

SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági
Szakosztályának lapja

Szerkeszti:

MARTOS BÉLA

Társszerkesztők:

BOD PÉTER, PONGRÁCZ TIBOR, SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA

Szerkesztőbizottság:

AUGUSZTINOVICS MÁRIA (elnök), BOD PÉTER, CSEPINSZKY ANDOR, ÉLTETŐ ÖDÖN, FORGÓ FERENC,
HALABUK LÁSZLÓ, KELLE PÉTER, KORNAI JÁNOS, KOVÁCS ÁLMOS, KREKÓ BÉLA, LIGETHI ISTVÁN,
MESZÉNA GYÖRGY, MIKÓ GYULA, ORMÓS ZSOLT, SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA, SIMONOVITS ANDRÁS,
SÓLYOM CSABA, STAHL JÁNOS, SZAKOLCZAI GYÖRGY, SZÉP JENŐ, TÓTH JÓZSEF, ZALAI ERNŐ,
ZIERMANN MARGIT

*

E szám szerzői:

BRÓDY ANDRÁS, a közgazdaságtudomány doktora, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tanácsadója, DUNAVÖLGYI MÁRIA, a Központi Statisztikai Hivatal tudományos munkatársa, FÜSTÖS LÁSZLÓ, az MTA Szociológiai Kutató Intézet tudományos munkatársa, Dr. HANÁK GÁBOR, az MTA Matematikai Kutató Intézet tudományos munkatársa, KELLE PÉTER, az MTA SZTAKI tudományos osztályvezető helyettese, KREKÓ BÉLA, kandidátus, az MKKE egyetemi tanára, MESZÉNA GYÖRGY, egyetemi docens, az MKKE Matematikai és Számítástudományi Intézet Közgazdasági Alkalmazások osztály vezetője, SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA, kandidátus, az OT Tervgazdasági Intézet főmunkatársa, Dr. ROY RADNER, AT & T. Bell Laboratories, USA, TERLAKY TAMÁS, kandidátus, az ELTE TTK Operációkutatási Tanszék adjunktusa, TÉTÉNYI TAMÁS, az OT Tervgazdasági Intézet tudományos továbbképzési ösztöndíjasa, VIZVÁRI BÉLA, az MTA SZTAKI tudományos munkatársa.

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely hírlapkézbesítő postahivatalnál, a Posta hírlapüzleteiben és a Hírlapelőfizetési és Lapellátási Irodánál (HELIR) Budapest V., József nádor tér 1., 1900, közvetlenül vagy postautalvánnyal, valamint átutalással a HELIR 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámra.

Előfizethető és példányonként megvásárolható az Akadémiai Kiadónál (1363 Budapest, Alkotmány utca 21., tel.: 111-010) és az Akadémiai Kiadó Stúdióm (1368 Budapest, Váci utca 22., tel.: 185-881) és *Magister* (1052 Budapest, Városház utca 1., tel.: 382-440) könyvesboltjaiban. Előfizetési díj egy évre: 104,— Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149.



Decentralizáció és érdekelttség*

A tanulmány a team-elmélettel kezdve a gazdasági decentralizáció elméleteit tekinti át. A team-elmélet a hatékony információ felhasználással foglalkozik azokban a szervezetekben, amelyekben az egyes döntéshozók különböző információkkal rendelkezhetnek. A hatékonyságot a szervezet általános célja, vagy célfüggvénye alapján értékeljük, miközben eltekintünk az egyes döntéshozók egyéni érdekelttségétől. A tanulmány a team-elmélet alapjainak ismertetése után a különböző érdekelttségi problémákat tekinti át, ezen belül a „megtévesztés” (misrepresentation), a „morális kockázat” (moral hazard) és az „ingyenélés” (free riding) kérdéseit. Ezeket a problémákat és az elképzelhető megoldási módokat példák segítségével világítjuk meg részletesebben, ezek a forrásallokációra, a rezsiköltségek allokációjára, a megbízó-üggyívő viszonyra és a társulásra vonatkoznak, valamint arra, hogy a morális kockázat miképp csökkenthető a tartós kapcsolatban. Végül, a tanulmány néhány olyan következtetés levonásával zárul, melyek hasznosak lehetnek a gazdasági szervezetek tervezésekor, illetve a szervezeti magatartás elemzésekor.

1. Bevezetés

Számos közgazdász a decentralizációról a piacra asszociál, és a gazdasági decentralizáció legfejlettebb formáját számukra a kompetitív piac jelenti. Értelmezésem ennél tágabb és mást állít a figyelem középpontjába. Tágabb abban az értelemben, hogy az általam használt decentralizáció fogalom alkalmazható a legbonyolultabb gazdasági szervezetekre is. Figyelmem középpontjában pedig azért áll más, mert engem a decentralizáció-elméletek tanulmányozására az indít, hogy a nagy, modern szervezeteken, így például a korporációkon, államigazgatási szervezeteken, egyetemeken *belüli* gazdasági kapcsolatrendszer szerelném megérteni. Azonban néhány általam leírt elméleti modell természetszerűleg a piaci kapcsolatokra is alkalmazható.

* A tanulmány az International Federation of Automatic Control Kongresszusán (Budapest, 1984) elhangzott *Decentralization and Incentives* című előadás kibővített szövege. Angol nyelven párhuzamosan megjelenik a T. GROVES, R. RADNER, S. REITER (Eds): *Information, Incentives and Economic Mechanisms: Essays in Honour of Leonid Hurwicz*, University of Minnesota Press (megjelenés alatt) című kötetben. A szerző értékes megjegyzéseikért köszönetet mond J. Hersykowicznak, P. B. Linhartnak, D. W. Sibley-nek és E. E. Zajacnak. A cikkben kifejtettek kizárólag a szerző nézetei és nem feltétlenül esnek egybe a felsorolt személyek vagy az AT & T Bell Laboratories álláspontjával. Fordította Király Júlia.

Decentralizált szervezet alatt olyan szervezetet értek, amelyben egynél több döntéshozó van, amelyben különböző döntéshozók felelősek a különböző döntési változókért, döntéseiket eltérő információk alapján hozzák meg, és ahol a szervezet eredményessége egyaránt múlik a döntéseken és a véletlenszerű környezeti változók alakulásán. Remélem, hogy ezt a fölöttébb általános és absztrakt definíciót az alább következő speciális modellek az olvasó számára is világosabbá teszik majd.

A tanulmányban bemutatott egyik séma az, hogy az információ decentralizációja (azaz az információknak nem teljes összevetése), amennyiben együtt jár a döntéshozók érdekeinek divergenciájával, csökkenti a döntési folyamat hatékonyságát. A hatékonyság csökkenése meghaladja azt a szintet, ami pusztán az információ tökéletlenségének tudható be. Más szavakkal: az információk összevetésének tökéletlensége és az érdekek divergenciája együttesen olyan döntési folyamatot eredményez, amely kevésbé hatékony mint az, amihez számítógépes programozással — ugyanolyan eltérő és tökéletlen információ struktúrát feltételezve — elméletileg juthatunk.

Minden gazdasági szervezet tartalmaz olyan rendszert, avagy olyan szabályokat, amelyek értelmében tagjainak jutalmazása (kompenzációja) tevékenységüktől és ennek eredményeitől függ. A tagok természetesen nemcsak gazdasági „kompenzációjukat” fogják értékelni, hanem munkájuk jellegét, az általuk és a mások által végzett tevékenységet is. Az így kialakuló helyzetet — miként majd megmutatom — jól jellemezhetjük a többszemélyes játékok elméletének eszközeivel. Pontosabban, feltételezem, hogy a szervezet magatartása leírható, mint a megfelelő játék nem-kooperatív egyensúlyi pontja. (Az egyensúlynak ezt az értelmezését a 4. fejezetben fejtem ki, majd az azt követő részekben illusztrálom.) Nyomatékosan felhívom arra a figyelmet, hogy az az egyensúly, amely technikai értelemben nem-kooperatív, megjeleníthet olyan magatartásformát is, amelyet köznapiban értelemben „kooperatív” neveznek.

A szervezet szabályai természetesen nem megváltoztathatatlanok, és a normatív közgazdaságtan egyik célja éppen annak meghatározása, hogy milyen típusú gazdasági szervezetek segítik elő a legnagyobb valószínűséggel a hatékonyságot és a méltányosságot. A decentralizáció elméletek a tagok különbözőségének kétféle, a szervezet hatékonyságát csökkentő típusát hangsúlyozzák:

1. Eltérést az információkban: ez végső soron a megfigyelési, közlési és számítási költségekre vezethető vissza.

2. A célok vagy az érdekek eltérését.

A jelen tanulmány analitikus céljai szempontjából az optimális szervezet problémáját az alábbiakban foglalhatjuk össze:

Válasszunk olyan szervezeti sémát, amelynek megfelelő játék egyensúlyi pontjai a lehető legjobbak, miközben figyelembe vesszük a szervezet tagjai között fennálló információs és érdekeltségi eltérésekből fakadó korlátokat.

A szervezet-tervezés fenti megközelítésének forrása HURWICZ (1972).

A tanulmányban a decentralizáció elmélet néhány közelmúltbeli eredményét fogom felvázolni, ezen belül elsősorban a „morális kockázat” (6. fejezet) és az „ingyenelés” (7. fejezet) problémáinak szentelek figyelmet. Megmutatom mi módon gyógyíthatók a fenti jelenségekkel kapcsolatos tökéletlenségek, legalábbis részben, a hosszú távú, tartós kapcsolatok segítségével, feltéve, hogy a szervezet tagjai nem túl rövidlátóak (8. fejezet). Érintek egy másik

ösztönzési-érdekeltségi kérdéskört is, mégpedig a „megtévesztést” és számos ide vonatkozó megoldási módot mutatok be (5. fejezet). Ezzel kapcsolatos fejtegetéseimet azonban rövidre fogom, mivel a témáról bőséges szakirodalom áll rendelkezésre (GROVES—LEDYARD 1983; GREEN—LAFFONT 1979; MYERSON 1983).

A tanulmány fő szövegében nem alkalmazok formális matematikát vagy csak nagyon keveset. A nagyobb precizitást igénylő olvasók érdekében néhány fejezethez matematikai kiegészítést fűztem, amely tartalmazza a leglényesebb állításokat, az illusztratív példákat és azok tulajdonságait.

Az irodalmi hivatkozások többségét a tanulmány végén irodalomjegyzékben gyűjtöttem össze. Az olvasó ezekben nézhet utána a tanulmányban közölt tételek általánosabb matematikai megfogalmazásának, a bizonyításoknak.

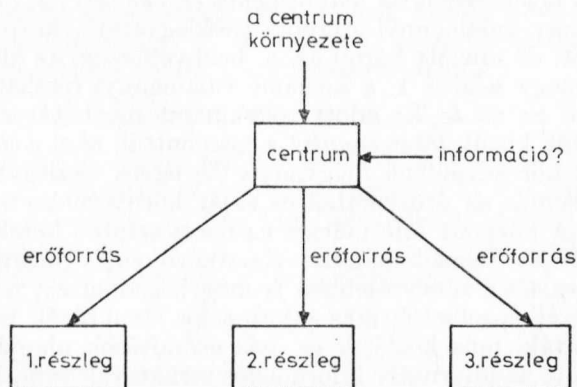
Végül pedig figyelmeztetnem kell az olvasót, hogy noha a tanulmány formális matematika nélkül is olvasható, de mégiscsak *elméleti* tanulmány, tehát meglehetősen absztrakt! A záró megjegyzések során (9. fejezet) végül is megengedem magamnak azt a luxust, hogy röviden elmeditáljak arról, milyen következtetéseket lehet levonni az elméletekből a létező gazdasági szervezetek tervezésére és magatartásuk magyarázatára.

2. Egy vállalat decentralizációjának stilizált példája

Egy vállalaton belüli forrásallokáció stilizált példájának bemutatásával kezdem. A példa jól megvilágítja a decentralizáció elméletekben felmerülő kérdéseket. Ezek után az egyedi problémákat részletesebben is megvizsgálom, a példából levezetett még egyszerűbb példák segítségével.

Képzeljünk el egy egyetlen központból és számos részlegből álló vállalatot! (1. ábra.)

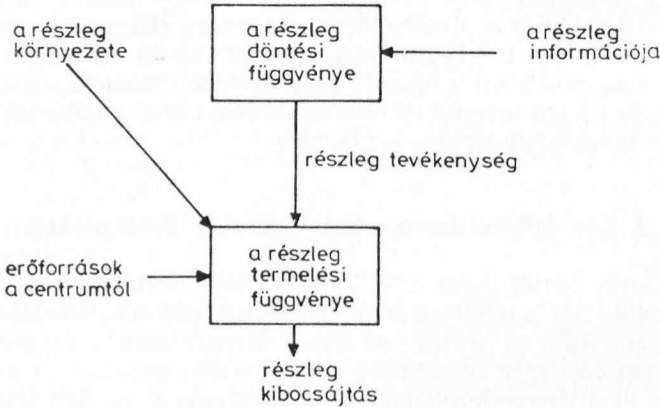
A „központ”, avagy — ahogy a továbbiakban nevezem — a „centrum” feladata, hogy a központilag kezelt erőforrásokat allokálja az egyes részlegek között. Így például központilag ellenőrzött forrás lehet a beruházási alap, amit a jelen példában „tőkének” fogok nevezni. (Valójában egynél több központilag ellenőrzött erőforrás is elképzelhető, mint például a terület, a számítógép-ido stb., de az egyszerűség érdekében most csak egyet tételezek fel.)



1. ábra. Egy részlegekre bontott vállalat

Valamennyi részlegnek van valamely közös egységben, mondjuk dollárban mérhető nettó kibocsátása. A részlegek nettó kibocsátása három „tényezőtől” függ: 1. a részlegvezető cselekedeitől, amit a továbbiakban *részleg-tevékenységnek* nevezek; 2. a centrumtól kapott tőkemennyiségtől és 3. véletlen külső (exogén) tényezőktől, melyeket összefoglalóan a továbbiakban *részleg-környezetnek* nevezek (2. ábra).

A részlegek tevékenysége mindig valamifajta *információn* alapul: a modellnek specifikálnia kell az információ keletkezési módját. A játékelmélet nyelvén, a részlegvezető *döntési függvénye*, illetve *stratégiája* az a szabály, amely meghatározza az információbázisnak megfelelő tevékenységét. Hasonlóképpen a centrumnak is megvan a részlegek közötti forrásallokációt meghatározó infor-



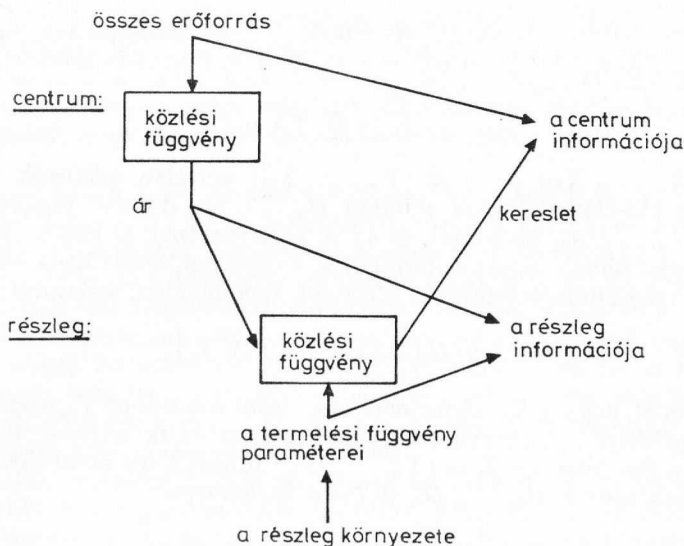
2. ábra. A részleg információja

mációs halmaza és stratégiája. Így például a teljes felosztandó tőkeállomány lehet véletlen változó, amely ily módon a központ környezetét képezi. A központ környezete korlátozza akcióit és ezáltal közvetve befolyásolja a teamek kibocsátását, még akkor is, ha a központnak nincs saját kibocsátása.

Az információ keletkezését az alábbi példa érzékelteti (3. ábra).

Tegyük fel, hogy valamennyi szereplő (részlegvezető, központ) megfigyeli saját környezetét, de mielőtt bármi akció bekövetkezne, az alábbi kétlépesős kommunikáció megy végbe: 1. a központ valamennyi részlegvezetővel közli a *tőke árát*, ahol ez az ár az adott tőke kínálat meghatározott függvénye; 2. a részlegvezetők közlik *tőkeigényüket* a központtal, ahol a kereslet az ár és a részlegvezetők környezetének függvénye. Az egyes részlegvezetők információja tehát kételemű: az árüzenetből és saját környezetére vonatkozó megfigyeléséből áll. A központ információs halmaza szintén kételemű: az igénylésekből és a teljes tőkeállományra vonatkozó saját megfigyeléséből áll. A következő fejezetben részletesebben is megvizsgálom ezt a példát.

Természetesen elképzelhetők más információs struktúrák is, amelyek más megfigyelési minták, más közlések és más számítások alapján keletkeznek. Amennyiben adott az alternatív információs struktúrák sora, kívánatos lehet összehasonlításuk a gazdasági hatékonyság szempontjából. E feladat egy lehetséges megközelítését, a team-elméletet mutatja be a következő fejezet.



3. ábra. A Lange—Lerner információs struktúra

Függelék a 2. fejezethez

A vállalat N részleggel és egyetlen központtal rendelkezik. Jelölje A_i az i -edik részlegvezető akcióját $i = 1, \dots, N$; A_0 pedig a központ akcióját. A központ akciója lényegében az erőforrás („tőke”) allokációja a részlegek között:

$$A_0 = (K_1, \dots, K_N),$$

ahol K_i az i -edik részlegnek juttatott tőkemennyiség. Ha a teljes tőkekínálatot K -val jelöljük, úgy az allokációnak ki kell elégítenie az alábbi korlátokat:

$$\begin{aligned} K_1 + \dots + K_N &\leq K \\ K_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Jelölje X a vállalat környezetét, mely többek között tartalmazza a teljes K tőkeállomány specifikációját is. A részleg C összkibocsátása a részlegvezető akciótól, a tőkeallokációtól és a környezettől függ:

$$C = G(A_1, K_1, \dots, A_N, K_N, X). \quad (2.2)$$

Vegyük például azt az esetet, amikor az összkibocsátás a részlegkibocsátások összege és az X vállalati környezet felbontható X_i ($i = 1, \dots, N$) részleg-környezetekké, valamint X_0 központi környezetté, amely nem más, mint az össz-tőkeállomány ($X_0 = K$). Tegyük fel, hogy az egyes részlegek ($i = 1, \dots, n$) kibocsátása megadható az alábbi módon:

$$C_i = G_i(A_i, K_i, X_i), \quad (2.3)$$

míg az összkibocsátás nem más, mint:

$$C = C_1 + \dots + C_N. \quad (2.4)$$

Minden akció előtt a vezetők ($i = 0, 1, \dots, N$) hozzájutnak bizonyos Y_i információhoz és az A_i akciót ekkor a D_i döntési függvény szerint határozzák meg:

$$A_i = D_i(Y_i). \quad (2.5)$$

Ha $X = (X_0, \dots, X_N)$ és $Y = (Y_0, \dots, Y_N)$ véletlen változók valamilyen adott közös eloszlással, akkor minden D_0, \dots, D_N döntési függvény mellett a vezetők A_0, \dots, A_N akcióinak és az X környezetnek is közös valószínűség-eloszlása lesz, amely egyben indukálja a részlegkibocsátások és az összekibocsátás valószínűségeloszlását (2.4)-nek megfelelően, valamint:

$$C_i = G_i[D_i(Y_i), D_0(Y_0), X_i]. \quad (2.6)$$

(Ne felejtjük el, hogy a K_i vektor nem más, mint a központ Y_0 megfigyelésének $D_0(Y_0)$ függvénye.) A szervezeti modell azáltal válik teljessé, ha megadjuk mily módon jön létre az $Y = (Y_0, \dots, Y_N)$ információs struktúra és hogyan határozódnak meg a D_0, \dots, D_N döntési függvények.

3. A team-elmélet

A team-elmélet, mint a formális szervezet-elmélet egy korai eredménye, az információ hatékony felhasználásával foglalkozik egy információs szempontból decentralizált szervezetben. Az elmélet három fő kérdéskörre koncentrált: 1. arra, hogy a különböző döntéshozók nem jutnak hozzá minden információhoz (információs decentralizáció); 2. hogy egy adott információs decentralizáció mellett mi jellemzi az optimális döntési függvényeket; és 3. az alternatív (decentralizált) információs struktúrák összehasonlítására, feltéve, hogy valamennyit hatékonyan használják fel.

Az elmélet nem foglalkozik az egyéni döntéshozók — például a 2. fejezetbeli részlegvezetők és központ — egyéni érdekeltiségének problémájával. Ezek a döntéshozók jelen esetben akár számítógépek is lehetnének; a team-elmélet feladata úgy „beprogramozni” ezeket a számítógépeket, hogy az elérhető információt hatékonyan használják fel.

A team fogalmának illusztrálására visszatérek a 2. fejezetben ismertetett példához. A példában a vállalat környezetére vonatkozó ex ante bizonytalanságot a környezeti változók közös valószínűségeloszlása reprezentálta. Egy adott információs struktúra úgy alakul ki, hogy a különböző team-tagok (a központ és a részlegvezetők) bizonyos mértékig — feltehetőleg tökéletlenül és nem teljesen — megfigyelik környezetüket és ezt egy többé-kevésbé hiányos kommunikációs folyamat követi. Így az eredményül kapott információt is reprezentálhatják véletlen változók, amelyeknek a környezetre vonatkozó közös valószínűségeloszlását az adott információs struktúra határozza meg, azaz a megfigyelések és a közlések adott folyamata. Ezt az információt beépítve a megfelelő team-tagok stratégiájába, a keletkező kibocsátás is véletlen változó lesz. Vegyük észre, hogy az eredmény sztochasztikus jellege két módon is következik a környezet sztochasztikus jellegéből: 1. közvetlenül, a környezet által a részleg termelési függvényére gyakorolt hatáson keresztül; illetve 2. közvetve, azokon az utakon, amelyek a környezettől az információk közvetítésével az akciókhoz vezetnek.

Tegyük fel, hogy a team célfüggvénye a részleg várható összes kibocsátása. A környezeti és az információs változók adott közös valószínűség-eloszlása mellett a team első feladata, hogy meghatározza a központ és a részlegek számára a team várható kibocsátását maximalizáló stratégiákat. Legyenek ezek az *adott információs struktúra melletti optimális team-stratégiák*.

Elyben az információs struktúra kiválasztása maga is a team megtervezésének részét képezi. Az egyes információs struktúrákat generáló tevékenységeknek megvan a maguk költsége és a különböző struktúrák költségvonzata eltérő lehet. Az egyik információs struktúra akkor jobb a másiknál, ha a hozzá tartozó *költségektől megtisztított* várható kibocsátás magasabb. Sajnos, csak igen kevés elméleti munka foglalkozik az információ-költségek explicit modelljeivel, és ebből következően az információ-költségeket én is csak implicit módon fogom számba venni. Tehát az egyes információs struktúrákat azon várható bruttó eredményük alapján hasonlítjuk össze, melyet az optimális team-stratégia alkalmazásával elérhetnek.

Négy példa segítségével világítom meg az információs struktúra fogalmát (ezek egyikét a 2. fejezetben már leírtam). Elsőként azt az esetet tekintem, amikor valamennyi team-tag meg tudja figyelni saját környezetét, de ez egyben az egyetlen információ, amit felhasználhat tevékenysége meghatározásához (leszámítva a feladat kiinduló adatait, azaz a részlegek termelési függvényét, valamint a team-tagok környezetének együttes valószínűség-eloszlását). Nevezetesen: a központnak anélkül kell a tőkét a részlegek között szétosztania, hogy tisztában lenne környezetükkel; az allokációs stratégia egyedüli argumentumként a szétosztandó tőke teljes állományát tartalmazza. Másrésztől, a részlegvezetőknek azelőtt kell meghatározniuk tevékenységüket, mielőtt tisztában lennének azzal, mekkora tőkét fog számukra a központ-biztosítani. (Vegyük észre, hogy a központ egy adott stratégiája mellett az egyes részlegeknek juttatott tőke nagysága tartalmaz bizonyos információt az összes tőkekínálatról.) Ezt az esetet nevezem *közlésmentes* (NC = no communication) információs struktúrának.

Bonyolultabb, de értékesebb információs struktúra keletkezik, ha lehetővé tesszük a központ és a részlegek valamifajta kommunikációját. Itt emlékeztetnék a 2. fejezetben idézett példára (lásd 3. ábra). Tegyük fel, hogy valamennyi team-tag, akárcsak az NC esetben, megfigyeli saját környezetét, de mielőtt bármi akció bekövetkezne, az alábbi kétlépésűs kommunikációs folyamat megy végbe: 1. a központ valamennyi részlegvezetővel közöl egy *ár*t (egy valós számot), ahol ez az ár az adott tőkekínálat meghatározott függvénye; 2. valamennyi részlegvezető közli *keresletét* (azaz szintén egy valós számot) a központtal, ez a kereslet az árnak és a részlegvezetők környezetének függvénye. Ebben az esetben valamennyi részlegvezető információja két elemből áll: az árüzenetből és a környezetére vonatkozó saját megfigyeléséből. A központ információjának két elemét a keresletre vonatkozó közlés és az összes kínálatra vonatkozó saját megfigyelése alkotják. Az így kapott információs struktúrát nevezzük Lange—Lerner (LL) típusúnak. (Ez utalás a piaci szocializmusra vonatkozó szakirodalomra, lásd GROVES—RADNER 1972.)

Hangsúlyoznom kell, hogy az ár- és keresleti közléseket meghatározó függvények ismertek mind a központ, mind a részlegvezetők számára. Ebből következően az árüzenetből a részlegvezetők tudnak következtetni (ha nem

is teljes pontossággal) a tőkekínálatra, míg a központ az igénybejelentésekből következtethet arra, hogy az egyes részlegvezetők milyen megfigyeléseket gyűjtöttek saját környezetükről.

Az LL struktúra több információt nyújt, mint az NC struktúra, abban az értelemben, hogy az LL nyújtotta információkból valamennyi team-tag következtetni tud az NC információkra, de ez fordítva nem igaz. (Ebben az esetben mondják, hogy az LL struktúra finomabb, mint az NC.) Ténylegesen bebizonyítható, hogy tipikus termelési függvények és környezeti eloszlások mellett az LL segítségével elérhető várható bruttó team-kibocsátás szigorúan nagyobb lesz, mint az NC-vel elérhető, feltéve, hogy az ár- és a keresleti közléseket meghatározó függvények nem degeneráltak (azaz nem konstans függvények). Ez tulajdonképpen illusztrációja egy általánosabb állításnak: amennyiben valamely információs struktúra finomabb, mint egy másik, akkor egyben értékesebb is — de legalábbis nem kevésbé értékes — a team valamennyi döntési problémája esetén. Megfordítva, ha valamely információs struktúra nem finomabb, mint a másik, sőt nem is ekvivalens azzal (lásd alább), úgy létezik a team-nek olyan döntési problémája, amelyre a második struktúra értékesebb, mint az első. (Bizonyítást lásd MARSCHAK—RADNER 1972., 2. fejezet, 6. rész.)

Legyen az LL struktúrában az árközlést meghatározó függvény (mint a tőke-kínálat függvénye) az *árfüggvény*, az egyes részlegvezetők keresletre vonatkozó közlését meghatározó függvény pedig (amely az árközlés és a környezet függvénye) a megfelelő *keresleti függvény*. Az árfüggvénynek és a részleg keresleti függvényének ez a kombinációja egyben jellemzi az LL információs struktúrát is. Ez kihangsúlyozza azt a tényt, hogy az LL ténylegesen egy információs struktúra *család*, az ár- és keresleti függvények lehetséges kombinációjának megfelelően.

Az „ár” és „kereslet” szavak használata az LL információs struktúra családnak piaci típusú interpretációját sugallja — a későbbiekben erre az értelmezésre még visszatérek. Tegyük fel azonban, hogy az árfüggvény kölcsönösen egyértelmű leképezés, azaz az árközlésből tökéletesen lehet következtetni a központ által megfigyelt összes tőkeállományra. Ebben az esetben, ha az árközlést felecseréljük a teljes tőkeállományra vonatkozó egyszerű közléssel, akkor az eredeti LL struktúrát egy másik, az előbbivel *ekvivalens* struktúrába vittük át az alábbi értelemben: az új struktúra éppen annyira finom, mint az eredeti, de nem finomabb. Világos, hogy ebben az esetben bármilyen is a termelési függvény és a környezeti eloszlás, az optimális várható kibocsátás mindkét struktúrában ugyanaz. Hasonlóképpen, amennyiben a keresleti közléseket is kölcsönösen egyértelmű módon transzformáljuk, ekvivalens információs struktúrához jutunk, még ha az új (transzformált) közlések nem is értelmezhetők „keresletként”.

Vegyük észre, hogy noha az LL struktúra finomabb, mint az NC, mégis többféle értelemben is hiányos. Először is, noha valamennyi részlegvezető ismerheti az összes kínálatot — vagy legalábbis következtethet rá —, nem ismeri a többi részleg környezetét. Ugyanígy, amennyiben a keresletre vonatkozó közlések a megfelelő részlegkörnyezeteknek nem kölcsönösen egyértelmű leképezései, úgy a központ nem tud a közlésekből a környezetekre következtetni. Ez újabb információs struktúra gondolatát veti fel, amelyet a *központra való teljes információcserének* nevezek. (CEC: complete exchange with the center.) Ebben az esetben a központ valamennyi részlegvezetővel

közli az összes tőkekinálatot és valamennyi részlegvezető közli a központtal saját környezeti állapotát.

Végül pedig a *teljes kommunikáció* (CC: complete communication) állapotának nevezem azt az esetet, amikor valamennyi team-tag közli saját környezete állapotát valamennyi team-taggal. A CC struktúra a létező legfinomabb és ennek segítségével érhető el a létező legmagasabb várható kibocsátás.

Nincs helyem arra, hogy részletesen kifejtssem a fent leírt információs struktúrákhoz tartozó optimális team-stratégiák sajátosságait és számszerű meghatározását, csak röviden megemlítem a különböző struktúrák összehasonlítására vonatkozó eredményeket. Az összehasonlítás az LL struktúráknak csak arra az alcsaládjára korlátozódik, amelyekre a „piaci” interpretáció különösképpen nyilvánvaló. Adott árközlés és a részlegek közötti adott tőkeallokáció mellett a tőke *elszámolási költségén* az ár és az allokált mennyiség szorzatát értjük, míg *elszámolási profit* alatt a részleg tényleges kibocsátása és a tőke elszámolási költsége közötti különbséget. Adjuk meg egy részleg keresleti függvényét az alábbi módon: a részlegvezető úgy határozza meg a részleg akcióját és a tőkemennyiséget, hogy az maximalizálja a részleg feltételes várható elszámolási profitját adott részlegkörnyezet és a központból érkező árüzenet mellett. Ekkor ezt a tőkemennyiséget közlik a központtal, mint a részleg tőkekeresletét. Vegyük észre, hogy ez az eljárás nemcsak a központtól kapott konkrét árüzenetnek, hanem a központ által használt árfüggvénynek az ismeretét is feltételezi. Tegyük fel, hogy az egyes csoportok környezete statisztikailag független és tegyük fel, hogy az árfüggvény kiválasztásakor maximalizálják az ebbe az osztályba eső LL struktúrát. RADNER (1972b) megmutatta, hogyha a részlegek termelési függvényének egy bizonyos kvadratikus függvényt választunk, akkor az LL típusú információs struktúrával legalább akkora várható csoportkibocsátás érhető el, mint a (finomabb) CEC struktúrával. GROVES—RADNER (1972) később általánosította ezt az eredményt arra az esetre, amikor több mint egy erőforrás allokalásáról van szó. Noha az általános (nem-kvadratikus) esetben a CEC jobb lesz, mint a legjobb LL, GROVES (1969) megmutatta, hogy az LL legalább olyan jó, mint a CEC, ha a termelési függvények elég simák és a környezetek valószínűségeloszlása nem túl diszperz.

Az (optimális) LL struktúrának van két érdekes vonása. Az egyik hogy az egyes részlegek által igényelt tőkék összege (eltekintve kivételes esetektől) nem fog egybeesni a kínálattal. Az LL struktúrában követett eljárás hasonlatos a *tátonnemenet* (letapogatási) folyamat első iterációjához, de természetesen az egyensúlyt nem éri el egyetlen iterációval. Mindazonáltal a fent említett speciális esetekben az LL struktúra fölültébb hatékony. Másodszor, az LL struktúrában az egyes részlegek optimális akciója lényegileg eltér az egyes részlegek elszámolási profitjának feltételes várható értékét maximalizáló akciótól. Noha egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy mi ennek a jelenségnek a magyarázata, ám az világos, hogy valamiképpen összefüggésben van azzal a ténnyel, hogy az összes kereslet és kínálat nincs egyensúlyban.

Az eredményeknek egy másik csoportja a CEC struktúrák hatékonyságát érinti. ARROW és RADNER (1979) megmutatták, ha a team-tagok környezetei statisztikailag függetlenek és teljesülnek bizonyos regularitási feltételek (például a termelési függvények konkávok és a részlegek szimmetrikusak), akkor a részlegek (optimális) várható kibocsátása a részlegek számának növekedésével megközelíti a teljes kommunikáció (CC) mellett elérhető maximumot.

Nagyjából ez azt jelenti, hogy statisztikailag független környezetekkel rendelkező „nagymeretű” team-ek esetén a CEC közel olyan jó eredményt ad, mint a CC, azaz majdnem első-legjobb hatékony megoldást jelent. (Korábban ehhez hasonló kevésbé teljes eredményekre jutottak RADNER (1972b), valamint GROVES és RADNER (1972) kvadratikus esetben.) ARROW és RADNER eredményeit a közelmúltban általánosította és tökéletesítette egészen meglepő módon GROVES és HART (1982), megmutatva a CEC struktúrájánál jóval kevésbé finom LL információs struktúra aszimptotikus hatékonyságát.

Függelék a 3. fejezethez

A 2. fejezet példáját követve 4 különböző információs struktúrát írok le. Az első, közlésmentes (NC) esetben valamennyi részlegvezető csak saját környezetét ismeri:

$$\begin{aligned} Y_0 &= X_0 = K \\ Y_i &= X_i, \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

A második, a központtal való tökéletes információval jellemzett CEC esetben valamennyi részleg információt cserél a központtal, azonban nem cserélnek információt egymás között:

$$\begin{aligned} Y_0 &= (K, X_1, \dots, X_N) \\ Y_i &= (X_i, K), \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

A harmadik, a tökéletes kommunikáció (CC) esetében, valamennyi információt kicserélik:

$$Y_i = (K, X_1, \dots, X_N), \quad i = 0, \dots, N. \quad (3.3)$$

Nyilvánvaló, hogy NC, CEC és CC ebben a sorrendben egyre informatívabbak.

Bármely adott információs struktúra mellett az optimális *team-szintű* döntési függvények maximalizálják a vállalat várható összes kibocsátását. Behasonlítható, hogy ez az optimális várható kibocsátás (általában) magasabb CEC mint NC és magasabb CC mint CEC esetében. (Vannak olyan speciális esetek, amikor az egyenlőtlenség egyenlőség formájában teljesül.)

A negyedik információs struktúra a Lange – Lerner (LL) típusú érdekesebb, de egyben bonyolultabb is. Valamennyi vezető először a saját környezetét figyeli meg. Ekkor a központ üzenetet (M_0) küld a részlegvezetőknek (az „árat” közli), ami az összes tőkeállománynak μ_0 -függvénye:

$$M_0 = \mu_0(K). \quad (3.4)$$

Ezután valamennyi részleg üzenetet küld a központnak (közli tőkekeresletét), ami az árközlésnek és a saját környezetnek μ_i -függvénye:

$$M_i = \mu_i(M_0, X_i), \quad i \geq 1. \quad (3.5)$$

Az így kapott információ-struktúra:

$$\begin{aligned} Y_0 &= (M_1, \dots, M_N, K) \\ Y_i &= (M_0, X_i), \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sajátos módon jönnek létre a részlegek közlései. Legyen $(\tilde{A}_i, \tilde{K}_i)$ olyan, hogy maximalizálja az i -edik részleg „árnyékprofitját”:

$$\begin{aligned} &(\tilde{A}_i, \tilde{K}_i) \text{ maximalizálja a} \\ &G_i(A_i, K_i, X_i) - M_0 K_i \text{ kifejezést} \end{aligned} \quad (3.7)$$

ekkor:

$$M_i = \tilde{K}_i. \quad (3.8)$$

Világos, hogy LL informatív ereje az NC-é és CEC-é közé esik. Ennek megfelelően az LL-hez tartozó várható összes kibocsátás is NC és CEC közé esik. Érdemes megemlíteni, hogy az LL-nek megfelelő *optimális team-szintű döntési függvények* esetén az i -edik részlegnek ténylegesen allokkált K_i általában *nem* egyezik meg a „tőkekereslettel” \tilde{K}_i -vel, és nem esik egybe A_i és \tilde{A}_i sem. Ez abból a tényből következik, hogy az összes kereslet általában eltér az összes kínálattól. Az LL információs struktúrát úgy is értelmezhetjük, mint egy tatonnement-típusú interaktív folyamat első stádiumát, melynek célja a központi allokált erőforrásra — jelen esetben a tőkére — a belső piaci „versenyegyensúlyt” megtalálni.

Az LL-re és a CEC-re vonatkozó további eredményeket a 3. fejezet fő részében ismertettünk.

4. Érdekeltségi problémák

A team-elmélet, mint azt az előző részben is érzékeltettük, a hatékony információ-felhasználással foglalkozik egy decentralizált szervezetben, de egy szűk nézőpontból. A „hatékonyságot” a szervezet valamifajta általános célkitűzései alapján értékeli és az a két kérdés érdekli, hogy egyrészt az adott (decentralizált) információ-struktúra mellett mi jellemzi a létrejövő optimális team-stratégiákat, másrészt, hogy összevesse — optimális információ-felhasználást feltételezve — ezeket az információs struktúrákat. Ez az elmélet nem foglalkozik vele, miképpen kell az egyes team-tagokat motiválni, hogy a megfelelő információs struktúrát és team-stratégiát alkalmazzák.

Hogyan kell az elmélet határait kitégíteni, hogy az figyelembe vegye az egyes döntéshozók saját célkitűzéseit is? Jacob MARSCHAK tudatában volt ennek a problémának, amikor először látott neki a team-elmélet kidolgozásának és észrevette, hogy az éppen akkor kialakuló játékelmélet adhatja meg a megfelelő keretet. Azonban abban az időben (több, mint húsz évvel ezelőtt) a játékelmélet még nem adott világos útmutatást arra, milyen „megoldás-fogalom” lenne a legalkalmasabb az ösztönzési problémára (sőt, néhány kritikusa szerint még ma sem képes erre!), és így a legígéretesebb fogalom kialakulása még csak gyerekcipőben járt. A team-elmélet ily módon egy hosszú távú kutatási program első elemének volt tekinthető. Ezek után rátérek e kutatási program további eredményeinek ismertetésére. Ebben a fejezetben — absztrakt, de informális módon — tekintem át a team-en belüli érdekelttség problémáját, majd a következő részekben illusztrálom az alap gondolatot formális példákkal.

Mik a döntéshozók egyéni célkitűzései egy szervezeten belül? Közgazdasági zsargonban átfoglalozva a kérdést: milyen forrásokból származik a döntéshozó „hasznossága”? Jelenlegi célunk szempontjából kétféle hasznosság-

forrást érdemes megkülönböztetni. Először is, a döntéshozó hasznosságát közvetlenül befolyásolhatják saját és mások cselekedetei: például az, hogy mennyire keményen és mennyit dolgozik, milyenek a munkakörülményei stb. Másodsor, a hasznosságot befolyásolja a szervezettől kapott kompenzáció mértéke is. Ugyanakkor ez a kompenzáció végső soron a döntéshozók akcióitól függ: vagy közvetlenül (például az akciókat megvizsgálhatják abból a szempontból, hogy helyesek voltak-e és a nem megfelelő akciókat „megbüntetik”), vagy pedig közvetve (például profit-megosztás, a kibocsátástól függő jutalmazás stb.).

Vegyük szemügyre ismét a 2. fejezet példáját. Tegyük fel, hogy a részlegvezető akciói közvetlenül hatnak hasznosságára; például, *ceteris paribus*, előnyben részesíti azokat az akciókat, amelyek kevesebb erőfeszítést követelnek. Ha az optimális team-stratégia a minimálist meghaladó erőfeszítést követel a vezetőtől, akkor megfelelő *kompenzációs mechanizmusra* (CM) van szükség ahhoz, hogy további erőfeszítésre ösztönözzék.

Három példa a részlegvezető lehetséges kompenzációjára:

— (CM 1): A vezetői tevékenységet folyamatosan megfigyelik (avagy *ex post* felülvizsgálják); a vezető rögzített fizetést kap, amennyiben döntési függvénye helyesnek bizonyult és semmit sem kap ellenkező esetben.

— (CM 2): A vezető részlege kibocsátásának rögzített hányadát kapja és plusz fix fizetést (ami lehet pozitív vagy negatív).

— (CM 3): A vezető az egész team kibocsátásának rögzített hányadát kapja és emellett rögzített fizetést (ami lehet pozitív vagy negatív).

Mindegyik kompenzációs mechanizmusnak megvan a maga hibája. A CM 1 megvalósításához nemcsak a megválasztott akciót kell ellenőrizni, hanem azt az információs bázist is, amelyre az alapult. Ez a részletekbe menő ellenőrzés túl költséges és impraktikus lehet, hiszen a decentralizációt éppen az információ-gyűjtés és -feldolgozás költségessége (illetve korlátozottsága) miatt vezetik be. Tehát a CM 1 megfelelően ösztönzi a vezetőket, de tetemes vagy éppen elviselhetetlen költségek árán.

A CM 2, illetve a CM 3 információ igénye jóval szerényebb, de mindkettő problematikus az ösztönzés szempontjából. Mielőtt részletesen rátérnék ezekre a problémákra, világosabban kell látnunk a későbbiekben használt „hatékonyság” fogalmát. Az egyik nézőpont lehet a vállalat tulajdonosáé, akit a jelen példánkban azonosíthatunk a centrummal. A tulajdonos szemében a részlegvezetőknek kifizetett minden kompenzáció működési költség, amit le kell vonni a vállalat kibocsátásából. Ebben az esetben a „hatékonyságot” a vállalat várható nettó profitjával (kibocsátás mínusz kompenzációk) mérhetjük. Ezt nevezem az *általánosított megbízó-ügyvivő modellnek* (a tulajdonos a megbízó és a részlegvezetők az ügyvivők).

Egy másik hatékonyság-értelmezéshez jutunk, ha a menedzsereket tekintjük a vállalat közös tulajdonosainak (ebben az esetben a centrum a menedzserek egyike). Ezt az esetet nevezem a *társulás modelljének*. Ebben az esetben természetesen módon adódik a *Pareto-hatékonyság*; a közlés-függvények és a stratégiák kombinációja akkor hatékony, ha egyetlen más kombináció esetében sem képzelhető el, hogy egy vezető jobban jár, miközben a többi helyzete sem romlik. E megközelítés során valamennyi menedzser várható hasznosságát figyelembe kell venni és a hasznosságoknak magukban kell foglalniuk mind saját tevékenységük közvetlen (esetleg negatív) hasznosságát, mind pedig a kapott kompenzációt.

Még az általánosított megbízó-üggyvivő modellben is elképzelhető, hogy figyelembe akarjuk venni mind a menedzserek, mind a tulajdonos várható hasznosságait — ebben az esetben ismét a Pareto-hatékonysági normához jutunk.

Tekintsük azt az érdekeltségi problémát, amely a CM 2 típusú kompenzációs mechanizmusnak felel meg egy általánosított megbízó-üggyvivő modell, azaz egy tulajdonos-centrummal rendelkező modell esetében. Először is megmutatható, hogy hacsak a részlegvezető nem kockázat-közömbös, általában nem lehet olyan CM 2 típusú kompenzációs mechanizmust találni, amely Pareto-optimális döntéshozatalt eredményez. Például, ha a menedzser részesedési hányada a részleg kibocsátásából egynél kisebb, akkor erőfeszítésének mértéke nem éri el azt a színvonalat, ahol az erőfeszítésből származó negatív hasznosságot éppen ellensúlyozná a várható részlegkibocsátás megfelelő növekményéből eredő marginális „társadalmi” érték. Ez az érdekeltségi probléma a *morális kockázat* általánosabb kérdéséhez vezet. A kivételes eset az, amikor a menedzser kockázat-közömbös; ha ez és még egyéb feltételek is teljesülnek (amelyekre később visszatérek), akkor a morális kockázat problémája kiküszöbölhető azáltal, hogy valamennyi menedzser megveszi (avagy bérlő) részlegét a tulajdonostól és a teljes kibocsátást megtartja. (Ez a CM 2 egy speciális esete, amelyben a részlegvezető részesedési hányada a részlegkibocsátásból éppen egy és a tulajdonostól *negatív* rögzített fizetésben részesül.)

