Komlósi Sándor

Másodrendű optimalitási feltételek numerikus vizsgálata

I. Bevezetés

Ez a dolgozat szerves folytatása a Szigmában megjelent egyik cikkemnek [10], amelyben az

$$\begin{aligned} f(x) &\to \max \\ g_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{1}$$

feltételes szélsőérték-feladatra vonatkozóan a lokális optimalitás egy másodrendű elegendő feltételét és annak különböző ekvivalens alakjait tanulmányoztam a célfüggvény kvázi Hesse-mátrixai segítségével. (Az $f(x)$ célfüggvény és a $g_i(x)$ feltételi függvények az R^n n-dimenziós euklideszi téren értelmezett számértékű függvények.)

Kétszer differenciálható függvény kvázi Hesse-mátrixa a függvény Hesse-mátrixából és gradiens vektorából képezhető egy meglehetősen bonyolult képlet alapján [10, (13) formula]. (A kvázi-Hesse-mátrix fogalma és legfontosabb tulajdonságai megtalálhatók a [9, 10, 11] dolgozatokban.) Ez a bonyolult képzési szabály a kvázi Hesse-mátrixszal kapcsolatos optimalitási kritérium (a kvázi Hesse-mátrix negatív definitsége) gyakorlati alkalmazhatóságát erősen megkérdőjelezi. Ebből fakadtak azok a törekvések, hogy a kvázi Hesse-mátrix negatív definitségével ekvivalens feltételekhez jussunk [10, 11]; azt a célt azonban, hogy számítástechnikailag is viszonylag egyszerűen kezelhető kritériumot találjunk, az eddigiekben még nem sikerült elérni.

Jelen dolgozatban megadjuk a kvázi Hesse-mátrix negatív definitségének egy olyan új kritériumát, amely a numerikus tesztelhetőség szempontjából az eddigi kritériumok közül a legjobb, és ismertetünk egy a tesztelésre vonatkozó pivot-algoritmust.

II. Egy másodrendű optimalitási feltétel különböző változatai

Tekintsük az (1) feladatot. Legyen $f(x)$ kétszer folytonosan differenciálható a feladat x_0 KTL-stacionárius pontjának valamely környezetében. Tegyük fel, hogy a lehetséges programok

$$L = \{x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

halmaza lokálisan csillagszerű x_0-ban és $\nabla f(x_0) \neq 0$. A $\nabla f(x)$ szimbólum az $f(x)$ függvény gradiens-vektorát jelöli, melyet kényelmi okokból sorvektornak tekintünk. Az R^n tér elemeit viszont — szokás szerint — oszlopvektoroknak tekintjük. (A többi fogalom definíciója [10]-ben megtalálható.)

Korábbi dolgozataimban [9, 10, 11] megmutattam, hogy a következőkben felsorolt feltételek — $\nabla f(x_0) \neq 0$ esetén — egyrészt ekvivalensek az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli kvázi Hesse-mátrixai negatív definitségével, másrészt a fenti feltételeket kiegészítve biztosítják, hogy az $x_0 \in L$ KTL-stacionárius pont az (1) feladatnak szigorú lokális optimális megoldása legyen.

A tárgyalandó feltételek megfogalmazásához szükségünk van a következő jelölések bevezetésére: legyenek $u_1, \ldots, u_n \in R^n$ a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrix ortonormált sajátvektorai; $h_1, \ldots, h_n \in R$ pedig a megfelelő sajátértékek.

Az ($F0$) *feltétel:*
a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrix vagy negatív definit, vagy egyetlen egyszeres nemnegatív sajátértéke van (legyen ez h_k) és teljesül a $\nabla f(x_0) u_k \neq 0$ összefüggés, amely a $h_k > 0$ esetben kiegészül a következő egyenlőtlenséggel:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(\nabla f(x_0) u_j)^2}{h_j} > 0.$$

Az ($F1$) *feltétel:*
ha $p \in R^n$, $p \neq 0$ és $\nabla f(x_0) p = 0$, akkor $p^T \nabla^2 f(x_0) p < 0$.

