SIMONOVITS ANDRÁS

Gazdasági rendszerek kaotikus dinamikája

1. Bevezetés

Jól ismert a fizika történetéből a laplace-i determinizmus elve: Ha ismerjük egy dinamikus rendszer mozgástörvényét és állapotát egy adott időpontban, akkor kiszámíthatjuk a rendszer állapotát bármely későbbi időpontban. Valóban, ez a megközelítés hatalmas eredményeket hozott a fizikában és más természettudományokban, s joggal váltotta ki a társadalomtudósok irigységét.

A legutóbbi évtizedek fejlődése azonban alapvetően módosította a laplace-i világképet. Kiderült, hogy még a látszólag olyan szabályosan mozgó Naprendszerről sem lehet egyszerűen eldönteni, hogy a következő három alternatíva közül melyiket követi, ha a vizsgálatokat kiterjesztjük az ,,idők végezetéig": 1. megőrzi jelenlegi szerkezetét; 2. egyes nagy bolygók a Napba hullanak, 3. a Naprendszer szétesik, azaz legalább egy nagybolygó elhagyja a Napot. Vagyis a klasszikus megközelítés csak viszonylag rövid távon használható minden további korrekció nélkül, viszonylag hosszú távon már minőségileg új jelenségek léphetnek föl. Példánknál maradva, a Naprendszer viselkedését az előttünk álló évezredekre nagyon pontosan le tudjuk írni; s a minőségi változást ki tudjuk zárni. Évmilliárdokra előre viszont előfordulhatnak minőségi változások.

Közkeletűbb példával élve: mi okozza az örvényeket? Hogyan lehet, hogy időben változatlanul hömpölygő víztömeg egy bizonyos ponton időben összevissza csapódó örvénnyé változik át?

A matematikusok csupán a legutóbbi két évtizedben találták meg a szóban forgó kérdések megoldásához szükséges matematikai eszközöket. A közgazdaságtanban pedig csak a vizsgálat elején tartunk: mindössze néhány cikk próbálta meg, hogy a kaotikus dinamika elméletének legegyszerűbb modelljeit közgazdasági köntösbe öltöztesse.

Ebben a dolgozatban az Olvasónak minél egyszerűbben szeretném elmagyarázni, hogy mi a kaotikus dinamika, és hogy mit nyújt jelenleg a közgazdaságtan számára. Bár matematikai kérdéseket vizsgálunk, nem törekszünk kimerítő és pontos leírásra. A témakör iránt részletesebben érdeklődőknek az irodalomjegyzékben közölt forrásokat ajánlom, különösen a SZÉPFALUSSY és TÉL szerk. (1982) *A káosz* c. kötetet.

A dolgozat szerkezete a következő: A 2. fejezet elemi matematikai ismereteket tartalmaz a dinamikus rendszerekről. A 3. fejezet a fizikában, demográfiában és közgazdaságtanban egyaránt fontos szerepet játszó logisztikus modellről szól, ahol a káosz kialakulása viszonylag egyszerűen tanulmányozható. A 4. fejezet a linearitás és közgazdasági dinamika kapcsolatáról szól. Az 5. fejezet POHJOLA (1981) ciklusmodelljét ismerteti, amely kaotikus viselkedést ábrázol. A 6. fejezet MONTRUCCHIO (1982) kaotikus árdinamikára vonatkozó eredményeit foglalja össze. Végül a 7. fejezet más olyan közgazdasági modelleket vázol, amelyek szintén a káosszal foglalkoznak.

Köszönetet mondok *Krámli András*nak a cikk lektorálásakor nyújtott segítségéért.

2. Elemi tudnivalók a dinamikus rendszerekről

Alapfogalmak

Ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk a dinamikus rendszerekre vonatkozó elemi tudnivalókat, amelyekre a továbbiakban még szükség lesz.

Egyszerűség kedvéért a dolgozat folyamán szinte mindvégig a lehető legegyszerűbb dinamikus rendszer vizsgálatára szorítkozunk, ahol skalár valós szám jellemzi a rendszer állapotát. A rendszer *diszkrét idejű*, az időváltozó $t = 0,1,2,\ldots$. A rendszer állapotát a t-edik időszakban x_t jelöli, a megengedett állapotok halmaza a $[0, 1]$ zárt intervallum. A rendszer x_t állapota kizárólag az előző időszakbeli állapottól, x_{t-1}-től függ, s e függés időben állandó és folytonosan differenciálható:

$$x_t = f(x_{t-1}), \qquad x_0 \text{ adott.} \tag{2.1}$$

Föltesszük még, hogy az f függvény az egységintervallumot önmagába képezi le, következésképpen az állapot mindig megengedett marad, ha előzőleg az volt.