A CM 2 másik ösztönzéssel kapcsolatos problémája a részlegvezetők által a központnak küldött üzenetre vonatkozik. Hogy pontosabbak legyünk, tekintsünk egy LANGE — LERNER típusú információs struktúrát (lásd 2. fejezet). Bármilyen tőkekeresleti függvényt tételezünk is fel, a menedzser abban érdekelt, hogy eltúlozza keresletét annak érdekében, hogy nagyobb kibocsátás előállítására legyen képes (és ezáltal megnövelje várható fizetését). Ez a *megtévesztés* általánosabb kérdéséhez vezet. A jelen példában úgy tűnik, hogy a kompenzáció módosításával, az igényelt (vagy az allokált) tőke után fizetendő járulék beépítésével a probléma orvosolható. Azonban megmutatható, hogy az ilyen típusú módosítások csak bizonyos körülmények között vezetnek eredményre; általában *nem* az a helyzet, hogy tőkéje után a megállapított áron megterhelve a menedzsert, megszűnne a megtévesztésre való ösztönzés.

Az így leírt megtévesztés hasznára lehet egy részlegvezetőnek, de csak a többi részleg kibocsátásának rovására. Így tehát feltehető, hogy többen úgy gondolják: a CM 3 végső orvoslátot jelent a problémára, mivel ekkor valamennyi részlegvezető érdekelt valamennyi részleg kibocsátásának növelésében, nemcsak a sajátjában. Azonban a CM 3-ra való áttérés újabb érdekeltségi problémát vet fel: ekkor valamennyi menedzser „ingyen élőködik” társai erőfeszítésén. Bizonyos értelemben ez még súlyosbítja a fent leírt morális kockázati problémát.

Összefoglalva az eddigi fejtegetéseket, láttuk, hogy bármely adott információs struktúra és kompenzációs mechanizmus mellett, bármely menedzser akciói vagy közlései externáliákat generálhatnak társai számára, olyan externáliákat, amelyeket lehetetlenség megfelelő módon beépíteni az első menedzser ösztönzői közé, és ezáltal ezek a vállalati hatékonyság romlását idézik elő. Ezen belül az alábbi három általános érdekeltségi probléma azonosítható:

1. morális kockázat,
2. ingyenezés,
3. megtévesztés.

Mindeddig nem definiáltam pontosan a menedzser viselkedését a fenti szituációkban leíró modellt. A következőkben a nem-kooperatív játékelméletet és a *nem-kooperatív egyensúly* fogalmát használom keretként a játék résztvevői (a menedzserek) viselkedésének leírásához. Formálisan: a nem-kooperatív egyensúly az egyes résztvevők stratégiájának olyan kombinációja, amelyben egyetlen játékos sem tudja megnövelni várható hasznosságát *egyoldalúan* megváltoztatva saját stratégiáját.¹ A következőkben, ha csak nem jelezzük külön, az „egyensúly” mindig „nem-kooperatív egyensúlyt” fog jelenteni.) Az adott szervezeti felépítés (információs struktúra, kompenzációs mechanizmus stb.) határozza meg a megfelelő játékszabályokat. *Ekkor az optimális szervezet problémáját úgy is tekinthetjük, mint egy olyan szervezeti felépítés megválasztásának feladatát, amelyben a megfelelő játék egyensúlyi pontja (vagy pontjai) a lehető leghatékonyabbak.*

A tanulmány hátralevő részében a megtévesztés, a morális kockázatás és az ingyenelés kérdéseit mutatom be játékelméleti keretben, meghízó-ügynívó (principal-agent), illetve társulási (partnership) viszony feltételezésével.

5. Megtévesztés: érdekelttség és közösségi inputok

A félrevezetés problémájának részletesebb bemutatása érdekében a 2. fejezetben ismertetett erőforrás-allokációs feladat egy változatát elemzem. Ugyancsak ezt a példát használom majd néhány kompenzációs mechanizmus típus illusztrálására, amelyek, bizonyos körülmények között, alkalmasak a félrevezetésre való ösztönzést kiküszöbölni.

Tegyük fel, hogy a centrumnak valamifajta, az általános (rezi-) költségeket terhelő erőforrást kell szétosztania, közgazdasági kifejezéssel egy „lokális közszükségleti javat”. Konkretizáljuk ezt az erőforrást *kutatásként* és nevezzük a kutatást végző egységet, a centrumot — a cég *központjának*. Tekintsük úgy a központot, mint ami a kutatást végzi, a saját költségére, és eredményeit valamennyi részleg számára elérhetővé teszi. A kutatási programok hasznot hoznak valamennyi részleg számára, abban az értelemben, hogy megnő a részleg nettó kibocsátása (az erőforrások adott felhasználása mellett). Mivel még azelőtt kell meghatározni a kutatási program költségvetését, mielőtt eredményei ismertté válnak, a haszon megfelelő mértéke a *várható haszon*; az egyszerűség kedvéért azonban röviden „haszonnak” fogom nevezni. A központ azt a kutatási programot szeretné elfogadtatni, amelyik maximalizálja a (várható) összes haszon és a költségek különbségét.

Az ilyen típusú általános költségeket általában számviteli értelemben osztják szét az egyes részlegek között, azaz a számviteli értelmében a részlegek nettó kibocsátásából levonják a rájuk jutó kutatási költséghányadot. Így egy részlegnek a központ által elfogadott kutatási program hatására (1) *megnő* az (elszámolási) eredménye a kutatásból származó haszon mértékében; (2) *csökken* az elszámolás szerinti kibocsátása a rá jutó költséghányadnak megfelelően. A két hatás közötti különbséget nevezem a részlegre jutó *nettó hozamnak*. Ha a részlegvezető teljesítményét az elszámolás szerinti nettó kibocsátással mérik (vagy ezzel azonos mértékkel), akkor ő a központtal a számára maximális nettó hozamot biztosító kutatási programot szeretne elfogadtatni.

¹ Ezt nevezik olykor NASH avagy NASH—COURNOT-féle egyensúlynak.

A megtévesztés problémája akkor merül fel, ha az egyes részlegvezetők többet tudnak a kutatási program révén a részlegük számára elvárható haszonról (hozamról), mint a központ. Ebben az esetben a központ csak oly módon javíthatja helyzetét, hogy nyomatékosan újabb információkat kér a részlegektől. Másrészt viszont az is előfordulhat, hogy egy bizonyos költség-allokációs formula következtében egy adott kutatási program negatív nettó hozammal jár egyik vagy másik részleg számára, viszont pozitív a haszna az egész cég szempontjából (vagy megfordítva). Az érdekkonfliktus hatására a vezetők abban érdekeltek, hogy megtévesztő információkat adjanak a kutatás tényleges hozamáról.

Egy egyszerű számpéldán illusztrálom ezt a jelenséget. Tegyük fel, hogy a vállalat csak két részlegből áll és az eldöntendő kérdés mindössze annyi, hogy a központ elfogadja-e egy kutatási program bővítését a soron következő évre, ami a program költségvetését mondjuk 100 egységgel (például dollárral) növelné meg az adott évben. Továbbá tegyük fel (hogy még egyszerűbb legyen a példa), hogy minden részleg az *egyedül* hozzáférhető információval rendelkezik a kutatási program javasolt növekedésétől számára elvárható haszonról. A központ csak akkor akarja elfogadtatni a növelést, ha a részlegek ebből származó együttes haszna legalább 100 egység, azonban nem ismeri ezeket a hozamokat.

Tegyük fel, hogy a két részleg tényleges hozama 30, illetve 60 egység, de ezt csak az illető részlegvezetők tudják.

Másrészt tegyük fel, hogy a cég költség-allokáló formulája szerint az első részleg hozzájárulása 20 százalék, míg a másodiké a fennmaradó 80 százalék. Ily módon az első részleg nettó hozama 10, míg a másodiké 20 egység lenne. Ezt a helyzetet ábrázolja az 1. táblázat.

A vállalat egésze számára a nettó hozam 90, tehát a program-bővítést ténylegesen nem kellene elfogadni. Azonban az 1. részleg szeretné mégis elfogadtatni, így érdekében áll, hogy eltúlozza a bővítésből származó hozamot, míg a 2. részlegnek éppen ezzel ellentétes az érdeke, azért ő inkább alábecsüli a várható hozamot.

Ahhoz, hogy rátérhessünk a fenti szituáció játékelméleti elemzésére, specifikálnunk kell a játékszabályokat, beleértve az információs struktúrát és a játékosok lépési sorrendjét. Legyenek a játékosok a két részlegvezető. A részlegvezetők *lépése* egy üzenet a központnak, ami a program javasolt bővítésétől az ő részlege számára elvárható hozamot tartalmazza. Ezt *állítólagos hozamnak* nevezzük. Korlátozzuk az üzenethalmazt oly módon, hogy

1. táblázat

A központ kutatási költségvetésében a javasolt növelés 100 (millió) dollár

	A részlegekre terhelte költség a program elfogadása esetén	Hozamok (csak a részlegek ismerik)
1. részleg	20	30
2. részleg	80	60
Együtt	100	90

A központ csak akkor akarja elfogadtatni a növelést, ha az együttes hozam legalább 100, de nem ismeri a hozamokat.

az állítólagos hozam nem lehet mondjuk 500 egységnél nagyobb és nem lehet negatív. A két játékos szimultán lép, anélkül, hogy ismerné a másik lépését. Ezek után a központ elfogadja a program-bővítést, ha az állítólagos hozamok összege legalább 100, egyébként elveti. Ha a bővítést elfogadják, úgy a részlegeket 20, illetve 80 egységgel terhelik; ellenkező esetben semmilyen többletköltségük nem jelentkezik. Ezt a költségallokációs formulát *naiv adónak* nevezem. Végül, tegyük fel, hogy a részlegvezetőnek a játékból származó hasznossága nem más, mint a részleg nettó hozama (vagy legalábbis azzal arányos).

Ezeknek a játékszabályoknak megfelelően az első vezető, aki szeretné a bővítést elfogadtatni — bármit is lép a második vezető — a megengedett legnagyobb állítólagos hozamot fogja üzenetként közölni. A második vezető viszont abban érdekelt, hogy a lehető legalacsonyabb állítólagos hozamot

2. táblázat

A Groves—Loeb módszer

Részleg	Hozam	Állítólagos hozam	A bővítés elfogadásakor a részlegekre jutó költségteher
1	30	M_1	$100 - M_2$
2	60	M_2	$100 - M_1$
Együtt	90	$M_1 + M_2$	$200 - M_1 - M_2$

A központ akkor fogadja el a bővítést, ha az együttes állítólagos hozam, $M_1 + M_2$ legalább 100, azaz ha M_1 legalább $100 - M_2$.

„üzenje”. Ennek eredményeként az adott példában az együttes állítólagos hozam 500 egység lesz, és így a bővítést elfogadják (a vállalat téves döntése).

Miképpen lehet úgy megválasztani a költségallokációs formulát, hogy a részlegvezetők a javasolt program-bővítéstől elvárható tényleges hozam közlésében legyenek érdekeltek? GROVES—LOEB (1975) javasolt módszerét alkalmazva, egy olyan költségallokációs formulát adok meg, ami kielégíti ezt a követelményt. Ezt, az általam *Groves—Loeb adózásnak* nevezett formulát a 2. táblázat tartalmazza. Ha a bővítést elfogadják, úgy mindkét vezetőt a bővítés összköltsége és a *másik* részleg által feltételezett hozam különbségével terhelik. Ha a program-bővítést elvetik, akkor a részlegeket semmivel sem terhelik.

A Groves—Loeb adó esetén mindkét vezető abban érdekelt, hogy az igazságot közölje részlege hozamáról (de legalábbis nem érdekelt abban, hogy megtévesztő információt adjon), *függetlenül attól, milyen üzenetet küld a másik vezető*. Hogy ezt belássuk, tegyük fel, hogy a második vezető azt állítja, hogy hozama M_2 . Ekkor az első részlegnek a program-bővítésből eredő nettó hozama a 30 és a költségteher különbsége, azaz $30 + M_2 - 100$ egység lenne. Ha ez pozitív, akkor az első részlegvezető szeretné elfogadtatni a bővítést, egyébként nem. De vegyük észre, hogyha az első vezető azt állítja, hogy az ő hozama 30 (azaz a tényleges hozam), akkor a központ akkor és csak akkor fogadja el a program-bővítést, ha $30 + M_2 > 100$, azaz ha $30 + M_2 - 100$ pozitív, ami éppen az, amit az első vezető el szeretne érni. Így, az igazság közlése opti-

mális lépés az első vezető részéről, teljesen függetlenül attól, mit lép a második vezető, illetve hogy mekkora a második részleg tényleges hozama. Szimmetrikus okfejtés érvényes a második vezetőre is. Hangsúlyozom, hogy mindkét vezető anélkül tud optimálisan lépni, hogy több információt szerezne, mint amennyivel rendelkezik, illetve hogy bármit tudna arról, mit fog tenni a másik menedzser. Tehát az igazság közlése nemcsak a játék egyensúlyi pontja, hanem az egyensúlynak egy meglehetősen robusztus formája (technikailag ezt nevezzük *domináns-stratégia* egyensúlynak).

Azonban ennek a fajta adózásnak van egy figyelemre méltó vonása: a részleg terhelését meghatározó formula nem pontosan „költségallokáció”, mivel az összteher nem feltétlenül fedi a központ költségét. Valójában, ha a részleg-

3. táblázat

A módosított Groves—Loeb módszer

Részleg	Hozam	Állítólagos hozam	A bővítés elfogadásakor a részlegre jutó költségteher
1	30	M_1	20 és $100 - M_2$ közül a nagyobb
2	60	M_2	80 és $100 - M_1$ közül a nagyobb
Együtt	90	$M_1 + M_2$	100 +

A központ akkor fogadja el a bővítést, ha az együttes állítólagos hozam, $M_1 + M_2$ legalább 100, azaz, ha M_1 legalább $100 - M_2$.

vezetők az igazságot közlik, és a bővítést elfogadják (ami a jelen esetben nem áll fenn), akkor a részlegekre kirótt összköltség nem éri el a költségek szintjét, méghozzá a különbség éppen az összhozam és a költségek különbsége lesz.

Megmutatható, hogy nincs olyan költségallokációs formula, amelyik általános feltételek mellett garantálja, hogy az egyensúlyi helyzetben a részlegvezetők is igazat mondjanak és a rájuk terhelt költségek is éppen fedezzék a központ költségeit, még a legsimplább igen-nem típusú döntés esetén sem (lásd például GREEN—LAFFONT 1979). Azt azonban a központ el tudja érni, hogy a részlegekre ráterhelt költségek elérjék, avagy meghaladják az ő költségeit. Ezt a Groves—Loeb adó második variánsával tudjuk megoldani, ami némileg komplikáltabb, mint az első és amelyet a 3. táblázatban mutatunk be. A Groves—Loeb adónak egy általános osztályát — amelyből ez a kettő csak speciális esetet képvisel — a fejezethez tartozó matematikai függelékben mutatjuk be.

A fenti példában leírt módszer számos olyan helyzetre alkalmazható, amelyben megszerkeszthető olyan kompenzációs mechanizmus, hogy az igazmondás legyen a vonatkozó játék egyensúlyi pontja (lásd a Bibliográfiai jegyzeteket), azonban a jelen keretek közé nem fér be ennek részletes ismertetése. Az olvasónak ugyancsak a szakirodalomhoz kell fordulnia, ha a felmerülő akadályokra és az ilyen típusú kompenzációs mechanizmusokkal kapcsolatos megoldatlan problémákra kíváncsi.

Függelék az 5. fejezethez

Legyen P_j a j -edik részleg tényleges hozama a központi kutatási költségvetés R összeggel történő bővítése következtében, és legyen M_j a részleg állítólagos hozama, azaz az az összeg, amit a központnak jelent, T_j pedig legyen a j -edik részlegre terhelt elszámolás szerinti költség (adó). A részlegek egyszerre küldik el üzeneteiket és a központ akkor fogadja el a bővítést, ha

$$\sum_j M > R. \quad (5.1)$$

A Groves—Loeb adó első változata (GL 1) az alábbiakban adható meg

$$T_j = \begin{cases} R - \sum_{k \neq j} M_k & \text{ha elfogadják a bővítést} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (5.2)$$

A j -edik részleg bővítésből származó nettó haszna $P_j - T_j$. Tehát a j -edik részleg akkor akarja elfogadtatni a programbővítést, ha

$$P_j > R - \sum_{k \neq j} M_k. \quad (5.3)$$

Másrészt viszont a központ akkor fogadja el a bővítést, ha

$$M_j > R - \sum_{k \neq j} M_k. \quad (5.4)$$

Összevetve (5.3)-at és (5.4)-et látható, hogy függetlenül attól, milyen üzenetet küldenek a központnak a többi részlegek, a j -edik részleg csak úgy tudja elérni, hogy a központ az ő érdekeinek megfelelően döntsön, ha $M_j = P_j$, azaz ha igazat mond. Az igazmondás domináns stratégiai egyensúly.

Könnyű ellenőrizni, hogy GL 1 mellett az adók összege nem haladhatja meg R -t, azaz a központ nettó jövedelme nem pozitív. A Groves—Loeb módszer második változata, a GL 2 garantálja, hogy a központ nettó jövedelme nem negatív legyen. Legyen $\{C_j\}$ olyan tetszőleges nem negatív számsorozat, amelynek összege R és definiáljuk a $\{V_j\}$ sorozatot úgy, hogy

$$V_j = \sum_{k \neq j} (M_k - C_k).$$

Ekkor GL 2 az alábbi módon adható meg

$$T'_j = \max(0, V_j) + \begin{cases} T_j & \text{elfogadás esetén} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (5.5)$$

Vegyük észre, hogy T'_j az M_j -től nem függő összeg erejéig különbözik T_j -től. Így GL 2 ugyanazt az ösztönzést biztosítja, mint GL 1. Másrészt viszont (5.5) úgy is írható, hogy

$$T'_j = \begin{cases} C_j + \max(0, -V_j) & \text{elfogadás esetén} \\ \max(0, V_j) & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Ebben az alakban látható, hogy $T'_j \geq C_j$, ha a program-bővítést elfogadják és $T'_j \geq 0$ egyébként, tehát a központ nettó hozama nem negatív. (Természetesen GL 2 mellett egy részleg esetleg akkor is pozitív adót fizet, ha a bővítést elvetik !)

6. Morális kockázat: a megbízó-üggyvivő modell

A megbízó-üggyvivő modell a legegyszerűbb olyan elméleti modell, amelynek segítségével a morális kockázat jelensége vizsgálható. Valójában ez Groves „team-érdekeltség” modellje speciális esetének is tekinthető, amelynek egyetlen szervezője van a *megbízó*, és egyetlen döntéshozója, az *üggyvivő*. A megbízó-üggyvivő modell kimenete az üggyvivő akciójától és egy sztochasztikus környezettől függ, ahol a megbízó sem az üggyvivő információját és akcióját, sem pedig a környezetet nem képes tökéletesen ellenőrizni. A megbízó meg tudja figyelni a kimenetet és — mint később ezt alaposabban megvizsgáljuk — a megbízó-üggyvivő modell legegyszerűbb esetében ez az egyetlen dolog, amit ellenőrizni képes. Így a legegyszerűbb esetben a megbízó legfeljebb a kimenettől teheti függővé az üggyvivő fizetségét. Általánosabban, a kompenzáció függhet bármitől, amit a megbízó megfigyelni képes, például hiányos információktól is, az üggyvivő információiról, akcióiról vagy környezetről.

A 4. táblázatban bemutatunk néhány olyan megbízó-üggyvivő kapcsolat-típust, amelyet többé-kevésbé jól lehet reprezentálni megbízó-üggyvivő modellel. A biztosító-biztosított kapcsolat szülte többek között a „morális kockázat” fogalmát. A biztosított (az üggyvivő) akciója, hogy ügyel bizonyos esemény megelőzésére (például a vagyon károsodása), a kimenete pedig a baleset (káreset) bekövetkezése, illetve elmaradása. A megbízó (biztosító) negatív kompenzációt (a biztosítási díjat) fizet az üggyvivőnek, ha a baleset nem következik be és akkor ad pozitív kompenzációt (követelés mínusz biztosítási díj), ha az esemény bekövetkezik. Ha a megelőző gondosság túlzottan költséges az üggyvivő számára, akkor pusztán az a tény, hogy biztosítva van, csökkenti a gondosság színvonalát, ezt a jelenséget nevezzük morális kockázatnak.

Noha a megbízó-üggyvivő szakirodalom jelentős része piaci, illetve irányítási kapcsolatra vonatkozik, én most a szervezeteken belül megbízó-üggyvivő kapcsolattal fogok foglalkozni, azokkal, amelyek a 4. táblázat kipontozott sora fölött találhatóak. Úgy gondolom, nem haszontalan számos szervezetet úgy tekinteni, mint megbízó-üggyvivő kapcsolatok hierarchiáját, noha a bonyolult szervezetekben igen nehéz elkülöníteni egyes üggyvivők tevékenységének kimenetelét más üggyvivők akcióinak eredményétől. Ez utóbbi észrevétel már átvezet a „társulások modelljeinek” tanulmányozásához, ami a következő fejezet témája lesz.

Ebben a fejezetben a megbízó-üggyvivők modell rendkívül egyszerű példáján fogom bemutatni, hogyan okoz a morális kockázat eredménytelenséget.

4. táblázat

Példák a megbízó-üggyvivő kapcsolatra

MEGBÍZÓ	ÜGYYVIVŐ
igazgatótanács	ügyvezető igazgató
menedzser	beosztott
művezető	munkás
.....	
kliens	üggyvéd
fogyasztó	termelő
szabályozó	közmű
biztosító	biztosított

Tegyük fel, hogy a vállalat (sztochasztikus) kimenete vagy „siker”, vagy „kudarç” és hogy a siker valószínűsége az ügyvivő akcióján múlik. Siker esetén a megbízó egységnyi pénzt keres (mondjuk ezer dollárt), kudarc esetén pedig semmit sem kap. A megbízó az eredmény alapján fizeti az ügyvivőt, w_1 kompenzációt fizetve a sikeres kimenetért és w_0 -t a kudarcért. (Elvben a kompenzáció akár negatív is lehet, noha intézményesített korlátozások ezt kizárhatják.) Feltesszük, hogy a megbízó hasznossága az eredmény és az ügyvivőnek kifizetett díj különbözete. (Tehát a megbízó a kockázattal szemben közömbös.) Az ügyvivő utilitásáról feltesszük, hogy akciójától és fizetségétől függ. (Az ügyvivő lehet kockázat-közömbös, avagy mutathat kockázataverziót.)

A helyzetet kétlépéses játékként írrom le. Először a megbízó lép és közli azt a kompenzáció-párt (w_0, w_1), amihez a továbbiakban tartja magát. Másodikként lép az ügyvivő és meghatározza akcióját. Majd mindkét játékos megfigyeli a játék kimenetét és ennek megfelelően részesül díjazásban az ügyvivő. Ebben a játékban a megbízó *stratégiája* egybeesik a lépésével, azaz a kompenzáció-párral, azonban az ügyvivő *stratégiája* egy *döntési szabály*, amely meghatározza a megbízó által választható kompenzáció-pároknak megfelelő akciót. A játékosok *kifizető függvénye* nem más, mint fentebb definiált várható hasznosságuk.

A játék *egyensúlyát* a megbízó és az ügyvivő stratégiájának egy olyan párja jelenti, amelyre teljesül, hogy

1. Adott kompenzáció-pár mellett az ügyvivő úgy választja meg akcióját, hogy várható hasznosságát maximalizálja.

2. Az ügyvivőnek az 1. pontban leírt optimalizáló magatartása mellett a megbízó olyan kompenzációs-párt választ, ami az ő saját várható hasznosságát maximalizálja (mindez összhangban van a nem-kooperatív játékoknak a 4. fejezetben adott definíciójával).²

A megbízó-ügyvivő modell kialakításakor rendszerint a következő megszorításokat teszik a megbízó által megválasztható kompenzáció-párookra:

1. A kompenzáció-párnak lehetővé kell tennie, hogy az ügyvivő (ex ante) „elfogadható” várható hasznosságot érhessen el.

2. Az egyedi kompenzációk exogén korláttal alulról korlátosak.

Az első megszorítást úgy értelmezhetjük, mint ami megköveteli, hogy a megbízó legalább akkora kompenzációt biztosítson az ügyvivő számára, mint amennyit az más állást vállalva megkereshet. A második korlátozás annak elismerése, hogy az ügyvivő vagyona véges, tehát nem képes tetszőleges összeget fizetni a megbízónak (negatív kompenzáció esetén).

Egy stratégia-párost akkor nevezünk *hatékony*nak, ha nincs másik olyan stratégia-pár, amelyik legalább az egyik játékos számára magasabb hasznosságot nyújt anélkül, hogy a másíknak a hasznosságát csökkentené. A fejezet fő állítása — egy érdekes kivételtől eltekintve — az alábbiakban fogalmazható meg:

— „Reális” feltételek mellett az egyensúly nem hatékony. A modell és az állítás precíz matematikai megfogalmazása a függelékben található, itt csak egy informális bizonyítást ismertetek.

Tegyük fel, hogy az ügyvivő kockázati-averziót mutat. Először is azt állítom, hogy hatékony stratégia-páros esetén az ügyvivő kompenzációja független

² A játékelmélet művelői észrevehetik, hogy beillesztettem a részjáték tökéletességére vonatkozó feltételt is.

a kimenettől, azaz w_0 megegyezik w_1 -gyel. Tegyük fel ennek ellenkezőjét, azaz hogy a kompenzációk eltérőek ($w_0 \neq w_1$), továbbá w az ügyvivő akciójának megfelelő kompenzáció. Mivel az ügyvivő kockázati-averziót mutat, jobban járna, ha ugyanazon akció választása esetén ugyanolyan w kompenzációhoz jutna a kimenettől függetlenül. A megbízó ezzel szemben nem járna rosszul az új helyzetben, mivel kockázat-közömbös. Ha mindkét játékos helyzetén javítani szeretnénk, akkor az ügyvivőnek w -nél valamivel kisebb konstans kompenzációt kellene kapnia a megbízótól.

Másrészt viszont egy olyan stratégia-páros, amelyben az ügyvivő kompenzációja nem függ a kimenettől, általában nem lehet egyensúlyi pont, hacsak az ügyvivő által önmagában legkedvezőbbnek ítélt akció nem része egy hatékony stratégia-párnak. Például, ha a siker akkor valószínűbb, ha az ügyvivő nagyobb erőfeszítést tesz, de ő a kisebb erőfeszítést preferálja, továbbá kompenzációja úgyis független a kimenettől, akkor az ügyvivő vajmi kevésbé érdekelt bármilyen erő kifejtésben! Tehát egyensúlyi helyzetben az ügyvivőnek a sikerért általában nagyobb kompenzációt kell kapnia, mint kudarc esetén. Így az egyensúly érdekeltségi követelményei nincsenek összhangban a hatékonyság feltételeivel.

Az állítás alóli kivételt az jelenti, ha az ügyvivő kockázat-közömbös és meglehetősen jómódú. Ebben az esetben hatékony lesz az egyensúly, ha a megbízó „koncessziót” ad az ügyvivőnek, azaz az ügyvivő rögzített díjat fizet, viszont megtartja a teljes kimeneti értéket. (Könnyű belátni, hogy mindez ekvivalens azzal, amikor a kudarcért járó kompenzáció negatív és a sikerért egy egységnyivel több jár, mint a kudarcért.)

Vajon orvosolható-e bármilyen módon az, hogy a megbízó-ügyvivő kapcsolatban az egyensúly nem hatékony? Az egyik lehetséges megoldás során a megbízó többletforrásokat fordít arra, hogy megfigyelje az ügyvivő akcióit (és általánosabb információit és környezetét). Természetesen az ellenőrzés költségétől függ, hogy ez javítja-e a hatékonyságot. A decentralizáció de facto túlsúlya a nagy szervezetekben azt sugallja, hogy túlzottan költséges az ügyvivő akcióinak a megfigyelése (ellenőrzése), semhogy hatékony, vagy akár kifizetődő legyen.

A nem hatékony egyensúly javítása akkor is elképzelhető, ha a megbízó-ügyvivő kapcsolat tartós. Ez azonban a 8. fejezet témája, tehát itt most nem térek ki rá.

Függelék a 6. fejezethez

Induljunk ki a megbízó-ügyvivő játékra imént adott példa formális modelljéből. A jelöléseket úgy választom meg, hogy amennyire lehet, érzékeltessem, hogy itt a 2. fejezetben ismertetett modell speciális esetével van dolgunk. Az ügyvivő akciója egy nem negatív valós szám, A , a létrejövő kibocsátás pedig

$$C = G(A, X),$$

ahol X véletlen változó. A példában X egyenletes eloszlású az egységnyi intervallumon és

$$G(A, X) = \begin{cases} 1, & \text{ha } A \geq X \\ 0, & \text{ha } A < X. \end{cases}$$

C értelmezhető sikerként vagy kudarcként, X az ügyvivő feladatának nehézségi fokaként, A pedig az általa tett erőfeszítésként. G specifikációjából következik, hogy

$$\text{Prob}(C = 1) = \min(A, 1).$$

Az ügyvivőnek (az eloszláson kívül) nincs információja X -ről akciója megválasztásakor.

Az ügyvivő fizetsége az alábbiak szerint függ C -től

$$R(C) = \begin{cases} w_0, & \text{ha } C = 0 \\ w_1, & \text{ha } C = 1. \end{cases}$$

Ennek következtében az ügyvivő hasznossága

$$U_1 = P[R(C)] - Q(A),$$

ahol P és Q differenciálható szigorúan monoton növekvő függvények, P szigorúan konkáv és Q szigorúan konvex. Így tehát feltehetjük, hogy $A \leq 1$. Vegyük észre, hogy közben feltettük, hogy az ügyvivő kockázat-közömbös. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetem, hogy

$$P(0) = Q(0) = 0.$$

A megbízó bevétele az, ami az eredményből az ügyvivő kifizetése után megmarad. Tegyük fel, hogy hasznossága éppen megegyezik bevételével, azaz

$$U_0 = C - R(C).$$

(Tehát a megbízó kockázat-közömbös.)

A játékban elsőként a megbízó lép és megválasztja a kifizetési (kompenzációs) függvényt, R -et. Ezt követi az ügyvivő lépése, aki R ismeretében eldönti, milyen A akciót választ. Mindezek után a megbízó várható hasznossága

$$V_0 = A(1 - w_1) - (1 - A)w_0, \quad (6.1)$$

az ügyvivőé pedig

$$V_1 = AP(w_1) + (1 - A)P(w_0) - Q(A). \quad (6.2)$$

A megbízó stratégiája éppen az R kifizetési függvény, míg az ügyvivő stratégiája nem más, mint egy α leképezés a kifizetési függvények teréről az akciók terére

$$A = \alpha(R).$$

A játék egyensúlyát egy olyan (R^*, α^*) stratégia-páros jelenti, amelyre teljesül

1. R^* maximalizálja V_0 -t adott α^* mellett.
2. $\alpha^*(R^*)$ maximalizálja V_1 -et adott R^* mellett.

Továbbá megkövetelem, hogy egyensúlyi helyzetben bármely R -re (nemcsak R^* -ra) $\alpha^*(R^*)$ maximalizálja az ügyvivő R melletti várható hasznosságát. (Tehát tulajdonképpen *tökéletes* egyensúlyt írok elő; egy ilyen kétlépéses játékban ezt a helyzetet Stackelberg-féle egyensúlynak is nevezik.) Továbbiakban ezt úgy jelölöm, hogy $A^* = \alpha^*(R^*)$.

Általában reálisnak tűnik a kifizetésekre (kompenzációkra) kirótt két megszorítás. Az első szerint a megbízó nem róhat ki tetszőlegesen nagy büntetést az ügyvivőre, vagy más szavakkal a kompenzáció úgy korlátos, hogy az ügyvivő negatív hasznossága alulról korlátos legyen. A második megszorítás azt a feltételt fejezi ki, hogy az ügyvivő szabadon visszautasíthatja a kapcsolat megteremtését. (Azaz a játékból kiszállhat.) Ehhez w_0 -nak és w_1 -nek olyanoknak kell lenniük, hogy az ügyvivő elérjen valamilyen minimális *várható* hasznosságot. A tanulmány szempontjából elégséges az első megszorítás, a második korlátozás némileg bonyolítaná a kifejtést, de lényegileg nem változtatna az eredményeken. Az első korlátozást úgy is értelmezhetjük, hogy a kifizetés (a kompenzáció) alulról korlátos (és a P függvény mindenütt véges). Az általánosság megszorítása nélkül felteszem, hogy a kifizetések nem negatívak

$$(w_0, w_1) \geq 0.$$

A terjedelmi korlátok miatt nem térhetek most ki a játék részletes ismertetésére. Bárki könnyen ellenőrizheti, hogy (6.2)-ből következik, ha $w_0 = w_1 = w$, akkor az ügyvivő nem érdekelt az erő kifejtésben, azaz $\alpha^*(w, w) = 0$. Továbbá az is látható (6.2)-ből, hogyha

$$Q'(0) \geq P(1),$$

akkor $\alpha^*(w_0, w_1) = 0$ minden, a $[0, 1]$ intervallumba eső w_0 és w_1 esetén; ekkor az egyetlen létező egyensúlyi helyzetben $R^* = (0, 0)$ és $A^* = (0)$. Másrészről, ha

$$Q'(0) < P(1), \quad (6.3)$$

akkor az egyensúlyi helyzetet az jellemzi, hogy

$$0 = w_0^* < w_1^* < 1 \quad (6.4)$$

$$A^* > 0,$$

továbbá $\alpha^*(0, w_1)$ mindaddig szigorúan monoton növekvő w_1 -ben, ameddig $\alpha^*(0, w_1)$ szigorúan 0 és 1 közé esik. A továbbiakban ezt az esetet vizsgálom.

Egy (\hat{R}, \hat{A}) párt akkor nevezek *hatékony*nak (Pareto-optimálisnak), ha nincs másik olyan (R, A) , amely mindegyik játékos részére ugyanakkora hasznosságot biztosít és legalább egy játékos részére szigorúan nagyobb. A P függvény konkávitásából következik, hogy ugyanazon az erőfeszítési szinten az ügyvivő a (w_0, w_1) kifizetési függvénnyel szemben előnyben részesíti a (\bar{w}, \bar{w}) kompenzációs függvényt, ahol

$$\bar{w} = Aw_1 + (1 - A)w_0,$$

a megbízó pedig közömbös e kettővel szemben. (Idézzük vissza, hogy az ügyvivő averziót mutat, a megbízó pedig közömbös a kockázattal szemben.) Tehát, ha $[(\hat{w}_0, \hat{w}_1), \hat{A}]$ hatékony, akkor $\hat{w}_0 = \hat{w}_1$. A (6.4) állítással együtt ez azt mutatja, hogy az egyensúly nem hatékony.

Természetesen több hatékony $[(\hat{w}, \hat{w}), \hat{A}]$ pár is létezik, amelyekre megmutatható, hogy a $0 < \hat{A} < 1$ feltétel esetén kielégítik az alábbi egyenletet

$$P'(\hat{w}) = Q'(\hat{A}).$$

7. A morális kockázat és az ingyénézés: a társulás modellje

A bonyolult szervezetekben a szervezet tevékenységének eredménye együttesen függ több döntéshozó akciójától és a szervezet környezetének sztochasztikus jellegzetességeitől. Általában igen nehéz, sőt gyakran lehetetlen elkülöníteni az egyéni döntéshozók, illetve a környezet szerepét a végeredmény kialakulásában. A döntési folyamat decentralizálása együtt jár az egyének információinak és akcióinak tökéletlen ellenőrzésével (megfigyelésével). Az a következmény, hogy a különböző döntéshozók akcióinak hatása összekeveredik, amit az *ingyénézés* jelenségének nevezhetünk, hozzáadódik a megbízó-üggyvivő kapcsolatban már jelenlevő morális kockázat problémájához. Ebben a fejezetben az ingyénézés és a morális kockázat kombinált problémáját jellemzem egy egyszerű példa segítségével, amit más helyütt a „társulása modelljének” neveztem.

Az általános társulási modell egy olyan játék, amelyben a játékosok — a „partnerek” — olyan kimenetesen osztozkodnak, amely egyaránt függ a tagok akcióitól és a sztochasztikus környezettől. A partnerek képtelenek tökéletesen megfigyelni (ellenőrizni) egymás információit, akcióit vagy a környezetet. Az információ-struktúra hasonlatos a team-elméletben alkalmazotthoz, azonban a modell explicit módon veszi figyelembe a döntéshozók egymásnak részben ellentmondó céljait. Feltételezzük, hogy valamennyi játékos hasznossága közvetlenül függ saját akcióitól és a (sztochasztikus) eredményből való részesedési arányától.

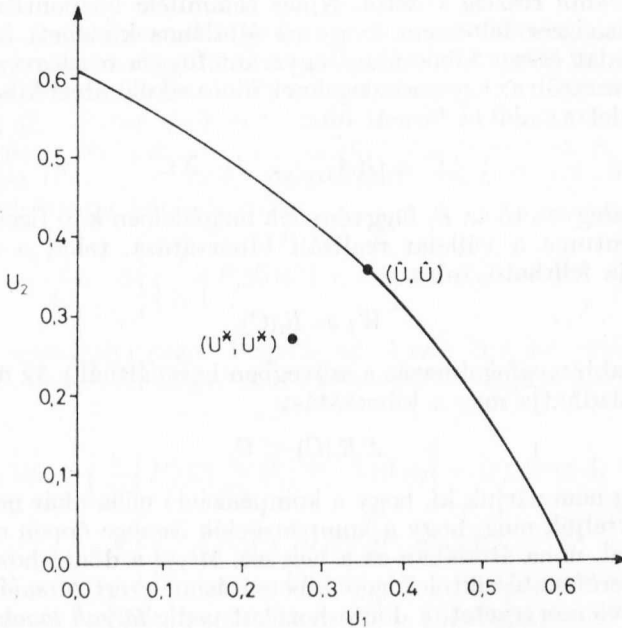
Az ismertetésre kerülő példa az előző fejezetben elemzett egyszerű megbízó-üggyvivő modellnek egy változata. A kimenet ismételtelen vagy siker (1), vagy kudarc (0) és a siker valószínűsége (ismert) együttes függvénye a partnerek akcióinak. A társult tagok nem jutnak többletinformációhoz mielőtt megválasztják akcióikat és nem tudják megfigyelni egymás akcióit. Így tehát a játékosok stratégiája megegyezik akcióikkal. A partnerek egyenlően osztják el a kimenetet és az egyes játékosok utilitása a részesedési arányuktól és a saját akciójuktól függ. Az érdekkonfliktus abból a hipotézisből fakad, hogyha nem lenne kilátás részesedésre a kimenetből, akkor a tagok nem választanának olyan akciókat, amelyek maximalizálnák a siker valószínűségét. Ez következne be például akkor, ha a siker valószínűsége párhuzamosan nőne a partnerek fokozódó „erőfeszítésével”, azonban *ceteris paribus* valamennyi játékos a kisebb erőfeszítést preferálná a nagyobb szemben.

Az *egyensúly* a partnerek akcióinak egy olyan kombinációja, amelyben egyetlen játékos sem tudja akciójának *egyoldalú* megváltoztatásával növelni várható hasznosságát. A fejezet fő állítása: „valószerű” feltételek mellett az egyensúly nem hatékony, még akkor sem, ha a társult tagok kockázatközömbösek.

A 4. ábra két partner esetében illusztrálja az állítást és a modell egy lehetséges specifikációját adja. (Lásd még a fejezet függelékét.) Az ábrán a két tengely reprezentálja a két játékos várható hasznosságát. Az egyensúlyi akció-páros esetén a várható hasznosság-pár (U^* , U^*), a görbe vonal pedig a hatékony akció-párokhoz tartozó várható hasznosságok mértani helye. Ezen belül a hatékonysági görbén található szimmetrikus (\hat{U} , \hat{U}) pár határozottan jobb, mint a két játékos egyensúlyi pontja.

Ahhoz, hogy ráérezzünk, miért nem hatékony a társulást reprezentáló játék egyensúlyi helyzete, célszerű feltenni, hogy a partnerek közömbösek a kocká-

zattal szemben. Pontosabban, tegyük fel, hogy a társult tagok hasznossága megegyezik a kimenetből való részesedésük és az erőfeszítésből származó negatív hasznosságuk különbségével, valamint, hogy a siker valószínűsége a tagok erőfeszítésének növekvő függvénye. Egyensúlyi helyzetben minden játékos éppen akkora erőfeszítést választ, hogy a többi játékos egyensúlyi erőfeszítése mellett minden további kicsiny erőfeszítésből eredő részesedés-növekménye éppen kiegyenlítse az erőfeszítéshez kapcsolódó negatív hasz-



4. ábra. Egyperiódusos partneri viszony ($q = 2,8$)
A görbe vonal a hatékonysági felület

nosságot. Azonban még egy ilyen kis további erőfeszítés is mindenki más várható részesedésének megnövekedésével járna anélkül, hogy ezzel szemben nőne negatív hasznosságuk is. Éppen ezért, ha *minden* játékos párhuzamosan növelné erőfeszítését, úgy *minden* játékos jobb helyzetbe kerülne (azaz magasabb lenne a várható hasznossága), mint az egyensúlyi helyzetben. Tehát az egyensúly nem lehet hatékony.³

Gazdasági zsargonban szólva: valamennyi tag erőfeszítése *pozitív externáliát* jelent a többiek számára, azonban nincs semmi személyes érdekeltsége abban, hogy egyéni optimalizációja során ezt az externáliát figyelembe vegye. Egyszerűbben szólva, valamennyi partner megkísérli, hogy *ingyen éljen* a többiek erőfeszítéséből, aminek az a következménye, hogy egyensúlyi helyzetben az együttes erőfeszítés túl kicsi a hatékony pont eléréséhez.

³ A matematikus lelkületű olvasó bizonyára észreveszi, hogy ez az érvelés a megfelelő függvények differenciálhatóságán alapszik. Úgyszintén feltettem, hogy valamennyit tag részesedése a kimenetből szigorúan pozitív.

A következő fejezetben bemutatom, miként javítható az egyensúlyi helyzetnek ez az alacsony hatékonysága legalábbis azáltal, hogy tartós társulásokot hoznak létre.

Függelék a 7. fejezethez

A függelékben ismét a 2. fejezethez írt függelék modelljét használom némi módosítással. Először is nincs semmiféle „centrum”, azaz a kizárólagos döntéshozók az N számú részleg vezetői. Nincs semmiféle központilag allokálандó erőforrás. Másodszor felteszem, hogy az általános kimeneti függvény értelmében a vállalat összes kibocsátása egyaránt függ a részlegvezetők akcióitól és az X környezettől; az egyes részlegeknek nincs elkülönített kibocsátásuk. Így a (2.2) egyenlet az alábbi formát ölti:

$$C = G(A_1, \dots, A_N, X). \quad (7.1)$$

Minden részlegvezető az R_i függvénynek megfelelően kap fizetséget. A függvény argumentuma a vállalat realizált kibocsátása, tehát a részlegvezetők kompenzációja felírható, mint

$$W_i = R_i(C). \quad (7.2)$$

(Ez általánosabb megfogalmazás a szövegben használnál.) Az összes kompenzáció nem haladhatja meg a kibocsátást

$$\sum R_i(C) \leq C. \quad (7.3)$$

Pillanatnyilag nem zárjuk ki, hogy a kompenzáció néha akár negatív is lehet. Azt sem követeljük meg, hogy a kompenzációk összege éppen egyenlő legyen a kibocsátással, noha általában ez a helyzet. Mivel a döntéshozók osztozkodnak a közös erőfeszítéseiktől függő kibocsátáson, ezért *társulásnak* nevezem az így létrejövő szervezetet, a döntéshozókat pedig *társult tagoknak* tekintem.

Tegyük fel, hogy az i -edik tag hasznossága

$$U_i = P_i(W_i) - Q_i(A_i), \quad (7.4)$$

ahol P_i a kompenzációhoz tartozó hasznossági függvénye, Q_i pedig az erő-kifejtéséhez tartozó negatív hasznosság függvénye.

Az i -edik társult tag *stratégiája* nem más, mint D_i döntési függvénye, amely az Y_i információ függvényében adja meg a tag A_i akcióját

$$A_i = D_i(Y_i). \quad (7.5)$$

A véletlen X, Y_1, \dots, Y_N változók együttes valószínűségeloszlása adott. Ez a valószínűségeloszlás, valamint a (7.1)–(7.5) egyenletek együttesen határozzák meg a *társulás-játékot*, amelyben az i -edik tag várható hasznossága

$$V_i(D_1, \dots, D_N) = E(U_i) \quad (7.6)$$

valamennyi tag stratégiájától (D_1, \dots, D_N) egyaránt függ. Felteszem, hogy a tagok egyidejűleg választják meg stratégiájukat. Egyensúlyi az olyan stratégia-kombináció, amelyben egyik tag sem tudja stratégiája egyoldalú megváltoztatásával növelni várható hasznosságát.

Vegyük észre, hogy a kifizetődő függvény része a játékszabályoknak.