Az ($F2$) *feltétel:*
a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrix vagy negatív definit, vagy egyetlen egyszeres nemnegatív sajátértéke van (legyen ez h_k) és teljesül a $\nabla f(x_0) u_k \neq 0$ összefüggés, amely a $h_k > 0$ esetben kiegészül még a következővel: az

$$r := (\nabla^2 f(x_0))^{-1} \nabla f(x_0)^T$$

vektorra $\nabla f(x_0) r > 0$ teljesül.

Az ($F0$) — ($F2$) feltételek ekvivalenciájának bizonyítása megtalálható a [10, 11] dolgozatokban.

Most megadjuk a vizsgálatunk tárgyát képező új ($F3$) feltételt.

Az ($F3$) *feltétel:*

a

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \nabla f(x_0) \\ \nabla f(x_0)^T & \nabla^2 f(x_0) \end{bmatrix}$$

„szegélyezett" Hesse-mátrix *nem-szinguláris* és *egyetlen pozitív sajátértéke van.*

Az, hogy az ($F1$) tulajdonság és a „szegélyezett" Hesse-mátrix bizonyos tulajdonságai között kapcsolat van már régóta ismert [3, 4, 6, 12, 14]. Az említett tulajdonságok a H mátrix minorjaival kapcsolatosak és vizsgálatuk meglehetősen nehézkes.

Az ($F0$) — ($F3$) feltételek ekvivalenciájának bizonyításához szükségünk lesz a következő ismert eredményekre.

Lemma. ([5, Theorem 2.9] és [2, Theorem 4.1]) Ha $\nabla f(x_0) \neq 0$, akkor a következő feltételek ekvivalensek:

($C1$) *feltétel* (Katzner feltétel):
ha $p \in R^n$ és $\nabla f(x_0) p = 0$, akkor $p^T \nabla^2 f(x_0) p \leq 0$;

$(C2)$ *feltétel* (Crouzeix—Ferland feltétel):

a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrix vagy negatív szemidefinit, vagy egyetlen egyszeres pozitív sajátértéke van és létezik olyan $r \in R^n$, hogy $\nabla^2 f(x_0) r = \nabla f(x_0)^T$ és minden ilyen r vektorra $\nabla f(x_0) r \geq 0$;

$(C3)$ *feltétel* (Ferland feltétel):

a
$$H = \begin{bmatrix} 0 & \nabla f(x_0) \\ \nabla f(x_0)^T & \nabla^2 f(x_0) \end{bmatrix}$$
„szegélyezett" Hesse-mátrixnak pontosan egy pozitív sajátértéke van.

Ezen előkészületek után bebizonyítjuk dolgozatunk fő eredményét.

Tétel. Ha $\nabla f(x_0) \neq 0$, akkor az $(F3)$ feltétel ekvivalens az $(F0)$ — $(F2)$ feltételekkel.

Bizonyítás. Először az $(F1) \Rightarrow (F3)$ implikációt bizonyítjuk. A Lemma alapján nyilvánvaló az $(F1) \Rightarrow (C3)$ implikáció helyessége. Tegyük fel, hogy $\nabla f(x_0) \neq 0$ és teljesül az $(F1)$ feltétel. Ekkor — a $(C3)$ folytán — a H „szegélyezett" Hesse-mátrixnak pontosan egy pozitív sajátértéke van, következésképpen az $(F3)$ feltétel teljesüléséhez csupán a H mátrix nem-szingularitását kell bizonyítani.