Mivel az x_0 kezdő állapot adott, (2.1) ismételt alkalmazásával meghatározható: $x_1, x_2, \ldots x_t, \ldots$

A dinamikus rendszerek matematikai elemzésében kitüntetett szerepe van a *hosszú távú*, ún. aszimptotikus vizsgálatoknak. Mi történik a rendszerrel, ha az indulástól már nagyon sok idő telt el? A rövid távú megközelítés több okból is háttérbe szorul: 1. az állapot rövid távú viselkedését nehezebb elvont analitikus eszközökkel vizsgálni, mint a hosszú távút, az ún. átmeneti, tranziens jelenségek miatt; 2. rövid távú elemzéseknél a numerikus eszközök sokkal jobban használhatók, mint hosszú távúaknál. Mindenesetre megjegyezzük, hogy a hosszú távú megközelítés sokkal kevésbé fogadható el a közgazdaságtanban, mint a természeti-műszaki tudományokban, mivel a rendszer mozgástörvénye az előbbi esetben sokkal gyorsabban változik.

Egyensúly

Mielőtt a hosszú távú vizsgálatra rátérnénk, bevezetjük az egyensúlyi állapot fogalmát. Az x^* állapot *egyensúlyi* állapot, ha a rendszert onnan indítva, a rendszer ott is marad:

$$x^* = f(x^*). \tag{2.2}$$

A rendszernek lehet egy vagy több egyensúlyi állapota, sőt az is lehetséges, hogy nincs egyensúlyi állapota.

Stabilis egyensúly

A fent említett aszimptotikus vizsgálatok általában azt vizsgálják, hogy az idő múlásával tart-e a rendszer állapota valahová. Ha tart, azaz a rendszer *stabilis*, akkor ez az állandósult állapot nyilvánvalóan egyensúlyi állapot. Ekkor azt mondjuk, hogy az x^* egyensúlyi állapot stabilis.

A matematikai analízisből jól ismert, hogy egy egyváltozós dinamikus rendszer egyensúlyi állapota akkor és csak akkor (lokálisan aszimptotikusan) stabilis, ha teljesül

$$|f'(x^*)| < 1. \tag{2.3}$$

Bizonyítás helyett csak annyit jegyzünk meg, hogy (2.3) esetén az f függvény az x^* pont környezetében kontrakció, azaz a leképezés összehúzza a közeli pontokat; tehát stabilis mozgást gerjeszt. Ha (2.3) nem teljesül, akkor a közeli pontok a leképezés után távolodnak egymástól, tehát instabil az egyensúly.

Bonyolultabb a helyzet az egyensúlyi ponttól távolabb eső állapotokkal: előfordulhat, hogy a lokálisan stabilis egyensúly globálisan instabil, ui. a távoli pontok nem tartanak egymáshoz, tehát az egyensúlyhoz sem.

További bonyodalmakat okoz, ha több egyensúlyi pont létezik.

Ciklus

Mind a természetben, mind a társadalomban gyakran találkozunk az egyensúly hiányával; gondoljunk csak a Föld Nap-körüli pályájára vagy a beruházási ciklusokra. Mindkét példában valami szabályszerűséggel állunk szemben, de jóval bonyolultabb szabályossággal, mint az egyensúlynál.

Mindenekelőtt formálisan definiáljuk a ciklus fogalmát. Az $\{x_t^*\}$ pálya *ciklikus*, ha van olyan T természetes szám, amely nagyobb, mint 1, és amelyre igaz, hogy minden állapot megismétlődik T időszak múlva:

$$x^*_{aT+b} = x^*_b \text{ minden } a \text{ természetes számra, és minden } b\text{-re, amelyre } 0 \leq b \leq T-1. \tag{2.4}$$

Figyelemre méltó, hogy a ciklikus pálya egy egyszerű fogással visszavezethető az egyensúlyi állapotra. Vezessük be az f függvény *k-adik iteráltját*, ahol k egy tetszőleges természetes szám:

$$f^{(1)}(x) = f(x), \dots, f^{(k)}(x) = f[f^{(k-1)}(x)]. \tag{2.5}$$

Azaz (2.1) ismételt alkalmazásával

$$x_t = f^{(t)}(x_0). \tag{2.6}$$

Könnyen belátható, hogy egy T-periódusú ciklus nem más, mint a T-edik iterált függvény T különböző egyensúlyi pontjának sorozata:

$$x_0^* = f^{(T)}(x_0^*),\ x_1^* = f^{(T)}(x_1^*), \dots, x_{T-1}^* = f^{(T)}(x_{T-1}^*). \tag{2.7}$$