A társulás-játék egyensúlyának tipikusan nem hatékony jellegét egy olyan példán illusztrálhatjuk, amelyben nincsenek információs jelzések (az (Y_i, \dots, Y_N) véletlen változók konstansok), a tagok akcióját egy nem negatív valós szám reprezentálja (nevezzük ezt „erőfeszítésnek”) és a tagok egyenlően osztozkodnak a kibocsátáson

$$W_i = \frac{1}{N} \cdot G(A_1, \dots, A_N, X). \quad (7.7)$$

Tegyük fel, hogy valamennyi X -re G az A_i -k szerint kétszer differenciálható szigorúan konkáv és növekvő függvény. Ugyancsak tegyük fel, hogy minden i -re, P_i kétszer differenciálható W_i szerint, szigorúan konkáv és növekvő függvény, míg Q_i kétszer differenciálható A_i szerint, szigorúan konvex és növekvő függvény. Jelöljük (A_i, \dots, A_N) -t A -val, G_i -nek az A_i szerinti parciális deriváltját G'_i -vel, P_i és Q_i deriváltjait pedig P'_i -vel, illetve Q'_i -vel. Az egyensúly elsőrendű feltétele ekkor

$$\frac{\partial V_i}{\partial A_i} = E \left[\left(\frac{1}{N} \right) P'_i(C) G'_i(A, X) \right] - Q'_i(A_i) = 0. \quad (7.8)$$

Legyen A^* egyensúlyi pont. Vegyük az A -nak egy kis eltérését A^* -tól, mondjuk $dA = (dA_1, \dots, dA_N)$.¹ A V_i -ben ennek megfelelően bekövetkező elmozdulás

$$\begin{aligned} dV_i &= E \left[\left(\frac{1}{N} \right) P'_i(C) \sum_{j=1}^N G'_j(A^*, X) dA_j \right] - Q'_i(A_i^*) dA_i = \\ &= E \left[\left(\frac{1}{N} \right) P'_i(C) \sum_{j \neq i} G'_j(A^*, X) dA_j \right] + \\ &+ \left\{ E \left[\left(\frac{1}{N} \right) P'_i(C) G'_i(A^*, X) \right] - Q'_i(A_i^*) \right\} dA_i. \end{aligned} \quad (7.9)$$

A (7.8) elsőrendű feltételnek megfelelően a kapcsos zárójelben levő kifejezés zéró. A (7.9) jobb oldalán szereplő első tag azonban pozitív, ha minden dA_j pozitív, azaz ekkor dV_i is pozitív. Így egy egyensúlyi A^* helyzetből kiindulva egy (elég csekély) párhuzamos erő kifejtés *valamennyi* tag várható hasznosságát megnöveli. Tehát az egyensúly nem hatékony. A (7.9) jobb oldalán szereplő első tag nem más, mint az a „pozitív externália”, amit az i -edik tag erőfeszítése hoz létre a többi tag számára, de amelyet ő maga nem vesz figyelembe hasznossága kiszámításakor.

Megmutatható, hogy az egyensúlyi helyzet nem hatékony jellege független a példában használt konkrét részesedési szabálytól.

A szövegben közölt ábrának megfelelő példát az alábbiakban foglalhatjuk össze: két tag van. A C kibocsátás 0 vagy 1 és

$$\text{Prob}(C = 1) = \min(A_1 + A_2, 1)$$

$$P_i \left(\frac{1}{2} \right) = 1, \quad P_i(0) = 0$$

$$Q_i(A_i) = qA_i^2.$$

(A számszerű példában, $q = 2,8$.) Közvetlenül ellenőrizhető, hogyha $q \geq 1$, akkor létezik egy kizárólagos egyensúly, amelyben

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2q}$$

$$V_i(A_1, A_2) = \frac{3}{4q} \equiv u^*.$$

Azonban, ha $q > 2$, akkor az egyensúly nem hatékony. Például, ha $q > 2$, akkor az alábbi egy olyan hatékony erőfeszítés-pár, amely dominálja az egyensúlyit

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{q}$$

$$V_i(A_1, A_2) = \frac{1}{q} \equiv \hat{u}.$$

(További részleteket lásd RADNER, MYERSON, MASKIN 1983.)

8. Hosszú távú (tartós) kapcsolatok

A legtöbb gazdasági szervezetet a tagok tartós kapcsolata és ismétlődő interakciója jellemzi. Még a kormányzati és vállalati élet napjainkban megnekedett mobilitása mellett is akár évekig vagy évtizedekig is tarthat egy-egy ilyen kapcsolat. Ez újabb és újabb lehetőséget ad a tagok számára, hogy értékeljék tagtársaik teljesítményét és megteremtsék saját hírnevüket, mégha az egyes tagok nem is tudják pontosan és közvetlenül megfigyelni egymás akcióit. A szervezeti magatartás folklórjához tartozik, hogy a hosszú távú, tartós kapcsolatok segítségével csökkentik azt az eredménytelenséget, ami rövid távú kapcsolatokban a morális kockázatból ered. Ebben a fejezetben megvizsgálom, hogy a szervezet-elmélet milyen játékelméleti megközelítése segíti elő e jelenség megértését.

Ahhoz, hogy precízen tudjuk modellezni a helyzetet, tegyük fel, hogy az előző fejezetekben leírt játékok valamelyikét véges vagy végtelen sokszor megismétlik (újrajátsszák). A sztochasztikus környezet alakulását véletlen folyamatként írjuk le. Ezenkívül lehetnek még olyan állapotváltozók, amelyek endogén módon változnak az egyik periódusról a másikra.

Továbbá tegyük fel, hogy minden játékosnak származik valamilyen haszna az egyperiódusú játékból (mint az adott periódus alatti akcióinak és a kimenetnek az eredménye) és hogy valamennyi játékos (várható) hasznossága az egyperiódusú játékok sorozatára megegyezik az egyperiódusú (várható) hasznosságok összegével, amikor is a jövőbeli hasznosságokat esetleg diszkontálják.

Végül, hogy teljessé tegyük a játékosstruktúra leírását, specifikáljuk a valamennyi játékos számára hozzáférhető stratégiák halmazát. Egy játékos *szekvenciális stratégiája* a szabályoknak egy olyan sorozata, amely valamennyi periódusban az akció megválasztásának időpontjáig *felhalmozott* információk függvényében határozza meg a játékos által választandó akciót.

Az eredményül kapott konstrukciót nevezzük *szekvenciális játéknak*. Ha nincs az egyik periódusról a másikra változó állapotváltozó és ha az egymás után következő egyperiódusú környezetek függetlenek és azonos az eloszlásuk, akkor a szekvenciális játékot *ismételt játéknak* avagy *szuperjátéknak* nevezzük.

A játékos rendelkezésére álló szekvenciális stratégiák halmazáról nyilvánvaló, hogy a periódusok számának növekedésével mind méretében, mind bonyolultságában nő. Ahhoz, hogy a nagyon hosszú távú kapcsolatok megfelelő matematikai idealizációjához eljussunk, a továbbiakban felteszem (hacsak explicit módon ettől el nem térek), hogy a periódusok száma végtelen. (Természetesen alaposan meg kellene vizsgálni, hogy a „végtelen” a jelen esetben megfelelő közelítése-e a „nagyon nagynak”!)

Mivel a játékosok számára hozzáférhető szekvenciális stratégiák halmaza ennyire nagy, egyáltalán nem meglepő, hogy *egy végtelen periódusú szekvenciális játékban általában végtelen számú egyensúlyi pont van*.

Úgy gondolom, hogy ebből az állításból messzemenő következtetéseket vonhatunk le a tartós kapcsolatokra vonatkozóan csak úgy, mint az ez ideig kifejlesztett játékelmélet korlátaira vonatkozóan. Erre a későbbiekben visszatérek.

Most pedig áttérek a megbízó-üggyvivő, illetve a társulás-játék egyperiódusú változatából levezetett ismételt játék példájának részletesebb elemzésére.

8.1. Ismételt megbízó-üggyvivő játék

Tekintsük a 6. fejezetben leírt egyperiódusú megbízó-üggyvivő játékból konstruált ismételt játékot! Az üggyvivők adott akciói mellett az egymás után következő kimenetek függetlenek lesznek és a siker valószínűsége csak az üggyvivőknek az adott perióduson belüli akciójától függ. Minden periódus kezdetén a megbízó meghirdeti az arra a periódusra érvényes kompenzáció-párt; ez feltehetőleg a korábbi kimenetektől és nem az üggyvivők korábbi akcióitól függ (amelyeket a megbízó amúgy sem tud közvetlenül megfigyelni). Miután a megbízó meghirdette az új kompenzáció-párt, az üggyvivők megválasztják akcióikat. Ez a választás részben a korábbi kimenetektől és kompenzáció-pároktól, részben az aktuális kompenzáció-pártól függ.

Ne felejtjük el, hogy az egyperiódusú játék egyensúlyi pontjában az üggyvivő magasabb kompenzációban részesül siker, mint kudarc esetén. Létezik azonban olyan hatékony elrendezés, amely mindkét játékos számára kedvezőbb, mint az egyperiódusú egyensúly. Ebben a hatékony elrendezésben az üggyvivő olyan akciót hajt végre, amely megnöveli a siker valószínűségét az egyperiódusú egyensúlyéval szemben, de ő maga az ilyen akciót kevésbé szereti. A megbízó ezt az utóbbit túl is kompenzálhatja oly módon, hogy az üggyvivő számára az aktuális kimenetből független kompenzációt biztosít, ezáltal csökkentve az üggyvivő kockázatát.

Életszerűbbé válik a probléma, ha feltesszük, hogy az üggyvivő akciója nem más, mint egy erőfeszítési szint és míg a nagyobb erőfeszítés növeli a siker valószínűségét, ugyanakkor kevésbé kívánatos az üggyvivő szempontjából. Ennek megfelelően különbséget tesznek az *egyperiódusú erőfeszítés és kompenzáció pár*, valamint a *hatékony erőfeszítés és kompenzáció* között.

Vajon mi módon tudja a szuperjátékban a megbízó érdekeltté tenni az üggyvivőt abban, hogy az egyperiódusú játéknál nagyobb erőfeszítést tegyen és ugyanakkor neki is magasabb legyen a várható profítja? Noha a megbízó

nem képes megfigyelni közvetlenül az ügyvivő erőfeszítését, ugyanakkor statisztikailag megbecsülheti az ügyvivő átlagos erőkifejtési szintjét a több perióduson keresztül elért siker gyakoriságán keresztül. Ez a beclés annál megbízhatóbb lesz, minél hosszabb időszakra támaszkodik, még akkor is, ha az egymás utáni kimenetek nem függetlenek (mivel az egyes periódusokban tett erőfeszítés feltehetőleg a korábbi kimeneteknek is függvénye⁴). Ez azt sugallja, hogy a megbízó bizonyos számú periódus eltelte után képet tud alkotni magának az ügyvivő teljesítményéről, azaz a sikerek relatív gyakoriságáról, és ezáltal „büntetést” helyezhet kilátásba arra az esetre, ha a sikerek száma egy „elfogadható” szint alá esik. Ez a megközelítés akkor lesz sikeres, ha a büntetéssel való fenyegetés egyszerre hatékony és ugyanakkor hihető; más szavakkal, ha a megbízó fenyegetési stratégiája része a szuperjáték egyensúlyának.

Ezek után részletesebben is megadom a megbízó ilyen típusú stratégiáját, amit egyébként *értékelő-stratégiának* fogok nevezni (review strategy). Tulajdonképpen egy három paraméterrel jellemezhető stratégia-családot írok le. Először, a megbízó meghatározza a periódusok számát, mondjuk legyen ez R , amelyre az ügyvivő teljesítményének első értékelését alapozza. Amennyiben az ügyvivő A erőfeszítési szintje hatékony, akkor a sikerek várható száma az első R periódusban RA . Mivel a sikerek tényleges száma véletlenszerű, a megbízó RA -nál valamivel alacsonyabb szinten határozza meg a még „elfogadható” sikerszámot, mondjuk $RA - B$ szinten, ahol B szintén meghatározandó paraméter. Legyen az első R periódus az *értékelési (szemle) fázis*! Ennek kétféle kimenete lehetséges:

1. A sikerek száma elfogadható és a megbízó új értékelési fázist nyit (a „sikerszámlálót” természetesen ekkor nullára állítja).

2. A sikerek száma nem elfogadható. Ekkor a megbízó az *egyperiódusú kompenzáció-párt* alkalmazza a következő M időszakra, és csak akkor kezd új értékelési fázist. M a megbízó értékelő-stratégiájának harmadik paramétere.

A nem kielégítő értékelési eredményt követő M periódust *nem-kooperatív szakasznak* nevezem, a terminológia értelme azonnal ki fog derülni.

Mi az ügyvivő legjobb reakciója a megbízó értékelő-stratégiájára? Először is világos, hogy a nem-kooperatív szakaszban az ügyvivő számára a legelőnyösebb, ha az egyperiódusú egyensúlyi erőfeszítése szintjére áll be, mivel úgysem tudja a következő értékelő szakasz kezdetéig a megbízó cselekvését befolyásolni. Másodszor, az értékelő szakaszban az ügyvivő optimális akciója a folyó értékelő periódus alatti kimenetek sorozatától függ, ezenkívül hatással van rá jövőbeli hasznosságának diszkontfaktora, valamint a megbízó értékelő-stratégiájának paraméterei. (Nevezetesen, ha az ügyvivő egy értékelő szakasz folyamán már elérte a sikerek elfogadható szintjét, a szakasz további részében semmiféle erőfeszítést nem fog tenni!)

Végül, ha az ügyvivő el akarja érni, hogy a megbízó kitartson a meghirdetett értékelő-stratégia mellett, akkor kilátásba kell helyeznie valamifajta büntetést, arra az esetre, ha a megbízó eltér arról. Ezt megteheti úgy, hogy bejelenti, amennyiben a megbízó eltér az értékelő-stratégiától, akkor ő (az ügyvivő-

⁴ Ezt beláthatjuk, ha a nagy számok törvényét alkalmazzuk függő véletlen változók esetére.

a folyó értékelő szakasz további részében, valamint M' számú további periódusban (ahol M' egy általa meghatározott paraméter) vissza fog térni az egyperiódusú egyensúlyi stratégiájához. (Mint emlékszünk, az ügyvivő egyperiódusú egyensúlyi stratégiája nem más, mint a megbízó által meghirdetett kompenzáció-párral szemben rövidlátó optimalizálás.)

Az így leírt stratégia-párost nevezem *értékelő-stratégia-párnak*. Remélem, hogy az előző megjegyzések, illetve ezek rövid átgondolása után nyilvánvaló, hogy *megfelelően megválasztott paraméterek mellett az értékelő-stratégia-pár a superjáték egyensúlyát adja*. Lényegében mindkét játékos a másik a nem-kooperatív szakaszhoz való visszatéréssel revolverezi, ami (az ismertetett körülmények között) „híhető” is, mivel a nem-kooperatív viselkedésre adott legjobb válasz szintén nem-kooperatív, hiszen két nem-kooperatív viselkedés vezet rövid távú egyensúlyhoz az előírt számú nem-kooperatív periódusban. Ne felejtjük el, hogy a megbízó stratégiájának paraméterei R , B és M , míg az ügyvivő stratégiájának paramétere M' és az értékelő szakaszban használt döntési szabály.

Arra is emlékeztetnék, hogy az értékelő-stratégiák elemzésének célja az egyperiódusú egyensúlynál hatékonyabb superjátékbeli egyensúly megkonstruálása volt. Mielőtt erre rátérnék, szeretnék rámutatni, hogy a superjátéknak létezik egy olyan triviális egyensúlya, ami ekvivalens az egyperiódusú egyensúllyal, mégpedig az, amikor mindkét játékos makacsul ragaszkodik a saját egyperiódusú egyensúlyi stratégiájához, függetlenül az előző periódusokban történtektől. Ezt hívhatjuk *makacs egyensúlynak*. Az alábbi állítás a makacs és az értékelő stratégiák egyensúlyának relatív hatékonyságát veti össze:

1. Ha a játékosok nem túlzottan diszkontálják a jövőt, akkor létezik a makacs egyensúlynál hatékonyabb értékelő-stratégiai egyensúly.

2. Minél kevésbé diszkontálják a játékosok a jövőt (azaz minél előrelátóbbak), annál inkább megközelíti a teljes hatékonyságot az általuk használt egyensúlyi értékelő-stratégia-pár.

3. Ha a játékosok egyáltalán nem diszkontálják a jövőt, akkor teljes hatékonyságú elrendezést tudnak létrehozni, mint egy superjáték egyensúlyát. (Ezek az egyensúlyi helyzetek „dinamikus értékelő stratégiát” alkalmaznak, amelyekben a paraméterek időben változnak.⁵)

Hangsúlyoznom kell, hogy az általam leírtak mellett még számtalan superjáték egyensúlyi pont létezik. Valóban, ha a superjáték egyensúlyát az általa a játékosoknak biztosított várható diszkontált hasznossággal jellemezzük, akkor a superjáték bármely két egyensúlyi pontját összekötő szakasznak bármely pontja elérhető a superjáték egyensúlyaként.

8.2. Az ismételt társulás-játék

A 7. fejezetben ismertetett társulás-játéknak megfelelő ismételt játékot is meg lehet szerkeszteni az ismételt megbízó-ügynök játékkal analóg módon. Kiténik azonban, hogy a társulás-játékban jelentkező ingenyelési érdekeltég megszüntetése nem olyan egyszerű, mint a megbízó-ügyvivő játékban a morális

⁵ Hogy pontos legyek, a második és a harmadik állítás igazsága csak azokra a hatékony elrendezésekre van bizonyítva, amelyek Pareto értelmében magasabb rendűek, mint az egyperiódusú egyensúly.

kockázaté. (Hiszen a társulás-játék is tartalmaz morális kockázatot.) Megkísérlem a részletekben való elvesztés nélkül leírni az ismételt társulás-játékot.

Az ismételt társulás-játék első két tétele analóg az ismételt megbízó-ügyvivő játékban kapott eredményekhez:

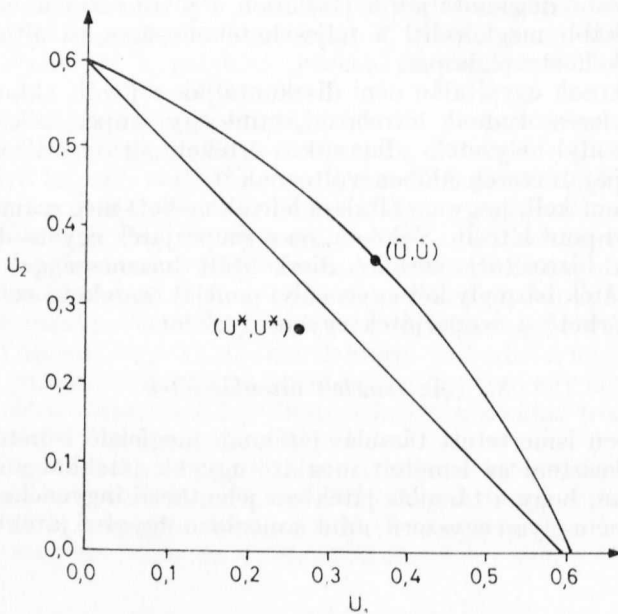
— Ha a társult tagok nem túlzottan diszkontálják a jövőt, akkor léteznek az ismételt játéknak az egyperiódusúnál hatékonyabb egyensúlyi pontjai.

— Ha a tagok egyáltalán nem diszkontálják a jövőt, akkor el tudják érni a teljes hatékonyságot, mint egy szuperjáték egyensúlyát.

Emlékezzünk vissza, hogy az ismételt megbízó-ügyvivő játékban, minél kevésbé diszkontálták a játékosok a jövőt, annál közelebb kerültek a szuperjáték egyensúlyi pontjait jellemző hatékonysághoz, határértékben a teljes hatékonysághoz közelítve. Belátható a 7. fejezet példája alapján (lásd a 7. fejezet függelékét is), hogy ez nem feltétlenül igaz az ismételt társulás-játékban:

— Ha még csekély mértékben is, de diszkontálják a játékosok a jövőt, akkor nem feltétlenül kerülnek közelebb a szuperjáték egyensúlyi pontjait jellemző hatékonysághoz, bármilyen kicsi is legyen a diszkont-faktor.

Ezt az állítást az 5. ábrán illusztráljuk, amelyet a 4. ábrából egy egyenes beillesztésével nyerünk, amely elválasztja egymástól az egyperiódusú egyensúlyi párt, (U^*, U^*) -t a hatékonysági határfelület görbéjétől. Ebben a példában megmutatható, ha a tagok diszkontrátája szigorúan pozitív (mindegy milyen kicsi), akkor a szuperjáték bármely egyensúlyi pontja a szuperjátékhoz tartozó olyan várható hasznossági párt eredményez számukra, amely az egyenes alatt helyezkedik el, míg viszont ha diszkontrátájuk zéró, akkor egy szuperjáték-egyensúlyban bármely, az (U^*, U^*) párnál jobb hasznossági párt elérhetnek a hatékonysági felületen.



5. ábra. Ismételt társulás. $q = 2,8$. A görbe a hatékonysági felület.
Az egyenes egyenlete: $U_1 + U_2 = 2 - q/2$

8.3. Véges horizontú játékok

Korábban utaltam arra a kérdésre, hogy vajon a végtelen időhorizont jó közelítése-e a nagyon hosszú horizontnak, amikor a decentralizált szervezetet szekvenciális játékkal reprezentáljuk. Szeretnék rámutatni e közelítés néhány komoly problémájára. Az ebből a szempontból elemzett legtöbb modellből az alábbi meglepő eredményre juthatunk: *Ha a játékot csak véges sokszor ismétljük (függetlenül attól hányszor) és az ismétlések számát előre ismerik a játékosok, akkor az ismételt játék valamennyi egyensúlyi pontjában a kimenet megegyezik a macacs egyensúllyal.* Ennek okát beláthatjuk, ha az utolsó periódustól visszafelé haladunk, amikor is a jövőbeli büntetés többé már nem effektív és így a játékosok nem-kooperatívan viselkednek. Ha adott az utolsó periódusbeli magatartás, akkor hasonló okfejtés határozza meg viselkedésüket az utolsó előtti periódusban és így tovább.

Mind a rendszertelen empirikus tények, mind a laboratóriumi kísérletek viszont azt sugallják, hogy ez a predikció általában nem reális; a valós játékosok igen nagyszámú periódus esetén ugyanúgy viselkednek, mintha az időhorizont végtelen lenne.

8.4. Közelítő egyensúlyi helyzetek

E tanulmány során eddig két „paradoxon” is felszínre került: (1) a macacs egyensúly megrögzülése, mint a sokperiódusú, de mégis véges játékok (lényegében) egyetlen egyensúlyi helyzete, amire éppen az előbb utaltunk; valamint (2) az ismételt társulás-játékban a „hatékonyságtalanság” megrögzülése, miközben a játékosok egyre kevésbé és kevésbé diszkontálják a jövőt.

Érdekes módon mindkét paradoxon eltűnik, amint az eddigi szigorú egyensúly-fogalmat a *közelítő egyensúly* fogalmával váltjuk fel. Nagy vonalakban azt mondhatjuk, hogy a játékos-stratégiák kombinációját közelítő egyensúlynak nevezzük, ha egyetlen játékos sem tudja stratégiája egyoldalú megváltoztatásával *egy kicsinél nagyobb mértékben* javítani hasznosságát. Megmutatható, hogy a közelítés bármely elvárt foka mellett a közelítő egyensúly sokkal „szebben” viselkedik, mint a szigorú egyensúly, miközben a probléma paramétereit változtatjuk. Nevezetesen, a véges horizontú játékok közelítő egyensúlya a horizont növelésével párhuzamosan egyre közelebb kerül a végtelen időhorizontú játékok egyensúlyi pontjaihoz. (Vegyük észre, hogy az állítás kétfajta közelítést is tartalmaz!) Továbbá az ismételt társulás-játékok közelítő egyensúlya annál közelebb kerül a teljes hatékonysághoz, minél előrelátóbbá válnak a játékosok.

Mindkét esetben a helyzetet azzal a régi szólással jellemezhetjük, hogy „A legjobb a jónak ellensége”.

9. Záró megjegyzések

Záró megjegyzéseimet az eddigi elemzés rövid összefoglalásával kezdem, majd azon a három kérdésen medítálok el, amit ez az elemzés felvetett: (1) hierarchia kontra együttes felelősség; (2) korlátozott racionalitás; (3) többszörös egyensúly.

9.1. Az eddigiek összefoglalása

Az alábbi összefoglalás vázlatosan felsorolja a korábbi fejezetek főbb következtetéseit:

1. A decentralizált szervezetek egyensúlyi pontjai általában nem hatékonyak, ahhoz képest, hogy a döntéshozók közötti adott információ-eloszlás mellett elméletileg milyen hatékonyságot lehetne elérni.

2. Az egyensúlyi helyzetek nem hatékony jellegét ösztönzés problémák okozzák, amelyek érdekösszeütközésből származnak a döntéshozók között, vagy a döntéshozók és a szervező között. Ezeket az alábbi címszók szerint tudjuk osztályozni:

- a) megtévesztés,
- b) morális kockázat,
- c) ingyénézés.

3. A megtévesztés problémáját megfelelően kialakított kompenzációs mechanizmus segítségével megszüntethetjük, feltéve, hogy nem követelmény a „mérlegegyensúly” (Groves — Clarke — Vickery-mechanizmus).

4. Ha a játékosok nem rövidlátók, azaz ha nem túlzottan diszkontálják a jövőbeli hasznosságot, akkor a morális kockázatból következő kisebb hatékonyság kiküszöbölhető a hosszú távú egyensúly révén (megbízó-üggyvivő játék).

5. Előrelátó játékosok esetén a hosszú távú egyensúlyi helyzetekben is csak részben szüntethető meg az ingyénézés és a morális kockázat együtt (társulás-játék).

6. Előrelátó játékosok esetén a hosszú távú egyensúlyi helyzetekben a hatékonyság javítható, ha csak a játékosok nem túl kapzsik (közelítő egyensúly).

7. A hosszú távú játékoknak általában végtelen sok egyensúlyi helyzetük van.

9.2. Hierarchia kontra együttes felelősség

A 8. fejezetben ismertetett előzetes eredmények azt sugallják, hogy a tartós kapcsolatok esetleg kevésbé hatékonyak társulás, mint megbízó-üggyvivő kapcsolat esetén, még akkor is, ha a döntéshozók nem rövidlátóak. Ezek az eredmények összhangban vannak a szervezeti életről szerzett benyomásaimmal.

A vállalatokon belül a *formális* szervezet tipikus formája hierarchikus; egy ilyen hierarchiát úgy is értelmezhetünk, mint a megbízó-üggyvivő kapcsolat feje tetejére állított fáját. A szervezeti magatartás folklórja nagy fontosságot tulajdonít az individuális teljesítmény mércéjének a csoportteljesítménnyel szemben, még akkor is, ha ez a mérce csak tökéletlenül tükrözi a tényleges egyéni teljesítményt.

A megbízó-üggyvivő kapcsolat szokásos forma mind a vállalatok között, mind a vállalatokon belül. Például, a termelő és fogyasztója között a javak és szolgáltatások szállításának feltételei ritkán annyira egyszerűek, hogy tökéletesen leírhatók legyenek egy olyan szerződéssel, amelynek teljesítését vagy nem teljesítését objektívan meg lehet ítélni. A reputáció (hírnév) a szállító és a fogyasztó közötti tartós kapcsolatnak fontos elemévé válik, ami könnyen értelmezhető egy megfelelően hosszú távra megbízó-üggyvivő játékban.

Azonban a társulás is jelentős a szervezetek gyakorlatában. A vállalatokon belül az egyéni teljesítmények pontos mérése többnyire lehetetlen és ez arra kényszeríti a szervezetet, hogy részben a csoportteljesítmény mércéire támaszkodjék. Ezenkívül az *informális* szervezetek számos aspektusa értelmezhető a társulás fogalmaival és a hosszú távon működő vállalatokban az egyének közötti tartós, jó kooperatív viszony kialakításának fontosságát — mind saját karrierjük, mind a szervezet hatékonysága szempontjából — ma már felismerik.

9.3. Korlátozott racionalitás

A 8.3. alfejezetben említett tétel azt sugallja, hogy a korlátozottan racionális döntéshozók hatékonyabb hosszú távú egyensúlyi helyzeteket képesek fenn tartani, mint a tökéletesen racionálisak. Természetesen a racionalitás korlátoosságának számos formája képzelhető el. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy valamennyi játékos megelégszik a másik játékos stratégiájára adott nem-egészen-optimális válasszal, amely a 8.3. fejezetben tárgyalt közelítő egyensúly fogalmához visz el bennünket. További kutatásra van szükség, hogy megmagyarázzuk, miképpen alakulnak a játékosok fogalmai arról, hogy mi az, ami „elégséges”, mivel ezek a fogalmak valószínűleg endogén változók egy hosszú távú játékban. Továbbá a korlátozott racionalitás egyéb formái is feltehetőleg befolyásolják a játékok egyensúlyi helyzeteit.

9.4. Többszörös egyensúlyi helyzetek

Az a tény, hogy a hosszú távú játékoknak általában végtelen sok egyensúlyi helyzetük van, probléma az elmélet számára, mivel viszonylag pontatlanná teszi az elmélet predikcióit. Tulajdonképpen a helyzet jóval extrémebb annál, semmint hogy egyszerűen azt mondjuk, hogy az egyensúlyok halmaza végtelen; a hosszú távú játékok egyensúlyi helyzetei általában nem izolált pontok, tehát bármely egyensúlyhoz találhatunk tetszőlegesen közel eső másik egyensúlyt. A helyzet hasonlatos a kissé tapadós vízszintes felületen levő labda helyzetéhez: a labda ott marad, bárhova is tesszük és a labdát érő kis hatások csak csekély elmozdulást fognak eredményezni.

A dolgok ilyen állása nem feltétlenül kényelmes a kortárs közgazdaságtan számára, amely a megfigyelt gazdasági helyzeteket lokálisan stabilis egyensúlyként próbálja magyarázni véges számú egyensúlyi ponttal rendelkező rendszerekben. Másrészt viszont, a kontinuum számosságú egyensúlyhoz vezető elmélet nyitott minden olyan kiegészítésre, amely a múltat és a véletlent is figyelembe veszi az éppen megfigyelt egyensúly magyarázatához. Ez a szervezetek gazdasági elméletét visszavezetheti azokhoz a régi institutionális és történelmi megközelítésekhez, amelyekből néhány évtizeddel ezelőtt kiszakadt.

10. Bibliográfiai jegyzetek

Jacob MARSCHAK a „Szervezet és az információ gazdasági elmélete felé” című tanulmányában (1954) terjesztett elő a szervezet-elméletre vonatkozó kutatási programot és egy későbbi írásában (MARSCHAK, 1955) definiálta a *team* egy speciális esetét. A későbbiekben Radner fejlesztette tovább a team-

elméletet (RADNER, 1961 és 1962), aki a statisztikai döntéseméletből vette át a bizonytalanság és az információ valószínűségelméleti megközelítését. Hasonló szellemű hozzájárulást köszönhetünk T. A. MARSCHAKnak (1959)-A team-elmélet szisztematikusan kidolgozása MARSCHAK—RADNER (1972) művéhez fűződik, ez bevezetést is ad az egyszemélyes döntéseméletbe és az információ-elméletbe. [Rövid összefoglalását lásd: RADNER (1972a). A 2. és a 3. fejezet RADNER (1972b) és GROVES—RADNER (1972) művein alapul.] Ez utóbbi két tanulmány a „nagy teamekben” megvalósuló forrásallokáció aszimptotikus elméletének néhány eredményét is tartalmazza, amelynek általánosítása és kiterjesztése megtalálható az alábbi művekben: ARROW—RADNER (1979), illetve GROVES—HART (1982). Ettől függetlenül WITSEN. HAUSEN (1968) fogalmazott meg és elemzett egy team-struktúrájú információt tartalmazó dinamikus vezérlés-elméleti problémát, amelyet HO-CHU (1974) és mások írásai követték.

Teljesen más megközelítésben HURWICZ (1960) kezdeményezte az információ decentralizáció szisztematikusan elemzését a bizonytalanságnak és az információknak nem valószínűségelméleti leírását használva, később pedig (HURWICZ, 1973) megmutatta, hogyan vezethetnek az érdekeltségi problémák az információszempontból decentralizált allokációs mechanizmus nem hatékony működéséhez. Másrészt viszont GROVES (1969, 1973) doktori disszertációjában az érdekeltség kérdését team-struktúrájú információ mellett vizsgálta és megmutatta, hogy bizonyos esetekben az igazmondás és a hatékony döntéshozatal megfelelő kompenzációs mechanizmusok segítségével elérhető. Ettől függetlenül CLARKE (1971) hasonló kompenzációs mechanizmust javasolt a közösségi javak ármegállapítására. Valójában ezt a típusú mechanizmust korábban már VICKERY (1961) is javasolta árverési modellekkel kapcsolatban.

A Groves—Clarke—Vickery-mechanizmusról már igen kiterjedt a szakirodalom, jó áttekintése található az alábbi művekben: GREEN—LAFFONT (1979) és GROVES—LEDYARD (1983).

A Groves által a disszertációjában elemzett modell egy egyperiódusú megbízó-üggyvivő modell tartalmazott speciális esetként, azonban tőle függetlenül mások is tanulmányozták az egyperiódusú megbízó-üggyvivő modellt: ARROW (1963, 1965), ROSS (1973) és MIRRELES (1974). ALCHIAN—DEMSZETZ (1972) a fenténél jóval kevésbé formális megközelítést alkalmaztak vállalatelméleti tanulmányaikban. A későbbi fejleményekről lásd: HURWICZ—SHAPIRO (1978), MAYERS—SMITH (1981), GROSSMANN—HART (1983) munkáit és a bennük található hivatkozásokat. (A terjedelmi korlátok miatt itt most nem tudok kitérni e terjedelmes irodalom egészére.) A megbízó-üggyvivő irodalom egy korai előfutárát tisztelhetjük SIMONban (1951).

A szuperjátékokban az egyensúlyi kifizető vektorok halmazának sajátosságait jól ismerjük a bizonyosság melletti ismételt játékok esetében, amelyekben (1) a játékosok meg tudják figyelni a többi játékos akcióját valamennyi egyperiódusú játék végén (tökéletes megfigyelés) és (2) a játékosok nem diszkontálják a jövőbeli hasznosságot („nincs diszkontálás”). Ebben az esetben a szuperjáték egyensúlyának várható utilitás-vektor halmaza ugyanaz, mint a lehetséges és egyénileg racionális kifizető vektorok halmaza az egyperiódusú játékban. (Ez az úgynevezett *Folk-tétel*.) Hasonló következtetések vonhatók le a szuperjátékok *tökéletes* egyensúlyival kapcsolatban. Ez a mélyebb eredmény AUMANN—SHAPLEY (publikálatlan) és RUBINSTEIN (1979b) tanulmányában megtalálható (hivatkozásokkal és kapcsolódó eredménnyel együtt).

A tökéletes megfigyelés esetét diszkontálás mellett eddig még nem tárták fel ennyire alaposan.

Sajnos, a tökéletes megfigyelést (többletköltség nélkül) az ismételt megbízó-üggyvivő játék információs struktúrája kizárja. A diszkontálás nélküli esetre RADNER (1981a) kimutatta, hogy eléggé hosszú ideig tartó, de véges megbízó-üggyvivő szuperjátékok esetén megközelítő hatékonyság érhető el a közéleti egyensúly segítségével. Speciális végtelen megbízó-üggyvivő szuperjátékokat elemzett hasonló szellemben, ismét csak a diszkontálás nélküli esetre RUBINSTEIN (1979a), valamint RUBINSTEIN—YAARI (1983). A végtelen diszkontált megbízó-üggyvivő szuperjátékról a 8.1. fejezetben található eredmény RADNER (1981b) művén alapul. Ezeket a gondolatokat alkalmazza (diszkontálás mellett) LINHART (1983) a közművek szabályozására. Ennek során azonban egyes állapotváltozók periódusról periódusra változnak, tehát a játék szigorúan véve nem ismételt. Ez a körülmény, ami feltehetőleg a legtöbb, alkalmazásnak a sajátja, mélyebb elemzést követelne meg, mint az ismételt játékoké.

A 8.2. fejezetnek az ismételt társulás-játékokra vonatkozó anyaga RADNER (1981c) művén alapszik a diszkontálatlan és RADNER—MYERSON—MASKIN (1983) közös művén a diszkontált esetre. Az egyperiódusú társulás-játékokkal kapcsolatos néhány kérdést HOLMSTÖM (1982) tárgyalt.

(Becérkezett: 1985. július 11-én.)

IRODALOM

1. ALCHIAN, A. A. and H. DEMSETZ: 1972, „Production, Information Costs, and Economic Organization”, *Amer. Econ. Rev.*, 62, 77—895.
2. ARROW, K. J.: 1963, „Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care”, *Amer. Econ. Rev.*, 53, 941—973.
3. ARROW, K. J.: 1965, *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*, Yrjö Johannssonin Saatio, Amsterdam.
4. ARROW, K. J. and R. RADNER: 1979, „Allocation of Resources in Large Teams”, *Econometrica*, 47, 361—385.
5. CLARKE, E.: 1971, „Multipart Pricing of Public Goods”, *Public Choice*, 11, 17—33.
6. DEMSKI, J. S. and G. A. FELDMAN: 1978, „Economic Incentives in Budgetary Control Systems”, *The Accounting Review*, 53, 336—359.
7. GREEN, J. and J. J. LAFFONT: 1979, *Incentives in Public Decision-Making*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
8. GROSSMAN, S. J. and O. D. HART: 1983, „An Analysis of the Principal-Agent Problem”, *Econometrica*, 51, 7—45.
9. GROVES, T.: 1969, „The Allocation of Resources under Uncertainty: The Informational and Incentive Roles of Prices and Demands in a Team”, *NSF Technical Report*, No. 1, Center for Research in Management Science, University of California, Berkeley (kézirat).
10. GROVES, T.: 1973, „Incentives in Teams”, *Econometrica*, 41, 617—631.
11. GROVES, T. and S. HART: 1982, „Efficiency of Resource Allocation by Uninformed Demand”, *Econometrica*, 50, 1453—1482.
12. GROVES, T. and J. LEDYARD: 1977, „Optimal Allocation of Public Goods: A Solution to the „Free Rider” Problem”, *Econometrica*, 45, 783—309.
13. GROVES, T. and J. LEDYARD: 1985, „The Allocation of Public Goods: An Overview”, in: T. GROVES et al. (eds), *Information, Incentives and Economic Mechanisms*, Univ. of Minn. Press, Minneapolis.
14. GROVES, T. and M. LOEB: 1975, „Incentives and Public Inputs”, *J. of Public Economics* 4, 211—226.
15. GROVES, T. and M. LOEB: 1979, „Incentives in a Divisionalized Firm”, *Management Science*, 25, 221—230.

16. GROVES, T. and R. RADNER: 1972, „Allocation of Resources in a Team”, *J. of Economic Theory*, 3, 415—44.
17. HO, Y. C. and K. C. CHU: 1974, „Information Structure in Dynamic Multi-Person Control Problems”, *Automatica*, 10, 341—351.
18. HOLMSTROM, B.: 1982, „Moral Hazard in Teams”, *Bell J. of Econ.*, 13, 324—340.
19. HURWICZ, L.: 1960, „Optimality and Informational Efficiency in Resource Allocation Process”, in: K. J. ARROW, et al. (eds), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, Stanford University Press, Stanford, Calif., pp. 27—46.
20. HURWICZ, L.: 1972, „On Informationally Decentralized Systems”, in: C. B. McGuire and R. Radner (eds), *Decision and Organization*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, pp. 297—336.
21. HURWICZ, L. and SHAPIRO: 1978, „Incentive Structures Maximizing Residual Gain under Incomplete Information”, *Bell J. of Econ.*, 9, 180—191.
22. LINHART, P. B., R. RADNER and F. W. SINDEN: 1983, „A Sequential Principal-Agent Approach to Regulation”, *Bell Laboratories Discussion Paper* (kézirat).
23. LOEB, M. and W. A. MAGAT: 1978, „Soviet Success Indicators and the Evaluation of Divisional Management”, *Journal of Accounting Research*, 16, 103—121.
24. MARSCHAK, J.: 1954, „Towards an Economic Theory of Information and Organization”, in: R. M. THRALL, et al. (eds), *Decision Processes*, Wiley, New York.
25. MARSCHAK, J.: 1955, „Elements for a Theory of Teams”, *Management Science*, 1, 127—137.
26. MARSCHAK, J. and R. RADNER: 1972, *Economic Theory of Teams*, Yale University Press, New Haven.
27. MARSCHAK, T. A.: 1959, „Centralization and Decentralization in Economic Organizations”, *Econometrica*, 27, 399—430.
28. MAYERS, A. B. and C. W. SMITH: 1981, „Contractual Provisions, Organizational Structure, and Conflict Control in Insurance Markets”, *J. of Business*, 407—434.
29. MIRRELES, J.: 1974, „Notes on Welfare Economics, Information, and Uncertainty”, in: BALCH et al. (eds), *Essays on Economic Behavior under Uncertainty*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
30. MYERSON, R. B.: 1983, „Bayesian Equilibrium and Incentive Compatibility: An Introduction”, *Discussion Paper No. 548*, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University, Evanston, Illinois.
31. RADNER, R.: 1961, „The Evaluation of Information in Organizations”, in: *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley, Vol. 1, pp. 491—530.
32. RADNER, R.: 1962, „Team Decision Problems”, *Annals of Mathematical Statistics*, 33, 857—881.
33. RADNER, R.: 1972a, „Teams”, in: C. B. McGuire and R. RADNER (eds), *Decision and Organization*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, pp. 189—215.
34. RADNER, R.: 1972b, „Allocation of a Scarce Resource under Uncertainty: An Example of a Team”, in: C. B. McGuire and R. RADNER (eds), *Decision and Organization*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, pp. 217—236.
35. RADNER, R.: 1981a, „Monitoring Cooperative Agreements in a Repeated Principal-Agent Relationship”, *Econometrica*, 49, 1127—1148.
36. RADNER, R.: 1981b, „Repeated Principal-Agent Games with Discounting”, *Bell Laboratories Discussion Paper*, Murray Hill, N. J., May 1981 (megjelenik az *Econometriában*.)
37. RADNER, R.: 1981c, „Optimal Equilibria in Some Repeated Partnership Games with Imperfect Information”, *Bell Laboratories Discussion Paper*, Murray Hill, H. J., May 1981 (kézirat.)
38. RADNER, R., R. MYERSON and E. MASKIN: 1983, „An Example of a Repeated Partnership Game with Discounting and with Uniformly Inefficient Equilibria”, *Bell Laboratories Discussion Paper*, Murray Hill, N. M., June 1983 (kézirat.)
39. ROSS, S.: 1973, „The Economic Theory of Agency: The Principal’s Problem”, *Amer. Econ. Rev.*, 63, 134—139.
40. RUBINSTEIN, A.: 1979a, „Offenses that May Have Been Committed by Accident — an Optimal Policy of Retribution”, in: S. J. BRAMS et al. (eds), *Applied Game Theory*, Physica-Verlag, Würzburg.
41. RUBINSTEIN, A.: 1979b, „Equilibrium in Supergames with the Overtaking Criterion”, *J. of Econ. Theory*, 21, 1—9.
42. RUBINSTEIN, A. and M. YAARI: 1983, „Repeated Insurance Contracts and Moral Hazard”, *J. of Econ. Theory*.

43. SIMON, H. A.: 1953, „A Formal Theory of the Employment Relationship”, *Econometrica*, 19, 293—305.
44. VICKREY, V.: „Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders”, *Journal of Finance*, 16, 8—37.
45. WITSENHAUSEN, H. S.: 1968, „A Counterexample in Stochastic Optimum Control”, *SIAM J. Control*, 6, 131—147.

DECENTRALIZATION AND INCENTIVES

This paper reviews some theories of economic decentralization, beginning with the theory of teams. Team theory is concerned with the efficient use of information in an organization in which different decision makers need not have identical information. Efficiency is evaluated in terms of an overall organizational goal or objective function, and explicit attention is not paid to the private incentives of the individual decision makers. After introducing the theory of teams, the paper goes on to review various incentive problems, including misrepresentation, moral hazard, and free riding. These problems, and proposed remedies, are discussed in more detail in a series of illustrations dealing with resource allocation, overhead activities, principal-agent and partnership relationships, and the reduction of moral hazard in long-term relationships. The paper concludes with some remarks about the possible implications of these theories for the design of economic organizations and for the explanation of organizational behavior.

ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ И ЗАИНТЕРЕСОВАННОСТЬ

В статье рассматриваются теории экономической децентрализации. Познакомив с основами групповой (team) теории, автор переходит к рассмотрению различных проблем, связанных с заинтересованностью, в том числе вопросам «зablуждений», «морального риска» и «паразитизма». Эти проблемы и их решение подробно освещаются на примерах, которые относятся к аллокации ресурсов, аллокации накладных расходов, отношений заказчика-исполнителя и объединений, а также того, как можно снизить моральный риск в прочных связях. Статья завершается выводами, которые могут быть полезными при планировании хозяйственных организаций, а также анализе поведения этих организаций.