Legyenek $a \in R$ és $p \in R^n$ tetszőlegesek. Tegyük fel, hogy
$$H \begin{bmatrix} a \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x_0) p \\ a \nabla f(x_0)^T + \nabla^2 f(x_0) p \end{bmatrix} = 0.$$
Ekkor
$$\nabla f(x_0) p = 0, \tag{2}$$
$$a \nabla f(x_0)^T + \nabla^2 f(x_0) p = 0. \tag{3}$$
Ha $p = 0$, akkor $\nabla f(x_0) \neq 0$ miatt $a = 0$. Ha $p \neq 0$, akkor
$$0 = p^T (a \nabla f(x_0)^T + \nabla^2 f(x_0) p) = p^T \nabla^2 f(x_0) p,$$
ami ellentmond az $(F1)$ feltételnek. A (2) — (3) egyenletrendszernek tehát csak a triviális $a = 0$, $p = 0$ megoldása van, következésképpen a H mátrix nem-sziguláris. Ezzel az $(F1) \Rightarrow (F3)$ implikáció bizonyítást nyert.

Most megmutatjuk, hogy az $(F3)$ feltétel teljesülése maga után vonja az $(F2)$ feltétel teljesülését. A Lemma alapján nyilvánvaló az $(F3) \Rightarrow (C2)$ implikáció helyessége. Tegyük most fel, hogy $\nabla f(x_0) \neq 0$ és teljesül az $(F3)$ feltétel. $(C2)$ szerint ekkor a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrix vagy negatív szemidefinit, vagy egyetlen egyszeres pozitív sajátértéke van és létezik olyan $r \in R^n$ vektor, hogy
$$\nabla^2 f(x_0) r = \nabla f(x_0)^T$$
és minden ilyen r vektorra $\nabla f(x_0) r \geq 0$ teljesül.

Most megmutatjuk, hogy lévén a H „szegélyezett" Hesse-mátrix nem-szinguláris, ezért a $(C2)$ feltétel mellett a nála erősebb $(F2)$ feltétel is teljesül.

(i): Ha $\nabla^2 f(x_0)$ negatív definit, akkor $(F2)$ nyilvánvalóan teljesül.

(ii): Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\nabla^2 f(x_0)$ csupán negatív szemidefinit (vagyis nem definit). Legyen $u \neq 0$ a $\nabla^2 f(x_0)$ mátrix 0 sajátértékéhez tartozó

tetszőleges sajátvektor. Mivel H nem-szinguláris, ezért

$$H\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x_0)u \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0,$$

következésképpen $\nabla f(x_0)u \neq 0$, vagyis a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrix null-alteréhez tartozó bármely $u \neq 0$ vektorra $\nabla f(x_0)u \neq 0$, amiből szükségszerűen következik, hogy $\nabla^2 f(x_0)$ null-altere egydimenziós, azaz a 0 sajátérték egyszeres. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy ha $\nabla^2 f(x_0)$ csupán negatív szemidefinit, akkor $(F2)$ teljesül.

(iii): $(C2)$-nek megfelelően annak az esetnek a vizsgálata van hátra, amikor a $\nabla^2 f(x_0)$ mátrixnak egyetlen pozitív sajátértéke van és az egyszeres. Tekintsük a $(C2)$ feltételben szereplő $r \in R^n$ vektort. Mivel

$$H\begin{bmatrix} -1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x_0)r \\ -\nabla f(x_0)^T + \nabla^2 f(x_0)r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x_0)r \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0,$$

ezért $\nabla f(x_0)r \neq 0$, következésképpen $\nabla f(x_0)r > 0$.

Most megmutatjuk, hogy a vizsgált esetben a 0 nem lehet sajátértéke a $\nabla^2 f(x_0)$ mátrixnak. Ha ugyanis a 0 sajátérték lenne, akkor lenne olyan $u \in R^n$ vektor, amelyre $\nabla^2 f(x_0)u = 0$ és $\nabla f(x_0)u = -\nabla f(x_0)r$.
Ekkor

$$H\begin{bmatrix} -1 \\ r+u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x_0)u + \nabla f(x_0)r \\ -\nabla f(x_0)^T + \nabla^2 f(x_0)r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ami lehetetlen a H mátrix nem-szingularitása miatt. Tehát a 0 nem lehet sajátértéke a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrixnak. Ezzel befejeztük az $(F3) \Rightarrow (F2)$ implikáció bizonyítását.