Stabilis ciklus

Az egyensúlyi állapot stabilitásához hasonlóan beszélhetünk a ciklikus pálya stabilitásáról. A ciklikus pályát *stabilisnak* nevezzük, ha a pálya közeléből induló pályák konvergálnak a ciklikus pályához, azaz

$$\lim_{a\to\infty} x_{aT+b} = x_b^*,\ b = 0, 1, 2, \dots, T-1. \tag{2.8}$$

A (2.3) stabilitási tétel általánosításaként adódik, hogy egy ciklikus pálya akkor és csak akkor (lokálisan aszimptotikusan) stabilis, ha

$$|f^{(T)'}(x_0^*)| < 1, \tag{2.9}$$

ahol $f^{(T)'}(x_0^*) = f'(x_0^*)f'(x_1^*) \ldots f'(x_{T-1}^*)$.

Lineáris rendszerek

Az eddig elmondottak különösen szemléletessé válnak a legegyszerűbb esetben, amikor a leképezés *lineáris:*

$$f(x) = Ax + B. \tag{2.10}$$

Feltesszük, hogy $0 \leq A + B \leq 1$, $0 \leq B \leq 1$, mert a $[0,1]$ intervallumot önmagába leképező függvényekre szorítkozunk. (Valóban, $f(1) = A + B$ és $f(0) = B$.) Az egyensúlyi pont: $x^* = B/(1-A)$, s ez az $0 \leq A < 1$ feltevés miatt mindig stabilis. (Az $A = 1$ és $B = 0$ esetben minden pont egyensúlyi pont — de ez az eset érdektelen.)

Milyen ciklikus pályák lehetségesek? Nem nehéz belátni, hogy egyetlen egy esetben lehet ciklus, ha $f(x) = -x + 1$. Kellemetlen, hogy csak két-periódusú ciklust tudunk lineáris függvényekkel származtatni, ekkor viszont minden pont cikluspont: x párja $1-x$.

Összefoglalva: ha lineáris függvényekre szorítkozunk, akkor nagyon szegényes a választék: 1. stabilis egyensúly vagy 2. kivételként két peródusú ciklus. Ha az életből ismert hosszabb ciklusokat vagy a bonyolultabb pályákat matematikailag meg akarjuk magyarázni, meg kell szabadulnunk a lineáris modellek kényszerzubbonyától.

3. A logisztikus modell és a kaotikus dinamika

Kissé hosszúra nyúlt előkészítésünk után szeretném bemutatni a dolgozat tulajdonképpeni tárgyát: a kaotikus dinamikát. Ehhez a legegyszerűbb keretnek az ún. *logisztikus* modell szolgál.

Ezt a modellt Szépfalussy és Tél szerk. (1982. 71–95. o.) nyomán ismertetjük. Dinamikus rendszerünket az

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, x_0 \text{ adott}; \tag{3.1}$$

egyenlet írja le, ahol x_t a rendszer állapotváltozója és r az ún. kontroll paraméter. Mivel x_t 0 és 1 közötti pozitív szám, r is pozitív és legfeljebb 4.

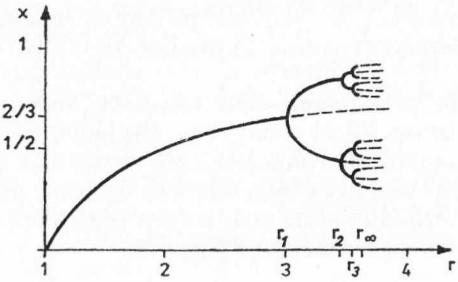
A (3.1) egyenletnek két egyensúlyi pontja van:

$$x_1^* = 0 \text{ és } x_2^* = (r - 1/r. \tag{3.2}$$

A (2.3) feltétel szerint a nem-triviális x_2^* egyensúlyi pont akkor és csak akkor stabilis, ha a kontroll paraméterre teljesül

$$r_0 = 1 \leq r < 3 = r_1 \tag{3.3}$$

Mi történik, ha $r \geq 3$? Belátható, hogy ekkor a rendszernek van egy két-periódusú ciklusa, amelyet $\{x_3^*, x_4^*\}$ jelöl.



1. ábra. A logisztikus leképezés stabil (——) és instabil (----) határciklusainak pontjai a kontrollparaméter függvényében (Szépfalussy–Tél szerk. (1982) 17. 6. ábra)

Felvetődik a kérdés: Ha az egyensúlyi pontok instabilak, stabilis-e legalább a ciklus? A válasz a (2.9) feltételből vezethető le: A ciklus akkor és csak akkor stabilis, ha teljesül

$$r_1 = 3 \leq r < 1 + \sqrt{6} = r_2. \tag{3.7}$$

Alapvető fontosságú, hogy az r_1 pontban az addig stabilis x_2^* egyensúlyi pont instabillá vált, *kettévált* (bifurkált), és egy stabil $\{x_3^*, x_4^*\}$ ciklus jött létre.