A fizikai gazdaságtanról

(Neumann egyensúlyi modelljének félszázados évfordulójára)

Általános egyensúlyi modelljét bemutatva *Neumann János* megjegyezte:

„A $\Phi(X, Y)$ függvény közvetlen értelmezése rendkívül kívánatos volna. Szerepe hasonlóknak tűnik a fenomenologikus termodinamika termodinamikai potenciáljaihoz; feltehető, hogy a hasonlóság fennáll teljes fenomenológiai általánosságában (függetlenül a mi megszorító idealizálásainktól).”

E mondatokkal sokáig küszködtem. Az a magyarázat, amelyet végül is kiokoskodtam* nem biztosan Neumanné, bár amennyire ez megítélhető, nincs ellentétben nézeteivel.

A magyarázatnak három összetevője van:

1. a közgazdaságtan és a termodinamika közti izomorfizmus vázolása;
2. a marginalizmus és a munkaértékelmélet összefüggésének és ekvivalenciájának kimutatása;
3. a modell újszerű felállítása.

Neumann kémiai tanulmányait Berlinben *W. Ostwald* mellett folytatta, akit a fizikai kémia úttörőjeként tartanak számon, s aki *J. W. GIBBS* „Heterogén szubsztanciák egyensúlyáról” szóló [1875–8] alapvető értekezését németre fordította és népszerűsítette. Bizonyára nem véletlen, hogy a gibbsi elemzés két fontos eszközére felfigyelt, s hogy ezek messzemenően hatottak megközelítésmódja sajátos formájára.

Az első ilyen fontos eszköz a megengedett variációk (tehát erők, folyamatok vagy mozgások stb. megengedett kizavarásai egyensúlyukból) sajátos jellemzése *egyenlőtlenlégek*, nem pedig egyenlőségek révén. A második és ebből már következő eszköz az egyensúlyi pont vagy helyzet *max-min* kritériumokkal való leírása.

Az „egyenlőtlenlégek” e módszere kinyomozhatóan *GAUSS* [1829] művére vezethető vissza, akit Gibbs is megemlégett a későbbiekben, s tán *FOURIER* [1798] egy értekezésére. Az elv kétségtelenül *GIBBS* [1879] tanulmányában éri el tudatos és mesteri alkalmazását, matematikai kifejezését *FARKAS* [1901] csiszolta ki ma is használatos alakjára majd *HAAR* [1918] általánosította inhomogén lineáris egyenlőtlenlégekre. Valószínűleg egyik igen fontos forrása a modern nem-egyensúlyi termodinamikának is pl. *GYARMATHY* [1980] művében.

Persze a sajátos matematikai struktúra, amelyet Neumann a gazdasági probléma megfogalmazására és megoldására kiválasztott lehetett volna egy-

* Itt köszönöm meg fizikus kollégáim, *Martinás Katalin* és *Sajó Konstantin* segítségét, akik a termodinamika néhány fontos fogalmát és munkamódszerét megvilágították. A hibák azonban, amelyek ennek ellenére is fennmaradhattak, nekem tulajdonítandók.

holt munka összegezésével határozta meg. Az elmélet logikus és következetes volt és csak akkor vált homályossá és kitérővé, ha azt kérdezték, hogyan lehet a különféle konkrét munkát (a szabó, szakács, bányász, takács munkáját) egynemű „absztrakt” munkává összegezni, anélkül, hogy a piachoz fordulnánk tájékoztatásért.

A marginalizmus a kibocsátások oldaláról indult ki és az áruk értékét a révükön elért hasznos hatás, szükségletkielégítés mértékére vezette vissza. Ez is ellentmondásmentes elmélet volt, s csak akkor habozott, amikor az egyéni hasznosságokat kellett volna társadalmi méretben összegeznie. A válóperek növekvő száma mutatja, mily nehéz még két személy hasznossági térképét is egymással összebékíteni. Itt is az összegezés, integrálás, egyneművé tevés nehéz problémája az, ami az egyébként ellentmondásoktól mentes elmélet alkalmazását megnehezítette.

Mindkét paradigma tehát sebezhető volt és ráadásul még harcban is állt egymással. Történeti — és sok tekintetben kölcsönösen rosszszemű — vitájuk folyamán soha nem ismertek el egy szikrányi igazságot se a másik fél álláspontjából. A ráfordítások és kibocsátások kölcsönös függése, az ok és okozat kapcsolódása, a munka és a hasznos hatás egymást feltételező és módosító volta figyelmen kívül maradt. A két paradigma képtelen volt egymást áthatni.

Ehhez hozzájárult az, hogy módszertanilag is ellentétesek voltak: a munkaértékelmélet az egyensúly, a marginalizmus pedig az optimális eszméje körül építkezett. Kibékítésükhöz, együttes meghaladásukhoz, amely megőrzi és általánosítja azt, ami bennük igaz, egy új és átfogóbb szemléletre volt szükség.

Hasonló szemléletet dolgozott ki a fizikában EMMI NÖTHER, amikor szigorú bizonyítást adott arra, hogy a newtoni „egyensúlyi” és a d’Alemberti „optimalizáló” természetleírás matematikailag ekvivalens.

Neumann is, a gazdasági egyensúlyt modellezve, olyan új eszközt használt, amely egyszerre oldja meg az egyensúly és az optimalizálás feladatát a fizikában jól bevált *potenciálfüggvény* módszerével.

Az így létrehozott modell jól tükrözi mindkét elméletet: feltüntethető benne akárhány fajta konkrét munka és bármilyen fogyasztási szokás. Adatván a kiinduló adatok a modell maga határozza meg, hogy az „optimális egyensúly” esetében mely eljárásokat, technológiákat, munkafajtákat fogják felhasználni, mit és mennyit fognak termelni. Ez a modell primális megoldása, amely meghatározza a rendszer mozgását az állapottérben. Ugyanakkor a duális megoldás, az „intenzív” változók értéke olyan érték-, illetőleg árrendszert szolgáltat, amely megoldja az állapottér teljes rendezését, sőt mérését is.

A potenciálfüggvény alkalmazásának eszméje ismét Gibbstől eredhetett, bár gazdasági rendszerre való alkalmazása új sajátosságokat is mutat. A fizikában a potenciálfüggvény feladata az, hogy úgynevezett „erőteret” hozzon létre az állapottér minden pontjában. Az ilyen erőterben csak ott találhatóunk egyensúlyt, ahol az erők közömbösítik egymást, eredőjük zérus. Így egy Φ potenciálfüggvény által létrehozott erőterben az egyensúly feltétele a függvény parciális deriváljainak eltűnése, $\text{grad } \Phi = 0$, lesz.

De szabad-e egy ilyen potenciálfüggvény létezését feltételeznünk? Gibbs egyszerűen feltette, hogy létezik — az egzisztenciabizonyítás azonban sokkal későbbi és CARATHÉODORY [1909] érdeme. Azt hiszem a termodinamika sajátos nehézségei abból származtak, hogy egyensúlyfogalma szűkebb volt a gazdasági egyensúlyfogalomnál, kizárólag az extenzív makro-változók unalmas és egyhangú változatlansága fért vele össze (sokan termosztatikának is hívták

ezért). A gazdaságban eleve a változás, növekedés egyensúlyát keresték, amivel persze összefér, mint speciális körülmény a zérus növekedés, akár önhelyreállító állapotként (*Sraffa*) vagy egyszerű újratermelésként (*Marx*) definiálták.

A potenciálfüggvény

Neumann a potenciálfüggvény létezését szinte észrevétlen módon igazolja, bár egyben ez a lehető legerősebb matematikai tételezés, tudniillik konstruktív bizonyítás: felírja pontos alakját. A függvény csupán a már meghatározott és ismertnek tekintett ráfordítási és kibocsátási mátrixokra támaszkodik.

Ez a függvény, a már említett $\Phi(X, Y)$, ahol a termodinamika akkori szokásainak megfelelően, X az extenzív, Y az intenzív változók számára fenntartott jelölés. A gazdasági matematikában ma használatos szimbólumokkal élve

$$\lambda(p, x) = pAx/pBx \quad (1)$$

alakban írhatjuk fel. Itt p az árak, x a termelési mennyiségek vektora, B a ráfordítások, A a kibocsátások mátrixa. Az összes változó és együttható nem negatív. Ha kikötjük a számláló és a nevező pozitív voltát, e függvény nagyon jól viselkedik, se zérussá, se végtelenné nem válhat. Két pozitív bilineáris forma hányadosa folytonos függvénye minden változójának és együtthatójának. Ez a potenciálfüggvény a kibocsátást a ráfordításokhoz viszonyítja, a rendszer „termodinamikai” hatásfokát méri. Két oldalról is értelmezhetjük: jobbról, a mennyiségek oldaláról a lehetségesse váló fizikai növekedést mutatja, míg balról, az értékek oldaláról azt a pénzügyi megtérülést, amelyet a rendszer adott p árak és x mennyiségek mentén biztosít.

A potenciálfüggvény gradiensei megengedik viselkedésének elemzését:

$$\partial\lambda/\partial x = (pA - \lambda pB)/pBx. \quad (2)$$

Ez a kifejezés akkor és csak akkor nem pozitív, ha

$$pA \leq \lambda pB. \quad (2^*)$$

Mint gazdasági korlát ez azt jelenti, hogy a termelés bevétele, pA , kisebb vagy legfeljebb akkora, mint a termelés költsége, pB , utóbbit persze a kamat vagy profit egyöntetű π rátájával növelve, ahol tehát $\lambda = 1 + \pi$. Minden egyéb nyereség e profiton vagy kamaton kívül eleve ki van zárva. Ehhez a követelményhez még vissza kell térnünk, mert első látásra igen szokatlan, legalábbis a közgazdász számára. Az a további kikötés, hogy ha egy adott folyamat költségei (persze a szokásos kamattal vagy profittal számolva) nagyobbak, mint bevételei, akkor ezt a folyamatot meg kell szüntetni, ez már igen érthető gazdasági követelményt fejez ki, hiszen ha nem szüntetik be a veszteséges folyamatot, ez külső befektetés híján amúgy is megszünteti magát, mert végül is működésképtelenné teszi az elvesztegetett eszközök hiánya. Ha tehát valamely i . eljárásra a fenti (2*) egyenletben $<$ érvényesül, akkor nyilván $x_i = 0$, azaz a veszteséges eljárás elhagyandó.

Matematikailag az egyenlet azt mondja ki, hogy λ értékét nem lehet x semmilyen variációjával tovább növelni és ezért x szerint maximális lesz. (Erre

szolgál az a megkötés is, hogy $<$ érvényesülése esetén, amikor tehát x megfelelő elemének pozitív volta csökkentené λ értékét, ezt zéruson kell tartani.) Ez analóg Gibbs rendszerében az egyensúly első követelményével az entrópia maximálásával.

A parciális deriválást p szerint végezve viszont

$$\partial\lambda/\partial p = (Ax - \lambda Bx)/pBx, \quad (3)$$

és ez a kifejezés akkor és csak akkor nem negatív, ha

$$Ax \geq \lambda Bx. \quad (3^*)$$

Mint gazdasági korlát ez azt jelenti, hogy a termelés kibocsátása, Ax legalább akkora vagy nagyobb, mint a ráfordítása, Bx , utóbbit a növekedés egyöntetű π rátájával növelve, ahol ismét $\lambda = 1 + \pi$. Az elégtelen kibocsátás másképp megakadályozná a megfelelő ütemű bővítést. Ha azonban valamely termék fölösleges mennyiségben áll elő, akkor természetesen ára csökkenni fog, és ha a túlkínálat állandósul, akkor végül is zérussá válik. Ha tehát valamely j . termékre $>$ érvényesül az egyensúlyi megoldásban is, akkor $p_j = 0$, azaz a termék szabad jószággá válik.

Matematikailag az egyenlet azt mondja ki, hogy λ értékét nem lehet p semmilyen variációjával tovább csökkenteni és ezért p szerint minimális lesz. (Erre szolgál az a megkötés is, hogy $>$ érvényesülése esetén, amikor tehát p pozitív volta növelné λ értékét, ezt zéruson kell tartani). Ez analóg Gibbs rendszerében az egyensúly második követelményével, az energia minimálásával.

Mindebből arra következtethetünk, hogy az értéktöbblet variációja hasonló az energia variálásához és a terméktöbblet az entrópiához. Ezeknek az analógiáknak pontosabb megfogalmazása azonban a termodinamikai és gazdasági állapottér izomorfiájának további vizsgálatát követeli meg. Gibbs több potenciálfüggvényt is meghatározott, ezeket „fundamentális egyenleteknek” nevezte: az adiabatikus vagyis izentropikus potenciál mellett az izopiészitikus (változtatlan nyomású) és izotermiás (változatlan hőmérséklet melletti) potenciálfüggvényt is megalkotta. Bár a gazdaságban formálisan hasonló függvényeket lehet előállítani,¹ ez a megközelítés túlságosan új és még nem elfogadott.

Egy zavaró mozzanat maradt fenn. A maximum és minimum matematikai kikötései teljesen szimmetrikusak, gazdasági értelmezésük azonban nem. Igen meglepőnek találtuk, hogy minimálissá kell tenni a kamat vagy profit rátáját és ezért ki kellett zárni minden lehetséges nyereséget az átlagos rátán felül. A valóságos gazdasági élet látszólag nem így viselkedik és Neumann érvelése ezen a ponton nem teljesen érthető és meggyőző. Azt írja: „... az egyensúlyi helyzetben semelyik E_i eljárás nem lehet nyereséges (máskülönbön vagy az árak vagy a kamatláb növekedne — világos, hogy ezt az absztrakciót hogyan kell érteni).” Ez távolról sem világos, hiszen az egyensúlytalanságtól az egyensúlyhoz vezető úton egyes árak emelkednek ugyan, de másoknak csökkennie kell, az árak mozgása nem egyező előjelű — és különben is csak árárnnyokról és nem abszolút szintekről lehet szó.

¹ Ezt meg is kíséreltük a termodinamika első két főtételének gazdasági értelmezése révén. Lásd BRÓDY—MARTINÁS—SAJÓ [1985].

Mégis lehet magyarázatot adni és fenn lehet tartani a matematikai követelményt, de csak egy kevésbé nyilvánvaló és nem közvetlen a minimalizálásra vonatkozó megfontolás közbeiktatásával.

Ha azt akarjuk, hogy az egyensúlynak valaminő *stabilitása*, tehát időbeli megmaradása legyen, akkor ki kell kötni, hogy a valóban alkalmazott eljárások azonos profitrátát szolgáltatassanak. Az árak ugyanis intenzív változók, és a termodinamika szellemében ezeknek ki kell egyenlítődniök az egyensúlyi helyzetben — abban az értelemben, hogy egyforma profitrátát szolgáltatnak — másként a rendszer nem homogén, nem egyöntetű s akkor kiváltja a tőkeáramlást a magasabb profitrátájú eljárások felé. Ilyen áramlás esetében pedig stabil, tartós egyensúlyról nem lehet szó.

Mindezt a maximumelv a mennyiségek oldalán valóságos, igazi keresése a maximumnak, míg a duális oldal minimumelve egy álló helyzetben jelentkező stabilitási feltétel. Azt hiszem azonban ez sem mond ellent a termodinamikai párhuzamnak, ahol a rendszer minimális energiaszintjének kikötése szintén egyensúlyi követelmény és nem teleologikus vezérelv, míg az entrópia maximálásának eszméje és ténye jól követi Aristoteles tudatosan teleologikusan megfogalmazott törvényét: a természetben a dolgok a saját helyük elfoglalására törekednek.

Összefoglalás

A potenciálfüggvény, az egyenlőtlenségek és a max—min kritériumok alkalmazásával Neumann a termodinamika és a fizika modern eszközeit vezette be a gazdasági elméletbe. Sikere annak köszönhető, hogy a termodinamikai és a gazdasági állapotter közti hasonlóság igen mély, jól kiépíthető és kiaknázható. Ez azt jelenti, hogy a gazdaságelmélet axiomatikusan is megalapozható a modern fizika egyik ágaként.

E sorok szerzője a már ismert és eredményesnek bizonyult modellesaládon kívül további sikereket vár mind a termodinamika, mind a statisztikus fizika kínálta analógiáktól.

Nem szabad azonban megfeledkezni arról, hogy ez a szemlélet megáll a (kétségtelenül reális és mérhető) adatoknál, ezeket tekintve a végső adottságoknak. Ezeket az adatokat (technológiákat, ízléseket, preferenciákat) azonban lélektani, társadalmi, történeti és embertani törvényszerűségek befolyásolják és formálják. Mindez a fizikai gazdaságtan szemszögéből közömbösnek tűnik, de éppen ezzel szükségessé teszi a társadalomgazdaságtan fentebb említett oldalainak tüzetesebb kutatását. A fizikai gazdaságtan tehát — mint a termodinamika — csupán kerettörvényeket adhat meg, amelyeket konkrét szociológiai, pszichológiai, történeti, antropológiai vizsgálatokkal kell kitölteni.

(Beérkezett: 1986. április 30-án.)

IRODALOM

- A. BRÓDY—K. MARTINÁS—K. SAJÓ: An Essay in Macroeconomics. *Acta Oeconomica*, [1985.] Vol. 35. Nos 3—4.
 H. B. CALLEN: *Thermodynamics*. [1960.] J. Wiley.
 C. CARATHÉODORY: Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik. *Math. Ann.* [1909.] 67.

- DE DONDER—VAN RYSELBERGHE: *Affinity*. Stanford Univ. Press. [1936.]
- T. EHRENFEST-AFANASSJEW: Zur Axiomatisierung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. *Zschr. für Phys.* [1925.]
- GY. FARKAS: Theorie der einfachen Ungleichungen. *J. für reine u. angew. Math.* [1901.]
- I. FÉNYÉS: Die Anwendung der mathematischen Prinzipien der Mechanik in der Thermodynamik. *Zschr. für Phys.* [1952.]
- J. FOURIER: Sur la Statique. *I. de l'Ec.* [1798.] *Polyt.* II. An. VI.
- C. F. GAUSS: Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. *Cr. I.* IV. [1829.]
- J. W. GIBBS: On the Equilibrium of Heterogeneous Substances. *Trans. Conn. Acad.* III. [1875—1878.]
- J. W. GIBBS: Fundamental formulae of dynamics. *Amer. Jour. Math.* [1879.] Vol. 2.
- R. GILES: *Mathematical Foundations of Thermodynamics*. Pergamon Press, London. [1964.]
- I. GYARMATHY: *Non-equilibrium Thermodynamics*. Springer [1970.]
- A. HAAR: A lineáris egyenlőtlenségkről (On linear inequalities). *Mat és Termtud. Ért.*, [1918.] 36.
- I. PRIGOGINE—R. DEFAY: *Thermodynamique Chimique*. [1944.] Dunod.
- L. TISZA: The Thermodynamics of Phase Equilibrium. *Ann. of Phys.*, [1961.] 13.

ON THE PHYSICAL ECONOMY

In his paper written on the occasion of the fiftieth anniversary of Neumann's famous model the author attempts to interpret a remark by Neumann — not sufficiently appreciated to our days — pointing to the close relationship with the phenomenological thermodynamics. The paper sets out from the potential function borrowed from the armory of thermodynamics and by the use of its partial derivatives establishes the equilibrium conditions to which he then gives a new interpretation in economic terms. In the course of the exposition it becomes clear that the basic structures and problems of thermodynamics and economics are identical and that the two hitherto elaborated economic theories of measurement (the labour theory of value and marginalism) essentially coincide.

О ФИЗИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКЕ

В статье, написанной к 50-летию знаменитой модели Нейманна, автор пытается дать толкование одному, до сих пор не достаточно оцененному замечанию Нейманна, которое указывает на тесную связь с феноменологической термодинамикой. Поэтому автор исходит из заимствованного из арсенала средств термодинамики понятия потенциальной функции и с помощью частных производных устанавливает условия равновесия, которые по-новому рассматривает и с экономической точки зрения. В ходе изложения становится яснее тождественность термодинамики и основной структуры и проблематики экономики, а также совпадение по существу двух разработанных до сих пор теорий экономических измерений (теория трудовой стоимости и маргинализм).

A h -eloszlású osztott késleltetésű modell számítógép-intenzív becslése

Napjainkban kezd tért hódítani magának egy új irányzat az ökonometria becsléselemében. Ez az irányzat — valószínűségelméleti alapokról indulva — a matematikai statisztika és az ökonometria korábbi fejlődéséhez szükséges, de napjainkra már gyakran a továbbfejlődést gátló túlzott megkötések helyett a mintából kinyerhető információk jobb hasznosítására törekszik. Az irányzat fejlődését elsősorban a számítástechnikai lehetőségek javulása tette lehetővé. Szükségességét egyfelől a nagyobb elméleti igényességre és a nagyobb gyakorlati megalapozottságra törekvés hozta létre, másrészt, hogy egyre gyakrabban ütközött megoldhatatlan problémákba a becslési módszerek fejlődésével a klasszikus becsléselemélet.

A dolgozatban egy ebbe az irányzatba tartozó módszer, a *bootstrap*-módszer alkalmazását írom le. Minthogy tudomásom szerint Magyarországon elsőként alkalmazok ilyen módszert, az első részben röviden összefoglalom az irányzattal és annak eredményeivel kapcsolatos legfontosabb tudnivalókat. A második rész tartalmazza az alkalmazás leírását. A h -eloszlású osztott késleltetésű modell igen hasznos eszköze lehet a közgazdaságtanilag is megalapozott ökonometriai kutatásoknak, azonban a vele kapcsolatos becslési problémákat a klasszikus becsléselemélet nem tudta teljesen tisztázni. Most megkíséreltem a számítógép-intenzív becslési módszerek segítségével javítani a becslés használhatóságát. A harmadik fejezet néhány olyan következtetést tartalmaz, amely az elvégzett kísérletek nyomán érdemel figyelmet.

I. Számítógép-intenzív módszerek

1.1. A klasszikus becsléselemélet problémáiról

A matematikai statisztika és az ökonometria modelljeinek felépítésekor figyelembe veszi, hogy a modellhez létezik-e, kialakítható-e megfelelő, a statisztika bizonyos kritériumait kielégítő becslési eljárás. A modellek és a becslési eljárások vizsgálatakor minden, elméleti igényességre törekvő műben elsősorú kérdés az esztimátorok és a prediktorok statisztikai tulajdonságainak vizsgálata. A konkrét modelltípustól független kritériumrendszerekkel szokás szembesíteni az adott eljárást. A továbbiakban a két leggyakoribb kritériumrendszert és az ezeket kielégítő modellek szokott hipotéziseit mutatom be.

Az egyik kritériumrendszer központi kérdése a torzítatlanság. Az, hogy az adott esztimátor várható értéke éppen a becsülni kívánt paraméter-e, általában jól definiált, de nehezen eldönthető kérdés. Gyakran (konkrét modelltípustól

függően) szükséges hozzá a latens változók, illetve az adatsorok adott eloszlásának feltételezése. A klasszikus regressziós modell a latens változók normalitásának hipotézisével szokott élni. A modern többváltozós matematikai statisztika egyes modelljei (pl. a faktoranalízis) a változók együttes normalitását tételezik fel. Egyébként lehetséges más eloszlástípusok feltételezése is, de a statisztika — mint könnyen kezelhető eloszlástípus — a normális eloszlást szokta előnyben részesíteni.

A normalitás, illetve az adott más eloszlástípus feltételezése két érvre támaszkodhat. Az egyik érv egy olyan sztochasztikus folyamat vagy modell bemutatása, amely — statisztikai vagy szaktudományi ismeretekkel bizonyíthatóan — létrehozza az adott adatsort, jellemzi az adott változó alakulását, és a feltételezett eloszlást adja megoldásként. Ilyen megalapozása ezeknek a feltételezéseknek általában nincsen; néhány közgazdasági modellen kívül szinte egyeduralkodónak mondható a központi határeloszlás-tételre való hivatkozás. Ez a hivatkozás azonban nem tekinthető jogosultnak a tételben szereplő modell és a modellezni kívánt változó kapcsolatának bemutatása nélkül. Ez a kapcsolat az esetek nagyobbik részében bizonyíthatatlan.

A másik érv az lehet, hogy a felhasznált adatsor — bár nem tudjuk miért, de — adott (normális) eloszlású. Ennek a hipotézisnek a bizonyítása azonban megint csak meglehetősen nehéz. Egyrészt az alkalmazások többségénél a viszonylag rövid adatsor nem teszi lehetővé, hogy bizottsággal állíthassuk: ez az adatsor normális eloszlású és nem másfajta. Másrészt a vizsgálni kívánt adatsor gyakran csak a becslés elvégzése során áll elő (reziduumvektor), így vizsgálatuk a becslés elvégzéséhez nem szükséges, utána pedig kifejezetten zavaró lenne; ilyent nem szoktak elvégezni. Csak akkor kerül elő a kérdés, ha a becslés eredménye „szokatlan”, szemmel láthatóan hibás, mint pl. a *Heywood*-eset a faktoranalízisben.

PAIZS [9] tanulmányában az előző módszert kisminta-tulajdonságok vizsgálatára tekinti alkalmasnak, míg egy másik kritériumrendszert nagyminta-tulajdonságok vizsgálatával hoz kapcsolatba. Megemlíti, hogy „A ... módszerekkel nyerhető paraméterbecslések nagyminta-tulajdonságai (aszimptotikus torzítás, aszimptotikus hatásosság, konzisztencia, aszimptotikus eloszlás) analitikus (deduktív) úton meghatározhatók és jól ismertek, *viszonylag kevés ismerettel rendelkezünk azonban kisminta-tulajdonságaikra ... vonatkozóan.* A kisminta-tulajdonságok ... vizsgálatának *analitikus (deduktív) útja* nehezen járható és eddig jelentős erőfeszítések ellenére is kevés eredményre vezetett.”

A nagyminta-tulajdonságok vizsgálata azzal a feltételezéssel él, hogy az idősorok végtelen hosszúságúak, illetve végtelen hosszúságúra meghosszabbíthatók. Alapkérdés a konzisztencia. A statisztikai — ökonometriai modellek ugyanakkor valamilyen formában feltételezik a struktúra stabilitását. A standard ökonometriai modellben ez a paramétermátrixok és véletlen változók momentummátrixainak állandóságát jelenti; egyes esetekben emellett újra megjelenik a normalitás hipotézise.

Idősorok vizsgálatakor ez a két feltétel szinte óhatatlanul szembekerül egymással. Éves ökonometriai modelleknél például nagyon nehéz elképzelni, hogy a gazdálkodó alanyok viselkedésmintái, így a strukturális forma paramétermátrixai változatlanok maradjanak egy alapvető gazdasági reformnak vagy egy fejlettségi szint átlépésének esetén is. Felgyorsult korunkban ez szinte bizonyosan bekövetkezik, legkésőbb minden tíz-tizenötödik évben. Ilyenkor adatsorok vesztek el értelmüket és ennek megfelelően mérésük is

lehetetlenné vagy értelmetlenné válik; gazdálkodó egységek születnek és tűnnek el, gyakran a gazdaságban tevékenykedő egyedek számának nagyságrendjét is megváltoztatva. Több lehetséges megoldás is van ilyenkor, ezek azonban — véleményem szerint — korántsem kielégítőek.

Át lehet térni negyedéves adatokra. Ez azonban többnyire kikényszeríti az éves modell közgazdasági összefüggéseinek gyökeres átalakítását, alapvető változók — pl. vállalati vagy népgazdasági mérlegadatok — elhagyását, kevéssé kielégítő más adatokkal való helyettesítésüket, esetleg az egész modell közgazdasági kiindulópontjának megváltoztatását. Gyakori ilyenkor a közgazdasági hipotézisek helyettesítése statisztikai összefüggésekkel, illetve szükségessé válhat olyan finom struktúrák ábrázolása, amelyekben egyes igen rövid távon ható tényezőknek — pl. divat, időjárás — szerepe meghatározó; így esetleg visszajutunk az eredeti problémához.

Másik lehetőség a keresztmetszeti adatok használata. Itt is adódnak azonban problémák. Egyrészt, ilyenkor az előrejelzés inkább az „átlagos gazdálkodó alanya”, semmint a következő évre vonatkozhat. Az összefüggések alapvető megváltozása ilyenkor is felléphet. Sokváltozós statisztikai modelleknek az adatsorokra vonatkozó normalitás-hipotézise pedig szinte bizonyosan nem teljesül.

Egy harmadik lehetőség a paramétermátrixok változatlanóságának feloldása. Ez a változás kétirányú lehet: egyrészt lehet valószínűségi jellegű, amikor a paramétermátrix egy másik — valószínűségi jelleget is magában hordozó — struktúra függvényében alakul, másrészt lehet a minta particionálására alapuló (disequilibrium-modellek, szakaszos regresszió modellek stb.). A második esetben a minta particionálása lehet külső információon alapuló, illetve a mintából következő is. A felsoroltak túlnyomó többségében láthatóan visszatér a stabilitás: stacionér sztochasztikus folyamatoknak, „magasabb rendű”, de szintén konstans paramétermátrixoknak, illetve stabilitást „teremtő” külső információknak a formájában. A mintából következő particionálás pedig mind ez ideig nagyrészt megoldatlan problémákkal küzd (ez egyébként sok más felsorolt módszer esetében is gátolja ennek az útnak a választását). [8]

Végeredményben tehát általánosan kimondható: nem fenyeget minket az a „veszély”, hogy a mintaelemszám végtelenné válik. A gyakorlatban felmerülő problémák jó részénél tehát az aszimptotikus tulajdonságok vizsgálata nem helyettesítheti a kisminta-tulajdonságok elemzését.

1.2. Egy egyszerű példa

A továbbiakban egy példán mutatjuk be a klasszikus és a számítógép-intenzív becslési módszereket. Az összehasonlíthatóság érdekében ugyanazon a modellen és ún. alapbecslésen fogjuk felépíteni őket, amely a jelen esetben egy egyszerű regressziós modell legkisebb négyzetek módszerével számított becslése; természetesen — értelemszerű módosításokkal — tetszőleges modell alapbecslésére alkalmazhatók.¹

¹ A továbbiakban használatos jelölések:

latin betűk jelölik az elméleti modell változóit és adatsorait;

görög betűk jelölik az elméleti modell paramétereit;

grotzesk betűk jelölik az alapbecslés modelljének változóit, adatsorait és paramétereit;

félkövér szedés jelöli a vektorokat, ill. mátrixokat;

Alapbecslés

Tegyük fel, hogy adott egy T elemű minta két, mérhető és megfigyelhető változóra: \mathbf{x} és \mathbf{y} . Tételezzük fel, hogy a két változó között olyan kapcsolat van, amelyet a következő modell jellemez:

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad (1.1)$$

ahol:

\mathbf{u} a latens változó nem megfigyelhető adatsora, α paraméter. Tegyük fel továbbá, hogy $E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, $E(\mathbf{u}'\mathbf{u}) = s^2$. Válasszuk a legkisebb négyzetek módszerét alapbecslésnek. A módszer az α paraméterre, amellyel kapcsolatban becslési feladat merül fel, a következő esztimátort szolgáltatja:

$$\hat{\alpha} = (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{y} \quad \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \hat{\alpha}\mathbf{x}, \quad (1.2)$$

amelyről bizonyítható, hogy torzítatlan, konzisztens,

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha, \quad E((\hat{\alpha} - \alpha)^2) = s^2(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1} \quad (1.3)$$

Nézzük most végig, hogy a különböző módszerek, a legkisebb négyzetek elvén működő alapbecslést használva, hogyan adnak becslést az α paraméterre, feltéve, hogy rendelkezésre áll egy T elemű minta: \mathbf{x} és \mathbf{y} , és a modell feltevésünk szerint:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \alpha \mathbf{x} + \mathbf{u}, & E(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} \\ E(\mathbf{u}\mathbf{u}') &= \sigma^2 \mathbf{I}_T. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Klasszikus alkalmazás I.

A. fázis: $\mathbf{x} := \mathbf{x}$, $\mathbf{y} := \mathbf{y}$, $\hat{\alpha}_1 := \hat{\alpha}$, $\hat{\mathbf{u}} := \hat{\mathbf{u}}$, $T = T$.
Torzítatlan becslést adunk σ -ra:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} (\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}})}. \quad (1.5)$$

B. fázis: Feltesszük, hogy \mathbf{u} eloszlása normális. Ekkor bizonyítható, hogy $\frac{\hat{\alpha}_1 - \alpha}{\hat{\sigma}}$ eloszlása Student-féle t -eloszlás $T - 1$ szabadságfokkal. Most meghatározzuk azokat a $\vartheta(\alpha) = \hat{\sigma} t_{T-1} + \alpha$ valószínűségi változókat (t_{T-1} Student-féle t -eloszlást követ, $T - 1$ szabadságfokkal), amelyekhez olyan (legszűkebb) intervallum tartozik, amelybe eső értékeket a $\vartheta(\alpha)$ valószínűségi változó adott (pl. 95%-os) valószínűséggel vesz fel, és amely tartalmazza $\hat{\alpha}_1$ -t. Ezek bármelyike lehet a kérdéses becslőfüggvény, így hát bármelyik várható értéke lehet α (a valóságban természetesen csak az egyiké). Ezen valószínűségi változók segítségével adunk ún. konfidenciaintervallumot vagy $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1$ pontbecslést α -ra.

kalap ($\hat{\cdot}$) jelöli a becsült paramétereket;
definiáló egyenlőségjellel ($:=$) teremtjük meg a kapcsolatot két szám között, ha a bal oldalon álló a jobb oldalon álló értékét veszi fel.

Megjegyzés: Az eljárást a B. fázis szigorú megszorító feltételezése nélkül is el lehet végezni. A normalitás hipotézise nélkül is, a Csebisev-egyenlőtlenség alapján számíthatnánk konfidenciaintervallumot α -ra. Ez a becslés azonban gyakorlati alkalmazásokban kezelhetetlenül rossz hatékonyságú² lenne.

Klasszikus alkalmazás II.

A. fázis: $\mathbf{x} := \mathbf{x}$, $\mathbf{y} := \mathbf{y}$, $\top = T$, $\hat{\alpha}_1 := \hat{\alpha}$, $\hat{\mathbf{u}} := \hat{\mathbf{u}}$. (1.6)

B. fázis: Feltesszük, hogy T nagy: $T \rightarrow \infty$. Ekkor bizonyítható, hogy $\hat{\alpha}_1$ aszimptotikus eloszlása normális.

Most meghatározzuk azokat a $\vartheta(\alpha) \sim N\left(\alpha, \frac{1}{T} \mathbf{u}' \mathbf{u}\right)$ valószínűségi változókat,

amelyekhez olyan (legsűkebb) intervallum tartozik, amelyekbe eső értékeket a $\vartheta(\alpha)$ valószínűségi változó adott (pl. 95%-os) valószínűséggel vesz fel, és amely tartalmazza $\hat{\alpha}_1$ -t. Ezek bármelyike lehet a kérdéses becslőfüggvény, így hát bármelyik aszimptotikus várható értéke lehet α . Ezen valószínűségi változók segítségével adunk konfidenciaintervallumot vagy pontbecslést α -ra.

Megjegyzés: Mint arról az előző fejezetben is szó volt, a $T \rightarrow \infty$ eset igen ritka, és a módszer nem nyújt kellő információt $T \ll \infty$ esetre.

Véletlen részminták módszere

A P. C. *Mahalanobis* által 1946-ban kidolgozott módszert a kézikönyvek [5] többnyire speciális mintavételi eljárásaként mutatják be, kitérve becslésméleti vonatkozásokra. Annak, hogy itt mégis becslési eljárásaként kerül tárgyalásra, az az oka, hogy — mint látni fogjuk — alap gondolata alapján méltán tarthatjuk a továbbiakban bemutatásra kerülő módszerek ősének.

A. fázis: Osszuk fel a T elemű mintát véletlen módon S egyenlő³ részre!

Jelöljük az i -edik $\frac{T}{S}$ elemű részmintát $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ -vel. Mindegyik részmintára végezzük el S -szer az alapbecslést:

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{y} := \mathbf{y}_i, \quad \top = \frac{T}{S}, \quad \hat{\alpha}_i := \hat{\alpha} \quad i = 1, 2, \dots, S (S \ll T) \quad (1.7)$$

B. fázis: Feladatunk, hogy meghatározzuk azokat a $\vartheta(\alpha)$ valószínűségi változókat, amelynek realizációi lehetnek az $\hat{\alpha}_i$ értékek. Bármely feltételezést tesztelhetünk (pl. χ^2 -próbával).

$\hat{\alpha}$ pontbecslés előállításához általában elegendő a kapott eloszlás valamely középértékének, általában az empirikus várható értéknek (átlagnak vagy pl. a módusznak) a meghatározása. Intervallumbecslést is előállíthatunk empirikusan, a hisztogram alapján.

² Normalitás feltételezése esetén a konfidenciaintervallum hossza a szórás négyszerese, a feltevés nélkül a Csebisev-egyenlőtlenség alapján 9,4-szerese.

³ A nem egyenlő elemszámú részmintákkal, valamint az előzetes információ felhasználásával számítható optimális S kiválasztásával kapcsolatban az olvasó a kézikönyvekben találhat útmutatást.

Megjegyzés: A módszer látható előnye a klasszikus eljárásokhoz képest, hogy a B. fázist hisztogram segítségével, erőszakolt vagy irreális feltételezések bevezetése nélkül hajtottuk végre. Lényegesen biztosabban tudunk eloszlást illeszteni S realizációra, mint egyre. Ez az előny azonban nagyon „törékeny”. Egyrészt, ha S viszonylag nagy T -hez képest, az egyes $\hat{\alpha}_i$ mintaelemek statisztikai stabilitása lesz kicsi, mert az egyes becslésekhez tartozó adat-sor hossza túlzottan lecsökken. Másrészt, ha S túlzottan kicsiny, az eloszlás illesztése és a statisztikai jellemzők becslése lesz bizonytalan az S elemű mintából.

Jackknife-módszer⁴

A *Quenouille* és *Tukey* által az ötvenes évek közepén kifejlesztett, később jackknife-nak nevezett módszer a Mahalanobis-módszer „komplementumaként” könnyen érthető.

A. fázis: Összük fel a T elemű mintát véletlen módon S egyenlő részre.

Jelöljük az i -edik $\frac{T}{S}$ elemű részminta elhagyásával kapott „komplemententer” részmintát rendre \bar{x}_i, \bar{y}_i -vel. Végezzük el az alapbecslést a következő módon: ($S + 1$ -szer)

$$\text{egyrészt: } \mathbf{x} := \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} := \mathbf{y}, \quad T = T, \quad \bar{\alpha} := \hat{\alpha} \quad (1.8)$$

$$\text{másrészt: } \mathbf{x} := \bar{\mathbf{x}}_i, \quad \mathbf{y} := \bar{\mathbf{y}}_i, \quad T = \frac{(S-1)T}{S}, \quad \hat{\alpha}_i := S\bar{\alpha} - (S-1)\hat{\alpha},$$

$$i = 1, 2, \dots, S(S \leq T)$$

B. fázis: Megegyezik a véletlen részminták módszerének II. fázisával.

Megjegyzés: A véletlen részmintákhoz képest előnyös, hogy S megközelítheti, sőt el is érheti T -t, nem fenyeget az egyes mintaelemek esetlegessé válása. A T -t mint abszolút korlátot azért még mindig nem tudtuk áttörni. 20–50 elemből álló mintára, mint ami gyakran a tényleges helyzet, még mindig igen bizonytalan eloszlást illeszteni. A második probléma, hogy az $\hat{\alpha}_i$ mintaelemek nem függetlenek, nem ennyire zavaró. Egyrészt, a mintaelemek közel függetlenek; másrészt, idősoros modellezéskor a függetlenség általában az eredeti modellben sem áll fenn. Késleltetett változók esetén a módszer alkalmazása megköveteli végső forma előállítását.

Bootstrap-módszer⁵

Az *EFRON* [4] által 1979-ben javasolt módszer felhasználási lehetőségei még az előzőekénél is szélesebbek, a most közölt variáns azonban szűkebb az eredetinél⁶: elsősorban regressziós becslésekre dolgozták ki, és csak olyan alapbecslésre alkalmazható, amely reziduumvektort állít elő.

⁴ Jackknife (angol) jelentése: többpengéjű zsebkés, bicska.

⁵ Bootstrap (angol) jelentése: cipő füle. Az elnevezés egy magyarban visszaadhatatlan szójátékra utal. By one's own bootstraps hozzávetőleges jelentése: önerőből, lehetetlen helyzetből is (kivágja magát).

⁶ A módszer általánosabb változatait a jackknife-módszerek kapcsán fejlesztették ki. Ebben az általánosabb formában a jackknife felfogható, mint a bootstrap lineáris approximációja.

A. fázis: Végezzük el először a becslést a következő módon:

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} := \mathbf{y}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{a}} := \hat{\mathbf{a}}, \quad \bar{\mathbf{u}} := \hat{\mathbf{u}}. \quad (1.9)$$

Majd S -szer, különböző \mathbf{P}_i véletlen mátrixok segítségével, ahol a mátrix sorai függetlenül, véletlenül (visszatevéssel) választott egységvektorok:

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} := \bar{\mathbf{a}}\mathbf{x} + \mathbf{P}_i\bar{\mathbf{u}}, \quad \text{és legyen } \hat{\mathbf{a}}_i := \hat{\mathbf{a}}. \quad (S \ll T^T) \quad (1.10)$$

B. fázis: Megegyezik a véletlen részminták módszerének II. fázisával.

Megjegyzés: A T^T általában már nem jelent korlátot; jóval alatta maradni az azonos elemek elkerülése végett érdemes. Ha viszont T nagyon nagy, a becslést gyorsítani lehet azáltal, ha az egyes $\hat{\mathbf{a}}_i$ -k kiszámításakor a minta (véletlenszerűen kiválasztott) részét elhagyjuk. A számításgigényt egyszerűsítő számítástechnikai megoldásokkal nagymértékben lehet csökkenteni: a jelenlegi példánál maradva, az $(\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'$ vektor előállítására, amely az alapbecslés egyetlen nagyobb számításgigényű feladata, csak egyszer van szükség, ez a vektor a becslés folyamán mindvégig változatlan marad. A késleltetett változókat tartalmazó modellre az eljárást értelemszerűen módosítani kell.

1.3. Számítógép-intenzív módszerek alkalmazása

Az előbb bemutatott módszerek elvileg természetesen bármilyen alapbecslési eljárással használhatók. A felsorolás sem teljes: inkább a módszerek logikus sorbaállítására törekedtem. Ugyanakkor már a módszerek rövid ismertetéséből is látszik, hogy az utóbbi három — a továbbiakban *számítógép-intenzív* módszereknek nevezett⁷ — módszer számításgigénye sokszorosa az első kettőnek („klasszikus” módszereknek), esetenként azt egy nagyságrenddel is meghaladhatja. (Bár az alapbecslés egyszeri elvégzéséhez képest bekövetkező számításgigény-növekedés megfelelő számítástechnikai megoldásokkal, az alapbecslés speciális tulajdonságainak kihasználásával, általában a minimálisra csökkenthető.)

A módszerek megérdemlik a „számítógép-igényes” nevet is, így hát jogosan vetődik fel a kérdés: mi szükség van rájuk? A kérdésre válaszolva a módszerek három előnyös tulajdonságát sorolhatjuk fel — azon túl, hogy mint a szokásostól elütő módszerek, gazdagítják az ökonometria-elmélet fegyvertárát:

— Először, egy elméleti jelentőségű vonása a módszereknek, hogy ahelyett, hogy a becslés B. fázisában különféle hipotéziseket — normalitás, $T \rightarrow \infty$ — tennénk fel, majd a B. fázisban ezen hipotézisek ellenőrzéséről „feledkeznénk meg”, az A. fázisban — az előzőekben említett hipotézisek nélkül — több munkával ugyan, de a B. fázisban juthatunk a klasszikus módszerekkel egyező „erejű” eredményekhez. Szokás egyfajta „információ-megmaradási” törvényre hivatkozni. Nos, a klasszikus és a számítógép-intenzív módszerek közti különbség abban rejlik, hogy a klasszikus módszerek több információt használnak fel, külön hipotézisek formájában, mint a számítógép-intenzív módszerek; ugyan-

⁷ Szokásos még a *quasi-sampling* vagy *resampling* elnevezés is, a másodlagos mintakiválasztásra célozva.

akkor a mintából felhasználható információkkal pazarló módon bánnak, nem vizsgálják, hogy a hipotézisek alátámaszthatóak-e, így az előzővel azonos mennyiségű információt „elpazarolnak” a mintabeliből. Amennyiben tehát a klasszikus módszerek hipotéziseiket az adott minták alapján értékelik, a két módszeresalád azonos információmennyiséget használ fel, információértékük is azonos.