A már ismert $(F0) \Leftrightarrow (F1) \Leftrightarrow (F2)$ ekvivalencia folytán tételünk bizonyítást nyert.

Az $(F3)$ feltétel azért egyszerűbb az előzőeknél, mivel egyetlen sajátértéket, ill. sajátvektort sem kell kiszámítani az ellenőrzésére, csupán a sajátértékek előjel-viszonyait kell meghatározni. Mint a következő részben majd látni fogjuk, ez nem is olyan számításigényes feladat.

III. Szimmetrikus mátrix inerciája és kiszámításának egy lehetséges módja

Legyen H egy m-edrendű szimmetrikus mátrix. Vezessük be a következő mennyiségeket:

$n(H)$ = a H mátrix negatív sajátértékeinek száma multiplicitással együtt,
$z(H)$ = a nulla sajátérték multiplicitása,
$p(H)$ = a H mátrix pozitív sajátértékeinek száma multiplicitással együtt.
Nyilvánvaló, hogy $n(H) + z(H) + p(H) = m$.

Definíció: a H szimmetrikus mátrix *inerciá*ja alatt az

$$In\ H := (n(H), z(H), p(H))$$

rendezett számhármast értjük.

Az inercia fogalmának bevezetésével az ($F3$) feltétel a következő módon is megadható: ha H a „szegélyezett" Hesse-mátrix, akkor

$$In\, H = (n, 0, 1).$$

Az ($F3$) feltétel vizsgálatához tehát elegendő a H mátrix inerciáját kiszámítani.

A továbbiakban ismertetjük R. W. COTTLE algoritmusát szimmetrikus mátrix inerciájának meghatározására [1]. Az algoritmus E. V. *Haynsworth* inerciatételén alapszik. A tétel megfogalmazásához szükségünk van a particionált mátrixokra (hipermátrixokra) vonatkozó Schur-komplemens fogalmára.

Tekintsük az M mátrixot a következőképpen particionált alakban:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Ha az A mátrix kvadratikus és nem-szinguláris, akkor a

$$D - CA^{-1}B$$

mátrixot az A mátrix M-re vonatkozó *Schur-komplemens*ének nevezzük és $(M \mid A)$-val jelöljük. Az $(M \mid A)$ Schur-komplemens mátrixszal a legkülönfélébb problémák kapcsán találkozhatunk, leggyakrabban azonban a rendes vagy „általánosított" Gauss-elimináció alkalmazásakor [1].

A Haynsworth-féle inercia tétel [7]: Legyen M szimmetrikus mátrix. Tegyük fel, hogy (4) szerint particionált alakjában az A mátrix invertálható. Érvényes ekkor a következő összefüggés:

$$In\, M = In\, A + In\, (M \mid A). \tag{5}$$

A későbbiek szempontjából szükségünk van az (5) inercia-formula néhány speciális alakjára.

1. eset: $A = [m_{11}]$, ahol $m_{11} \neq 0$. Ha $m_{11} < 0$, akkor

$$In\, M = (1, 0, 0) + In\, (M \mid A), \tag{6i}$$

ha $m_{11} > 0$, akkor

$$In\, M = (0, 0, 1) + In\, (M \mid A). \tag{6ii}$$

2. *eset:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

ahol $m_{12} = m_{21} \neq 0$. Ekkor

$$In\, M = (1, 0, 1) + In\, (M \mid A). \tag{7}$$

3. *eset:* az $(M \mid A)$ Schur-komplemens k-adrendű zeró mátrix. Ekkor

$$In\, M = In\, A + (0, k, 0). \tag{8}$$

Az ismertetendő algoritmus az inerciának még egy további tulajdonságát használja ki: az inercia a mátrix principális átrendezésével szemben invariáns. *Principális átrendezés*en a mátrix sorainak és oszlopainak olyan átrendezését értjük, amikor a sorok és oszlopok azonos módon permutálódnak.