Belátható, hogy a kontroll paraméter további növelésével először 4, majd 8 stb. periódusú, globálisan stabilis ciklikus pályák jönnek létre, az eggyel előző stabilis ciklus pontjainak a kettéválásával; természetesen a kisebb periódusú, instabil pályák megmaradnak.

Figyelemre méltó, hogy egyre kevésbé kell a kontroll paramétert növelni ahhoz, hogy az újabb stabilis ciklus kiugorjon az előző ciklusból. Számítógépes számítások szerint $r_\infty = 3{,}57$ körüli értékhez konvergálnak e kritikus kontroll paraméterek. Ezen paraméternél már az összes 2^k periódusú ciklus megjelenik és mindegyik instabil.

Mi történik az r_∞ küszöbérték átlépésekor? Megjelennek bizonyos páratlan periódusú ciklusok, a Sarkovszkij által meghatározott sorrendben. Az utolsó ciklus a három-periódusú ciklus, amelynek az a nevezetes tulajdonsága van Sarkovszkij szerint (lásd Li és Yorke, 1975), hogy bármely periódusú ciklus létezését szavatolja. Próbáljuk elképzelni, milyen bonyolultan viselkedik egy rendszer, amelyben – a kezdőponttól függően – tetszőleges fajtájú periodikus mozgás fellelhető. „Rengeteg" olyan pálya lesz, amelyek egymáshoz nagyon közelről indulnak, majd eltávolodnak, majd megint közelednek stb.

A klasszikus elméletből megszokott, szépen rendezett trajektóriákat esetünkben vadul kígyózó pályák szorítják ki. Bár determinisztikus rendszerrel állunk szemben, a viselkedése statisztikailag megkülönböztethetetlen egy igazi véletlen rendszertől. Ledőlnek hát az eddig szilárdnak hitt válaszfalak a determinisztikus és a sztochasztikus modellek között.

A pontosság kedvéért azonban meg kell említeni, hogy a szóban forgó válaszfalak valójában sohasem voltak szilárdak. Gondoljunk csak a kockadobásra vagy a rulettre, amelyek nyilvánvalóan *determinisztikus* mechanikai rendszerek, ugyanakkor a legtisztább *sztochasztikus* viselkedés jellemzi őket, s ez teszi lehetővé a szerencsejátékokban való alkalmazásukat. Igaz, de ezek a rendszerek nagyon nagy szabadságfokú és nagyon bonyolult egyenletű rendszerek.

Ezzel szemben a dolgozatban tárgyalt példák a lehető legegyszerűbb (kis szabadságfokú és logisztikus egyenletű) rendszerre mutatták meg a válaszfalak ingatagságát.

S ezzel eljutottunk a Bevezetésben felvetett kérdésre adott válaszhoz: A laplace-i determinizmus közel sem olyan általános érvényű, mint azt akár két-három évtizede gondolták volna. Számos olyan matematikai rendszert ismerünk, amely minden szabályossága ellenére is kaotikusan viselkedik: hiába ismerjük a rendszer kezdőállapotát akármilyen *véges* pontossággal, hosszú távra nem tudjuk megjósolni a rendszer állapotát.

4. Nem-lineáris dinamikus modellek a közgazdaságtanban

Az előző fejezetek matematikai fejtegetéseiből kiderült, hogy egy látszólag olyan ártatlan, technikai jellegű feltevés, mint a *linearitás* mennyire megszorító lehet, kizárván a ciklikus és a kaotikus viselkedést.

A most következő fejezetekben néhány dinamikus közgazdasági modellt elemzünk — különös tekintettel a kaotikus dinamikára. Mindenekelőtt szükséges lesz néhány modellt felsorolni, s megvilágítani, hogy a linearitási feltevés feladása milyen gyökeres változásokat hoz e modellekben.

Az első dinamikus közgazdasági modellek a harmincas-negyvenes években születtek. Dolgozatunk szempontjából három modellt emelünk ki: 1. A beruházási ciklus FRISCH-féle modellje; 2. az árdinamika SAMUELSON-féle (1947) modellje és 3. METZLER készletciklus modellje.

A felsorolt modellek mindegyike *lineáris*, ezért a modellek kizárólag az egyensúly megfelelő közelében érvényesek. A dinamikus elemzés továbbfejlesztése során elkerülhetetlenné vált a *nem-lineáris* függvények bevezetése, s ezzel párhuzamosan a *lokális* megközelítés felváltása *globálissal*.

Hogyan valósult meg e folyamat a felsorolt három modellnél?