— Másodsor, az említett számítógép-intenzív módszerek párhuzamosan alkalmazhatók a klasszikus módszerekkel. Adott esetben bizonyítható, hogy ha pl. az alapbecslés konzisztens (II. klasszikus módszer), akkor a módszer jackknife-változata is konzisztens, de kismintabeli torzítása csökken. [10]

— Harmadsor, s ez a jelen tanulmányban a legfontosabb tulajdonság: ezek a számítógép-intenzív módszerek „mindig” alkalmazhatóak (bár természetesen lehetséges, hogy alkalmazásuk nem lesz eredményes). Ez a klasszikus módszerekről, a klasszikus kritériumrendszerekről nem mondható el. A modellek és a becslési eljárások jelentős részében nem tudjuk analitikusan meghatározni a becslőfüggvény eloszlását, sőt: leghasznosabb esztimátorainkról ki szokott derülni, hogy bizonyíthatóan torzítottak. A nagyminta-tulajdonságokat sem könnyű levezetni, speciális nagyminta-hipotéziseket kell bevezetni, és gyakran még ezek sem elegendők: a nagyminta-tulajdonságok sem meghatározhatók. [3]

A számítógép-intenzív módszerek segítségével pontbecslésekből intervallum becsléseket, becslő eloszlásokat lehet előállítani. Ha szélesen értelmezzük a pontbecslés fogalmát, akkor idetartozik a bonyolult nemlineáris statisztikai módszerek túlnyomó többsége is. Ezekkel a módszerekkel lehet pl. egy faktor-analízis vagy egy sokdimenziós skálázás eredményét valószínűségi jellemzőkkel ellátni, a faktormodell vagy a klaszterstruktúra stabilitását ellenőrizni. A módszerek tért hódítanak a pooling és az egyensúlyvizsgálatok területén, vizsgálták nemlineáris eljárások tesztjeit, alkalmazták a diszkriminancia-analízis, a hányadosbecslés stb. területén is. [1], [2], [4]

Összefoglalva tehát azt mondhatjuk: a modern számítástechnika mindenki által elérhetővé tett egyes bonyolult becslési eljárásokat. Ezeknél az eljárásoknál régebben esetleg a megoldhatóság érdekében kényszerültek olyan feltevésekre, amelyek — mint az a tömeges alkalmazás nyomán ma már mindinkább világossá válik — a gyakorlatban általában irreálisak, nem állnak fenn. Így sokszor teljesen félrevezető eredmények születhetnek. A számítástechnika azonban nem csupán megteremtette a felületes, téves alkalmazás lehetőségét: eszközt is adott a felmerülő veszélyek elkerülésére. Ezek az eszközök az előzőekben vázolt számítógép-igényes módszerek.

Érdeemes kitérni a számítógép-intenzív módszerek és a Monte Carlo eljárások kapcsolatára is. Kétségtelenül vannak rokon vonások, mint a számítógép-igényesség vagy a sztochasztikus jelleg. A különbség azonban alapvető eltéréstől fakad. A Monte Carlo eljárás adott struktúrához adott valószínűségeloszlásból vett „zavarással”, latens változók generált értékeivel generál nagyszámú mintát, a minták segítségével adott becslés („alapbecslés”) sztochasztikus tulajdonságait vizsgálja — adott struktúra (és adott exogén adatsor) esetén. A számítógép-intenzív becslési módszerek adott mintából számítanak becsült struktúrákat, és ha ehhez latens változók értékeit fel is használják (bootstrap-

módszer), ezek az értékek sem generáltak, hanem a mintából származnak. Összefoglalva: a Monte Carlo vizsgálatok a becslések *általában vett* tulajdonságainak, a számítógép-intenzív módszerek pedig a becslések *adott mintán vett* tulajdonságainak meghatározását célozzák.

Meg kell jegyezni, hogy a bootstrap-módszert mint a valóságos mintaelemeneken végzett Monte Carlo vizsgálatot is szokás emlegetni. [1], [4]

2. A h -eloszlású osztott késleltetésű modell és becslése

2.1. A modell és az alapbecslés

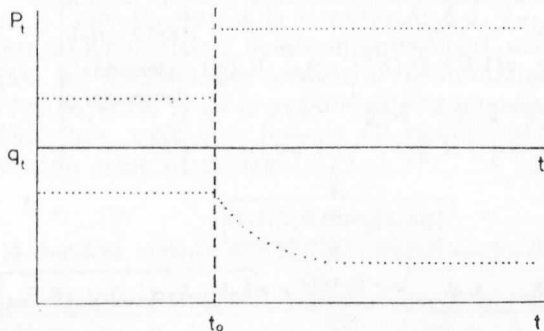
Az ökonometriai modellekben szereplő alapszituációk egyike a késleltetett alkalmazkodás. Tegyük fel pl., hogy egy termék ára és az iránta megnyilvánuló kereslet fordítottan arányos, de az ár megváltozása után a kereslet nem tud azonnal végleges (pl. egyensúlyi) szintjére beállni, az igazodás a megváltozott körülményekhez (jelen példában az árszinthez) csak több, egymást követő periódusban tud teljes egészében végbemenni. Ilyen igazodást mutat az 1. ábra is, ahol q_t a kereslet, p_t a termék ára adott t időpontban. A t_0 időpontban bekövetkező áremelés hatására részleges keresletcsökkenés következik be. Az új szintnek megfelelő egyensúlyi helyzet azonban csak lassan, fokozatosan jön létre.

A folyamatot a következő függvénnyel szokták leírni:

$$q_t = \alpha_0 p_t + \alpha_1 p_{t-1} + \alpha_2 p_{t-2} + \dots + \alpha_n p_{t-n} + u_t, \quad (2.1)$$

u_t véletlen változó.

Az egyenlet becslése több, itt nem részletezett problémát is felvet, amelyek megoldására sok könnyen kezelhető, jól illeszkedő módszert dolgoztak ki. [8] A modellel kapcsolatos másik probléma, az összefüggés közgazdasági interpretációja azonban jórészt megoldatlan, a becslési módszerek általában elméletileg nehezen indokolható megkötéseket alkalmaznak. A leggyakrabban felsorolt okok között a viselkedés rugalmatlansága, „súrlódás”, a döntéshozatal módjával összefüggő tényezők vannak. Elméletileg megalapozott, bár sajnos nem minden esetre alkalmazható modellek találhatók a beruházási javak vagy az adaptív várakozások tárgykörében.



1. ábra

HUNYADI [7] osztott késleltetésű modelljét egy információ-terjedési folyamat alapján építette fel. Az előzőekben említett példánál maradva, feltehető, hogy egy adott népességben (pl. egy országban) egy árváltozásról szóló hír „szájról szájra” terjed, az információ terjedésének sebessége van, belső szabályai, meghatározható és nyomon követhető lefolyása van. A folyamat rokon pl. egy járvány lezajlásával. A „hólabda”-folyamatot Hunyadi elemezte először részletesen, ő állította elő az általa generált h -eloszlást [6], és ugyancsak ő alkalmazta először az említett folyamatra.

A hólabda-eloszlás képlete – legegyszerűbb formájában – a következő:

$$z_t = 1 - \lambda^{(2^t)}, \quad (2.2)$$

ahol z_t azok részaránya a t -edik időpillanatban, akik rendelkeznek az adott információval, a λ paraméter pedig arra utal, hogy az adott információval a népesség mekkora része nem rendelkezett a folyamat kezdetekor. (Nyilván $0 \leq \lambda < 1$, $0 \leq z_t \leq 1$.) Ebből vezethető le a (2.1.) modell konkrét, becslésre alkalmas formája:

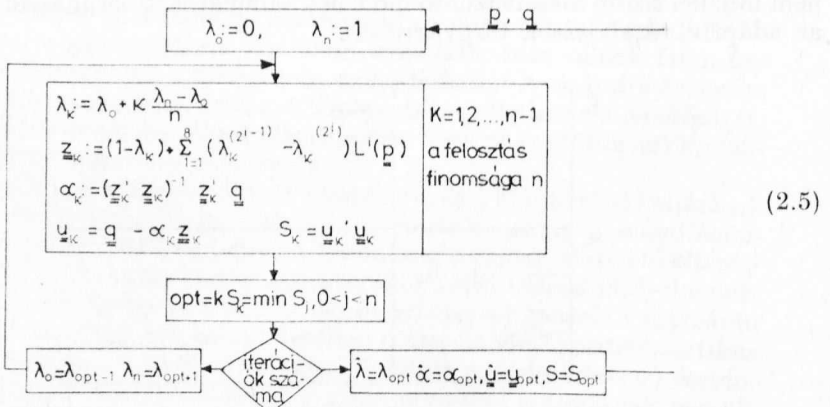
$$q_t = \alpha \left[(1 - \lambda) p_t + \sum_{i=1}^N (\lambda^{(2^{t-1})} - \lambda^{(2^i)}) p_{t-i} \right] + u_t \quad (2.3)$$

$0 \leq \lambda < 1$, $N = \infty$, u_t véletlen változó, $E(u_t) = 0$,
vagy vektoralakban:

$$\mathbf{q} = \alpha \left[(1 - \lambda) \mathbf{p} + \sum_{i=1}^N (\lambda^{(2^{i-1})} - \lambda^{(2^i)}) L^i \mathbf{p} \right] + \mathbf{u}, \quad (2.4)$$

$0 \leq \lambda < 1$, $N = \infty$, \mathbf{u} véletlen vektorváltozó,
 $E(\mathbf{u}) = 0$, L a késleltetés (lag)-operátor.

A becslés bonyolult feladat: erősen nemlineáris a paraméterekben (hiszen pl. a két paraméter szorzata szerepel benne), a becslést végtelen sorból kell elvégezni. Ez utóbbi problémát egyszerűbb megoldani, ui. az eloszlás tulajdonságaiából adódóan $N \geq 8$ esetén a becslés már gyakorlatilag független N -től. Az első probléma azonban az N -ben valamilyen nemlineáris eljárás alkalmazását feltételezi.



2. ábra

Hunyadi scanning-típusú becslési eljárása azt a körülményt használja ki, hogy λ egy jól meghatározott intervallumon belüli értékeket vehet csak fel. A becslés folyamatábráját a 2. ábrán láthatjuk.

A becslés láthatóan nemlineáris legkisebb négyzetek módszere. Részletesebb leírását, általában a modell bővebb tárgyalását [7a] és [7b] tartalmazzák. Témánk szempontjából fontos azonban az említett tanulmányok néhány következtetése:

1. Az eloszlást zárt alakban előállítani, a becslés analitikus tulajdonságait megadni (terminológiánk szerint: az alapbecslést klasszikus keretekbe helyezni) mind ez idáig nem sikerült. A becslőfüggvények eloszlásának, a konfidencia- és a toleranciaintervallumoknak az előállítása nem sikerült. Az alapbecslés alkalmazása tehát csak bizonytalan tulajdonságú pontbecsléseket eredményezhet.

Hunyadi részletes Monte Carlo vizsgálatokat végzett az alapbecslés tulajdonságainak vizsgálatára, amelyek főbb következtetései az alábbiak:

2. A paraméterek, elsősorban λ becslésének szórása és torzítása nagyon érzékeny az u_i véletlen változó szórására. Ha a relatív szórás 4% körül van, az eljárás nem alkalmas λ meghatározására. A kísérletekben a véletlen változó szórása 0,5%-ra volt rögzítve.

3. λ növekedésével a $\hat{\lambda}$ szórása és torzítása tendenciaszerűen csökken, λ kis értékei esetén a torzítás azonban olyan nagy, hogy az eljárás gyakorlatilag használhatatlan.

4. Rögzített relatív szórás esetén a becslés érzéketlen α változásaira, $\hat{\alpha}$ becslési eredményei igen jók; igaz, hogy ez a kevésbé lényeges paraméter, „skála-paraméter”.

A felsorolt következtetésekben említett problémák önmagukban is elég súlyosak, együttesük azonban magát az alkalmazást teszi kérdésessé. Az 1. problémát sokan hajlamosak „szépséghibának” tekinteni. Együtt a 2. problémával azonban súlyossá válik: egy pontbecslésből nem tudunk a becslőfüggvény, főként nem a látens változó szórására következtetni, így minden alkalmazáskor feltehető a kérdés: hátha a becslés sikertelen, csak mi nem tudjuk?

A 3. probléma sem önmagában súlyos, a modell akkor „érdekes”, ha az alkalmazkodási, információ-tovaterjedési folyamat jelentős szerepet játszik, a kereslet nagy részét érinti a késleltetett alkalmazkodás, a népesség nagy része az információ-terjedési folyamatban szerzi meg az átváltozás-információt, azaz: a λ paraméter viszonylag nagy. Pontbecslés esetén azonban nem tudjuk megállapítani, hogy a kapott érték nagy szórású, kicsi λ (nem adekvát modell) vagy kis szórású, nagy λ (helyes alkalmazás) eredménye. Az 1. probléma az alapjában kedvező 4. következtetést is lerontja.

A modell elméleti értékeit tehát a becslés hiányosságai, megoldatlan problémái erősen rontják, az alkalmazást nehezítik. Tanulmányában a szerző is megjegyzi: „figyelembe véve, hogy a gyakorlati alkalmazások során ismétlésekre nincs lehetőségünk, csak egy becslés áll rendelkezésünkre, az itteni eredmények egyáltalán nem biztatóak.” [7]

2.2. A becslési eljárás átalakítása bootstrap-módszerré

Az előzőek ismeretében kézenfekvőnek tűnik valamely számítógép-intenzív módszer felhasználása, az 1. probléma megoldására. A bootstrap-eljárás mellett döntöttem, ez a problémára egyszerűen alkalmazható volt.

A módszer nagy számítógépígénye nem engedte meg, hogy Hunyadihoz hasonlóan Monte Carlo vizsgálatokat végezzek a becslés tulajdonságainak meghatározására. Kísérletsorozatot állítottam össze, amelyben ugyan magam generáltam azokat a mintákat, amelyekre azután a becslést alkalmaztam, de kísérletenként csak egy mintát használtam fel (az optimálisnak tekintett 50–200 helyett). A 20 kísérletet Hunyadi vizsgálatainak alapján állítottam össze. Az exogén változó adatsora minden kísérletben azonos volt: egy „átlagos makrogazdasági idősor”, amit a [7] tanulmányból vettem át. A minta hossza $20 + 8$, a scanning felosztás finomsága 10, a scanning interációk száma 2, a bootstrap iterációk száma 200 volt. A kísérletek során változtattam az egyes paramétereket: α -t, λ -t, illetve az u véletlen változó eloszlását.

A kísérletet a 3. ábrán található séma szerint végeztem. A futtatásokat az Országos Tervhivatal ICL System 4/70 számítógépén végeztem. Véletlen szám generálásán a gépen rendelkezésre álló pseudo-véletlen számokat generáló szubrutin meghívását értem.

$$f(\mathbf{p}, \lambda) = (1 - \lambda)\mathbf{p} + \sum_{j=1}^8 (\lambda^{2^{j-1}} - \lambda^{2^j})L^j(\mathbf{p}). \quad (2.6)$$

Az egyes kísérletek eredményeit külön-külön értékeltem. Minden kísérlet eredményeként a két becslőfüggvény eloszlására vonatkozó adatokat kaptam: az empirikus eloszlásjellemzőket (átlag, empirikus szórás) és a hisztogramokat. A 11. kísérlet eredménytáblája pl. a következőképpen nézett ki (l. 4. ábra).

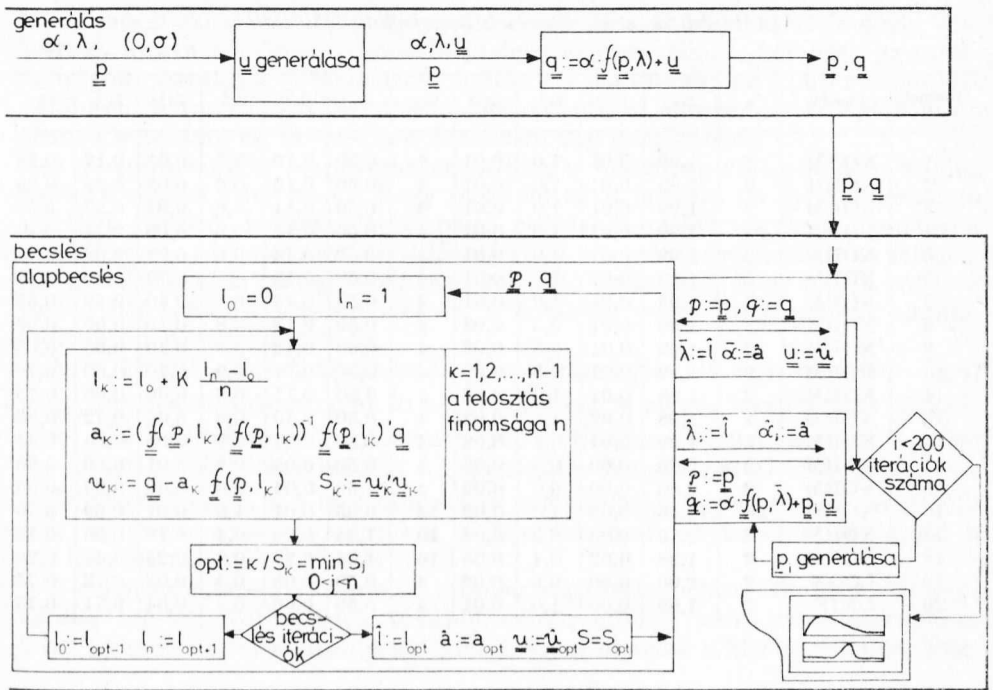
(2.7) alatt közlöm az egyes kísérletek eredményeinek összefoglaló tábláját. Az egyes jelölések: $E(\hat{\theta})$: átlag; $D(\hat{\theta})$: szórás; $B(\hat{\theta})$: a torzítás abszolút mértéke; $V(\hat{\theta})$: relatív torzítás.

$$B(\hat{\theta}) = \theta - E(\hat{\theta}), \quad V(\hat{\theta}) = \frac{B(\hat{\theta})}{V(\hat{\theta})}.$$

Az eredmények értékelésekor abból a célból kell kiindulnunk, amit magunk elé tűztünk a bootstrap-becsléssé alakításakor. Mennyiben sikerült megoldani az alapbecsléssel kapcsolatos, az előző fejezetben jelzett problémákat?

Először is meg kell állapítani, hogy sikerült a becslés átalakítása. A keletkező hisztogramok az esetek mindegyikében értelmezhetők, releváns információkat hordoznak, még ha ezek az információk alapvetően negatív tartalmúak is. Mondható, hogy a becslőfüggvények mintabeli eloszlása ismert vagy legalábbis ezek jó empirikus közelítését kaptuk meg.

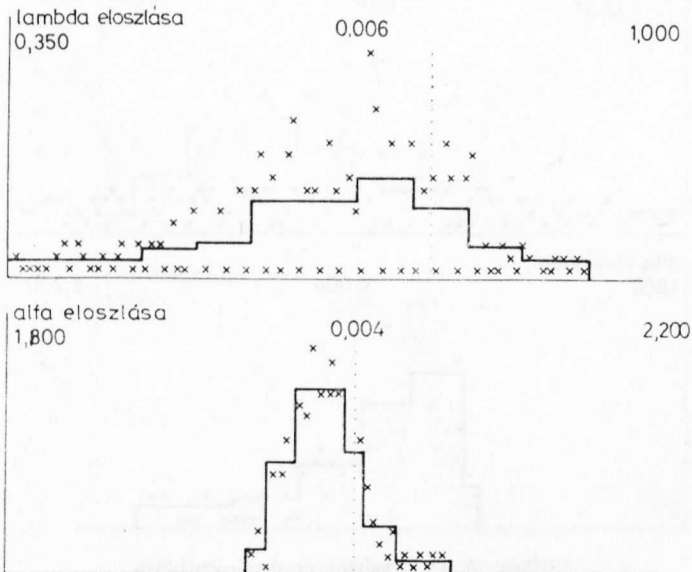
Mivel a becslés klasszikus értelemben vett tulajdonságai nem ismertek, a becslőfüggvény ismeretében sem tudunk teljes határozottsággal konfidencia-intervallumot adni a becslést paraméterekre. A kísérletek alapján ugyanakkor elmondható, hogy jöllehet a becslőfüggvény egyes jellemző pontjai (várható érték, módusz) nem esnek egybe az elméleti paraméterértékkel, az elméleti érték minden esetben benne volt a becslőfüggvény mintabeli átlagának empirikus sugarú környezetében (sőt, jobb oldali környezetében). Ezen tulajdonság a Monte-Carlo eredményekhez képest is újdonságnak mondható, s bár nem tekinthető egzaktan bizonyítottnak, legalábbis reménykeltő. A vele kapcsolatos bizonytalanság nem nagyobb, mint az aszimptotikus konfidencia-intervallumokkal kapcsolatos, az intervallumok szélessége alapján pedig a becslés jónak mondható egy eloszlásfüggetlen, sőt egy normális eloszlást felté-



3. ábra. Az egyes kísérletek folyamatábrája

Input paraméterek:

N = 20 M = 7 alfa = 2.0000 lambda = 0.75 kezd = 2.0 fact = 4.0 késl. sz. = 7
 Lambda várható értéke = 0.6579 szórásnégyzete = 0.0111
 Alfa várható értéke = 1.9846 szórásnégyzete = 0.0004
 Mintanagyság = 200



4. ábra. A 11. kísérlet eredménytáblája

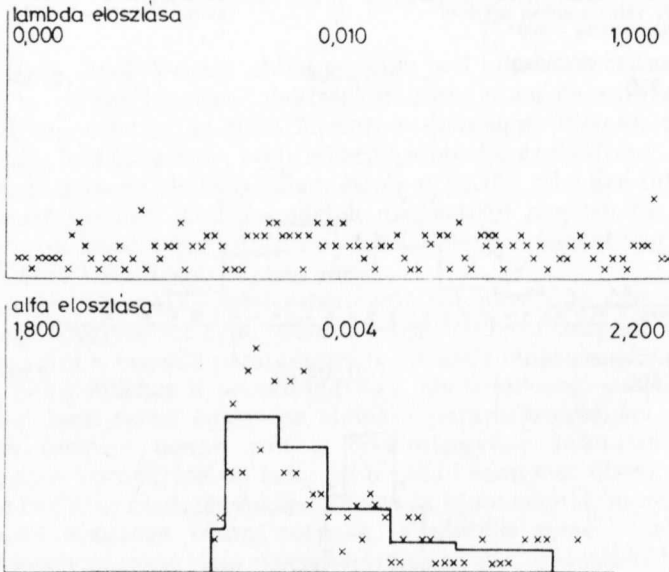
A kísérletek eredményeinek összefoglaló táblázata

(2.7)

Kísérlet száma	Eloszlás	α	$E(\hat{\lambda})$	$B(\hat{\lambda})$	$V(\hat{\lambda})$	$D(\hat{\lambda})$	$D(\sigma)$	$V(\sigma)$	$D(\hat{\lambda})$	$V(\hat{\lambda})$	$B(\hat{\lambda})$	$E(\hat{\lambda})$	λ
1	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,12	0,7	0,08	0,17	0,25
2	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,13	0,6	0,08	0,22	0,30
3	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,14	0,6	0,08	0,27	0,35
4	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,14	0,6	0,09	0,31	0,40
5	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,14	0,6	0,09	0,36	0,45
6	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,13	0,8	0,10	0,40	0,50
7	NORM	2	1,99	0,01	1,0	0,01	4	0,50	0,13	0,8	0,10	0,45	0,55
8	NORM	2	1,99	0,01	0,5	0,02	4	0,50	0,13	0,8	0,10	0,50	0,60
9	NORM	2	1,99	0,01	0,5	0,02	4	0,50	0,12	0,8	0,10	0,55	0,65
10	NORM	2	1,99	0,01	0,5	0,02	4	0,50	0,11	0,9	0,10	0,60	0,70
11	NORM	2	1,98	0,02	1,0	0,02	4	0,50	0,11	0,8	0,09	0,66	0,75
12	NORM	2	1,98	0,02	1,0	0,02	4	0,50	0,10	0,8	0,08	0,72	0,80
13	NORM	2	1,99	0,01	0,5	0,02	4	0,50	0,07	0,7	0,05	0,80	0,85
14	NORM	2	2,00	0,00	0,0	0,03	4	0,50	0,05	0,2	0,01	0,89	0,90
15	NORM	2	2,00	0,00	0,0	0,03	4	0,50	0,04	0,0	0,00	0,95	0,95
16	NORM	20	19,98	0,02	1,0	0,02	4	0,05	0,01	1,0	0,01	0,69	0,70
17	NORM	2	2,00	0,00	0,0	0,04	10	1,25	0,26	0,4	0,10	0,20	0,30
18	NORM	2	1,98	0,02	0,4	0,05	10	1,25	0,29	0,8	0,23	0,47	0,70
19	LOGN	2	2,00	0,00	0,0	0,02	4	0,50	0,08	0,4	0,03	0,72	0,75
20	UNIF	2	1,99	0,00	1,0	0,01	4	0,50	0,06	0,7	0,04	0,71	0,75

Input paraméterek:

$N = 20$ $H = 7$ $\alpha = 2.0000$ $\lambda = 0.70$ $\text{kezd} = 2.0$ $\text{fact} = 10.0$ $\text{késl. sz.} = 7$
 λ várható értéke = 0.4688 $\text{szórásnégyzete} = 0.0857$
 α várható értéke = 1.9844 $\text{szórásnégyzete} = 0.0029$
 $\text{Mintanagyság} = 200$



5. ábra. A 18. kísérlet eredménytáblája

telező konfidenciaintervallumhoz viszonyítva is. (Ezeknél a szórásnak kétszerese, illetve ötszöröse a konfidenciaintervallum sugara, bár ezek az intervallumok „biztosan” tartalmazzák a keresett paramétert.) A konfidenciaintervallumok biztos ismeretéhez természetesen sok, az alapbecslés tulajdonságait elemző kutatásra és Monte-Carlo kísérletre van még szükség.

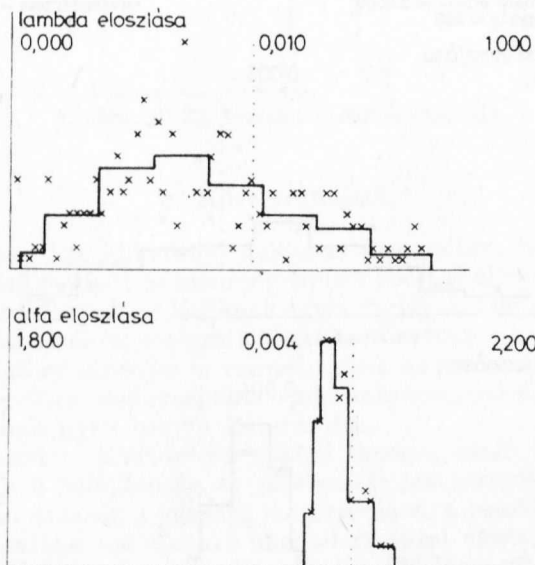
A 2. probléma az alapbecslésben rejlik, a bootstrap-változat nem enyhít rajta. Kedvező azonban az, hogy most fel lehet ismerni az ilyen eseteket (a véletlen változó dominanciáját, nagy relatív szórását), ugyanis ilyenkor a becslőfüggvény hisztogramja is diffúzzá válik, s a szórás meghaladja az átlagot. Helyes alkalmazás esetén tehát nem kell attól tartanunk, hogy csak a véletlen játéka befolyásolta becslésünket — a becslőfüggvény hisztogramja alapján minden ilyen eset kiszűrhető.

A 3. következtetést kísérleteim nem támasztják alá egyértelműen. Igen nagy λ esetén mutatható csak ki a $\hat{\lambda}$ szórásának és relatív torzításának csökkenése. A $\hat{\lambda}$ hisztogramja mindenesetre jól elkülöníthető λ nagyságától függően így következtetni lehet belőlük λ nagyságára. Mindazonáltal igaz, hogy ha λ szélsőségesen nagy, a $\hat{\lambda}$ becslőfüggvény tulajdonságai ugrásszerűen megjavulnak. Érdekes összehasonlítani a 3. kísérlet eredménytábláját (6. ábra) a 14. kísérlet táblájával (7. ábra).

A 4. következtetést a kísérletek minden tekintetben igazolták, s a bootstrap-becslés segítségével minden további nélkül adható konfidenciaintervallum α -ra. Természetesen hangsúlyozni kell, hogy α becslése a kisebb feladat. Meg-

Input paraméterek:

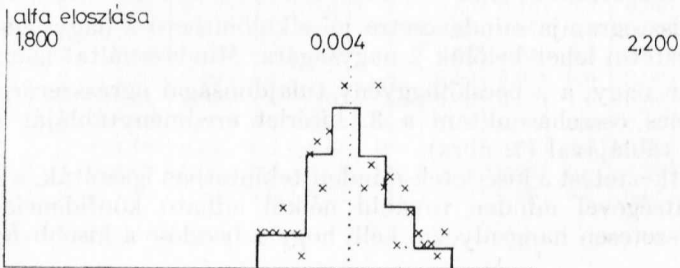
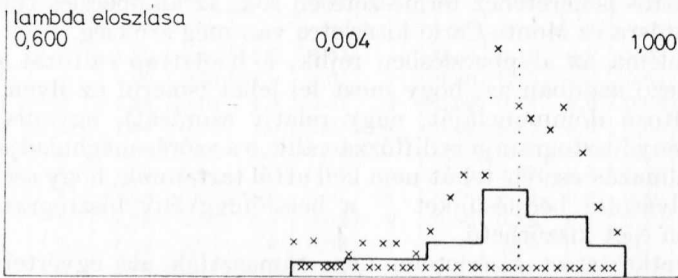
$N = 20$ $M = 7$ $\alpha = 2.0000$ $\lambda = 0.35$ $\text{kezd} = 2.0$ $\text{fact} = 4.0$ $\text{késl. sz.} = 7$
 λ várható értéke = 0.2656 $\text{szórásnégyzete} = 0.0186$
 α várható értéke = 1.9947 $\text{szórásnégyzete} = 0.0001$
 Mintanagyság = 200



6. ábra. A 3. kísérlet eredménytáblája

Input paraméterek:

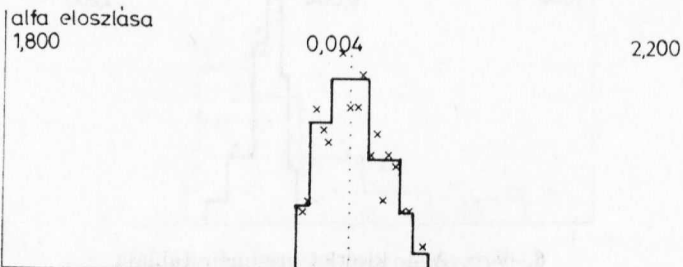
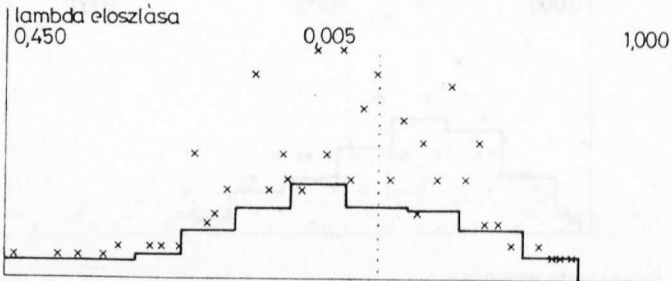
$N = 20$ $M = 7$ $\alpha = 2.0000$ $\lambda = 0.90$ $\text{kezd} = 2.0$ $\text{fact} = 4.0$ $\text{késl. sz.} = 7$
 Lambda várható értéke = 0.8943 szórásnégyzete = 0.0022
 Alfa várható értéke = 2.0019 szórásnégyzete = 0.0007
 Mintanagyság = 200



7. ábra. A 14. kísérlet eredménytáblája

Input paraméterek:

$N = 20$ $M = 7$ $\alpha = 2.0000$ $\lambda = 0.75$ $\text{kezd} = 2.0$ $\text{fact} = 1.4$ $\text{késl. sz.} = 7$
 Lambda várható értéke = 0.7238 szórásnégyzete = 0.0072
 Alfa várható értéke = 2.0060 szórásnégyzete = 0.0004
 Mintanagyság = 200



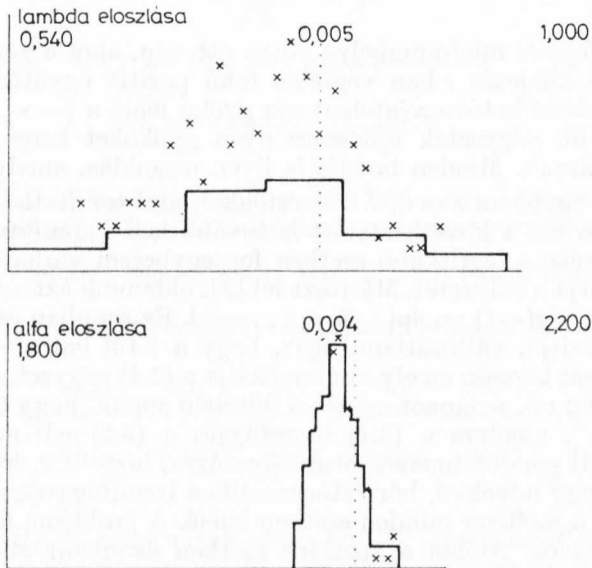
8. ábra. A 19. kísérlet eredménytáblája

jegyzendő még, hogy normális eloszlású véletlen változó esetén sem normális, sőt nem is szimmetrikus a becslőfüggvény eloszlása.

A becslés egy igen hasznos tulajdonságát is mutatják a kísérletek. A becslés eloszlásfüggetlennek tűnik, hiszen sem egy erősen ferde, sem egy „diffúz” eloszlású hibatag nem befolyásolta hátrányosan a becslés tulajdonságait. Az ábrákon lognormális, ill. egyenletes eloszlású véletlen változóval generált minta becslésének eredményei láthatók. A paraméterek értékei megegyeznek a 11. kísérletével (4. ábra).

Input paraméterek:

$N = 20$ $M = 7$ $\alpha = 2.0000$ $\lambda = 0.75$ $\text{kezd} = 2.0$ $\text{fact} = 8.0$ $\text{késl. sz.} = 7$
 Lambda várható értéke = 0.7062 szórásnégyzete = 0.0031
 Alfa várható értéke = 1.9912 szórásnégyzete = 0.0001
 Mintanagyság = 200



9. ábra. A 20. kísérlet eredménytáblája

3. Következtetések

A tanulmányban két különböző módszert kapcsoltam össze: a h -eloszlású osztott képlettesű modellt és scanning-típusú becslési eljárását a számítógépi intenzív becslési módszerek családjának egyik tagjával, a bootstrap-módszerrel. Az összekapcsolásnak és az elvégzett kísérletsorozatnak a közvetlen alkalmazhatóságon túlmenő eredményei is vannak. Ezek az eredmények módot adnak a két módszer sajátos tulajdonságainak jobb megismerésére. Egyúttal további indítékul szolgálnak ilyen irányú kutatásokra.

A h -eloszlású osztott képlettesű modell becslése során igen erős torzítást tapasztaltunk. Ez a tulajdonság az alkalmazás lehetőségeit rontja. Elméleti magyarázatra van szükség a jelenség megértéséhez, a becslőmódszer javításához. A magyarázathoz tekintsük a modellt (2.5)-tel ekvivalens felírását (az ekvivalenciát a modell származtatása alapján [7] bizonyítja):

$$q = \alpha[p(0) - \lambda \Delta p(0) - \lambda^2 \Delta p(-1) - \lambda^4 \Delta p(-2) - \dots] + u. \quad (3.1)$$

Tegyük fel a továbbiakban az egyszerűség kedvéért, hogy $\hat{\alpha} = \alpha = 1$, $\Delta p(0) = \Delta p(-1) = \Delta p(-2) = \dots = 1\Delta$, és hogy adott a $\lambda = \lambda + \varepsilon$ becslésünk. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{p} - 1\Delta(\lambda + \lambda^2 + \lambda^4 + \dots) + \mathbf{u} \\ \hat{\mathbf{q}} &= \mathbf{p} - 1\Delta(\hat{\lambda} + \hat{\lambda}^2 + \hat{\lambda}^4 + \dots) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}} = 1\Delta((\hat{\lambda} - \lambda) + (\hat{\lambda}^2 - \lambda^2) + (\hat{\lambda}^4 - \lambda^4) + \dots) + \mathbf{u}. \quad (3.3)$$

Ebbe behelyettesítve feltételezésünket és a kifejezés várható értékét számítva az adódik, hogy

$$E((\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}})'(\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}})) = \sigma^2 + T\Delta^2(\varepsilon + \varepsilon^2 + 2\lambda\varepsilon + \varepsilon^4 + 6\lambda^2\varepsilon^2 + 4\lambda\varepsilon^3 + \dots)^2 \quad (3.4)$$

A kapott kifejezés minimumhelye ε -ban ott van, ahol a zárójeles kifejezés értéke 0. Ez a kifejezés ε -ban végtelen fokú pozitív együtthatójú polinom, aminek (megszámlálhatóan végtelen) sok gyöke lehet a $(-\infty, 0]$ intervallumban. A legkisebb négyzetek módszere ilyen gyököket keres, és az egyiket tekinti megoldásnak. Minden becslés is ilyen megoldás, amely azonban csak véletlenül esik egybe az $\varepsilon = 0$, $\hat{\lambda} = \lambda$ értékkel, ami torzítatlan becslést adna.

A valóságban ezt a következtetést is tovább kell finomítani. Egyrészt, az \mathbf{u} mintabeli értéke a legritkább esetben fog egybeesni várható értékével. Ez tovább bonyolítja a helyzetet. Másrészt fel kell oldanunk azt a feltevést, amely szerint $\Delta p(0) = \Delta p(-1) = \Delta p(-2) = \dots = \Delta$. Ez azonban csak a számszerű értékeket módosítja, változatlanul igaz, hogy a λ -tól balra eső félegyenesen végtelen sok pont létezik, amely minimalizálja a (3.4) négyzetösszeget, feltéve, hogy p_t monoton nő. p_t monotonitása a feltétele annak, hogy található legyen olyan „átlagos”, amelyre a (3.1) összefüggés a (3.2)-nek megfelelő alakra hozható. A fenti gondolatmenet megmagyarázza, hogy a 2. fejezet kísérleteiben, ahol p_t -t egy növekvő, bár sztochasztikus trendfüggvénnyel generáltuk, miért torzított a módszer minden esetben lefelé. A probléma általános megoldása nem egyszerű. Abban a speciális esetben azonban, ahol p_t monoton, feltehetően érdemes a becslési eljárást oly módon bővíteni, hogy az ne csak egy minimumhelyet, hanem a minimumhelyek közül a legnagyobb $\hat{\lambda}$ -t keresse meg. Látható ugyanis, hogy $\varepsilon = 0$ éppen ezen becslésnél következik be.

A kísérletek alapján a modell becslésének másik sarkalatos pontja az, hogy mekkora a véletlen változó (relatív) szórása. A kísérletekben alkalmazott 0,5% kevésnek, a valóságban elő nem fordulónak, túlságosan „sterilnek” tekinthető. Erre a problémára is nyújt némi információt a modell alternatív levezetése.

A modell (2.3) képletében szereplő véletlen változó láthatóan a modellt előállító folyamattól független látens változó. Joggal feltételezhetjük, hogy ez az áralkalmazkodás folyamatában is jelen van. Speciálisan tegyük fel, hogy míg az információ terjedési folyamata során a népességnek egy adott (a terjedési folyamattal jellemzett) hányada képes viselkedését determinisztikus módon igazítani az árváltozáshoz, mivel az árváltozási információ birtokában van, addig a maradék hányad csak véletlenszerűen tudja viselkedését változtatni, információhiánya miatt. Képletben megfogalmazva: ha t_0 időpillanatban árváltozás következik be, egy $t > t_0$ időpillanatban a népesség z_t hányada rendelkezik az adott információval, és így a q_t kereslet ebben az időpontban

$$q_t = \alpha p_0 + \alpha z_t \Delta p + (1 - z_t) v_0, \quad (3.5)$$

ahol z_t -t a hólabda-folyamat generálja, és v_0 az (árváltozás időpontjához kapcsolható) véletlen változó, amelyre $E(v_0) = 0$, $E(v_0^2) = \omega^2$. Ebből levezethető a [7] tanulmányban követett módon a keresleti függvény:

$$q_t = \alpha(z_0 \Delta p_t + z_1 \Delta p_{t-1} + \dots + z_i \Delta p_{t-i} + \dots) + (1 - z_0)v_t + (1 - z_1)v_{t-1} + \dots + (1 - z_i)v_{t-i} + \dots \tag{3.6}$$

és az osztott késleltetésű modell, ami megegyezik a (2.3) formulával, azzal a lényeges különbséggel, hogy u_t nem 0 várható értékű, konstans szórású páronként korrelálatlan valószínűségi változó, hanem

$$u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{(2^j)} v_{t-j} \tag{3.7}$$

Ebből levezethető, hogy az u_t -k kovarianciamátrixa

$$E(u_t u_{t'}) = \omega^2 \lambda^{(2^{(t'-t)})} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{(2^j)} \tag{3.8}$$

alakú tagokból áll. A kifejezésben szereplő sor tagjai egy λ hányadosú mértani sorozat egy részsorozatát alkotják; a mértani sor konvergens így az itt szereplő sor is az és $\frac{1}{1 - \lambda}$ felülről becsli. A sort zárt alakban előállítani nem sikerült, különböző λ -k esetén közelítő értékét a következő táblázat tartalmazza:

λ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\lambda \sum_{j=1}^6 \lambda^{(2^j)}$	0,029	0,075	0,158	0,304	0,554	0,997	1,906

(3.9)

A táblázatból látszik, hogy megfelelően kis λ -k esetén az u_t σ szórása, így a relatív szórás is ω -hoz képest igen kicsiny lehet, tehát ezekben az esetekben a becslésnél nem lép fel a kellemetlen diffúz becslőfüggvény. Ugyanakkor a latens változók korreláltsága újabb problémát vet fel, amelynek súlyosságát vizsgálni kell. Szerencsére látható, hogy a \sum mátrix közelítően kvázidiagonális, ui. ha $(t' - t)$ kellően nagy, a kovariancia a $\lambda^{(2^{(t'-t)})}$ tag miatt elhanyagolhatóan kicsi.

A vizsgálat a bootstrap-módszer néhány érdekes tulajdonságát is megmutatta. Az egyik, hogy a bootstrap-becslés tulajdonságaira elég sok információt nyújtanak a Monte-Carlo vizsgálatok. A másik, hogy a módszer nem tudja az alapbecslés tulajdonságait alapvetően megváltoztatni: talán csökkenti a véges mintabeli torzítást, de nem szünteti meg az aszimptotikus torzítást.

A vizsgálat alapján tehát elmondható, hogy a számítógép-igényes becslési módszerek nem szüntetik meg az analitikus vizsgálatok szükségességét, éppen ellenkezőleg: használatukat könnyítik, biztosabbá teszik a nagyminta-tulajdonságok vagy a kisminta-tulajdonságok analitikus vagy Monte-Carlo vizsgálatának eredményei. Ugyanakkor ezeknek egyes erős elméleti előfeltevései nélkül is használhatóak.

(Beérkezett: 1985. augusztus 5-én.)

IRODALOM

1. AGUIRE-TORRES, V.-GALLANT, A. R.: The Null- and Non-null Asymptotic Distribution of the Cox Test for Multivariate Nonlinear Regression. (Alternatives and a New Distribution-Free Cox Test.) *Journal of Econometrics*, 21. 1983. 5—33.
2. Computer-Intensive Methods in Statistics. *Scientific American*, 1983. 05.: 96—100.
3. DIJKSTRA, T.: Some Comments on Maximum Likelihood and Partial Least Squares Methods. *Journal of Econometrics*, 22 1983. 67—70.
4. EFRON, B.: Bootstrap methods: Another Look at the Jackknife. *Annals of Statistics*, 7. 1979. 1—26.
5. ÉLTETŐ ÖDÖN—MESZÉNA GYÖRGY—ZIERMANN MARGIT: *Sztochasztikus módszerek és modellek*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1982.
6. HUNYADI LÁSZLÓ: Egy terjedési folyamat elemzése: a hólabda modell. *Sigma*, XI. 1978.: 191—209.
- 7a. HUNYADI LÁSZLÓ: A h-eloszlású osztott késleltetési modell. Budapest, 1982. okt. OT. TgI. 751 (XVIII) 1983. (kézirat).
- 7b. HUNYADI LÁSZLÓ: Egy terjedési típusú osztott késleltetési modell. *Sigma*, XVII. 1984. 31—46.
8. JUDGE, G. G.—HILL, R. C.—GRIFFITHS, W.—LÜTKEPOHL, H. LEE, T.: *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*. John Wiley & Sons, N. Y., 1982.
9. PAIZS JÁNOS: Paraméterbecslési módszerek kisminta-tulajdonságai és specifikációs hibákkal szembeni érzékenysége (kézirat) KSH Statisztikai és Matematikai Módszerek Közgazdasági Alkalmazásának Laboratóriuma. *Laboratóriumi Munkaanyagok*, 8. szám, Budapest, 1969.
10. PHILLIPS G. D. A.—McCABE B. P.: A Comparison of Several Jackknife-type Estimators and Other Bias-reduction Techniques Applied to Two Stage Least Squares Estimation of Simultaneous Equation Models. School of Economic Studies, University of Leeds, 1982. április (kézirat).