A Cottle-féle algoritmusban szerepet kap a szimmetrikus mátrixok következő tulajdonságok szerinti osztályozása: az M szimmetrikus mátrix a következő tulajdonságok közül pontosan eggyel rendelkezik:

($T1$) diag $M \neq 0$;

($T2$) diag $M = 0$, de $M \neq 0$;

($T3$) $M = 0$.

Ezen elők észületek után rátérünk a Cottle-féle algoritmus ismertetésére.

A Cottle-féle algoritmus [1]:

Legyen H m-edrendű szimmetrikus mátrix. Az algoritmus a H inerciáját számítja ki véges számú lépésben az (6)—(7)—(8) inercia-formulák segítségével. Az algoritmus formalizálhatósága okán értelmezzük az üres mátrix foalgmát, melyet jelöljön $\emptyset$ és fogadjuk el rá vonatkozóan a következőket:

$$In\,\emptyset = (0,0,0); \quad (H \mid \emptyset) = H; \quad (H \mid H) = \emptyset. \tag{9}$$

Jelölje $H^{(k)}$ az algoritmus során kiszámításra kerülő k-adik Schur-komplemenst, H_k pedig a k-adik pivot-blokkot. Legyen

$$H^{(0)} = H \quad \text{és} \quad H_0 = \emptyset.$$

KEZDET: Legyen $k = 0$.

INERCIASZÁMÍTÁS: Kiszámítjuk az

$$s_k = \sum_{i=0}^{k} In\,H_i$$

összeget. Ha $H^{(k)} = \emptyset$, akkor $In\ H = s_k$ és STOP. Ha a $H^{(k)}$ Schur-komplemens (Ti) tulajdonságú, akkor menjünk az i-edik LÉPÉS-re.

1. *LÉPÉS:* a principális átrendezhetőségről mondottak alapján feltehető, hogy $h_{11}^{(k)} \neq 0$. Legyenek

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= [h_{11}^{(k)}] \text{ és} \\ H^{(k+1)} &= (H^{(k)} \mid H_{k+1}) \,. \end{aligned}$$

A (6i)—(6ii) formulák szerint kiszámítjuk $In\ H_{k+1}$-et, k helyére $k+1$-et teszünk és visszatérünk az INERCIASZÁMÍTÁShoz.

2. *LÉPÉS:* feltehetjük, hogy $h_{12}^{(k)} = h_{21}^{(k)} \neq 0$. Legyenek

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= \emptyset, \\ H_{k+2} &= \begin{bmatrix} 0 & h_{12}^{(k)} \\ h_{21}^{(k)} & 0 \end{bmatrix}, \\ H^{(k+1)} &= (H^{(k)} \mid H_{k+1}) = H^{(k)}, \\ H^{(k+2)} &= (H^{(k)} \mid H_{k+2}). \end{aligned}$$

A (9) formula szerint $In\ H_{k+1} = (0, 0, 0)$, a (7) formula szerint $In\ H_{k+2} = (1, 0, 1)$. k helyére $k+2$-t teszünk és visszatérünk az INERCIASZÁMÍTÁShoz.

3. *LÉPÉS:* Ebben az esetben $H^{(k)} = 0$. Mivel $H^{(k)}$ $(m-k)$-adrendű zéró mátrix, ezért a (8) formula szerint

$$In\,H = s_k + (0, m-k, 0).$$

STOP: H inerciájának meghatározása véget ért.

Az ($F3$) feltétel számításigénye a [2] dolgozat szerint kisebb, mint az ($F1$), ill. ($F2$) feltételeké. Igaz ugyan, hogy J.-P. Crouzeix és J. A. Ferland a ($C1$)—($C3$) feltételeket hasonlították össze, de nyilvánvaló, hogy az általuk tett megállapítások érvényben maradnak az ($F1$) — ($F3$) feltételek vonatkozásában is. Hogy az ($F0$) feltétel lényegesen számításigényesebb, mint az ($F3$), az minden különösebb számítás nélkül is nyilvánvaló.