1. A beruházási ciklus Frisch-féle modelljében a determinisztikus és lineáris alapmodellt sztochasztikus zavarok befolyásolják. Az alapmodell önmagában stabilis lenne (csillapítva oszcillálna), de a szochasztikus zavarok hatására rejtett periódusú ciklikus pálya keletkezik. (A pontosság kedvéért megemlítjük, hogy a szóban forgó modelleknél késleltetések lépnek fel, ezért a korábbi fejezetekben említett rendszereknél általánosabbakról van most szó.)

HICKS (1950) a fenti modellből elhagyta a sztochasztikus zavarokat, és alsó és felső korlátok bevezetésével megszüntette a modell linearitását. Hicks feltette, hogy az alapmodell — természetesen más paraméterek mellett mint Frisché voltak — önmagában robbanóan instabil lenne, csak a teljes foglalkoztatás és a bruttó beruházás nem-negativitása tartja korlátok közt a nemzeti jövedelem ingadozását. A modell bizonyos feltevések mellett ciklikus pályát származtat, de általában nem zárható ki — sőt, minden bizonnyal valószínűsíthető — kaotikus dinamika létrejötte.

2. Az árdinamika Samuelson-féle modelljének alapegyenlete eredetileg nemlineáris volt: árváltozás = reakciósebesség szorozva túlkereslet, ahol a túlkereslet a régi ár nem-lineáris függvénye. A témakör úttörői nem tudtak megbirkózni a nem-lineáris dinamika által okozott nehézségekkel, ezért feltették, hogy az egyensúly közeléből indul és az egyensúly közelében marad mindvégig

a rendszer. Ekkor linearizálhatták a túlkeresleti függvényt, s lineáris algebrai eszközökkel elégséges feltételt adtak az árdinamika stabilitására. Ciklikus megoldás csak kivételként fordulhatott elő lineáris rendszerükben, s az egyensúlytól elvándorló rendszerek pedig a lokális megközelítés miatt kívül rekedtek a vizsgálatokon.

Az ötvenes évek végén ARROW—BLOCK—HURWICZ (1959) klasszikus cikkükben kiterjesztették az árdinamika elemzését a lineárisról a nem-lineáris esetre, s a lokális megközelítést globálissal váltották fel. Jellemző módon foglyai maradtak a stabilitásnak, lelkük mélyén ugyanis nem is érdekelte őket az instabilitás (v.ö. SIMONOVITS, 1981).

A Hicks-i elmélettel való párhuzam miatt említjük meg, hogy a globális megközelítés még tisztán lineáris túlkeresleti függvénynél is megkövetelte volna a linearitás föladását, mert az eredeti áregyenlet negatív új árat is adhatott nulla régi ár és nagy túlkínálat esetén. Ezt elkerülendő a módosított áregyenlet nulla új árat ad, ha az eredeti áregyenlet negatív új árat adna.

3. A készletciklus Metzler-féle modellje ugyanolyan problémákat vet fel, mint a beruházási ciklusé, ezért felesleges részletekbe menni.

5. Ciklus és káosz

POHJOLA (1981) cikkében egy olyan ciklusmodellt vezetett be, amely visszavezethető volt az előző fejezetben tanulmányozott logisztikus modellre, következésképpen bizonyos paraméterek mellett a ciklus káoszba ment át.

Lássuk a modellt! GOODWIN (1967) klasszikus ciklusmodelljéből indult ki Pohjola. [Goodwin modelljét egyébként BRÓDY (1980) más irányba fejlesztette tovább.] A gazdaságban egy terméket állítanak elő, amelyet vagy elfogyasztanak, vagy beruháznak. A munkaerő (N_t) növekedési üteme n, a munkatermelékenység (Y_t/L_t) növekedési üteme σ, és a tőke per termelés hányados $= K_t/Y_t = \mu$. A munkások bérüket fogyasztásra fordítják, a tőkések profitjukat beruházzák.

Legyen A_t a munkások részesedése a termelésből. Ekkor a tőkeállomány változását a következő egyenlet határozza meg:

$$K_{t+1} - K_t = (1 - A_t) Y_t. \tag{5.1}$$

Vezessük be a foglalkoztatási hányadot:

$$E_t = L_t/N_t. \tag{5.2}$$

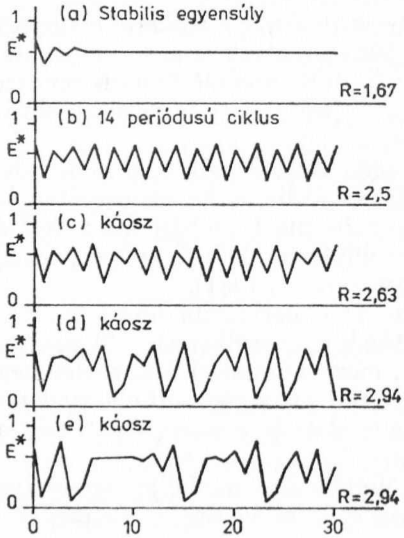
Ekkor feltevéseink alapján (5.1)-ből a következő egyenlet adódik:

$$E_{t+1}/E_t = 1 + (1 - \mu g - A_t)/\mu(1 + g), \text{ ahol } g = n + \sigma + n\sigma, \tag{5.3}$$

azaz g a termelés természetes növekedési üteme. Egyensúly esetén E_t változatlan (E^*), hasonlóan $A_t = A^* = 1 - \mu g$.