A COMPUTER-INTENSIVE ESTIMATION OF THE h -DISTRIBUTION MODEL WITH DISTRIBUTED LAGS

In our days the computer-intensive estimation procedures are gaining ground in the estimation theory of econometrics. The first part of the paper describes a few such models, as reflected by comparisons with the classic estimation procedures. The chapter also presents the necessity of the use of these methods, as well as the advantages and pitfalls of their use.

The h -distribution model with distributed lags improves the cumbersome economic interpretation possibilities of the models with distributed lags. But its application cannot yet be considered widespread, first of all because of estimation problems. By improving the properties of the original procedure with the aid of a computer-intensive method, the bootstrap-method, the model might hopefully become a useful instrument in practical econometric researches as well. The second chapter sums up the manner of transforming the estimation and the lessons of the experiments conducted. The third chapter explains earlier estimation results by giving a theoretical reason for biasedness. Through an alternative specification of the error term it shows that the use of the h -distribution model is not hopeless even in the case of an adjustment process with relatively large variance. In view of the experiments the relationship between the use of computer-intensive estimation procedures and the analysis of estimation properties is indicated.

ИНТЕНСИВНАЯ ОЦЕНКА ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МОДЕЛИ, ИМЕЮЩЕЙ h -РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, С ПОМОЩЬЮ ЭВМ

Вычислительные методы интенсивной оценки в настоящее время все шире распространяются в эконометрической теории оценок. В первой части статьи описано несколько таких методов в сравнении с классическими методами оценок. В этой главе показана необходимость, преимущества и трудности их применения.

Сложность экономической интерпретации запаздывающих распределенных моделей улучшается запаздывающей распределенной моделью, имеющей h -распределение. Однако их применение в первую очередь из-за проблематичность оценок, еще нельзя назвать общепринятыми. Можно надеяться, что вычислительный метод интенсивной оценки, свойства которого улучшаются с помощью метода bootstrap, станет полезным средством для практики эконометрических исследований.

Вторая глава статьи обобщает метод преобразования оценок и опыт проведенных исследований. Третья глава в качестве объяснения предыдущих результатов оценок демонстрирует теоретические причины неточности оценок. На основании альтернативной спецификации остаточного члена показано, что даже в случае относительно большой распределенности процесса не всегда безнадежно применение модели, имеющей h -распределение на основании проведенных исследований указывается связь между вычислительными методами интенсивной оценки и аналитическими исследованиями свойств оценок

Vállalati készletgazdálkodás megbízhatósági készletmodellek felhasználásával

1. Bevezetés

A vállalatok készletgazdálkodásának korszerűsítése hazánkban a 70-es évek óta súlyponti kérdés. A nagyvállalatok jelentős része fokozatosan áttért a raktári forgalom és a készletek számítógépes nyilvántartására, amely azonban nehezen alkalmazható a gazdálkodással kapcsolatos döntések előkészítésére. Felmerült az igény, hogy a nyilvántartási rendszereket hatékonyabbá tegyék operációkutatási és statisztikai modellek felhasználásával. Továbbfejleszték számítógépes döntéselőkészítő rendszerré, amely javaslatot ad a készletnormákra, a feladandó rendelésre és előrejelzi ennek várható következményét a készletalakulásban, elősegíti a vállalati célkitűzések megvalósítását a készletgazdálkodásban. Az irodalomban közölt modellek, valamint a tőkés országokban készült készletgazdálkodási programcsomagok felhasználásában tapasztalt kedvezőtlen kísérletek (elemzését lásd pl. PRÉKOPA—KELLE [27] tanulmányában) hatására folytatódtak a kutatások a hazai körülményekhez jobban igazodó készletmodellek rendszerének kialakításában.

A cikk első részében vázoljuk a hazai készletgazdálkodás néhány sajátosságát és az ezekre épülő megbízhatósági készletmodelleket. Ezek célja, hogy megadják azt a minimális készletszintet, mely előírt megbízhatósággal lehetővé teszi a folyamatos ellátást a beszállítás, esetleg a kereslet véletlen jellegét is figyelembe véve.

Röviden összefoglaljuk a korábbi megbízhatósági készletmodelleket, majd ezek néhány újabb változatát ismertetjük, melyeket gyakorlati feladatok megoldásához dolgoztunk ki. A modellekkel kapcsolatos matematikai kérdéseket nem részletezzük, utalunk a cikkhez csatolt bőséges irodalomjegyzékre. A modellekre épülő készletelemzési, döntéselőkészítési és értékelési lehetőségeket emeljük ki, majd a hazai alkalmazásaikat tekintjük át, melyek a népgazdasági szintű készletnorma ajánlásoktól a vállalatok alapanyag-, tartalékalkatrész-, gyártásközi- és késztermék-készletszintjének meghatározásáig igen széles kört ölelnek fel.

Az utolsó részben vázlatosan ismertetjük azt az új készletgazdálkodási döntéselőkészítő programrendszert, melyet a Dunai Vasmű megbízásából készítettünk az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetének Operációkutatási Osztályán. Az alkalmazott sokféle modell és a programrendszer moduláris felépítése sokrétű felhasználási lehetőséget nyújt a kereslet előrejelzése, a készletnorma számítása, a rendelési javaslat és a készletprognózis területén, mint azt az alkalmazási tapasztalatok mutatják. A programozásban végzett együttműködésért Gömböcz Lajos és Sebő András kollégámnak ezúton is köszönetet mondok.

2. Az operációkutatási modellek feladata a hazai készletgazdálkodási sajátosságok mellett

A készletgazdálkodás döntő feladata a vállalat céljainak megfelelő készlet-szintek tervezése és az azt biztosító rendelkezések meghatározása. A vállalatok a készlet-szintet általában aggregáltan, az összes vagy a cikkszoportonkénti összkészlet értékére tervezik, míg a tényleges készlet-szintek a cikkenként külön-külön feladott rendelkezések szerint alakulnak. Az operációkutatási modellek feladatának tekintjük azt, hogy a cikkenkénti rendeléspolitikát úgy határozzuk meg, hogy az a készlet-szinteket a vállalati céloknak megfelelően alakítsa ki.

A vállalatok készletezése sokrétű, a készletezett cikk lehet alap- vagy segédanyag, alkatrész, félkész- vagy késztermék stb. Az alkalmazandó rendeléspolitikát a cikkre jellemző keresleti és beszerzési feltételek határozzák meg, melyek megegyezhetnek különböző típusú cikkeknel (pl. félkész terméknel és alkatrésznél), de különbözőek lehetnek hasonló típusú cikkeknel is (pl. különböző beszerzési forrásból származó alkatrészeknél). Ha a beszerzési feltételek és a kereslet jellege hasonló, akkor ugyanazon készletmodell alkalmazható különböző cikkekre, de a feltételek változása esetén a modellt vagy annak paramétereit is meg kell változtatni. A beszerzési és a keresleti feltételeknek a gyakorlatban megvalósuló sokfélesége szükségessé teszi különböző készletmodellek konstruálását és alkalmazását.

A hazai vállalatok a gyártáshoz (vagy értékesítéshez) szükséges anyagra (alkatrészre, termékre stb.) periódusokra szóló rendeléseket adnak fel. A rendelési periódus hossza rendszerint rögzített, általában évenként, negyedévenként vagy havonként lehet rendelést feladni. A rendeléseket a periódus előtti rendelési határidőig fel kell adni (pl. a negyedévet megelőzően 60 nappal). Ez a hazai általános gyakorlat, melyen lényeges változtatást mindeddig nem sikerült elérni.

A vállalat a folyamatos ellátás érdekében mindegyik periódus végére felhalmoz bizonyos készletet, mely a következő periódus induló készleteként (mint biztonsági készlet) a kereslet és a beszállítás ütemezésbeli különbségeit és bizonytalanságait küszöböli ki. Cél a folyamatos ellátás a lehető legkisebb forgóeszköz lekötéssel, azaz minimális készlettel.

A megbízhatósági készletmodellek feladata annak a minimális induló készlet-szintnek a meghatározása, mely a kívánt biztonsággal garantálja, hogy nem fordul elő hiány, folyamatos az ellátás.

A hagyományos készletmodellek a rendelésfeladásból, a készlettartásból és a hiány előfordulásából adódó költségek összegének minimalizálását tűzik ki célul. Ehhez a költségtényezőket cikkenként külön-külön meg kell adni, ami különösen a hiányköltségnél igen nehéz feladat. A vállalati szakemberek sokkal könnyebben tudnak becslést adni a kívánt biztonsági szintre, mely a folyamatos anyagellátás valószínűségét fejezi ki. A rendelés feladásának fix költsége nem számottevő, a ritka lehetőség miatt a cikkek nagy részénél minden periódusban szükség van rendelés feladására ekkor a rendelés feladásának költsége az optimalizálást nem befolyásolja. A készlettartási költséget az induló készlettel együtt minimalizáljuk. A hiányköltséget a megbízhatósági feltétel helyettesíti, ahol a biztonsági szint rögzítése a készlettartási és a hiányköltség hányadosának becslését jelenti. Ugyanis ha a két költségtényező arányát megadjuk, abból meghatározható a költségminimum esetén adódó

biztonsági szint. A gyakorlatban azonban éppen erre a költséghányadosra nehéz közvetlen becslést adni. Ennek a fontos kérdésnek az elemzésére még a 4. pontban vissza fogunk térni.

A következő periódusra adott rendeléssel csak annak a periódusnak a záró készlet szintjét lehet befolyásolni és ezzel a rákövetkező periódus folyamatos anyagellátását tudjuk biztosítani. A biztonsági készlet szintet tehát csak az egy periódussal korábban feladott rendeléssel lehet befolyásolni. Ez egyúttal azt jelenti, hogy a készlettervezésnél nemcsak a következő, hanem az azutáni periódus várható keresleti és beszerzési feltételeinek figyelembevételével tudjuk a megfelelő záró készlet szintet kialakítani. A gyakorlatban tehát egy hosszú időszakra (két periódus plusz a periódus előtti rendelési határidő) előre kell becsülni a kereslet és a beszerzés várható alakulását. Pontos becslések ritkán adhatók, ezért statisztikai módszerekhez folyamodhatunk, mint azt a 6. pontban vázoljuk.

A megbízhatósági készletmodellek legfontosabb előnye a hagyományos modellekkel szemben, hogy a beszállításban, esetleg a keresletben levő bizonytalan tényezőket is figyelembe veszik, melyek a fentiek miatt lényeges szerepet játszanak. A szállítási bizonytalanság másik tényezője az, hogy a szállító fél általában fenntartja az előszállítás jogát, azaz a perióduson belül bármelyik időpontban (vagy időpontokban) teljesítheti a megrendelést. Tipikus eset az, hogy a feladott rendelés nem egyszerre érkezik be, hanem több időpontban, esetleg különböző nagyságú részszállítmányokban. A beszállítás időbeli és tételes ütemezéséről gyakran nincs előzetes megállapodás, de ellenkező esetben is sok helyen nem megfelelő a szállítási fegyelem.

A fentiek figyelembevételével a megbízhatósági készletmodell matematikai formában általánosan úgy fogalmazható meg, hogy a vizsgált $[0, T]$ rendelési periódusban a t időpontig ($0 \leq t \leq T$) $a(t)$ a kereslet nagysága és $b(t)$ a beérkezés. Ezek általában a döntéshozatal időpontjában sok előre nem ismert tényezőtől függenek, sztochasztikus folyamatoknak tekinthetők. A periódus induló készlet szintjét M jelöli. Az egész periódus folyamán nem fordul elő hiány, ha minden $0 \leq t \leq T$ esetén érvényes az $a(t) \leq b(t) + M$ egyenlőtlenség, azaz a folyamatos ellátás valószínűsége:

$$h(M) = P[a(t) - b(t) \leq M, 0 \leq t \leq T], \quad (1)$$

mely M függvénye. Az (1) kifejezés adja a megbízhatóság mértékét, melynek legalább az előírt $1 - \varepsilon$ szintet el kell érni. Az $1 - \varepsilon$ megbízhatósági szint egy cikkenként (vagy cikkesoportonként) előírt paraméter, értéke a gyakorlatban 0,7 és 0,99 között van, szintjének rögzítéséről a 4. pontban részletes elemzést közlünk.

A megbízhatósági feltétel mellett kell az induló készlet szintet minimalizálni. Ezen feltételes szélsőérték feladat megoldása megegyezik a

$$h(M) = 1 - \varepsilon \quad (2)$$

ún. megbízhatósági egyenlet megoldásával, ha az (1) szerinti $h(M)$ valószínűség M szigorúan monoton növekvő, folytonos függvénye, ami a gyakorlatban általában teljesül.

A megbízhatósági modellek a kereslet $a(t)$, illetve a beérkezés $b(t)$ folyamatának modellezésében különböznek a gyakorlatban ekőforduló sokféle esetnek megfelelően. A következő pontban áttekintést adunk a korábbi és az újonnan kidolgozott modell-változatokról.

3. Megbízhatósági készletmodellek és újabb általánosított változatai

A hazai irodalomban először ZIERMANN [34] és RÉNYI—ZIERMANN [32] foglalkozott készletmodellekkel. PRÉKOPA [28] 1961-ben és ZIERMANN [35] 1963-ban közölte az első megbízhatósági készletmodellt, melyben a kereslet ismert, egyenletes, c intenzitású, azaz

$$a(t) = ct \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

A T hosszúságú periódus keresletének kielégítésére $R = cT$ nagyságú rendeltetést adnak fel, melyet n (ismert) alkalommal egyenlő, cT/n nagyságú tételekben szállítanak be. A modell azt az esetet tárgyalja, amikor a beszállítás véletlen időpontokra esik, melyekről előzetes információ nem áll rendelkezésre. Kézenfekvő az a feltételezés, hogy nincsenek kitüntetett részintervallumok, melyekben kisebb vagy nagyobb a beszállítás valószínűsége. Egyenlő hosszúságú intervallumokhoz egyenlő valószínűségek tartoznak. Így tehát a beérkezési időpontok modellje a következő: válasszunk egymástól függetlenül n számú véletlen pontot, melyek mindegyike egyenletes eloszlású a $[0, T]$ intervallumon. Rendezzük ezeket növekvő sorrendbe, az így kapott pontok adják a lehetséges beérkezési időpontok egy realizációját.

A fenti modell esetén az optimális induló készletszint nagyságára adott közelítő formula

$$M \approx cT \sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{1}{\varepsilon}}, \quad (4)$$

míg a pontos megoldás a (2) egyenletnek megfelelő

$$1 - \frac{M}{cT} \sum_{i=0}^K \binom{n}{i} \left(1 - \frac{M}{cT} - \frac{i}{n}\right)^{n-i} \left(\frac{M}{cT} + \frac{i}{n}\right)^{i-1} = 1 - \varepsilon \quad (5)$$

egyenlet megoldása, ahol K az a legkisebb egész, melyre $K \leq n[1 - M/(cT)]$.

PRÉKOPA ún. véletlen ütemezésű beérkezési folyamat modellje [26] a fentiek-től abban különbözik, hogy a beérkező tétel nagyságok is véletlen jellegűek. Van egy $0 \leq \delta \leq cT/n$ minimális mennyiség, mely minden alkalommal biztosan beérkezik, amikor szállítanak. Az e fölötti mennyiség véletlen és egyenletesen oszlik meg a beszállítási tételek között. Ebben az esetben a (4) közelítő megoldás általánosított alakja (lásd PRÉKOPA [28] és [30]):

$$M \approx cT \sqrt{1 + (1 - \lambda)^2} \sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{1}{\varepsilon}}, \quad (6)$$

ahol λ a beérkező minimális és az átlagos tétel nagyság hányadosa ($\lambda = n\delta/cT$), a beszállítási ütemezettség egyenletességének és megbízhatóságának mérőszáma. A $\lambda = 1$ esetben kapjuk az előző modellt speciális esetként. A $\lambda = 0$ esetre (amikor bármilyen kicsi tétel nagyság előfordulhat) az ún. teljes véletlen ütemezésű modellre LÁSZLÓ [20] és [21] a pontos megoldást az

$$1 - \left(1 - \frac{M}{cT}\right)^n \left(1 + \frac{M}{cT}\right)^{n-1} = 1 - \varepsilon \quad (7)$$

egyenlet megoldásaként adta meg. Az induló készlet szint pontos megoldási módszer $0 < \lambda < 1$ esetén először *László* nem publikált előadásában szerepelt. Cikkünkben ez egy általánosabb modell megoldásának speciális eseteként adódik.

A beérkezés véletlen ütemezésű folyamatához hasonlóan modellezhető a kereslet időbeli lezajlása is. Ha a kereslet m számú tételben jelentkezik a $[0, T]$ időszakon belül, a minimális és az átlagos tétel nagyság hányadosát μ jelöli, továbbá az m számú kereslet időpontja véletlenszerűen, de egyenletesen oszlik meg a $[0, T]$ időintervallumon a beérkezési időpontokhoz hasonlóan akkor az $1 - \varepsilon$ valószínűségi szinthez szükséges induló készlet szint közelít, nagysága PRÉKOPA [28] szerint.

$$M \approx cT \sqrt{\frac{1 + (1 - \lambda)^2}{n} + \frac{1 + (1 - \mu)^2}{m}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \ln \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (8)$$

A pontos megoldás csak speciális esetekre ismert.

Felmerültek olyan kérdések, melyeket az említett modellek nem vizsgálnak, ugyanakkor a gyakorlati készletgazdálkodási feladatok megoldásában lényeges szerepet játszanak. Ez tette szükségessé a továbbiakban ismertetendő új megbízhatósági modell-változatok kidolgozását. Ezek egyszerűen figyelembe veszik a beérkező tétel nagyságok eloszlását és nemcsak egyenletes eloszlást engednek meg, másrészt azt is tekintetbe veszik, hogy a kereslet a döntéshozatal időpontjában a hosszú tervezési időszak miatt pontosan még nem becsülhető, így a véletlen hatásokat is figyelembe kell venni a biztonsági készlet tervezésénél. A harmadik eset az, amikor a beszállítás és (vagy) a felhasználás folyamatos és véletlen ingadozású az intenzitása.

A vállalati számítógépes készletnyilvántartási rendszerek általában rögzítik és archiválják a raktárba érkező tételek nagyságát. A megőrzött információt fel lehet használni a következő periódusban esedékes véletlen nagyságú beszállítási tételek eloszlásának becslésére és így a beérkezési folyamat pontosabb leírására. Ehhez azonban a véletlen ütemezésű beérkezési folyamat PRÉKOPA [28]-féle modelljének általánosítása szükséges.

A beérkező tétel nagyságok eloszlása az általánosított modellben tetszőleges lehet. Jelöljük az i -edik alkalommal beérkező tétel nagyságát γ_i -vel $i = 1, 2, \dots, n$, melynek eloszlását a periódusok tényadatai vagy egyéb hipotézis alapján adhatjuk meg. A beérkezési időpontokat itt is egyenletes eloszlású véletlen pontoknak tételezzük fel, mint a korábbi modelleknél.

A vizsgált $[0, T]$ periódus cT kereslete és a megrendelt R össz mennyiség nem szükségképpen egyezik meg, hiszen a kereslet várható alakulása, a c intenzitás értéke nem becsülhető pontosan. Jelölje a $[0, T]$ periódus keresletének és rendelésének a hányadosát α , melyről először feltételezzük, hogy rögzített pozitív szám. A folyamatos ellátás (1) szerinti valószínűségét adott M induló készlet szint esetén a következő formában tudjuk megadni

$$h(M) = 1 - \left(1 - \frac{M}{\alpha R}\right) - \frac{M}{\alpha R n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \int_0^{n(\alpha R - M)} \left(\frac{M + x}{\alpha R}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{M + x}{\alpha R}\right)^{n-k} g_k(x) dx, \quad (9)$$

ahol $g_k(x)$ jelöli a $\sum_{i=1}^k \gamma_i$ valószínűségi változó, azaz az első k beérkezési tétel összegének sűrűségfüggvényét, melyet mint említettünk a korábbi periódusok tényadatai, vagy egyéb hipotézis alapján tudunk becsülni. A (9) kifejezést abban az esetben tudjuk igazolni, ha a γ_i ($i = 1, \dots, n$) valószínűségi változók felcserélhető növekményűek, azaz $n!$ permutációk mindegyikének azonos az együttes eloszlása. A gyakorlatilag fontos esetekben, pl. tetszőleges eloszlású független tételnagyaságok vagy a PRÉKOPA [28] által definiált véletlen ütemezésű beérkezési folyamat esetén ez a feltétel teljesül. A tétel bizonyítása és a feltételek részletes tárgyalása KELLE [16] cikkében és [19] tanulmányában szerepel.

A (9) kifejezés az M szigorúan monoton növekvő folytonos függvénye, így egy előírt $1 - \varepsilon$ megbízhatósági szinthez tartozó induló készlet szint nagyságát a $h(M) = 1 - \varepsilon$ egyenlet megoldása adja. A szigorú monotonitás miatt bármelyik iterációs egyenletmegoldó módszerrel néhány lépésben 0,01-os pontosságot érhetünk el, induló pontként pl. a (4) közelítést választva. A $g_k(x)$ sűrűségfüggvényt a gyakorlatban általában a d_k^i tényadatokkal és azok p_k^i relatív gyakoriságának segítségével közelítjük ($i = 1, \dots, m_k$), a (9) kifejezésben szereplő integrált a következő összeggel helyettesítve

$$\sum_{\substack{d_k^i < n(\alpha R - M) \\ i=1, \dots, m_k}} \left(\frac{M + d_k^i/n}{\alpha R} \right)^{k-1} \left(1 - \frac{M + d_k^i/n}{\alpha R} \right)^{n-k} p_k^i. \quad (10)$$

Amennyiben a beérkezési időpontok eloszlása nem tekinthető egyenletesnek a $[0, T]$ intervallumon, a fenti modell transzformálható arra az esetre, melyben a γ_i tetszőleges eloszlású véletlen számok az egymást követő beérkezési időpontok közötti időtartamokat képviselik (illetve γ_1 a 0-tól az első beérkezésig terjedő időtartamot), melyek eloszlása pl. a számítógépes készletnyilvántartási rendszer archivált adatai alapján becsülhető. Ez esetben a beérkező tételnagyaságok eloszlását kell egyenletesnek tekinteni.

Abban az esetben, amikor a véletlen beérkezési időpontok és a véletlen tételnagyaságok sorozatának egyike sem tekinthető egyenletes eloszlásúnak, sokkal bonyolultabb modell-konstrukcióra és megoldási módszerre van szükség. Egy ilyen modellt közöl PRÉKOPA [29], melynek szimulációs módszert is felhasználó megoldása KELLE [10] és PRÉKOPA—KELLE [31] cikkben szerepel.

A biztonsági készlet tervezéséhez hosszú időszakra előre kell becsülni a kereslet várható alakulását. Gyakran csak statisztikai előrejelzésre számíthatunk, ekkor a kereslet és ezzel együtt a kereslet és a rendelés α hányadosát valószínűségi változónak kell tekinteni. Ha az α eloszlását ismerjük, sűrűségfüggvénye $f(x)$, a teljes valószínűség tételének felhasználásával egyszerűen ki tudjuk fejezni a folyamatos ellátás valószínűségét, a (9) kifejezést felhasználva az $\int h(M | \alpha = x) f(x) dx$ alakban, ahol $h(M | \alpha = x)$ azt jelenti, hogy a $h(M)$ (9) vagy (10) szerinti alakjában α helyébe mindenütt az x változó kerül (feltételes valószínűség). A gyakorlatban α eloszlását nehéz megadni. A kereslet nagyságának becslésére használt statisztikai előrejelző módszerek ugyanakkor a $\bar{c}T$ várható érték mellett a szórás becslését is szolgáltadják. Ezekből a valószínűségi változó várható értékét és szórását is meg tudjuk adni. Jelölje ezt m és s . Ha a normális eloszlással való közelítés elfogadható, a folyamatos ellátást $1 - \varepsilon$ valószínűséggel biztosító induló készlet szint értéke a következő egyszerű

formulával jól közelíthető

$$M \approx \bar{c}T \left\{ \frac{m-1}{2(1-ns^2)} + \sqrt{\left[\frac{m-1}{2(1-ns^2)} \right]^2 + \frac{\ln 1/\varepsilon}{2n(1-ns^2)}} \right\}, \quad (11)$$

ha $s < 1/\sqrt{n}$ teljesül, ellenkező esetben nem tételezhetjük fel, hogy α eloszlása normális. Ha a rendelés nagysága megegyezik a $\bar{c}T$ várható kereslettel, az m értéke 1. A (11) kifejezés a gyakran alkalmazott (4) közelítő formula általánosított változata.

A gyakorlatban a beérkezések olyan sűrűn is előfordulhatnak, hogy az folyamatosnak tekinthető. Az egyenletes intenzitású beérkezést (vagy hasonlóan a keresletet is) véletlen jellegű zavaró tényezők módosíthatják. Ha ezek függetlenek és normális eloszlással közelíthetők, melynek szórásnégyzete az idő múlásával egyenes arányban nő, akkor a folyamatos ellátást $1 - \varepsilon$ valószínűséggel biztosító készlet szint értékét NÉMETH [25] az

$$M = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \cdot \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (12)$$

alakban fejezte ki, azon feltétel mellett, hogy a beérkezés m_1 és a kereslet m_2 átlagos intenzitása egyenlő. A megfelelő szórásokat s_1 , illetve s_2 jelöli, Φ^{-1} pedig a standardizált normális eloszlásfüggvény inverze.

Amennyiben a két folyamat átlagos intenzitása nem egyezik meg, vagy bármelyikük véletlen jellegű, a döntéshozatal időpontjában pontosan nem becsülhető, akkor a (12) formula nem alkalmazható. Ezekre az esetekre való általánosítás KELLE [15] cikkében szerepel. Adott M induló készlet szint esetén a folyamatos ellátás valószínűsége

$$h(M) = \Phi \left(\frac{M - m_1 + m_2}{s\sqrt{T}} \right) - e^{-\frac{2M(m_2 - m_1)}{s^2}} \Phi \left(\frac{-M - m_1 + m_2}{s\sqrt{T}} \right), \quad (13)$$

ahol $s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$, Φ pedig a standardizált normális eloszlásfüggvény. Ha valamelyik paraméter, pl. a kereslet m_2 átlagos intenzitása valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor a teljes valószínűség tétele szerint a folyamatos ellátás valószínűsége az $\int h(M) | m_2 = x f(x) dx$ alakban fejezhető ki. Az adott $1 - \varepsilon$ valószínűséget biztosító induló készlet szintet mindegyik esetben ki lehet számítani úgy, hogy a (2) megbízhatósági egyenletet iterációs eljárással megoldjuk.

4. A készletek elemzése a megbízhatósági készletmodellek alapján

A készletek elemzésére hazánkban eddig PRÉKOPA [28] véletlen ütemezésű beszállítási modelljét alkalmazták a leggyakrabban, annak (6) alatti közelítő megoldása alapján. A modell fontossága miatt mellékeljük a pontos megoldások táblázatát, összehasonlítva a közelítő megoldásokkal. (1. táblázat) Az egysegnyi nagyságú kereslethez tartozó M induló készlet szint, mely pontosan

1. táblázat

1 - ε =		0,75					0,80				
		λ = 0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
4	P:	0,470	0,434	0,406	0,387	0,382	0,509	0,469	0,438	0,418	0,412
	K:	0,589	0,520	0,465	0,429	0,416	0,634	0,561	0,501	0,462	0,449
	H:	25,1	19,8	14,7	10,9	8,9	24,7	19,5	14,5	10,5	8,7
5	P:	0,431	0,396	0,368	0,349	0,343	0,466	0,428	0,397	0,378	0,370
	K:	0,526	0,465	0,416	0,384	0,372	0,567	0,501	0,449	0,414	0,401
	H:	22,2	17,7	13,2	9,9	8,5	21,6	17,3	12,9	9,5	8,3
6	P:	0,400	0,366	0,339	0,321	0,315	0,433	0,396	0,366	0,347	0,341
	K:	0,481	0,425	0,380	0,350	0,340	0,518	0,458	0,409	0,377	0,366
	H:	20,0	16,1	12,1	9,1	8,1	19,5	15,7	11,8	8,7	7,5
7	P:	0,376	0,342	0,316	0,299	0,293	0,407	0,370	0,342	0,323	0,317
	K:	0,445	0,393	0,352	0,324	0,315	0,479	0,424	0,379	0,349	0,339
	H:	18,3	14,8	11,2	8,5	7,4	17,8	14,4	10,9	8,1	6,8
8	P:	0,356	0,323	0,298	0,281	0,276	0,385	0,350	0,322	0,304	0,298
	K:	0,416	0,368	0,329	0,303	0,294	0,448	0,396	0,355	0,327	0,317
	H:	17,0	13,9	10,5	7,9	6,8	16,5	13,4	10,2	7,5	6,4
9	P:	0,338	0,307	0,282	0,266	0,261	0,366	0,332	0,305	0,288	0,282
	K:	0,392	0,347	0,310	0,286	0,278	0,423	0,374	0,334	0,308	0,299
	H:	16,0	13,0	9,9	7,5	6,4	15,4	12,6	9,6	7,1	6,1
10	P:	0,324	0,293	0,269	0,253	0,248	0,350	0,317	0,291	0,274	0,268
	K:	0,372	0,329	0,294	0,271	0,263	0,401	0,355	0,317	0,292	0,284
	H:	15,1	12,4	9,4	7,1	6,1	14,5	11,9	9,1	6,8	5,8
11	P:	0,311	0,281	0,258	0,242	0,237	0,336	0,304	0,278	0,262	0,256
	K:	0,355	0,314	0,281	0,259	0,251	0,382	0,338	0,302	0,279	0,270
	H:	14,3	11,8	9,0	6,8	5,9	13,8	11,3	8,6	6,5	5,6
12	P:	0,299	0,270	0,247	0,233	0,227	0,324	0,292	0,268	0,251	0,246
	K:	0,340	0,300	0,269	0,248	0,240	0,366	0,324	0,290	0,267	0,259
	H:	13,6	11,2	8,6	6,5	5,6	13,1	10,8	8,2	6,2	5,3
13	P:	0,289	0,261	0,238	0,224	0,219	0,313	0,282	0,258	0,242	0,237
	K:	0,327	0,289	0,258	0,238	0,231	0,352	0,311	0,278	0,256	0,249
	H:	13,0	10,8	8,3	6,3	5,4	12,5	10,3	7,9	5,9	5,1
14	P:	0,280	0,252	0,230	0,216	0,211	0,303	0,273	0,249	0,234	0,229
	K:	0,315	0,278	0,249	0,229	0,223	0,339	0,300	0,268	0,247	0,240
	H:	12,5	10,4	8,0	6,1	5,2	12,0	9,9	7,6	5,7	4,9
15	P:	0,271	0,244	0,223	0,209	0,205	0,294	0,264	0,241	0,226	0,221
	K:	0,304	0,269	0,240	0,222	0,215	0,328	0,290	0,259	0,239	0,232
	H:	12,1	10,0	7,7	5,9	5,0	11,6	9,6	7,3	5,5	4,7
16	P:	0,264	0,237	0,217	0,203	0,198	0,285	0,257	0,234	0,219	0,214
	K:	0,294	0,260	0,233	0,215	0,208	0,317	0,280	0,251	0,231	0,224
	H:	11,6	9,7	7,4	5,7	4,9	11,2	9,3	7,1	5,4	4,6
17	P:	0,257	0,231	0,211	0,197	0,193	0,278	0,250	0,228	0,213	0,208
	K:	0,286	0,252	0,226	0,208	0,202	0,308	0,272	0,243	0,224	0,218
	H:	11,3	9,4	7,2	5,5	4,7	10,8	9,0	6,9	5,2	4,5
18	P:	0,250	0,225	0,205	0,192	0,188	0,271	0,243	0,222	0,207	0,203
	K:	0,277	0,245	0,219	0,202	0,196	0,299	0,264	0,236	0,218	0,211
	H:	10,9	9,1	7,0	5,4	4,6	10,4	8,7	6,7	5,0	4,3
19	P:	0,244	0,219	0,200	0,187	0,183	0,264	0,237	0,216	0,202	0,197
	K:	0,270	0,239	0,214	0,197	0,191	0,291	0,257	0,230	0,212	0,206
	H:	10,6	8,8	6,8	5,2	4,5	10,1	8,4	6,5	4,9	4,2

0,85					0,90				
0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
0,553	0,509	0,476	0,455	0,447	0,606	0,558	0,522	0,501	0,493
0,689	0,609	0,544	0,502	0,487	0,759	0,671	0,600	0,553	0,536
24,6	19,5	14,4	10,3	8,9	25,2	20,2	14,8	10,3	8,8
0,507	0,465	0,432	0,411	0,404	0,557	0,510	0,475	0,453	0,447
0,616	0,544	0,449	0,436	0,679	0,600	0,536	0,536	0,495	0,480
21,4	17,2	12,8	9,2	7,9	21,7	17,5	13,0	9,1	7,3
0,472	0,430	0,398	0,378	0,372	0,519	0,473	0,439	0,418	0,410
0,562	0,497	0,445	0,410	0,398	0,619	0,548	0,490	0,452	0,438
19,2	15,5	11,6	8,4	7,0	19,3	15,7	11,6	8,1	6,7
0,443	0,403	0,372	0,352	0,346	0,488	0,443	0,410	0,389	0,382
0,521	0,460	0,412	0,379	0,368	0,573	0,507	0,453	0,418	0,406
17,5	14,2	10,6	7,7	6,5	17,5	14,4	10,6	7,5	6,3
0,419	0,380	0,350	0,331	0,324	0,462	0,419	0,386	0,366	0,358
0,487	0,430	0,385	0,355	0,344	0,536	0,474	0,424	0,391	0,379
16,2	13,2	9,9	7,2	6,1	16,1	13,2	9,8	7,0	5,9
0,399	0,361	0,332	0,313	0,307	0,440	0,398	0,366	0,346	0,339
0,459	0,406	0,363	0,335	0,325	0,506	0,447	0,400	0,369	0,358
15,1	12,3	9,3	6,8	5,8	14,9	12,3	9,2	6,6	5,5
0,382	0,345	0,317	0,298	0,292	0,421	0,380	0,349	0,329	0,323
0,435	0,385	0,344	0,317	0,308	0,480	0,424	0,379	0,350	0,339
14,1	11,6	8,8	6,4	5,5	14,0	11,5	8,6	6,2	5,2
0,366	0,331	0,303	0,285	0,279	0,404	0,365	0,334	0,315	0,308
0,415	0,367	0,328	0,303	0,294	0,457	0,404	0,362	0,333	0,324
13,4	11,0	8,3	6,1	5,2	13,2	10,9	8,2	5,9	4,9
0,353	0,318	0,291	0,274	0,268	0,389	0,351	0,321	0,302	0,296
0,398	0,351	0,314	0,290	0,281	0,438	0,387	0,346	0,319	0,310
12,7	10,5	7,9	5,9	5,0	12,5	10,3	7,8	5,6	4,7
0,341	0,307	0,281	0,264	0,258	0,376	0,339	0,310	0,291	0,285
0,382	0,338	0,302	0,278	0,270	0,421	0,372	0,333	0,307	0,298
12,1	10,0	7,6	5,6	4,8	11,9	9,8	7,4	5,4	4,5
0,330	0,297	0,271	0,254	0,249	0,364	0,328	0,299	0,281	0,275
0,368	0,325	0,291	0,268	0,260	0,405	0,358	0,321	0,296	0,287
11,6	9,6	7,3	5,4	4,6	11,4	9,4	7,1	5,2	4,3
0,320	0,288	0,263	0,246	0,241	0,353	0,318	0,290	0,272	0,266
0,356	0,314	0,281	0,259	0,251	0,392	0,346	0,310	0,286	0,277
11,2	9,2	7,0	5,2	4,5	10,9	9,0	6,8	5,0	4,2
0,311	0,279	0,255	0,239	0,233	0,343	0,308	0,281	0,264	0,258
0,344	0,304	0,272	0,251	0,243	0,379	0,335	0,300	0,277	0,268
10,7	8,9	6,8	5,1	4,3	10,5	8,7	6,6	4,8	4,1
0,303	0,272	0,248	0,232	0,227	0,334	0,300	0,274	0,256	0,250
0,334	0,295	0,264	0,243	0,236	0,368	0,325	0,291	0,268	0,260
10,4	8,6	6,6	4,9	4,2	10,1	8,4	6,4	4,7	3,9
0,295	0,265	0,241	0,226	0,221	0,326	0,292	0,266	0,249	0,244
0,325	0,287	0,257	0,237	0,230	0,358	0,316	0,283	0,261	0,253
10,0	8,3	6,4	4,8	4,1	9,8	8,1	6,2	4,5	3,6
0,288	0,258	0,235	0,220	0,215	0,318	0,285	0,260	0,243	0,238
0,316	0,279	0,250	0,230	0,223	0,348	0,308	0,275	0,254	0,246
9,7	8,1	6,2	4,6	4,0	9,4	7,9	6,0	4,4	3,6

1. táblázat

$1 - \varepsilon =$		0,75					0,80				
		$\lambda =$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	0,00	0,25	0,50	0,75
20	P:	0,239	0,214	0,195	0,183	0,178	0,258	0,232	0,211	0,197	0,183
	K:	0,263	0,233	0,208	0,192	0,186	0,284	0,251	0,224	0,207	0,201
	H:	10,3	8,6	6,6	5,1	4,4	9,9	8,2	6,3	4,8	4,1
21	P:	0,233	0,210	0,191	0,178	0,174	0,253	0,227	0,206	0,193	0,188
	K:	0,257	0,227	0,203	0,187	0,182	0,277	0,245	0,219	0,202	0,196
	H:	10,1	8,4	6,5	5,0	4,3	9,6	8,0	6,2	4,7	4,0
22	P:	0,229	0,205	0,187	0,174	0,170	0,247	0,222	0,202	0,189	0,184
	K:	0,251	0,222	0,198	0,183	0,178	0,270	0,239	0,214	0,197	0,191
	H:	9,8	8,2	6,3	4,9	4,2	9,4	7,8	6,0	4,6	3,9
23	P:	0,224	0,201	0,183	0,171	0,167	0,242	0,217	0,198	0,185	0,180
	K:	0,245	0,217	0,194	0,179	0,174	0,264	0,234	0,209	0,193	0,187
	H:	9,6	8,0	6,2	4,7	4,1	9,1	7,6	5,9	4,5	3,8
24	P:	0,220	0,197	0,179	0,167	0,163	0,238	0,213	0,194	0,181	0,177
	K:	0,240	0,212	0,190	0,175	0,170	0,259	0,229	0,205	0,189	0,183
	H:	9,4	7,8	6,1	4,6	4,0	8,9	7,4	5,7	4,4	3,6
25	P:	0,216	0,193	0,176	0,164	0,160	0,233	0,209	0,190	0,177	0,173
	K:	0,235	0,208	0,186	0,172	0,167	0,254	0,224	0,201	0,185	0,179
	H:	9,2	7,6	5,9	4,6	3,8	8,7	7,3	5,6	4,3	3,5

$1 - \varepsilon$ valószínűséggel biztosítja a folyamatos ellátást, a (9) speciális eseteként adódik (l. KELLE [16, 19]), mint a következő egyenlet megoldása:

$$(1 - M)^n + M \sum_{k=1}^r k \binom{n}{k} \binom{n-1}{k} \int_0^{a_k} V_k^{k-1} (1 - V_k)^{n-k} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} dx = \varepsilon, \quad (14)$$

ahol $V_k = M + (1 - \lambda)x + \lambda k/n$, $a_k = \min \left\{ \frac{1 - M - \lambda \frac{k}{n}}{1 - \lambda}, 1 \right\}$ és $r = \min \left\{ \frac{n}{\lambda} (1 - M), n - 1 \right\}$; $\lambda = 0$ esetén $r = n - 1$ és $\lambda = 1$ esetén $a_k = 1$.

Az 1. táblázatban különböző n (a beérkezések várható száma), λ (a minimális és az átlagos beérkező tétel nagyság hányadosa) esetén megadjuk, hogy a rendelési periódus összegigényének hányadrészét kell induló készletként tartani, hogy az ellátás $1 - \varepsilon$ valószínűséggel folyamatos legyen (különböző $1 - \varepsilon$ paraméterekre). Minden n értékre P jelöli a pontos megoldást (14) alapján, K jelöli a közelítő megoldást (6) alapján, H pedig a közelítés relatív százalékos hibáját $H = (K - P)/P \cdot 100$.

Mint láthatjuk, kis n értékek esetén a közelítés hibája nagy. Minden esetben a közelítő formula a megbízhatóbb irányba torzít, ezzel magyarázható, hogy a tapasztalatok szerint a (6) formula alkalmazásakor az $1 - \varepsilon$ paramétert a gyakorlatban alacsonyra kellett választani. A táblázat mutatja, hogy $n < 10$ esetén feltétlenül a pontos megoldást kell felhasználni a közelítés nagy hibája miatt. (Ez a gyakorlatban legtöbbször előforduló eset.)

(folytatás)

0,85					0,90				
0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
0,281	0,252	0,230	0,215	0,210	0,311	0,279	0,254	0,237	0,232
0,308	0,272	0,243	0,224	0,218	0,339	0,300	0,268	0,247	0,240
9,5	7,9	6,0	4,5	3,9	9,2	7,6	5,8	4,3	3,5
0,275	0,247	0,224	0,210	0,205	0,304	0,272	0,248	0,232	0,226
0,301	0,266	0,238	0,219	0,213	0,331	0,293	0,262	0,241	0,234
9,2	7,7	5,9	4,4	3,6	8,9	7,4	5,6	4,2	3,4
0,269	0,242	0,220	0,205	0,201	0,298	0,267	0,242	0,227	0,221
0,294	0,260	0,232	0,214	0,208	0,323	0,286	0,256	0,236	0,229
9,0	7,5	5,7	4,3	3,5	8,7	7,2	5,5	4,0	3,3
0,264	0,237	0,215	0,201	0,196	0,292	0,261	0,237	0,222	0,217
0,287	0,254	0,227	0,209	0,203	0,316	0,280	0,250	0,231	0,224
8,7	7,3	5,6	4,2	3,4	8,4	7,0	5,4	4,0	3,2
0,259	0,232	0,211	0,197	0,192	0,286	0,256	0,233	0,217	0,212
0,281	0,249	0,222	0,205	0,199	0,310	0,274	0,245	0,226	0,219
8,5	7,1	5,5	4,1	3,4	8,2	6,8	5,2	3,9	3,2
0,254	0,228	0,207	0,193	0,189	0,281	0,251	0,228	0,213	0,208
0,275	0,243	0,218	0,201	0,195	0,303	0,268	0,240	0,221	0,215
8,3	6,9	5,3	4,0	3,3	8,0	6,7	5,1	3,8	3,1

Az 1. táblázatból a rendelés-beérkezési folyamat hatásait jól elemezhetjük. Ha periódusonként a beérkezések száma nő, akkor a biztonsági készlet nagysága csökkenthető. Tehát a szállítási ütemezés még abban az esetben is előnyös, ha pontos időbeli ütemezést nem vállal a szállító. Ha a beérkezések száma periódusonként a duplájára nő, akkor a biztonsági készlet átlagosan 30%-kal csökkenthető. A szállítási tétel nagyságok is jelentős befolyást gyakorolnak. Ha a tétel nagyságokra alsó korlátot tudunk szabni, pl. a minimális tétel nagyság nem kisebb az átlagos tétel nagyság felénél ($\lambda \geq 1/2$), akkor átlagosan 18%-kal alacsonyabb biztonsági készlet szükséges, mint abban az esetben, ha a véletlen tétel nagyságok tetszőlegesen lehetnek ($\lambda = 0$). Egyenlő nagyságú beérkezési tételek esetén ($\lambda = 1$) ez a csökkenés 35%-os is lehet. A biztonsági készlet szint csökkentéséből származó készlet tartási költségek csökkenése kiszámítható és a beérkezési folyamat módosításának költségkihatásai elemezhetők.