IV. Példák

1. Tekintsük az

$$f(x) = x_1x_2x_3 \to \max$$
$$g(x) = x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 9 \leq 0$$

nemlineáris programozási feladatot. Tekintett feladatnak az $x_0 = \left(3, 1, \frac{1}{3}\right)$ pont KTL-stacionárius pontja, mivel $\nabla f(x_0) = \frac{1}{3} \nabla g(x_0)$ és az egyetlen feltétel x_0-ban aktív. Tekintsük a célfüggvény x_0 pontbeli „szegélyezett" Hesse-mátrixát:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki $In\ H$-t. Mivel a H mátrix ($T2$) tulajdonságú, ezért az algoritmus kezdő lépései a következők:

$$H_0 = H_1 = \emptyset \text{ és } H_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Kiszámítjuk a $H^{(2)}$ Schur-komplemenst:

$$H^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -18 \end{bmatrix}.$$

Mivel a $H^{(2)}$ Schur-komplemens ($T1$) tulajdonságú, ezért a következő pivot blokk lehetséges választása:

$$H_3 = [-2].$$

A $H^{(3)}$ Schur komplemensre és a H_4 pivot blokkra a következő adódik:

$$H^{(3)} = H_4 = \left[-\frac{9}{2}\right].$$

Mivel $H^{(4)} = \emptyset$, ezért az eljárás véget ért;

$$In\, H = In\, H_2 + In\, H_3 + In\, H_4 = (1, 0, 1) + (1, 0, 0) + (1, 0, 0,) = (3, 0, 1).$$

A H „szegélyezett" Hesse-mátrix tehát nem-szinguláris és egyetlen pozitív sajátértéke van. A vizsgált szélsőértékfeladat $x_0 = \left(3, 1, \frac{1}{3}\right)$ KTL-stacionárius pontjában tehát teljesül a lokális optimalitás $(F3)$ elégséges feltétele, vagyis az x_0 pont szigorú lokális maximum-helye a feladatnak.

2. Az $(F0)$ — $(F3)$ feltételekkel kapcsolatban felmerül a kérdés, hogy a lokális optimalitásnak ezen elégséges feltételei „milyen messze vannak" a szükségességtől? A következő feladatpár mutatja, hogy lehetnek „igen messze" is!

A. feladat:

$$f(x) = x_1 x_2 \ldots x_n \to \max$$
$$x_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n;$$

B. feladat:

$$f(x) = x_1 x_2 \ldots x_n \to \min$$
$$x_i \geq 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Nyilvánvaló, hogy az $x_0 = (1, 1, \ldots, 1)$ pont mindkét feladatnak lokális szigorú optimumpontja. Nyilvánvaló továbbá, hogy mindkét feladatnak ugyanaz az x_0 ponthoz tartozó H „szegélyezett" Hesse-mátrixa. Egyszerű számítással ellenőrizhető, hogy

$$In\, H = (n, 0, 1), \tag{10}$$

vagyis az A. feladat x_0 optimális pontjában teljesül az $(F3)$ feltétel.

Az $(F3)$ feltétel a B. feladatra vonatkozóan az lenne, hogy $In\, H = (1, 0, n)$, ez azonban „elég messze" van a tényleges helyzettől (10)-től.

Ismeretes azonban, hogy a szigorúan pszeudokonkáv célfüggvényű (1) feladatokra az $(F0)$ — $(F3)$ feltételek (egyes degenerált esetek kivételével) szükségesek is. Egészen pontosan: ebben az esetben a $(C1)$ — $(C3)$ feltételek a lokális optimalitás szükséges feltételei [9, 11].

(Beérkezett: 1985. október 3-án.)