Idáig Pohjola pontosan követte Goodwint, a továbbiakban azonban a reálbért KUH nyomán magyarázta: A reálbér arányos a termelékenységgel, a h arányossági szorzó pedig a foglalkoztatási hányad pozitív és növekvő függvénye. A matematikai könnyebbség kedvéért a $h(E)$ függvényt linearizáljuk:

$$h(E) = -\alpha + \beta E. \tag{5.4}$$



2. ábra. Az (5.5) egyenlet szimulációja $g = 0$ és $E^* = 0{,}6$ mellett. A kezdő érték $E_0 = 0{,}75$ az (a)–(d) esetekben és $E_0 = 0{,}77$ az (e) esetben. Forrás: Pohjola (1981) Fig. 3.

Rövid számolás után a következő egyenletet kapjuk:

$$E_{t+1} = E_t[1 + R(1 - E_t/E^*)], \tag{5.5}$$

ahol

$$R = (1 - \mu g + \alpha)/\mu(1 + g) \text{ és } E^* = (1 - \mu g + \alpha)/\beta. \tag{5.6}$$

Nem nehéz belátni, hogy (5.5) is logisztikus egyenlet, amely az

$$x_t = RE_t/(1 + R)E^* \text{ és } r = R + 1 \tag{5.7}$$

helyettesítéssel átmegy a (3.1) egyenletbe.

Az előző fejezet eredményeinek hasznosításánál csak az (5.7) „fordítási szabályt" kell figyelembe venni.

Először a legegyszerűbb esetet vizsgáljuk, a stagnáló gazdaságot: $g = 0$. Ekkor $R = (1 + \alpha)/\mu$ és $E^* = (1 + \alpha)/\beta$.

A számítógépes szimuláció eredményeit a 2. ábra szemlélteti.

Megjegyezzük, hogy a növekedés figyelembevétele némileg más eredményeket ad, és csökkenti a káosz bekövetkezésének a gyakoriságát. A cél azonban nem az volt, hogy a valóságos gazdaságra bizonyítsuk a kaotikus viselkedés jelenlétét, hanem az, hogy bemutassuk ennek elvi lehetőségét.

Érdekes, hogy míg Szluckij (1937) sztochasztikus zavarok bevezetésével magyarázta a ciklust, addig a szerző egy nem-lineáris ciklus modellből vezet le sztochasztikus ingadozásokat.

Figyelemre méltó, hogy a 2. ábrán szereplő (c)–(e) kaotikus pályák milyen zavarosak és – mint a (d) és az (e) pályaösszehasonlításából kiderül – mennyire függnek a kezdeti értékektől. Nagyon óvatosan kell mérlegelni a kaotikus dinamikájú rendszerek szimulációs eredményeit. Figyeljük csak meg, hogy az (e) pályáról $t = 10$ előtt már azt hihetjük, hogy egyensúlyba került; hogy pár lépéssel később megtudjuk, hogy mégsem.

6. Kaotikus árdinamika

MONTRUCCHIO (1982) a SAMUELSON (1947)-féle árdinamika makrováltozatát vizsgálva jutott el a kaotikus mozgások leírásához.

A modell nagyon egyszerűen megfogalmazható: Legyen p_t a t-edik időszak árszínvonala, amelyhez $d(p_t)$ kereslet és $s(p_t)$ kínálat tartozik. A következő időszak árszintje a jelenlegitől a túlkereslettel arányosan tér el, ahol az arányossági szorzó jele λ.

$$p_{t+1} = p_t + \lambda[d(p_t) - s(p_t)], \quad t = 0, 1, 2, \ldots; \; p_0 \text{ adott.} \tag{6.1}$$

Egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy mind a keresleti, mind a kínálati rugalmasság állandó:

$$d(p_t) = Ap_t^{-\alpha} \text{ és } s(p_t) = bp_t^{\beta}, \tag{6.2}$$

ahol $A, b, \alpha > 0$ és $0 \leq \beta < 1$.