Az 1 — ε -al jelölt biztonsági szint a folyamatos anyagellátás valószínűségét jelenti. Ennek kívánt nagyságát gazdaságossági megfontolások alapján cikkenként vagy cikkesoportonként külön-külön kell megadni. Ha 1-hez közeli valószínűséget kívánunk, akkor magas lesz a biztonsági készlet szint nagysága. Ez a készlet tartási költséget jelentősen növeli. Alacsony valószínűségi szint esetén a készlet tartás költségei a nagyobb valószínűséggel (gyakrabban) előforduló hiány miatti költségek jelentősen megemelkednek. Cél az, hogy a készlet tartásból és a hiányból adódó költségek várható értékének összege minimális legyen. Ha a készlet tartás és hiány költsége mennyiség- és időarányos lineáris függvény (c_1 , ill. c_2 költség tényezővel) és a két költség tényező arányát ismerjük, akkor ki lehet számítani a költségminimum esetén adódó biztonsági szintet és ezt az 1 — ε értéket célszerű a vizsgált cikk kívánt biztonsági szintjeként rögzíteni:

2. táblázat

c_2/c_1	1	2	3	4	6	10	20	40	100	500
$1 - \varepsilon$	0,5	0,66	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,975	0,99	0,998

Adott M (az összkéréslet arányában kifejezett) induló készlet esetén ki tudjuk számítani a hiány várható nagyságát, idejét, az átlagos és a maximális készletszint várható értékét. Ez a biztonsági készletszint meghatározásához további elemzési lehetőségeket ad. Példaként az $M = 0,3$ esetben, azaz ha a rendelési periódus fogyásának 30%-a az induló készlet, ezek az értékek százaalakban kifejezve $n = 6$ és $n = 12$, $\lambda = 1$ esetén a következők:

3. táblázat

n	M	$1 - \varepsilon$	Hiány		Átlagos készlet	Maximális készlet
			ideje	nagysága		
6	30	0,73	2,6	1,9	30	53,1
12	30	0,92	0,5	0,1	30	43,4

Amennyiben az igény nem folyamatosan jelentkezik, hanem a beérkezés folyamatához hasonlóan több tételben, előre nem ismert időpontokban, de rögzített m számú, egyenlő nagyságú tételben, akkor ezek az értékek jelentősen módosulnak:

4. táblázat

n	m	M	$1 - \varepsilon$	Hiány		Átlagos készlet	Maximális készlet
				ideje	nagysága		
6	6	30	0,65	4,5	8,5	30	61,3
12	12	30	0,81	1,7	3,1	30	54,3

Ha az n és m értéke különbözik, akkor csak közelítő értékeket tudunk adni. Adott $1 - \varepsilon$ biztonsági szinthez tartozó induló készletnagyságot, a biztonsági készlet szükséges nagyságát is csak közelítő formulával tudjuk meghatározni.

A folyamatos anyagellátáshoz szükséges készletszintet a megelőző periódusra feladott rendelés alakítja ki, ezért az induló készletszintet egy periódussal előre meg kell tervezni és ez alapján kell rendelni. A rendelési periódus hossza gyakran olyan nagy, hogy egy periódussal előre az anyagfelhasználás várható intenzitására csak durva becslés adható. Ebben az esetben mind az igény mind a beérkezés folyamatának véletlen jellegét figyelembe kell venni az induló készletszint tervezésénél, mert egyik folyamatra sem rendelkeznünk elegendő pontos információval a döntéshozatal (rendelés) időpontjában.

Az előző pontban a (9) vagy (10) alatti kifejezést és a teljes valószínűség tételét felhasználva meghatározható az adott $1 - \varepsilon$ biztonsági szinthez szükséges induló készlet véletlen ütemezésű beérkezés és folyamatos, véletlen inten-

zítású felhasználási igény esetén. A beérkezési folyamat előzőekben leírt paraméterei mellett azonban az igény intenzitásának eloszlását is ismerni kell. A gyakorlatban az intenzitás m várható értékére (az egységnyi idő alatti várható igényre) és s szórására (mely az előrejelzés pontosságát jellemzi) tudunk becslést adni. Az igényfolyamat statisztikai előrejelzésénél ezeket az értékeket az eljárás folyamán meghatározzák. Az m és s paraméterű normális eloszlással közelítve a (11) formulával tudjuk kiszámítani a szükséges biztonsági készlet nagyságát. Ez azt mutatja, hogy a szórás növekedésével a szükséges biztonsági készletszint is növekszik. A növekedés üteme a beérkezések n számától is függ. Példaként mellékeljük a következő táblázatot, melyben a szórás a várható érték százalékában van kifejezve ($p = s/m \cdot 100$). A biztonsági készletszintnek az ismert intenzitású igény ($s = 0$) esetén szükséges M szinthez (lásd 1. táblázat $\lambda = 1$ esetén) viszonyított aránya szintén százalékos formában szerepel: $M(s)/M(0)$. 100, ahol $M(s)$ jelöli az s szórás esetén szükséges biztonsági készletszintet. Ez az arány független $1 - \varepsilon$ értékétől.

5. táblázat

$n \backslash p$	1	2,5	5	10	15	20	25
4	0,02	0,12	0,5	2,3	5,1	9,2	15,4
6	0,03	0,18	0,76	3,2	8,2	15,2	26,7
8	0,04	0,24	1,02	4,2	10,2	21,7	41,2
10	0,05	0,30	1,27	5,4	14,7	29,3	63,1
12	0,06	0,36	1,53	6,6	17,2	39,2	82,7

Az 5. táblázat segítségével értékelni tudjuk az igényfolyamat előrejelzésének, a szükséglettervezésnek a fontosságát, a bizonytalan szükségleti prognózis költségkihatásait. A normális eloszlással való közelítés a fenti p -nél nagyobb értékekre a közelítés hibájának nagysága miatt nem engedhető meg, ekkor az eloszlás típusától is függ a biztonsági készlet növekedési aránya.

5. A megbízhatósági készletmodellek alkalmazásának áttekintése

Hazánkban operációkutatási modellek segítségével először *népgazdasági szintű* készletvizsgálatot végeztek. Az Országos Tervhivatal részére 1961-ben PRÉKOPA és ZIERMANN [26] megvizsgálta, hogy a termelés növekedési ütemének megfelelően milyen készletnövekedés indokolt. A vállalati adatok elemzése alapján készült a *Prékopa—Ziermann* modell és *Prékopa* véletlen ütemezésű szállítási modellje, melyek alapján arra a következtetésre jutottak, hogy amennyiben a megrendelések mennyiségének növekedése a beérkezési időpontok számának növekedését vonja maga után, akkor a biztonsági készlet növekedési üteme alacsonyabb lehet a termelés növekedési üteménél. A modellek alapján adódó számszerű értékeket a [26] tanulmány és ZIERMANN [35] cikke tartalmazza.

Kereskedelmi vállalatok áruellátásának matematikai modellezésével hazánkban először RÉNYI és ZIERMANN [32] foglalkozott. Könnyen számítható eljárást adtak a rendelési szint nagyságára, amennyiben két rendelési időpont közötti

kereslet eloszlása ismert és a rendelés egy tételben érkezik be. Alkalmazására cipőboltok áruellátásának vizsgálatával kapcsolatban került sor.

Nagykereskedelmi vállalatok készletgazdálkodásával kapcsolatosan szélesebbkörű alkalmazási eredmények vannak. A TRIÁL és a RAVILL vállalatoknál alkalmazták a Prékopa-féle véletlen szállítási ütemezés modelljét. A Kerinfo és az MTA SZTAKI együttműködésében készült egy számítógépes programrendszer, mely a fogyasztási idősor statisztikai előrejelzését is elvégzi. A kísérletekről VASS [33] cikke számol be, az alkalmazás továbbfejlesztéséről pedig MÓRITZ [23] tanulmányában ír.

Termelőszköz-kereskedelmi vállalatok közül a Metalloglobus vállalatnál van folyamatban a STOMCOS elnevezésű készletgazdálkodási és raktárirányítási programrendszer bevezetése, melyet a VILATI készített. Ismertetése pl. JÁNOKI [8] cikkében szerepel. A rendszerben felhasználható a véletlen ütemezésű beérkezést és felhasználást vizsgáló Prékopa-modell a készletszint meghatározására. A TEK vállalatok feladata a jó áruellátás, központi raktározással kiküszöbölni a beszállítási bizonytalanságokat, ez szintén a megbízhatósági modellek felhasználását indokolja. A programrendszer adaptálására készült rendszertervet a GÁL—KELLE—KOVÁCS [7] tanulmány ismerteti.

Iparvállalatok alapanyag-, tartalékkalkatrész-, ill. késztermék készletezését is egyre több helyen vizsgálták operációkutatási modellek felhasználásával. Az új gazdaságirányítási rendszer a vállalatokat fokozottan érdekeltté teszi a készletszint csökkentésében. Elsőként az Országos Bányagépgyártó Vállalatnál vizsgálták 1968-ban az alapanyagoknak, különösen az idomacéloknak a készletezését. Erről szól NAGY és PRÉKOPA [24] tanulmánya. Kénsavgyárak alapanyag-ellátásának vizsgálatánál került sor LÁSZLÓ [20, 21] ún. teljesen véletlen ütemezésű modelljének alkalmazására. A Hungária Műanyagfeldolgozó Vállalat hengereltacél készleteinek csökkentésére és kedvezőbb beszerzésére alkalmazott operációkutatási modelleket MEGYERI és CHIKÁN [22]. Textilipari alapanyagok, elsősorban festékanyagok készletezésével foglalkoztunk a Pamutnyomóipari Vállalat megbízásából. A korai rendelésfeladás miatt nagy szükség van a keresletek hosszú távú előrejelzésére, mely általában csak statisztikai módszerekkel lehetséges. Az induló készletszint meghatározásánál is lényeges szerepet játszik a kereslet előrejelzésének bizonytalansága. Ehhez a korábbi megbízhatósági modellek új változatának kidolgozására is szükség volt, erről részletesen szól KELLE [18] és [19] cikke, de vázlatos ismertetése a 3. pontban is szerepel.

Tartalékkalkatrészek biztonsági készletszintjének a meghatározása a megbízhatósági készletmodellek jellegzetes alkalmazási területe. A Betonútépítő Vállalat útépítő gépsorainak alkatrészellátását vizsgáltuk az Országos Piacutkutató Intézet munkatársaival együttműködésben. A gazdasági vezetők szerint a készletek összértéke túl magas, ugyanakkor a műszaki szakemberek alkatrészhiányra panaszkodnak. Ennek oka az alkatrészellátás bizonytalansága mellett a várható kereslet nem megfelelő becslése és a készletekre fordítható forgóeszköz nem megfelelő megoszlása a különböző cikkek között. Az alkalmazott statisztikai előrejelző módszerekről és megbízhatósági készletmodellekről és az alkalmazási eredményekről ír a KELEMEN—KELLE [9] tanulmány. A soproni Postaigazgatóság megbízásából karbantartási és szerelési anyagok készletgazdálkodási kérdéseit vizsgálta CHIKÁN—MESZÉNA [4] és ennek kapcsán a megbízhatóság és a kockázat mértékének a kapcsolatát is vizsgálják a költség-tényezőkkel összefüggésben.

Gyártásközi készletek kialakítása fontos szerepet játszik a gyártási folyamat megszervezésében, az egymáshoz kapcsolódó berendezések (gépek, gépsorok) folyamatos anyagellátásában. A gyakorlatban rendszerint a gyártó berendezések előtt raktározzák a félkészterméket. Azt a minimális készletet kívántuk meghatározni a Dunai Vasmű Hideghengerművének termelésirányításához kapcsolódóan, mely előírt valószínűséggel biztosítja a folyamatos termelést technológiai, illetve géphibák miatti véletlen zavarok ellenére. A havi tervezés számára a szükséges gyártásközi készletszint durva becslése is elegendő; PRÉKOPA [28] modelljének (8) változata kielégítő eredményt ad a gyártásközi készletnorma kialakításához. A heti ütemezés számára több információ birtokában a készletezési folyamatok sokkal részletesebben vizsgálhatók. Speciális modelleket dolgoztunk ki, melyek a Hideghengermű termelési sajátosságaihoz alkalmazkodnak (lásd KELLE—MÉSZÁROS [11] tanulmányát és KELLE [12, 13, 14] cikkét).

Alapanyag-, termelőközi- és késztermék-készletek együttesét kezelő átfogó készletgazdálkodási rendszer terve készült el az MKKE Ipargazdasági Tanácsán egy kutatócsoport közreműködésével, melynek a jelen cikk szerzője is tagja volt. A rendszerterv a Gépipari Technológiai Intézet megbízásában készült. A gépipari összeszerelő vállalatok számítógépes készletgazdálkodási rendszerének egy títustervét kívánja megadni, leírása a [3] tanulmányban szerepel. Itt csak azt említjük meg, hogy a feltételektől függően különböző modellek kiválasztását és összekapcsolását irányítja a rendszer. A jelen cikkben ismertetett megbízhatósági készletmodellek döntő szerepet játszanak a különböző szintű raktárak készleteinek meghatározásában.

A Vegyipari Számítástechnikai és Fejlesztési Társulás VIR (Vállalat Irányítási Rendszer) elnevezésű komplex termelésirányítási rendszerében levő készletgazdálkodási alrendszerhez igény-előrejelzési, készlettervezési, gazdálkodási és elemző eljárások készültek az MKKE Matematikai és Számítástudományi Intézetében. A munkacsoportban részt vett a cikk szerzője is. Ebben a rendszerben is jelentős szerepet kapnak a megbízhatósági készletmodellek a készlettervezésben, mint azt az [5] tanulmány részletesen ismerteti. Az utóbbi két rendszer számítógépes megvalósítására eddig még nem került sor.

6. Egy új készletgazdálkodási döntéselőkészítő programrendszer és alkalmazási tapasztalatai

A megbízhatósági készletmodellek felhasználásának kedvező tapasztalatai arra ösztönöztek, hogy a nyugati készletgazdálkodási programcsomagokhoz hasonló általános készletgazdálkodási programrendszert készítsünk a hazai körülményekhez jól igazodó modellek rendszerének beépítésével és a hazai számítógépes készletnyilvántartási rendszerek szokásos felépítéséhez igazodva. A Dunai Vasmű megbízásából készítettük el a GÖMBÖCZ—KELLE—SÉBŐ [6] cikkében részletesebben ismertetett programrendszert, melynek három fő feladata

- a várható kereslet előrejelzése,
- a biztonsági készletszint (és a készletnormák) tervezése,
- rendelési javaslat készítése.

A rendszer kialakításánál felhasználtuk a készletmodellek korábbi hazai alkalmazási tapasztalatait, a hazánkban elérhető külföldi és hazai készletgaz-

dálkodási programcsomagok vizsgálatait (lásd PRÉKOPA—KELLE [27]) és az új modellezési és számítástechnikai eredményeket is.

A programrendszer moduláris felépítésű, az egyes eljárások (modellek számítási algoritmusai, statisztikai módszerek stb.) egymástól függetlenül felépített programblokkok, melyeket a főprogram közös adatstruktúráján keresztül fog össze és kapcsol a készletnyilvántartási rendszerhez. Így a helyi specifikumok elválnak az általános jellegű modellektől, azok könnyen illeszthetők más rendszerekhez, csak az adatstruktúra feltöltését szolgáló programokat kell módosítani. A rendszer könnyen bővíthető, általános jellege és ennek megfelelő moduláris felépítése miatt széleskörűen felhasználható.

A programrendszer PL/I nyelven készült, az első változat az IBM 3031 típusú gép CMS operációs rendszere alatt, míg a másik a DOS rendszer alatt a Dunai Vasmű R 35 típusú számítógépére.

Rendelkezésre álló adatok

A legfontosabb input adatokat a számítógépes készletnyilvántartási rendszer szolgáltatja. Ezeket a rendszer file-struktúrája szerint csoportosítva írjuk le. Az alábbiakban felsorolt adatok a vizsgált cikkek (termékek, anyagok, alkatrészek stb.) mindegyikére külön-külön meg vannak adva. Egymást helyettesítő cikkeket összevontan célszerű kezelni. Mindegyik file mágnesszalagon áll rendelkezésre.

i) *törzsadat file* (aktuális adatok)

- cikk azonosító,
- ABC csoportosítás (kívánt biztonsági szint),
- két rendelésfeladás közötti időtartam (rendelési periódushossz),
- egységár, rendelési, eltarthatósági korlátok stb.

ii) *készletmozgás, készletnyilvántartás file* (archiválva, több évre visszamenően)

- az anyagbeérkezés megvalósulási időpontjai (hónap, nap) és tétel nagyságai (a mennyisége),
- a raktárból való kivételezések (a felhasználások) időpontjai és tétel nagyságai,
- a havi nyitókészletek.

iii) *rendelés, szerződés nyilvántartási file* (aktuális adatok)

- a még nem teljesített rendelések feladásának időpontja és mennyisége,
- a rendelés-visszaigazolásban vállalt időpont vagy határidő, esetleges ütemezés (időpontok és mennyiségek),
- megvalósult ütemezés és szállítási hátralék.

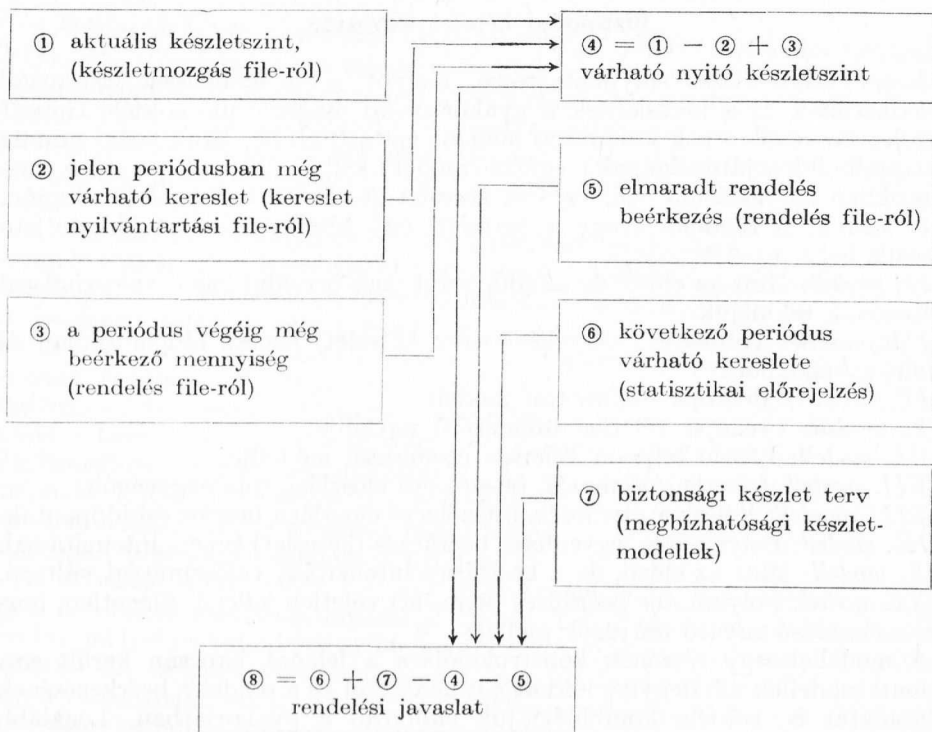
iv) *kereslet nyilvántartási file* (több évre visszamenően)

- a ténylegesen jelentkezett kereslet havi összesítésben,
- a következő rendelési periódus (periódusok) keresletének prognózisa,
- a prognózis megbízhatóságának becslése.

Az iii) és iv) file kiépítése folyamatban van, ezért a programrendszer úgy készült, hogy ezek nélkül is szolgáltat közelítő megoldásokat az ii) file adataiból készült statisztikai jellegű becslések alapján.

Rendelési javaslat készítése

A döntéselőkészítés fő célja a rendelési javaslat elkészítése. Ennek folyamatát az 1. ábra szemlélteti:



1. ábra

Az ①, ②, ③ és ⑤ pontban leírt adatok a jelzett file adataiból egyszerűen nyerhetők, a ④ és ⑧ lépés egy-egy aritmetikai művelet. Fő feladat a ⑥ és ⑦ pont alatt leírt adatok kiszámítása, melyre az igények statisztikai előrejelzésének, illetve a megbízhatósági készletmodellek megoldásának módszerei szolgálnak.

A várható kereslet statisztikai előrejelzése

Az anyagbeszerzés és a készletezési politika kialakításának egyik döntő tényezője a következő rendelési periódus várható keresletének előrejelzése, amit szükséglet-tervezésnek is neveznek. A tervlembontásos szükséglettervezés feltételei a cikkek nagy részénél nincsenek meg, így a készletgazdálkodás programcsomagokhoz hasonlóan az anyagszükségletet is statisztikai módszerekkel lehet előre jelezni a múltbeli adatokból az exponenciális kiegyenlítés technikája alapján (leírását l. pl. BROWN [1, 2]). Ez kis számítási idő- és memóriagényű, általános jellegű módszer, mely sokféle anyag és alkatrész típusra alkalmazható a gyártási, felhasználási sajátosságok figyelembevétele nélkül. Az előrejelzési eljárás a kereslet (felhasználások) néhány éves megfigyelt havi (negyedéves) adatsora alapján becslést készít a következő periódusok várható igényére és a becslés hibájára, a trend- és szezonhatások figyelembevételével, statisztikai módszerek alkalmazásával. A becslési eljárás eredményét tudjuk felhasználni a rendelési javaslat következményeként létrejövő készletek prognózisában.

Biztonsági készlet tervezése

A programrendszer súlyponti része, melybe — a rendelések beérkezési folyamatának és a keresletnek a gyakorlatban megvalósuló sokféle típusát figyelembe véve — sok különböző modellt építettünk be. Ezek közül mindig a vizsgált cikk sajátosságának megfelelő modellt kell kiválasztani az előző periódusokban megvalósuló beérkezés és kereslet statisztikai vizsgálata alapján.

I. modell: A rendelés (vagy a kereslet) egy tételben, ismert időpontban érkezik be.

II. modell: Mint az előző, de az időpontot csak becsülni lehet, valószínűségi változónak tekintjük.

III. modell: Többszöri beérkezés (vagy kereslet) ismert időpontokban és tétel nagyságokban.

IV. modell: Prékopa—Ziermann modell.

V. modell: Prékopa véletlen ütemezésű modellje.

VI. modell: László teljesen véletlen ütemezésű modellje.

VII. modell: Véletlen ütemezés, tetszőleges eloszlású tétel nagyságok.

VIII. modell: Véletlen ütemezés, tetszőleges eloszlású beérkezési időpontok.

IX. modell: Folyamatos, egyenletes beérkezés (kereslet) ismert intenzitással.

X. modell: Mint az előző, de a beérkezés intenzitása valószínűségi változó.

XI. modell: Folyamatos beérkezés (kereslet) véletlen jellegű, független, normális eloszlású zavaró tényezők mellett.

A modellek egy részének konstrukciójára a feladat kapcsán került sor. A fenti modellek mindegyike leírhatja a keresletet és a rendelés beérkezésének folyamatát is, sokféle kombinációjuk előfordul a gyakorlatban. Legalább közelítő megoldást tudunk adni az előírt valószínűséghez tartozó biztonsági (induló) készlet szint nagyságára. Ilyen széles körű modellrendszerre épülő készletgazdálkodási programrendszert korábban nem dolgoztak ki.

A számítási eredmények értékelése

A programrendszer tesztelése a Dunai Vasműben sikeres volt, több tízezer féle anyagra jó eredménnyel futtattuk le. A folyamatos, üzemszerű működtetést a Dunai Vasmű szakemberei vezetik be.

A kereslet várható alakulásának statisztikai előrejelzését az előző 3 év raktári kivételezéseinek (dátum és mennyiség) ismeretében végeztük, ez mágnesszalagon archiválva áll rendelkezésre. Először havi (ritkán fogyó cikkeknel negyedéves) összesítéssel létrehoztuk a három éves idősort. Ebből az első két év adatsorának felhasználásával elvégeztük a statisztikai vizsgálatokat (I. fázis). A cikkek jelentős része mutatott trend és szezonhatást. Elvégeztük az előrejelzést a harmadik évre a szóba jöhető modellek mindegyikével, több paraméter-kombináció választásával. Az előrejelzéseket összehasonlítva a tényadatokkal anyagfajtánként kiválasztottuk a legjobb módszert és paramétereket (II. fázis, szimuláció). Ennek segítségével elvégeztük a negyedik (a most következő) és előrejelzését havi (negyedéves) bontásban.

A ritkán használt cikkek és a strukturális változások esetén kívül (melyet a beépített hibakövető eljárás jelez) az alkalmazott módszerek kielégítő eredményt hoztak. A fontos, nagy értékű cikkek esetén azonban a terveken alapuló pontosabb előrejelzés szükséges.

A biztonsági készlet tervezésénél lényeges szerepet játszik a rendelés beérkezési folyamatának alakulása. A raktárba történt beérkezések előző két évi adatainak (időpontok és tétel nagyságok) felhasználásával becsültük a várható beérkezési időpontot vagy ütemezést és ennek megbízhatóságát. Ezen vizsgálatok szolgáltatták az alapot az automatikus modellválasztáshoz és a modell paramétereinek meghatározásához, bár a külső vezérlés lehetőségét is beépítettük.

A tapasztalatok bizonyították a sok különböző beérkezési és keresleti modellre épülő eljárás szükségességét. Gyakori, hogy a rendelések több tételben érkeznek be, de az ütemezésről előzetes információk nem állnak rendelkezésre. A beérkező tétel nagyságok eloszlását a múltbeli megvalósulások alapján becsültük. Fontosabb cikkeknel a (9), ill. (10) alatt leírt pontos eljárást alkalmaztuk, egyébként a (14) alatti eljárás, ill. $n > 12$ esetén a (6) közelítő formula segítségével terveztük a biztonsági készletet. A hosszú rendelés-átfutási idők miatt a kereslet előrejelzési hibáját is figyelembe kellett venni a (11) alatti általánosított formula alkalmazásával. Az egy tételben és a folyamatosan (naponta) történő beérkezés is sok cikkre jellemző, de az előre nem ismert véletlen hatások itt is gyakran előfordulnak, a beérkezés késése, illetve a beérkezési intenzitás ingadozása gyakori.

A biztonsági szintek előírt $1 - \varepsilon$ értékének megfelelő rögzítése döntő jelentőségű. A cikkeket az ellátás fontossága szempontjából három csoportba célszerű sorolni, melyekre különböző szinteket (pl. 0,75; 0,85; 0,95) írunk elő. Próba-futtatásokat végzünk és amennyiben a javasolt összkészlet értéke nem felel meg a vállalatnak, akkor a szinteket arányosan csökkenteni vagy növelni kell. A rendszer beindításánál ezt a vizsgálatot többször elvégezzük, mindaddig míg az aggregált vállalati célt nem érjük el. Így tudjuk biztosítani a vállalati készletpolitika optimális végrehajtását: a tervezett forgóeszköz olyan arányú szétosztását, mely a folyamatos anyagellátást a lehetőségekhez képest a legjobban biztosítja.

A készletnormák korrigálása a programrendszer alapján lényegében elkészült mindenféle anyagra és termékre. Ebből kitűnt, hogy elegendően magas ellátási biztonság mellett, a készletek átcsoportosításával, a teljes készletmennyiség csökkenthető a kockázatvállalástól függően 5–30%-kal, ami jelentős megtakarítást eredményezhet. A rendelés nyilvántartási file kidolgozásával együtt a rendelési javaslat készítési rendszer üzemszerű beindítása folyamatban van.

(Beérkezett: 1986. február 3-án.)

IRODALOM

1. BROWN, R. G.: *Statistical Forecasting for Inventory Control*. McGraw-Hill, New York 1959.
2. BROWN, R. G.: *Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series*. Prentice Hall N. J. 1963.
3. CHIKÁN A.—BERÁCS J.—KELLE P.—NAGY M.—VASS I.: *Gépipari vállalatok integrált készletgazdálkodási rendszere*. Tanulmány a Gépipari Technológiai Intézet számára (Marx K. Közgazd. Egy. (MKKE) 1976.
4. CHIKÁN A.—MESZÉNA GY.: *Karbantartási — szerelési anyagok készletezése*. Tanulmány, MKKE 1975.
5. CHIKÁN A.—BÁNKI G.—BORLÓI R.—KELLE P.—KULCSÁR T.—MESZÉNA GY.: *Vegyipari vállalatok készlettervezési és elemző eljárásainak rendszerterve*. Tanulmány a VSZFT megbízásából, MKKE 1980.

6. GÖMBÖCZ L.—KELLE P.—SEBŐ A.: Készletgazdálkodási döntéselőkészítő programrendszer a Dunai Vasműben, *Struktúra*, 1981/14.
7. GÁL T.—KELLE P.—KOVÁCS T.: *A STOMCOS anyaggazdálkodási programcsomag alkalmazásának rendszerterve a Metalloglobus Vállalat készletgazdálkodási feladataira*. Tanulmány, BME 1977.
8. JÁNOKI L.: A VILATI-ban kifejlesztett STOMCOS számítógépes anyaggazdálkodási és raktárnyilvántartási rendszer, *Termelésirányítás I. Az MTA Műszaki Tudományok Osztálya*, Budapest 1978. 51—65.
9. KELEMEN Z.—KELLE P.: *Gépalkatrész készletgazdálkodási feladatok megoldása I—II*. Tanulmány, a Betonútépítő Vállalat megbízásából készült az Országos Piacutató Intézetben. 1974.
10. KELLE P.: A készletgazdálkodás egy szimulációs modellje. *Számítógépes Rendszer-szimuláció*, MTA Műszaki Tud. Oszt. Bp. 1975.
11. KELLE P.—MÉSZÁROS G.: *A Hideghengermű gyártásközi készleteinek optimalizálása*. Tanulmány, Dunai Vasmű — MTA SZTAKI, 1977.
12. KELLE P.: Stochastische Mehr-Produkt Modelle für die Sicherheitsbestände bei einer Serienfabrikation, *Rostocker Betriebswirtschaftliche Manuscripte*, 20. 1977. 151—161.
13. KELLE P.: Optimális gyártásközi készletek kialakítása. *Termelésirányítás I*, MTA Műszaki Tud. Oszt. Budapest 1978. 81—90.
14. KELLE P.: Stochastische Optimierungsmodelle für die Produktionslager eines Walzwerkes, *Mitteilungen der Math. Gesellschaft d. DDR*, 1978/1. 31—36.
15. KELLE P.: Az alapanyagok keverési arányának és a tárolók nagyságának optimalizálására aszfaltkeverő berendezésekre, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 5. 1979. 249—260.
16. KELLE P.: *Megbízhatósági készletmodellek és alkalmazásuk*. MTA SZTAKI Tanulmányok 107. 1980.
17. KELLE, P.: Chance Constrained Inventory Models and Their Application, BAMBERG O.—OPTIZ W. szerk.: *Methods of Operations Research*, 44. 1981 Athenäum-Hain 607—616.
18. KELLE P.: *Ein neues Modell zur Bestimmung des zur kontinuierlichen Produktion notwendigen Lagerbestandes*, Working Paper, MTA SZTAKI 1972, MO. 2.
19. KELLE P.: Prékopa megbízhatósági készletmodelljének két általánosítása. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 8. 1982.
20. LÁSZLÓ Z.: *Egy teljesen véletlen megbízhatósági jellegű készletmodell*. Kandidátusi értekezés, Veszprém 1970.
21. LÁSZLÓ, Z.: Some recent result concerning reliability type inventory models. PRÉKOPA A. szerk.: *Inventory Control and Water Storage*, Győr 1971. Bolyai J. Math. Soc. — North Holland, Budapest 1973, 179—187.
22. MEGYERI E.—CHIKÁN A.: *A Hungária Műanyagfeldolgozó Vállalat készletgazdálkodásának fejlesztése*. Tanulmány MKKE 1971.
23. MÓRITZ A.: *Kereskedelmi vállalatok tervezésének lehetőségei*. Tanulmány, Kerinforg 1977.
24. NAGY I.—PRÉKOPA A.: *Az Országos Bányagéppártó Vállalat gyáregységeinél végzett készletoptimalizálási vizsgálatokról*. Tanulmány, NIM IGÜSZI, 1968.
25. NÉMETH GY.: Sztochasztikus készletmodellekkel kapcsolatos vizsgálatok. *MTA III. Oszt. Közleményei*, 16. 1971. 133—145.
26. PRÉKOPA A.—ZIERMANN M.: *Tanulmány a folyamatos termelést biztosító legkisebb raktárkészlettel kapcsolatos egyes problémákról*. Országos Terhivatal számára készült tanulmány, Matematikai Kutató Intézet, 1962.
27. PRÉKOPA A.—KELLE P.: *A hazánkban elérhető készletgazdálkodási programrendszerek kritikai elemzése*. Tanulmány a „Szocialista Vállalat” c. MTA Kutatási Főirány témájában, MKKE 1973.
28. PRÉKOPA A.: Reliability equation for an inventory problem and its asymptotic solutions. *Coll. on the Application of Mathematics to Economics*, Bp. 1961, Akadémiai Kiadó, Bp. 1965. 317—327.
29. PRÉKOPA A.: Stochastic Programming Models for Inventory Control and Water Storage Problems, *Inventory Control and Water Storage*, Győr, 1971. Bolyai J. Math. Soc. — North Holland, Budapest 1973. 229—247.
30. PRÉKOPA A.: Generalizations of the Theorems of Smirnov with Application to a Reliability Type Inventory Problem, *Mathematische Operationsforschung und Statistik*, 4. 1973. 283—297.
31. PRÉKOPA A.—KELLE P.: Sztochasztikus programozáson alapuló megbízhatósági jellegű készletmodellek, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 2. 1976. 1—16.
32. RÉNYI A.—ZIERMANN M.: Üzletek áruellátásával kapcsolatos szélsőérték feladatok, *MTA Alk. Mat. Int. Közleményei*, 10. 1961. 495—505.

33. VASS I.: Készletgazdálkodási matematikai modellek alkalmazási problémái. *DATA*, 8. 1972. 195—204
34. ZIERMANN M.: A raktárkészlet pótlásáról II. *MTA Alk. Mat. Int. Közleményei*, 2. 1953. 203—216.
35. ZIERMANN M.: A Szmirnov-tétel alkalmazása egy raktározási problémára, *MTA Mat. Kutató Int. Közleményei*, 8. 1963. 509—516.

INVENTORY CONTROL OF ENTERPRISES USING RELIABILITY TYPE INVENTORY MODELS

Some specifics of the Hungarian inventory control activity and the reliability type inventory models based on them are reviewed together with applications. The models provide for the planning of the minimal inventory level which ensures continuous supply on a prescribed probability considering randomness in delivery and perhaps in demand. Some new model-versions have been formulated for some practical inventory problems. The methods for inventory analysis, decision support and evaluations based on these models and many kinds of applications are mentioned. A brief review is given of a new inventory control program system prepared for a Hungarian firm. The results of applications in the field of demand forecasting, stock planning, ordering and stock forecasting have proven the manifold usefulness of the program system.

УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ ПРЕДПРИЯТИЙ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ИССЛЕДОВАНИЙ ОПЕРАЦИЙ

В статье рассматриваются некоторые особенности экономики запасов в ВНР и основанные на них надежные модели запасов, а также их применение. С их помощью можно планировать тот минимальный уровень запасов, который обеспечивает требующуюся надежность бесперебойного снабжения с учетом поставок, а также, возможно, случайного характера спроса. Даны несколько новых вариантов моделей, разработанных с целью решения практических задач в области запасов. Подчеркиваются возможности анализа запасов, подготовки решений и оценки запасов на основе моделей, а также их применение на венгерских предприятиях, охватывающее широкую область. В общих чертах рассматривается новая система программирования решений по хозяйствованию запасами, подготовленная для одного из крупных венгерских предприятий. Возможность многообразного использования показывает опыт применения в сфере прогнозирования спроса, планирования запасов и составления заявок, а также прогнозирования запасов.

Néhány újabb hazai eredmény a diszkrét programozásban

I. Diszkrét programozási feladatokról általában*

Diszkrét programozási feladat alatt olyan optimalizálási feladatot értünk, ahol a változók, vagy egyesek közülük nem változhatnak egy tartományon belül folytonosan, hanem csak bizonyos (egymástól elkülönült = diszkrét) értékeket vehetnek fel.

A magyar szakkifejezések az angol nyelvű szakirodalomból származnak. Mivel azonban ott sincs mindenben egységes szóhasználat, ezért nálunk sincs. Így a magyarban a diszkrét programozás mellett, mely egyébként a *discrete programming*-ből származik, szokásos még az egészértékű programozás, mely az *integer programming*-ből jön. Ennek egy további származéka az integer programozás, ahol az első szót latinként foghatjuk fel.

Érdekes összehasonlítást tenni a tematikát illetően a diszkrét programozás és a matematikai programozás egyéb ágai között. Amíg a tisztán folytonos problémák esetében élesen megkülönböztetjük a lineáris és nemlineáris programozást, mintegy két külön diszciplínának tekintve a kettőt, addig a diszkrét programozásban nem ez a helyzet. Kétségtelen azonban, hogy mind a mai napig itt is elsőrendű fontosságúak a lineáris feladatok.

Amíg a lineáris programozásban egységesen tudjuk kezelni valamennyi változó típusát (nemnegatív, előjel kötetlen, 0 és 1 között változó stb.), addig nem ez a helyzet a diszkrét programozásban. A változóra tett egészértékűségi követelmény három leggyakoribb alakja a következő:

$$x = 0 \text{ vagy } 1;$$

$$0 \leq x \leq d \text{ és egész};$$

$$0 \leq x \text{ és egész}.$$

Ezen három eset elviekben is különbözik egymástól. Például a harmadik követelmény mellett lineáris feltételek és általános kvadratikus célfüggvény esetén bizonyítható, hogy nem létezik megoldó algoritmus, azaz olyan garantáltan véges eljárás, mely az optimális megoldást szolgáltatná. Ugyanez nyilván nem igaz az első két típusnál, hiszen ott véges sok esetről van csak szó.

Külön fejezetet képeznek az ún. vegyes diszkrét feladatok, ahol a változók egy részére nincs egészértékűségi követelmény. Itt az alkalmazott módszerek elég változatosak és ezek részben el is mossák a határt a diszkrét programozás és a matematikai programozás egyéb ágai között. Példának okáért a *Benders* dekompozíció, mely a lineáris programozásból ismert *Dantzig-Wolfe* dekom-

* A dolgozat az MTA SzTAKI Alkalmazott Matematikai Főosztályán működő Diszkrét Programozási Csoportnak az elméleti téren végzett munkáját foglalja össze.

pozíció duálja, a vegyes változós feladatok megoldását tiszta diszkrét (folytonos változókat nem tartalmazó) és lineáris programozási feladatok sorozatainak megoldására vezeti vissza. Ezért a tiszta diszkrét feladatok hatékony megoldásával közelebb kerülünk a vegyes változós feladatok hatékony megoldásához is.

Minél nagyobb értékeket vehetnek fel a változók, annál inkább elveszti a probléma a diszkrét jellegét, vagyis a megfelelő folytonos feladat optimális megoldásából egyszerű módon (pl. kerekítéssel) származtatott egészértékű megoldás kielégíti egy gyakorlati feladat által támasztott igényeket.

Másfelől, ha a változók felülről korlátosak, akkor a probléma visszavezethető elvben arra az esetre, amikor csak a 0 és az 1 értéket vehetik fel.

Nagyon sok olyan gyakorlati probléma van, amely alternatív döntéseket tartalmaz. Ezeknek diszkrét programozási modellezése esetén a numerikus feladat számos ilyen 0—1 ún. döntési változót fog tartalmazni. (Ugyanis vagy megvalósítunk egy lehetséges alternatívát, vagy nem, közbülső eset nincs, vagy ha volna, az önálló alternatívaként fogható fel.)

Ezek azok az okok, amelyek miatt a diszkrét programozás irodalmában kiemelkedő helyen állnak a csak 0—1 változókat tartalmazó feladatok. Kutatásainkban ugyanezen okok miatt fektettünk mi is igen nagy súlyt az ilyen problémákra.

2. Általános megoldási módszerek

A diszkrét programozás első módszere a híres *Gomory*-eljárás volt. Mindmáig ez az a módszer, amely elméleti szempontból a legtöbbet tudja, nevezetesen az egészértékűségi feltételek az előző fejezetben tárgyalt bármelyik formában megadhatók számára. Azonban a tapasztalat azt mutatja, hogy éppen ezen általánossága miatt (bizonyos ismert kivételektől eltekintve) lassú az eljárás. Ezért hamar megindult a kutatás olyan eljárások irányába, amelyek kevésbé általánosak, de jobban ki tudják használni a probléma speciális tulajdonságait és így hatékonyabbak.

Két jelentős eljáráscsaládot fejlesztettek ki: a korlátozás és szétválasztás típusú módszereket és a leszámplálási eljárásokat. Mindkét módszer elsősorban akkor alkalmazható, ha az összes eseteknek (vagyis az egészértékű változók lehetséges érték kombinációnak) a száma véges. Közös lényegük, hogy végigvizsgálják az összes esetet, de döntő többségüket csak implicit módon. A nemzetközi irodalomban a hetvenes évek közepére rögzült az összefoglaló közös nevük: fakesős eljárás. Az elnevezés onnan ered, hogy az ismétlések elkerülése végett (így biztosítható az eljárás végsége) a megoldások részhalmaiból egy irányított fát építenek fel és ezt járják be, mialatt minden megoldást megvizsgálják (a többséget persze csak implicit módon).

A korlátozás és szétválasztás módszere eredetileg a nemlineáris programozásban született meg, de nagyon sikeresen alkalmazták ezen a területen is. A ma kapható valamennyi kereskedelmi programcsomag ezen az elven alapul. Ennek az az oka, hogy itt a feladat ún. folytonos relaxációjára támaszkodnak, vagyis elhagyják az egészértékűségi követelményeket, csak az előjelre, illetve a változó nagyságára való korlátokat tartják meg. Lineáris feladat esetén így egy lineáris programozási feladatot kapunk. Valamennyi nagyobb számítógépes cég hatékony LP programcsomaggal rendelkezik, így ez viszonylag kis erőbefektetéssel kiterjeszthető volt a diszkrét programozás irányába.

A leszámhlási algoritmusok ugyancsak széleskörben elérhetőek, de kutatók által írt programok formájában. Ennek az az oka, hogy itt a feladat diszkrét tulajdonságai kerülnek előtérbe, nincs feltétlenül szükség hatékony LP-re, amelynek a kifejlesztése önmagában is nagy munka volna.

Természetesen vannak további módszerek is. A teljesség igénye nélkül néhány: dinamikus programozáson alapuló eljárások, az ezekből kifejlesztett csoportelméleti módszer, a Gomory-eljárás nyomán kialakult vágás típusú módszerek stb.

Csoportunk elsősorban a leszámhlási módszerekkel foglalkozott. A módszer elméleti alapjainak egy, a korábbi szerzők munkáin alapuló, azokat továbbfejlesztő tárgyalása található [15]-ben, majd ugyanez még részletesebben [17, 2. fejl.]ben.

A feladat úgy fogalmazható meg, hogy adva van egy véges alaphalmaz és ennek egy implicit módon definiált részhalmaza. Ennek az utóbbinak kell az összes elemét előállítani explicit módon. Az eljárás a rendezett pszeudomegoldás fogalmán alapszik. Teljes matematikai pontosságú felépítése az említett művekben található, itt csak röviden ismertetjük. Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ az alaphalmaz, tehát $|D| < +\infty$. Fel kell tennünk, hogy D elemeit explicit módon ismerjük. Ez nyilván teljesül, ha D az n -dimenziós bináris vektorok halmaza, vagy ütemezési feladatokra gondolva az n elemű permutációk halmaza stb. Legyen $S \subset D$ az implicit módon megadott részhalmaz.

Az algoritmus legfontosabb segédeszközei a tesztek. Általánosan úgy fogalmazhatunk, hogy a teszt egy olyan eljárás, amely egy eldöntendő kérdésre válaszol igennel, vagy nemmel úgy, hogy igen válasz esetén nem téved. Ha például D a bináris vektorok halmaza, akkor egy ilyen jellegzetes kérdés lehet a következő: „Igaz-e, hogy S valamennyi elemében az ötödik komponens értéke 1?” Tehát „igen” válasz esetén az eljárás bizonyította, hogy olyan S -beli vektor, melynek ötödik komponense 0, nem létezik. (Néhány ilyen egyszerű tesztre majd a 4. szakaszban látunk példát.) Az így nyert plusz információt következménynek nevezzük. Ha a példát folytatjuk, akkor most már explicit módon megkövetelhetjük, hogy az ötödik komponens értéke 1 legyen.

Ha a tesztek nem adnak pozitív választ, akkor is megtehetjük, hogy a D halmaznak csak valamely részhalmazát vizsgáljuk. Például csak azokat a vektorokat vizsgáljuk, amelyekben a harmadik komponens értéke 0. Az ilyen értékadását rögzítésnek nevezzük, ellentétben a tesztekkel származókkal, melyek neve lekötés. Azoknak a változóknak a neve, amelyek sem rögzítésben, sem lekötésben nem szerepelnek, szabad változó.

Az értékadások (rögzítések és lekötések) a D alaphalmaznak és ezzel együtt az S halmaznak egy részhalmazát jelölik ki. Ezek a részhalmazok lesznek az említett fa csúcsai. A fa éle egy halmazból, mint csúcsból, a belőle értékadással (rögzítés, lekötés) közvetlenül keletkezett részhalmazhoz vezet.

Az [15]-ben bevezetett új fogalom a rendezett pseudo-megoldás volt, mely a részhalmazokat az őket kijelölő értékadásokkal és az utóbbiak típusával és sorrendjével összekapcsolta.

Az alábbiakban megadjuk az algoritmus vázát, egy algszerű leírási formában.

