The Existence of Optimal Price Vectors in the General Balanced-Growth Model of Gale" *Econometrica,* 42 (1974) 197—199. o.
21. STEINMETZ, V.—HÜLSMANN, J.: „A Note on the Nonexistence of Optimal Price Vectors in the General Balanced-Growth Model of Gale" *Econometrica,* 40 (1972) 387—390. o.
22. Атманов, С. А.: *Математические модели и методы в экономике.* Издательство Московского Университета, Москва 1980.

SEMI-INFINITE LINEAR PROGRAMMING AND MATHEMATICAL ECONOMICS

The paper discusses some applications of the semi-infinite linear programming. It presents the growth model of Gale, a generalization of the so-called Fundamental Marxian Theorem of Morishima and Samuelson's non-substitution theorem.

ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

В статье рассматриваются некоторые случаи применения полубесконечного линейного программирования. Показывается модель роста Гейла, обобщение т. н. основной марксисткой теоремы Моришимы и теорема незаменяемости Самуэльсона.