A (6.2)-t behelyettesítve (6.1)-be, a következő egyenletet kapjuk:

$$p_{t+1} = p_t + \mu(p_t^{-\alpha} - \gamma p_t^{\beta}), \tag{6.3}$$

ahol $\mu = \lambda A k^{-\alpha}$ és $\lambda = bk^{\alpha}/A$.

Könnyen belátható, hogy a (6.3) rendszernek egyetlen egyensúlyi pontja van:

$$p^* = \gamma^{-1/(\alpha+\beta)}. \tag{6.4}$$

A továbbiakban p_t dinamikáját vizsgáljuk a μ reakciósebesség függvényében.

Ismert, hogy a végnélküli kettőződések és a káosz kialakulása nemcsak a logisztikus függvényre, hanem széles függvényosztályra jellemző, amelybe beletartozik a (6.3) leképezés is.

Számolással belátható, hogy a (6.3) rendszer p^* egyensúlyi állapota akkor és csak akkor lokálisan stabilis, ha teljesül

$$0 < \mu < \mu_1 = 2(\alpha + \beta)^{-1}\lambda^{-(\alpha+1)/(\alpha+\beta)}. \tag{6.5}$$

További feltevések szükségesek ahhoz, hogy a rendszer ne váljon működésképtelenné (az ár ne legyen negatív), s ahhoz, hogy a *lokális* stabilitás *globális* stabilitást is biztosítson.

Például ha $0 < \beta < 1/2$ vagy $\alpha > 1$, akkor a (6.5) feltétel biztosítja a globális működőképességet és a globális stabilitást, de valójában ennél gyengébb (ám bonyolultabb) feltétel is adható.

A 2. fejezetben leírt *perióduskettőződés* fellép és a káosz megjelenik, ha

$$\alpha > 2\beta - 1. \tag{6.6}$$

Megjegyzések MONTRUCCHIO (1982) kiterjesztette elemzését arra a bonyolultabb esetre is, amikor a kínálat nem a tényleges, hanem a *várható* ár függvénye, a várható ár pedig konvex lineáris kombinációja az előző időszak tényleges és várt árának:

$$\hat{p}_t = \delta p_{t-1} + (1 - \delta)\hat{p}_{t-1}. \tag{6.7}$$

Az *adaptív* várakozás (NERLOVE, 1958) egyaránt magába foglalja a *naiv* várakozásokat ($\delta = 1$, $\hat{p}_t = p_{t-1}$) és a *statikus* várakozásokat ($\delta = 0$, $\hat{p}_t = \hat{p}_{t-1}$). Az első esetben a jólismert *pókháló* modellhez jutunk vissza (BAUMOL, 1968), feltéve, hogy a reakciósebességet végtelennek vesszük.

Figyelemre méltó, hogy a pókháló modellben a közgazdaságilag ésszerűbbnek tűnő állandó rugalmasságú görbék helyett állandó meredekségű keresleti és kínálati egyenesek szerepelnek; s ez okozza az eltérő eredményeket.
A bonyolultabb modell elemzésének ismertetése azonban meghaladná népszerűsítő dolgozatom kereteit.

7. Röviden más modellekről

Dolgozatunk zárófejezetében röviden szólnék néhány olyan közgazdasági modellről, amely szintén kaotikus mozgást származtat.

a) *Ésszerű preferenciák — kaotikus viselkedés*

A közgazdasági irodalomban nyomtatásban legelőször talán BENHABIB és DAY (1980) cikkében jelent meg a *káosz* kifejezés — természetesen a most használt értelmezésre szorítkozva. (A *káosz* ugyanúgy túlságosan színes kifejezés, mint a *katasztrófa* elmélet!)
Modelljükben két termék van: x és y volumenük, p és q az egységáruk, m a fogyasztó jövedelme, $px + qy = m$ a fogyasztó költségvetési korlátja és $u(x, y, a) = x^a y^{1-a}$ a fogyasztó hasznosságfüggvénye. Egyszerű számítással adódik a két keresleti függvény: $x = am/p$ és $y = (1 - a)\, m/q$.
A szerzők fölteszik, hogy a fogyasztó hasznosságfüggvénye, pontosabban súlyrendszere, függ a múltbeli tapasztalatoktól. Például $a_{t+1} = \alpha x_t y_t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ (Gondoljunk a szemléletesség kedvéért x-re mint szabadidőre, y-ra mint fogyasztási cikkek összességére. Ekkor egyenletünk azt mondja, hogy minél nagyobb a múltbeli anyagi fogyasztás, annál nagyobb a szabadidő értéke.)
Egyszerű számolással adódik a jól ismert logisztikus egyenlet: $x_{t+1} = \alpha m x_t(m - x_t)$.