IRODALOM

1. Cottle, R. W.: Manifestations of the Schur complement. *Linear Algebra and Appl.*, 8 (1974) 189—211.
2. Crouzeix, J.—P., Ferland, J. A.: Criteria for quasiconvexity and pseudoconvexity: relationships and comparisons. *Mathematical Programming*, 23 (1982) 193—205.
3. Debreu, G.: Definite and semidefinite quadratic forms. *Econometrica 20* (1952) 295—300.

4. Farebrother, R. W.: Necessary and sufficient conditions for a quadratic form to be positive whenever a set of homogenous linear constraints is satisfied. *Linear Algebra and its Applications, 16* (1977) 39–42.
5. Ferland, J. A.: Matrix-theoretic criteria for the quasi-convexity of twice continuously differentiable functions. *Linear Algebra and Appl.*, 38 (1981) 51–63.
6. Hancock, M.: *Theory of maxima and minima.* Ginn, Boston, 1917; Dover, New York, 1950.
7. Haynsworth, E. V.: Determination of the inertia of a partitioned hermitian matrix. *Linear Algebra and Appl.*, 1 (1968) 73–81.
8. Komlósi, S.: Second order characterization of pseudoconvex and strictly pseudoconvex functions in terms of quasi-Hessians. In: *Contributions to the theory of optimization*, Ed.: Forgó F., Karl Marx University of Economics Budapest, DM 83–2 (1983) 19–45.
9. Komlósi, S.: Néhány adalék a kvázikonvex függvények elméletéhez. *Alk. Mat. Lapok, 10* (1984) 103–113.
10. Komlósi, S.: Matematikai programozási feladatok optimalitási kritériumairól. *Szigma*, 17 (1984) 257–267.
11. Komlósi, S.: Secon dorder conditions of generalized convexity and local optimality in nonlinear programming: the quasi-Hessian approach. *Studia Oeconomica Auctoritate Universitatis Pécs Publicata*, Pécs, 1985.
12. Mann, H. B.: Quadratic forms with linear constraints. *Amer. Math. Monthly, 50* (1943) 430–433.
13. Martos, B.: *Nonlinear programming: theory and methods.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
14. Samuelson, P. A.: *Foundations of economic analysis*, Harvard U. P., Cambridge, Mass.–1947.

NUMERICAL STUDY OF SECOND-ORDER OPTIMALITY CONDITIONS

The paper investigates four – mutually equivalent – second-order optimality conditions relating to a non-linear programming problem constrained by inequalities. Three of the four conditions – F0, F1 and F2 – have been known for some time. One of the main results of the paper is to prove that the fourth condition (F3) is equivalent to the former ones. This condition requires that the so-called bordered Hessian be non-singular with a single positive eigenvalue. Its fulfilment can much more easily be checked numerically than that of the other equivalent conditions. The paper also reviews R. W. Cottle's pivot-algorithm which is suited for determining the inertia of a symmetrical matrix and thus is also suited for checking the fulfilment of the F3 optimality condition. The paper demonstrates the operation of Cottle's algorithm with a simple numerical example.

ЧИСЛОВОЙ АНАЛИЗ ВТОРОСТЕПЕННЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В работе анализируются четыре — эквивалентные между собой — второстепенные условия оптимизации относительно ограниченной неравенствами нелинейной задачи программирования. Из четырех условий три (F0, F1 и F2) известные давно. Одним из основных результатов работы является доказательство того, что четвертое условие F3 эквивалентно предыдущим. Значение условия F3 (т. н. ограниченная матрица Хессе, несингулярная и имеющая единственную положительную собственную величину) состоит в том, что его выполнение может быть гораздо легче проконтролировано в числовом выражении, чем в случае остальных.

В статье представлен опорный алгоритм Р. В. Коттле который пригодин для определении инерции симметричной матрицы, и благодаря этому пригоден и для контроля выполнения условий оптимизации F3. С помощью простого числового примера в работе показывается функционирование алгоритма Коттле.