b) *Készletdinamika — disequilibrium — káosz*

Az eddig említett modellekben szereplő leképezések nemcsak folytonosak, hanem folytonosan differenciálhatók voltak. A disequilibrium-elméletben szereplő dinamikus modellekben (pl. HONKAPOHJA és ITO (1981), SIMONOVITS (1983)) viszont megjelennek a lineáris szakaszokból álló, átkapcsolási pontokkal rendelkező leképezések is. További bonyodalmat jelent a matematikai elemzésben, hogy a tökéletlen előrelátás figyelembe vétele ugyanúgy kétváltozós rendszerhez vezet, mint az előző fejezet árdinamikájában.
A két modell részletes ismertetése a folyóirat korábbi számában olvasható: SIMONOVITS (1983). Itt csak azt említem meg, hogy a *H-I* modellről könnyen belátható, hogy instabilitás esetén a rendszer kaotikus mozgást végez. [A 3. fejezetben említett LI és YORKE (1975) tétel feltétele érvényes *H—I*-ra, tehát a következtetése is.] Saját modellemről továbbra sem tudom egzaktan bizonyítani, hogy az instabil eset kaotikus.
Figyelemre méltó, hogy mindkét disequilibrium modellben a káosz és a stabilitás tartománya egymással határos, hiányzik az előző fejezetekben leírt perióduskettőződés. Egyébként SZÉPFALUSSY és TÉL szerk. (1982) kötet több helyén is olvasható, hogy a káosz kialakulásának számos útja van.

Ezzel ismertetésünk végére értünk. A szokással ellentétben, az irodalomjegyzékben olyan dolgozatokat is szerepeltetünk, amelyekkel a főszövegben nem foglalkozunk — lehetővé téve az olvasónak a káosszal foglalkozó további irodalom tanulmányozását.

(Beérkezett: 1985. március 12-én.)

IRODALOM

1. ARROW, K. J.—BLOCK, H. D.—HURWICZ, L.: „On the stability of the competitive equilibrium" *Econometrica*, 27. évf. (1959) 82—109.
2. BAUMOL, W. J.: *Közgazdaságtan és operációanalízis*. KJK, Bp. (1968).
3. BENHABIB,—DAY, R.: Rational preferences and erratic behaviour. *Review of Economic Studies*, XLVIII. évf. (1980) 459—471. o.
4. BRÓDY, A.: *Ciklus és szabályozás*. KJK, Bp. (1980).
5. DANA, A.—R.-MALGRANGE.: The dynamics of a discrete version of a growth cycle model. *Cepremap*, Párizs (1981).
6. DAY, R.: „Irregular growth cycles". *American Economic Review*, *72*. évf. (1982) 406—414.
7. GOODWIN, R.: A growth cycle, megjelent a Feinstein, szerk. *Socialism, capitalism and economic growth*. Cambridge University Press, Cambridge (1967).
8. HICKS, J.: *A contribution to the theory of trade cycle*. Clarendon Press, Oxford (1950).
9. HONKAPOHJA, S.—ITO, T. Inventory dynamics in a simple disequilibrium macroeconomic model, *Scandinavian Journal of Economics*, *82*. évf. (1980) 184—198. o.
10. LI, J. A.—YORKE, J. A.: Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, 82. évf. (1975) 985—992. o.
11. MAY, R. B.: Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261. sz. (1976) 459—467. o.
12. MONTRUCCHIO, L.: Chaotic dynamics in economics. Reprint 45. *Istituto Matematico del Politecnico di Torino*. (1982).
13. NERLOVE, M.: Adaptive expectations and cobweb phenomena. *Quarterly Journal of Economics*, *72*. évf. (1958) 227—240.
14. POHJOLA, M. T. Stable and chaotic growth: the dynamics of a discrete version cycle model. *Zeitschrift für Nazionalökonomie 41*. évf. (1981) 27—39. o.
15. SAMUELSON, P. A. *Foundations of economic analysis*. Harvard University Press, Cambridge (1947).
16. SIMONOVITS, A. Korlátos szabályozás és destabilizálás, megjelent: Kornai, J.—Martos, B. (szerk.) *Szabályozás árjelzések nélkül*. Akadémiai Kiadó, Bp. (1981) 255—289. o.
17. SIMONOVITS, A.: Ütköző készletek és naiv várakozások egy nem-walrasi dinamikus makromodellben: Stabilitás, ciklus és káosz. *Szigma* 16. évf. (1983) 15—30. o.
18. SZÉPFALUSSY, P.—TÉL, T. (szerk.): *Véletlenszerű jelenségek nem-lineáris rendszerekben: a káosz*. Akadémiai Kiadó, Bp. (1982).
19. SLUTZKY, E.: The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes. *Econometrica 5*. évf. (1937) 105—146. o.