1. procedure IMPLICIT-LESZÁMLÁLÁS
2. Begin
3. ELSŐITER: = true
4. while ELSŐITER or RÖGZITETT-VÁLTOZÓ do
5. Begin
 - ELSŐITER: = false

```

7.  TESZTELEÉS
8.  if not ÜRES-ÁG then
9.      Begin
10.         if VAN-SZABAD-VÁLTOZÓ then RÖGZITÉS
11.         else
12.             Begin
13.                 MEGENGEDETTség-VIZSGÁLAT
14.                 ÁGCSERE
15.             end
16.         end
17.     else  ÁGCSERE
18. end
19. end IMPLICIT-LESZÁMLÁLÁS

```

Az egész algoritmus három legfontosabb eljárása a TESZTELEÉS, a RÖGZITÉS és az ÁGCSERE. Az utóbbi az előző kettő eredményétől függően akkor lép működésbe, ha a fa valamely ágát teljesen megvizsgáltuk és új ágra (rész-halmazra) kell áttérni. Az első kettő felfogható úgy is, hogy azok rekurzív módon hívják egymást, ezzel biztosítva az algoritmus előrehaladását. Ennek alapján dolgozott ki Bíró Miklós egy a fenténél sokkal részletesebb, hatékony algoritmikus keretet, mely igen kevés további munkával adaptálható volt különböző feladatokra is (lineáris 0—1 feladat, polinomiális 0—1 feladat, korlátozott változós nem 0—1 feladat).

3. Heurisztikus módszerek

A heurisztika fogalmát szokás egészen tágan értelmezni, úgy, mint valamilyen stratégia, elv követését a megoldás során. Egy szűkebb, de gyakoribb értelmezés a megoldandó feladat valamilyen közelítő megoldását jelenti. Mi is ebben az utóbbi felfogásban fogjuk a kifejezést használni.

3.1. Általánosított Lagrange szorzók

Everett volt az, aki 1963-ban javasolta a Lagrange szorzók használatát a matematikai programozás ezen ágaiban. Tegyük fel, hogy a következő feladatot kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} \max f(\mathbf{x}) \\ g_i(\mathbf{x}) \leq b_i \quad i = 1, \dots, m, \\ \mathbf{x} \in S, \end{aligned} \quad (3.1)$$

ahol \mathbf{x} n -dimenziós vektor, S az n -dimenziós euklideszi tér tetszőleges, rögzített részhalmaza és f és g_i ($i = 1, \dots, m$) tetszőleges n -változós függvények.

A feladat ilyen felírása mögött az rejlik, hogy az összes feltétel gyakran két csoportra osztható: vannak algebrailag kezelhető feltételek és vannak olyanok, amelyeket azonnal alkalmazni tudunk a változókra. Mindenesetre a diszkrét programozási feladatok ilyenek. Például a lineáris 0—1-es feladat esetén a probléma

$$\begin{aligned} \max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \end{aligned} \quad (3.2)$$

alakú \mathbf{c} , illetve \mathbf{b} megfelelő dimenziós vektor A pedig egy alkalmas mátrix). Itt S a bináris vektorok halmaza.

Everett azt javasolta, hogy a (3.1) feladat helyett foglalkozzunk az alábbival:

$$\max \left(f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \right), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x} \in S$$

ahol $\lambda_i (i = 1, \dots, m)$ rögzített nemnegatív szám. Emögött az áll, hogy a (3.3) feladatban nincsenek a megoldást nehézkessé tevő algebrai feltételek, hanem csak azok, amelyek explicit előírásokat tartalmaznak a változókra. Így a (3.3) feladat megoldása várhatóan sokkal könnyebb, mint a (3.1)-é és ezért várhatóan érdemes a (3.3) alakú feladatok egy sorozatát megoldani a (3.1) közvetlen megoldása helyett. Hogy ez mennyire így van, mutatja, hogy a (3.2)-nek megfelelő (3.3) típusú feladat:

$$\max (\mathbf{c}^T - \lambda^T A) \mathbf{x} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n.$$

Tehát csak a $\mathbf{c}^T - \lambda^T A$ vektor komponenseinek előjelét kell megvizsgálni az optimális megoldás meghatározásához.

Lényegében már Everett bizonyította a következőt.

1. optimalitási kritérium: Ha valamely rögzített λ -ra a (3.3) feladat optimális megoldása \mathbf{w} és teljesülnek az alábbiak

- (i) $\lambda_i > 0$ esetén $g_i(\mathbf{w}) = b_i$
- (ii) $\lambda_i = 0$ esetén $g_i(\mathbf{w}) \leq b_i$

akkor \mathbf{w} optimális megoldása a (3.1) feladatnak.

Az (i) és (ii) feltételek egyebek mellett azt jelentik, hogy a \mathbf{w} vektor megengedett a (3.1) feladatra nézvést. Fordítva azonban ez nem igaz, azaz ha egy vektor a (3.3) feladat optimális megoldása és megengedett (3.1)-ben, akkor nem feltétlenül elégíti ki a (i) és (ii) feltételeket és vonatkozik ez magára a (3.1) feladat optimális megoldására is. Így előfordulhat, hogy már megkaptuk a keresett megoldást, de ezt a tényt nem tudtuk érzékelni.

Ezen a problémán segít a [21] dolgozatban publikált optimalitási kritérium, mely mindannyiszor teljesül, valahányszor az 1. optimalitási kritérium.

3.1. definíció: Legyen rögzített λ mellett a (3.3) feladat optimális megoldása \mathbf{w} . Tegyük fel, hogy \mathbf{w} megengedett megoldása a (3.1) feladatnak. Ekkor a \mathbf{w} vektor optimalitási tartományának nevezzük a

$$H(\mathbf{w}, \lambda) = \{ \mathbf{x}: \mathbf{x} \in S; \lambda^T (\mathbf{g}(\mathbf{w}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \geq 0 \}$$

halmazt.

Jelölje M a (3.1) feladat megengedett megoldásainak halmazát, azaz

$$M = \{ \mathbf{x}: \mathbf{x} \in S; \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b} \}.$$

2. *optimalitási kritérium*: Tegyük fel, hogy a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ szorzókhöz a (3.3) feladat optimális megoldási rendre az x_1, \dots, x_r vektorok voltak, melyek egyben megengedett megoldásai a (3.1) feladatnak is. A megfelelő optimalitási tartományok legyenek $H(x_1, \lambda_1), \dots, H(x_r, \lambda_r)$.

Ha

$$M \subset \bigcup_1^r H(x_k, \lambda_k), \quad (3.5)$$

akkor

$$\max \{f(x): x \in M\} = \max \{f(x_k): 1 \leq k \leq r\}.$$

Könnyen konstruálható olyan kisméretű példa, ahol az 1. optimalitási kritérium nem működik, míg a most megadott igen. A (3.5) feltétel ellenőrzése a gyakorlatban megvalósítható, ugyanis érdemes a következő, vele ekvivalens feltételt ellenőrizni

$$\bigcap_1^r (S \setminus H(x_k, \lambda_k)) \cap M = \emptyset.$$

Ez pedig nem jelent mást, mint az eredeti feltételekhez r darab

$$\lambda_k^T (g(x_k) - g(x)) < 0 \quad (3.6)$$

alakú feltétel hozzávételét.

Fontos tulajdonsága a (3.6) alakú feltételeknek, hogy azok a (3.1) feladat eredeti feltételeiből algebrai úton nem származtathatók. Ez a tulajdonságuk lehetőséget ad arra, hogy a Lagrange szorzós eljárást egy leszámplálási algoritmusba ágyazva a leszámplálási fában ugrásokat hajthassunk végre. A módszerrel végzett tapasztalatok azt mutatják, hogy ez a fajta heurisztika alkalmas jó megengedett megoldások generálására.

3.2. Szomszédtság fogalmon alapuló heurisztika

Tegyük fel, hogy egy véges M halmaz egy kitüntetett pontját keressük. A most ismertetésre kerülő heurisztikus eljárás két eszközt használ fel:

(a) adott egy h függvény az M halmazon, mely azt méri, hogy az M pontjai mennyire közelítik meg a keresett pont tulajdonságait; pontosabban szólva ha

$$x, y \in M \text{ és } h(x) < h(y),$$

akkor azt mondjuk, hogy az y pont jobb az x pontnál,

(b) minden $x \in M$ esetén adva van M -nek egy $S(x)$ részhalmaza, melybe eső pontokat x szomszédainak nevezzük, úgy, hogy

$$|S(x)| \ll |M|,$$

azaz $S(x)$ sokkal kevesebb pontot tartalmaz M -nél.

Most már maga a módszer egyszerűen megfogalmazható:

1. Begin
2. $k := 0$
3. $x_0 := M$ -beli pont
4. $G := \{x: x \in S(x_k); h(x) > h(x_k)\}$
5. while $G \neq \emptyset$ do
6. Begin

7. $k := k + 1$
8. $x_k := G$ -beli pont
9. $G := \{x \in S(x_k); h(x) > h(x_k)\}$
10. end
11. end

Tehát az eljárás lényege, hogy egy pontból kiindulva az éppen vizsgált pontot valamelyik nála jobb szomszédjára cseréljük ki. Maga a módszer több helyen felmerül az irodalomban, sőt néhány speciális feladatra vonatkozó egzakt eljárás is ebben a keretben dolgozik.

A (3.2) feladatra úgy alkalmaztuk a módszert, hogy a g függvény a következő volt:

$$h(x) = \begin{cases} c^T x, & \text{ha } x \text{ megengedett (3.2)-ben} \\ \sum_i |b_i - \sum_j a_{ij} x_j|_- & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $|a|_-$ az a szám negatív részét jelöli, azaz

$$|a|_- = \begin{cases} a, & \text{ha } a < 0 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a c vektor komponensei nemnegatívak, ezért az így megadott függvény bármely megengedett megoldást jobbnak minősít bármely nem-megengedett megoldásnál.

Az eljárás másik lényeges pontja a szomszédok megválasztása. Két különböző szomszédosági rendszert próbáltunk ki: x szomszédainak tekintettük azokat a pontokat, amelyek pontosan 1, illetve azokat, amelyek pontosan 2 komponensben különböztek tőle. Ha a változók száma n , akkor az így definiált szomszédok száma

$$n, \text{ illetve } \frac{n(n-1)}{2}.$$

Mindkét szám lényegesen kisebb a bináris vektorok 2^n számánál. Mégis a két komponensben eltérők száma túl nagyoknak bizonyult, ami abban nyilvánult meg, hogy az algoritmus 8. és 9. sorában megadott lépések végrehajtásához igen sok idő kellett.

A másik variációban gépidő szempontjából is hatékonynak bizonyult a módszer. Három feladatesoporton próbáltuk ki, ahol az egyes csoportokban a változók és a feltételek száma 50 és 10, illetve 100 és 10, illetve 100 és 30 volt, az egyes csoportba tartozó feladatok száma pedig rendre 10, 10 és 6. Valamennyi feladatra kaptunk megengedett megoldást, általában több, egyre javuló pontokat.

4. Speciális feladatok

A diszkrét programozásban a speciális feladatoknak kettős a szerepe. Egyfelől léteznek önálló alkalmazásaik, másfelől felmerülnek mint részfeladatok a legnehezebb feladatok megoldása során. A később tárgyalandó speciális feladatok elméleti szempontból ugyanolyan nehezek, mint az általános feladat, a gyakorlatban azonban már jelentős különbségek vannak. A hátizsák feladat

esetében akár 20 000 változós feladatokat is meg tudunk oldani, korlátot gyakorlatilag csak a számítógép memóriája szab. Nagyon hasonló a helyzet a halmazfedési feladat esetén is, ahol rövid CPU idővel lehet megoldani néhány száz változót és feltételt tartalmazó feladatokat is. Az ún. többfeltételes hátizsák feladat esetén a törekvés mindenütt jó megengedett megoldások generálása, de ebben az értelemben szintén tudunk kezelni többszáz változós problémákat. Az itt említett adatok egybevágóak a nemzetközi irodalomban közölt tapasztalatokkal.

Néhány példa a speciális feladatok önálló alkalmazásaira: kiértékelt kutatási pályázatok között a kutatásra fordítható anyagi kereteket optimálisan szétosztani a hátizsák feladat segítségével lehet. A hátizsák feladat egy további alosztálya, ahol a változók ún. általánosított felső korlátozás alá esnek, alkalmas optimális technológia választására, ha egy adott munkadarab-halmaz esetén minden munkadarabra véges sok technológia van megadva, és korlátozott a teljes megmunkálási idő. Optimális egységcsomagrendszer kialakítására vagy légi járatoknál a személyzet beosztására alkalmazható a halmazfedési feladat. A többfeltételes hátizsák feladat lehet a matematikai modellje darabolási és egyéb térkitöltési problémáknak vagy termékösszetétel meghatározásának, ha kissorozatú termelés folyik.

4.1. A hátizsák feladat

Most a

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{4.1}$$

feladatot vizsgáljuk, ahol tehát egyetlen lineáris feltétel van, az együtthatók pedig tetszőleges egészek.

A feladatnak a nemzetközi irodalomban általánosan elterjedt neve onnan ered, hogy ez modellezi a következő döntési problémát. Egy turista a hátizsákjában egy bizonyos súlynál (b) nem akar többet cipelni. Adott minden tárgy súlya (a_j) és eszmei értéke, amekkora hasznot hoz a kiránduláson. Itt x_j döntési változó, értéke 1 ha j . tárgyat elvisszük, különben 0. A (4.1) feladat megoldásával megkapjuk, hogy mi az elviendő tárgyak optimális halmaza.

Nagyon könnyen látható, hogy a (4.1) feladat azonnal visszavezethető egy olyanra, ahol valamennyi együttható pozitív. Így a továbbiakban ezt mi is feltesszük.

Diszkrét programozásban szokás hátizsák v. hátizsák típusú feladatról beszélni, ha csak egyetlen (nem feltétlenül lineáris) feltételünk van, illetve többfeltételes hátizsák feladatról akkor, ha egy $Ax \leq b$ feltételekkel adott problémában $A \geq 0$. Az utóbbi és a hátizsák feladat is rendelkezik ugyanis azzal a fontos tulajdonsággal, hogy ha egy vektor megengedett, akkor valamennyi vele összehasonlítható, nem nagyobb vektor is az.

A (4.1) feladat megoldására számos módszer ismeretes. Így [17]-ben is találunk dinamikus programozásra épülő, valamint leszámítási és korlátozás-

szétválasztási módszert. Ezek az algoritmusok azonban még nem tennék lehetővé a már említett nagyméretű feladatok megoldását. Ehhez az ún. változó redukciós eljárások kidolgozására volt szükség.

A hátizsák feladat egy igen lényeges dologban különbözik az általános diszkrét programozási feladattól. Ebben az esetben ugyanis igen egyszerű megengedett megoldást, sőt jó megengedett megoldást találni, míg az általános esetben ez ekvivalens nehézségű az egész probléma megoldásával.

Tehát valamennyi változó redukciós eljárás abból indul ki, hogy már ismerünk egy megengedett megoldást z_0 célfüggvényértékkel, és csak az ennél jobb pontok érdekelnek bennünket. A módszerek lényege abban áll, hogy megmutatják, hogy az utóbbi követelmény mellett bizonyos változók értéke csak 0 vagy 1 lehet.

A korábban ismert megoldási módszerekben nagy szerepet játszott az a feltetelezés, hogy a változóknak egy olyan sorrendjét ismerjük, amelyre igaz az alábbi egyenlőtlenség

$$\frac{c_j}{a_j} \geq \frac{c_{j+1}}{a_{j+1}}, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (4.2)$$

Ezen sorrend ismeretében lehet megoldani a hátizsák feladat folytonos változatát, vagyis azt a feladatot, amely a (4.1) feladatból úgy keletkezik, hogy a speciális egészértékűségi követelményt a nála gyengébb

$$0 \leq x_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, n$$

feltétellel helyettesítjük. Igaz ugyanis a következő állítás.

4.1. tétel: Ha a (4.1) feladat változói a (4.2) sorrendben vannak, akkor a megfelelő folytonos feladat \bar{x} optimális megoldása a következő alakú: létezik egy

$$p \text{ index } (1 \leq p \leq n), \text{ hogy} \\ \bar{x}_1 = \dots = \bar{x}_{p-1} = 1$$

és

$$\bar{x}_{p+1} = \dots = \bar{x}_n = 0.$$

A p indexet pivot indexnek nevezik, az x_p az egyetlen változó, mely a (4.1) feladat folytonos változatának optimális megoldásában tört értéket vehet fel. További fontos szerepet játszik a

$$q_p = \frac{c_p}{a_p} \quad (4.3)$$

hányados.

4.2. tétel: Legyen $q \geq 0$ tetszőleges valós szám és z_0 a (4.1) feladat egy megengedett megoldásának célfüggvényértéke, továbbá

$$M(q) = \max \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} + q(\mathbf{b} - \mathbf{a}^T \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \}.$$

Ekkor ha

$$M(q) - |c_j - qa_j| < z_0,$$

akkor a (4.1) feladat x^* optimális megoldásában

$$c_j - qa_j < 0 \text{ esetén } x_j^* = 0$$

és

$$c_j - qa_j > 0 \text{ esetén } x_j^* = 1.$$

Ennek a tételnek a segítségével azok a változók, melyekre a (4.4) feltétel teljesül eliminálhatók és így a ténylegesen megoldandó feladat mérete redukálódik. Bár a tétel tetszőleges q -ra igaz, a gyakorlatban azonban itt a q_p értéket célszerű alkalmazni, $M(q)$ értéke ugyanis itt a legkisebb.

A rendezésnek itt nemcsak a q_p érték meghatározásánál van szerepe, hanem a z_0 -t is ennek a segítségével szokás megkapni. A mohó eljárás, mely a legtermészetesebben alkalmazható heurisztikus eljárás szintén felhasználja a (4.2) sorrendet.

A rendezésből származó mindkét információt megkaphatjuk a rendezés nélkül is. A módszer ilyen gyorsítási lehetőségét tárgyalja az [5] dolgozat. Vizsgáljuk először a célfüggvény becslésének kérdését. Tulajdonképpen az optimális célfüggvényértékre bármilyen (nem feltétlenül alsó) becslést alkalmazhatunk. Ha a becslés indokolatlanul magas volt, akkor a redukált feladatnak vagy nem lesz megengedett megoldása, vagy a redukált feladat optimális célfüggvényértéke a becslés alá esik. Ha azonban a redukált feladat optimális célfüggvényértéke a becslés fölé esik, akkor ez a tény mindenképpen igazolta a becslés jogosságát. A becslés optimum módszer lényege tehát abból áll, hogy egy egyszerűen számítható becslésből kiindulva redukáljuk a feladatot. Szükség esetén a becslést addig csökkentjük, míg az a redukált feladaton is jogosnak nem bizonyul.

Lényegében ugyanez a gondolat felhasználható az optimum értékének és a hozzá tartozó szorzónak az együttes megkeresésére. Ha ismerünk egy olyan intervallumot, amibe az optimális szorzó belesik, akkor ezt az intervallumot egyre szűkíthetjük. Ha $[q_1, q_2]$ ez az intervallum, a következő pedig $[q'_1, q'_2]$, akkor vagy $q_1 = q'_1$ vagy $q_2 = q'_2$ és q'_2 (illetve q'_1) $\in (q_1, q_2)$. A becslés optimum módszer alkalmazása után a redukált (kisméretű) feladat megfelelő (4.3) értéke adja q'_2 -t (illetve q'_1 -t).

Ezeknek a módszereknek a számítástechnikai jelentőségét mutatja, hogy a hagyományos redukációs módszerekhez viszonyítva a szükséges CPU idő 750, illetve 1000 változó esetén 13, illetve 10%-ra esett vissza.

4.2. A halmazfedési feladat

A halmazfedési feladat szintén egy speciális alosztálya a 0–1-es problémáknak, itt azonban a feltételek száma tetszőleges lehet, míg az együtthatók értéke — akárcsak a változóké — csak 0 vagy 1. Pontosabban szólva a következő feladatról van szó:

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{4.5}$$

ahol c_j és b_i tetszőleges pozitív egészek, míg a_{ij} értéke vagy 0 vagy 1.

(Könnyen látható, hogy az a_{ij} együtthatókra tett feltevés mellett nem jelentli az általánosság megszorítását, hogy a többi együtthatót pozitívnak tekintjük.) Mint triviális esetet ugyancsak kizárjuk a további vizsgálódásból azt az esetet, amikor valamely x_j változó valamennyi a_{ij} együtthatója 0.

A (4.5) feladat a következőképpen interpretálható. Az egyenlőtlenségek bal oldalán álló együtthatókból alkotott mátrix legyen A . Jelölje ennek j -edik oszlopát a_j . Az a_j vektorok egy véges, pontosan m elemű halmaz bizonyos részhalmazai karakterisztikus vektoraiként foghatók fel. A feladat ezen részhalmazok közül kiválasztani azokat, amelyek együttesen minimális összszűlyal fedik le az alaphalmaz minden elemét előre adott (b_i) vagy annál nagyobb multiplicitással.

Külön szokás vizsgálni a (4.5) feladatnak azt a további részosztályát, amikor valamennyi b_i értéke 1. Ha ezt a megszorítást nem tesszük fel, akkor a feladat ekvivalens azzal, ahol a célfüggvényben maximalizálás van minimalizálás helyett és a feltételek „kisebb-egyenlő” alakban adóttak a „nagyobb-egyenlő” helyett, az együtthatókra pedig a fenti kikötések állnak. Az irodalomban az ilyen alakú problémákat halmaz kitöltési feladatnak nevezik. Végül ezen feladatcsalád utolsó tagja az, amikor a feltételekben pontos egyenlőséget követelünk meg; neve halmaz felbontási feladat. Az utóbbi kettővel most nem foglalkozunk.

A halmazfedési feladatnak számos alkalmazása ismeretes [17] az ütemezés-elméletben, műszaki, valamint speciális közlekedési problémák megoldásában.

Mivel a most vizsgált probléma is rendelkezik a hátizsák feladatnak azzal a tulajdonságával, hogy egyszerű módon lehet (jó) megengedett megoldást találni, ezért az elméleti vizsgálatok szempontjából érdekessé váltak az optimalitási kritériumok.

4.1. *definíció*: A (4.5) feladat egy x_0 megengedett megoldását minimálisnak nevezzük, ha

$$\forall x \in \{0, 1\}^n, x \leq x_0, x \neq x_0 \text{ esetén } Ax \geq b.$$

Nyilvánvaló a célfüggvény pozitivitása miatt, hogy optimális megoldás csak minimális lehet.

Először azt az esetet fogjuk vizsgálni, amikor a jobb oldal azonosan 1.

4.3. *tétel* [1]: Legyen \bar{x} a (4.1) feladat egy tetszőleges minimális megoldása, Legyen továbbá

$$\begin{aligned} J &= \{j: \bar{x}_j = 1\} \\ H_j &= \{i: a_{ij} = 1; \forall k \in J \setminus \{j\} \text{ esetén } a_{ik} = 0\}, j \in J \\ \bar{r}_j &= \frac{c_j}{|H_j|} \quad j \in J \\ r_j^0 &= \frac{c_j}{\sum_{i=1}^m a_{ij}} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Ha $\forall j \in J$ és $\forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus J$ esetén

$$\bar{r}_j \leq r_k^0,$$

akkor \bar{x} a (4.1) feladat optimális megoldása.

(Megjegyezzük, hogy \bar{x} minimalitásából következik, hogy $|H_j| \geq 1$.)

Másfelől az imént bevezetett r_j^0 számok segítségével a célfüggvény alulról megbecsülhető.

4.4. tétel [17]: Legyenek az r_j^0 ($j = 1, \dots, n$) számok ugyanazok mint fent, továbbá

$$f_i = \min \{r_j^0: 1 \leq j \leq n; a_{ij} = 1\}.$$

Ekkor a (4.1) feladat z^* optimális célfüggvényértékére igaz, hogy

$$z^* \geq \sum_{i=1}^n f_i.$$

Mindezek alapján már el lehetett készíteni egy korlátozás és szétválasztás típusú eljárást, amellyel 100 változóig sikerült feladatokat megoldani.

Az alábbiakban ismertetendő eredmények [19] már az általános esetre vonatkoznak, tehát a b_i együtthatók tetszőleges pozitív egészek lehetnek.

Mint eddig is \bar{x} a (4.1) feladat egy minimális megengedett megoldását, J pedig \bar{x} azon komponensei indexeinek halmazát jelöli, melyek értéke 1. Legyen továbbá I azon feltételeknek a halmaza, amelyeket \bar{x} egyenlőséggel teljesít, azaz ha \mathbf{A}_i ($i = 1, \dots, m$) jelöli az \mathbf{A} mátrix i -edik sorát, akkor

$$i \in I \Rightarrow \mathbf{A}_i \bar{x} = b_i \text{ és } i \notin I \Rightarrow \mathbf{A}_i \bar{x} > b_i.$$

4.2. definíció: A $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$ vektort az \bar{x} ponthoz tartozó árvektornak nevezzük, ha

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall j \in J \text{ esetén } \mathbf{r}^T \mathbf{a}_j \geq c_j \\ (ii) \quad & \forall i \notin I \text{ esetén } r_i = 0. \end{aligned}$$

A 4.3. tétel jelöléseit használva könnyen látható, hogy ha $j_1, j_2 \in J$ és $j_1 \neq j_2$, akkor

$$H_{j_1} \cap H_{j_2} = \emptyset.$$

Így értelmes a következő definíció

$$r_i = \begin{cases} \bar{r}_j, & \text{ha } \exists j: i \in H_j \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az így meghatározott vektor az előbbi definíció értelmében árvektor lesz.

4.5. tétel: Legyen \mathbf{r} az \bar{x} ponthoz tartozó árvektor, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor pedig a következő

$$v_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } j \notin J \text{ és } \mathbf{r}^T \mathbf{a}_j - c_j > 0 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha \mathbf{x} a (4.1) feladat egy tetszőlegesen olyan megengedett megoldása, amelyre

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} < \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}},$$

akkor \mathbf{x} kielégíti az alábbi feltételt

$$\mathbf{v}^T \mathbf{x} \geq 1. \quad (4.6)$$

Megjegyezzük, hogy a \mathbf{v} vektor definíciójából azonnal látszik, hogy

$$\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{x}} = 0,$$

tehát a (4.6) egyenlőtlenség levágja az $\bar{\mathbf{x}}$ pontot. E tény jelentőségét az adja meg, hogy (4.6) hozzávétele a feltételekhez nem rontja el a feladat típusát.

Ez a tétel közös általánosítása *Belmore—Ratliff* és *Balas* eredményeinek és a 4.3 tételnek. Az utóbbi esetben a fent megadott árvektor esetén $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ adódik. Ekkor azonban az egyenlőtlenség kielégíthetetlen, ami az $\bar{\mathbf{x}}$ pont optimalitását bizonyítja.

A következő tételben az y valós szám pozitív részét $|y|_+$ jelöli

4.6. tétel. Legyen $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ tetszőleges vektor, z természetes egész és

$$t(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \mathbf{b} - \sum_{j=1}^n |\mathbf{w}^T \mathbf{a}_j - c_j|_+.$$

Ekkor:

(i) A (4.5) feladat minden \mathbf{x} megengedett megoldására

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq t(\mathbf{w}).$$

(ii) Ha \mathbf{x} a (4.5) feladat megengedett megoldása és $\mathbf{c}^T \mathbf{x} < z$, akkor

$$c_j - \mathbf{w}^T \mathbf{a}_j \geq z - t(\mathbf{w}).$$

esetén

$$x_j = 0.$$

(iii) Az alábbi két állítás közül pontosan az egyik igaz:

(a) Ha az \mathbf{x} vektor olyan, hogy

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } \mathbf{w}^T \mathbf{a}_j > c_j \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

akkor \mathbf{x} megengedett megoldás.

(b) Létezik egy $i \in \{1, \dots, m\}$ index és egy $\delta > 0$ szám, hogy

$$\bar{\mathbf{w}}^T = (w_1, \dots, w_{i-1}, w_i + \delta, w_{i+1}, \dots, w_n)$$

esetén

$$t(\bar{\mathbf{w}}) > t(\mathbf{w}).$$

A tétel egyes részállításai jól felhasználhatók egy megoldó algoritmus során. Hiszen (i) alsó korlátot ad az optimális célfüggvényértékre, mely (iii) alapján esetleg tovább javítható. Ugyancsak (iii) alapján új megengedett megoldások generálhatók. Végül (ii) segítségével a feladat mérete redukálható.

Ezen módszerekkel sikerült megoldani 2%-os sűrűség esetén 500 feltételt és 3000 változót tartalmazó feladatokat is. Nagyobb sűrűség esetén pedig a problémákat legfeljebb 50 változós, immár nehéz, problémákká sikerült redukálni.

4.3. Az általánosított hátizsák feladat

Az irodalomban külön szokás vizsgálni azt a feladatot, amikor valamennyi együttható nemnegatív. Erre elsőként *Toyota* publikált hatékony heurisztikus eljárást. Az ő célja egyetlen jó közelítő pont megadása volt. Az általunk kifejlesztett, ugyancsak heurisztikus eljárás esetében azonban arra törekedtünk, hogy minél több jó megengedett megoldáshoz jussunk. Számítógépes kísérleteket 30 feltételt és 200 változót tartalmazó feladatokig végeztünk. Néhány szekundum CPU idő felhasználásával számos igen jó ponthoz jutottunk. Úgy tűnik, hogy korlátot itt is elsősorban a memória nagysága szab.

5. Dualitás

A dualitás fogalma a diszkrét programozásban nem olyan jól kidolgozott, szép elmélet, amint a lineáris programozásban megszoktuk. Ennek az az oka, hogy míg az utóbbi esetben a duális feladat ugyanolyan természetű mint a primál feladat, sőt ez a duál feladat duálja, addig a diszkrét programozásban ugyanannak a problémának több duálja is értelmezhető és ezek általában folytonos feladatok.

Most röviden megmutatjuk, hogy a duál feladatot milyen általános keretben szokás értelmezni. A primál feladat

$$\begin{aligned} \max f(x) \\ x \in M, \end{aligned} \quad (5.1)$$

ahol M valamely megszámlálható halmaz, $f(x)$ M -en értelmezett tetszőleges függvény. Bevezetve új, duál változókat (a továbbiakban s -sel jelöljük őket), egy új duál $d(s, x)$ célfüggvényt írunk elő, mely valamilyen egyedi (a dualitás típusától függő) módon van kapcsolatban az (5.1) feladattal. A duál változók értéküket csak az előre adott Q halmazból vehetik fel. Végül egy P_s halmazt választunk, mely függ a duál változóktól és teljesül rá, hogy

$$M \subset P_s. \quad (5.2)$$

A $d(s, x)$ függvény következő nyeregpontját keressük:

$$\min_{s \in Q} \max_{x \in P_s} d(s, x). \quad (5.3)$$

Itt (5.2) miatt a rögzített s mellett fellépő belső feladat vagy (5.1)-nek egy relaxációja, vagy egy nagyon egyszerűen kezelhető feladat.

Általában nem garantálható az, amit a lineáris programozás dualitás tétele biztosít, nevezetesen, hogy az optimális célfüggvényértékek egyenlők. Ha z , illetve w az (5.1), illetve (5.3) feladat optimuma, akkor többnyire csak

$$z \leq w$$

igaz. Ez a tulajdonság felveti algoritmikus szempontból a dualitás [pontosabban szólva valamely (5.3) feladat egzakt megoldása] alkalmazhatóságának kérdését. Ugyanis $z < w$ esetben (5.3) optimumhelyének x része nem lesz M -beli. Ez az oka, hogy a Lagrange szorzókat, amelyek nagyon jól felhasználhatók megengedett megoldások generálására, a 3. szakaszban tárgyaltuk és nem itt.

5.1. Az s -feltételek

Az egyik leggyakrabban használt relaxáció az, amikor a feltételeket egy következményükkel helyettesítjük. Tekintsük tehát az

$$M = \{x: x \in \{0, 1\}^n, Ax \leq b\}$$

halmazt, ahol A , illetve b egy $m \times n$ mátrix, illetve m dimenziós vektor. Az M halmaz definíciójában szereplő egyenlőtlenségek egy következményét úgy kapjuk meg, hogy nemnegatív súlyokkal összegezzük őket. Tehát a fenti jelöléseket használva

$$Q = \mathbb{R}_+^m, P_s = \{x: x \in \{0, 1\}^n; s^T Ax \leq s^T b\}.$$

A megoldandó primál feladat pedig

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ x \in M; \end{aligned}$$

ahol c rögzített vektor.

A legtöbbet vizsgált $d(s, x)$ függvény itt maga a célfüggvény, azaz

$$d_1(s, x) = c^T x.$$

Tehát ebben az esetben (5.3) megoldásával a lehető legjobb felső becslést akarjuk kapni. *Geoffrion* vezette be a következő duál függvényt.

$$d_2(s, x) = (c^T - s^T A)x + s^T b - z,$$

ahol a z konstans a

$$-c^T x \leq -z$$

célfüggvény-feltétel jobb oldala. A d_2 függvény tulajdonképpen a Lagrange-szorozók alapján is származtatható volna. A duál célfüggvény ilyen választása valamilyen értelemben azt célozza, hogy a P_s halmaz számossága kicsi legyen, azaz P_s a lehető legkevesebb nem M -beli pontot tartalmazza.

Az alább ismertetendő új duál feladat az előbbieket közös általánosításának tekinthető, annak ellenére, hogy első látásra úgy tűnik, mintha itt nem nyereg-pontot keressünk. Valamennyi eredmény a [7] dolgozathoz való.

Legyen $\xi \in \{0, 1\}^n$ páronként független valószínűségi változókból álló vektor és

$$P(\xi_j = 1) = 1 - P(\xi_j = 0) = p_j.$$

Ekkor annak a valószínűségét akarjuk minimalizálni, hogy egy P_s -beli pont nem eleme M -nek. Ezt pedig úgy lehet elérni, ha s -t úgy választjuk meg, hogy P_s komplementerének a mértéke a lehető legnagyobb legyen. Így az új duál feladat

$$\begin{aligned} \max P(s^T A \xi > s^T b) \\ s \geq 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

lesz.

Természetesen nem közvetlenül az (5.4) feladatot oldjuk meg, mert a benne szereplő valószínűségi mérték nehezen kezelhető. Az igazán érdekes esetek

azok, ahol n értéke nagy, akkor azonban közelíthetünk a normális eloszlással. Pontosabban szólva a $\zeta = \mathbf{s}^T \mathbf{A} \xi$ valószínűségi változóra igaz, hogy

$$\begin{aligned} E(\zeta) &= \mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{p} \\ \sigma^2(\zeta) &= \mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^T \mathbf{s}, \end{aligned}$$

ahol az $n \times n$ -es \mathbf{D} mátrix elemei a következők

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ p_j(1 - p_j), & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

A ζ -ből kapott normált valószínűségi változó eloszlásfüggvényét jól közelíthetjük az $N(0, 1)$ eloszlás Φ eloszlásfüggvényével. Mivel Φ monoton növő és független \mathbf{s} -től, ezért

$$\Phi \left(\frac{-\mathbf{s}^T \mathbf{b} + E(\zeta)}{\sigma(\zeta)} \right)$$

maximalizálása ekvivalens az abszeissza maximalizálásával. Így az (5.4) helyett alkalmazott közelítő feladat a következő

$$\max_{\mathbf{s} \geq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{p} - \mathbf{s}^T \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^T \mathbf{s}}}. \quad (5.5)$$

Az egész megközelítés értelmét az alábbi tételek fejtik ki

5.1. *tétel:* Tetszőleges $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ esetén

$$\left| P(\mathbf{s}^T \mathbf{A} \xi > \mathbf{s}^T \mathbf{b}) - \Phi \left(\frac{\mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{p} - \mathbf{s}^T \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^T \mathbf{s}}} \right) \right| \leq \frac{M}{\sqrt{n}},$$

ahol az M konstans csak az \mathbf{A} mátrixtól és a \mathbf{p} valószínűségetől függ.

5.2. *tétel:* Tegyük fel, hogy a \mathbf{c} célfüggvényvektor valamennyi komponense pozitív. Legyen $h \geq 2^n$ valós szám és a p valószínűségek az alábbi módon meghatározottak

$$p_j = \frac{1}{1 + h^{\epsilon_j}} \quad j = 1, \dots, n$$

Legyen továbbá $\bar{\mathbf{s}}$ ebben az esetben az (5.4) feladat optimális megoldása. Ekkor tetszőleges $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ esetén

$$\max \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_{\bar{\mathbf{s}}} \} \leq \max \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_{\mathbf{s}} \}.$$

5.3. *tétel:* Tegyük fel, hogy a \mathbf{c} célfüggvényvektor valamennyi komponense pozitív. Legyen $\bar{\mathbf{p}}$ a

$$\begin{aligned} \max \mathbf{c}^T \mathbf{p} \\ \mathbf{A} \mathbf{p} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{e} \end{aligned}$$

feladat optimális megoldása, ahol \mathbf{e} a csupa 1-esből álló vektor. Tegyük fel, hogy $\bar{\mathbf{p}} \notin \{0, 1\}^n$. Legyen továbbá $\bar{\mathbf{s}}$ az (5.5) feladat megoldása ezen $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$ mellett, $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ tetszőleges vektor. Ekkor

$$\max \{d_2(\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in P_{\bar{\mathbf{s}}}\} \leq \max \{d_2(\mathbf{s}, \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in P_{\mathbf{s}}\}.$$

Tehát az 5.1 tétel az (5.4) helyett alkalmazandó (5.5) feladat közelítésének pontosságát adja meg. A következő tétel szerint az (5.4) feladat általánosítása a $d_1(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ függvény szerint értelmezett dualitásfogalomnak. Végezetül ugyanaz mondható az (5.5) feladról és a $d_2(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ függvény szerint dualitásról. Mint korábban már utaltunk rá, az a kikötés, hogy \mathbf{c} komponensei pozitívak, csak annyit takar, hogy nincs közöttük zérus. Megjegyezzük még, hogy ha az 5.3 tétel feltételei közül $\bar{\mathbf{p}} \notin \{0, 1\}^n$ nem teljesül, akkor mind a primál, mind a duál feladat optimális megoldása azonnal előállítható.

A (5.5) feladat numerikus megoldására több módszer is lehetséges. Ezek közül a gyakorlatban a leghatékonyabbnak egy lineáris komplementaritási problémára való visszavezetés bizonyult. Itt ugyanis a változók száma csak az eredeti diszkrét programozási feladat feltételeinek (és nem változóinak) számától függ. *Geoffrion* a $d_2(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ szerinti duális probléma megoldását egy nagyméretű lineáris programozási feladat megoldására vezette vissza. A két módszer összevetése összesen 45 db feladaton történt, ahol a legkisebb 4 feltételt és 10 változót tartalmazott, a legnagyobb pedig 10/90, illetve 15/40-es volt. Futási időben az (5.5) feladat megoldása lényegesen (1–2 nagyságrenddel) jobb volt. Ennek egyik oka nyilván az, hogy megelégedtünk az (5.5) probléma egy közelítő megoldásával. Ennek ellenére a generált s -feltételek erősségében, vagyis az s -feltételekből közvetlenül megkapható következmények számában lényeges eltérés nem volt tapasztalható, sőt az esetek többségében ezek azonosnak is voltak.

5.2. A szubadditív függvényekre alapozott dualitás

Az itt csak röviden tárgyalandó dualitási fogalom némileg eltér a korábbiaktól.

5.1. definíció: Legyen V egy olyan halmaz, melynek elemein egy művelet (+) értelmezve van, és V erre a műveletre nézve zárt. Ekkor egy $f: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ függvényt szubadditívnak nevezünk, ha

$$\forall x, y \in V \text{ esetén } f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Tekintsük most az általános diszkrét programozási problémát

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{b} \\ x_j \geq 0, \text{ egész } j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.6)$$

ahol c_j valós szám, \mathbf{a}_j valamint \mathbf{b} valós, m -dimenziós vektorok. Bevezetjük az

$$F = \left\{ \mathbf{d} : \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}; \mathbf{d} = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j y_j \right\}$$

jelölést. Most megfogalmazzuk az (5.6) feladat duálját, ahol a változó az f szubadditív függvény lesz.

$$\begin{aligned} \max f(\mathbf{b}) \\ f(\mathbf{a}_j) \leq c_j \quad j = 1, \dots, n \\ f(\mathbf{0}) = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\forall x, y \in F \text{ esetén } f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Ismeretes a következő tétel [1].

5.4. tétel: Az (5.6) és az (5.7) feladat optimumértékei egyenlők.

Természetesen az (5.7) feladat megoldása még reménytelenebbnek tűnik, mint (5.6)-é, de felmerül a kérdés, hogy nem lehet-e a szubadditív függvények valamilyen részosztályát egyszerű módon meghatározni és az (5.7) feladatot csak erre a részosztályra megoldani. Ekkor természetesen csak alsó korlátot kapunk (5.6) optimumértékére. A kérdést a [8] dolgozat választotta meg pozitívan az egyszemélyes esetben, és egyben alkalmazta az eredményeket a 6. fejezetben ismertetendő Frobenius problémára.

Tekintsük az a, q_0, q_1, \dots, q_s természetes számokat, ahol a és q_0 relatív prím, és

$$\prod_{j=0}^s q_j > a.$$

Bármely nemnegatív r egész számra $\alpha_j(r)$ ($j = 1, \dots, s$) jelentse r -nek a j -edik számjegyét a q_1, \dots, q_s által meghatározott általánosított számrendszerben, azaz

$$\begin{aligned} r &= \alpha_1(r) + q_1 \alpha_2(r) + \dots + q_1 q_2 \dots q_s \alpha_{s+1}^{(r)} \\ 0 &\leq \alpha_j(r) < q_j, \text{ egész } j = 1, \dots, s \\ 0 &\leq \alpha_{s+1}^{(r)}, \text{ egész.} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Tekintsük az

$F = \{r: \exists(x, y), x, y \geq 0, \text{ egész}, r = ax + q_0 y\}$ számokat. Tetszőleges r és F esetén legyen $r_0(r)$ az a legnagyobb egész, amelyhez még van olyan nemnegatív egész $y(r)$, hogy kielégítik az

$$r = ar_0(r) + q_0 y(r)$$

egyenletet. Mivel a és q_0 relatív prím, ezért $r_0(r)$ létezik, továbbá $y(r) < a$. Definiáljuk az $r_j(r)$ számokat (5.8) alapján

$$r_j(r) = \alpha_j(y(r)), \quad j = 1, \dots, s$$

A keresett szubadditív függvény alakja

$$f(r) = \begin{cases} \sum_{j=0}^s u_j r_j(r), & \text{ha } r \in F \\ +\infty, & \text{különben} \end{cases} \quad (5.9)$$

ahol u_0, \dots, u_s rögzített valós számok. Ezeknek azonban bizonyos feltételeknek eleget kell tenniük, hogy $f(r)$ valóban szubadditív legyen.

5.5. *tétel*: Az (5.9)-ben definiált $f(r)$ függvény akkor és csak akkor szubadditív a nemnegatív egészek halmazán, ha fennállnak az alábbiak:

$$\begin{aligned} & (i) \quad u_{j+1} \leq u_j q_j \quad j = 1, \dots, s-1 \\ & (ii) \quad \text{Ha } \alpha_j = \alpha_j(a) \quad j = 1, \dots, s \text{ és} \\ & \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_{s-1} = 0, \text{ akkor} \\ & q_0 u_0 \leq (\alpha_k - q_k) u_k + (\alpha_{k+1} + 1 - q_{k+1}) u_{k+1} + \dots \\ & \quad \dots + (\alpha_{s-1} + 1 - q_{s-1}) u_{s-1} + (\alpha_s + 1) u_s. \end{aligned}$$

A tétel jelentősége abban áll, hogy a szubadditív függvények egy részosztályát egy lineáris feltételrendszerrel választja ki. Bármely hátizsák feladat esetén a és q_0 nyilván megválasztható úgy, hogy $a_j \in F$ ($j = 1, \dots, n$) teljesüljön és így az (5.7) feladat — pontosabban annak a megfelelő megszorítása — lineáris programozási feladattá válik.

Természetesen a lineáris függvények maguk is szubadditívak. Ha azonban erre a részosztályra írjuk fel az (5.7) feladatot, akkor nem kapunk új dualitási fogalmat, mert (5.6) folytonos duáljához jutunk.

6. Nem 0—1 problémák

Bármilyen fontos szerepet játszanak is a 0—1 feladatok a diszkrét programozáson belül, azért persze a többi feladat vizsgálata sem hanyagolható el. Ismerünk számos alkalmazási lehetőséget, ahol a probléma nem bináris természetű.

Mint már korábban említettük, a diszkrét programozás első módszere az ún. *Gomory*-módszer volt. Mindmáig ez a legáltalánosabb módszer, mert az 1. szakaszban említett valamennyi típusú egészértékűségi követelmény kezelhető vele. Maga a módszer az ún. vágás típusú módszerek családjába tartozik. Ezek úgy működnek, hogy meghatározzuk a lineáris programozási relaxáció optimális megoldását. Ha ez nem rácspontról, akkor ezt a csúcspontot a poliéderből lemetszük egy alkalmas síkkal úgy, hogy a sík egyetlen rácspontról se vágjon le, majd az eljárást megismételjük az immár kisebb poliéderre. Számos ezen az elven működő módszert fejlesztettek ki, de a hozzájuk fűzött reményeket nem váltották be. Ennek egyik oka az lehet, hogy ezek a módszerek túl általánosak, vagyis egy konkrét feladat esetében nem tudják jól kihasználni annak speciális tulajdonságait. A másik, matematikai okra az alábbi tétel vet fényt [11].

6.1. *tétel*: Tekintsük a következő halmazt:

$$X = \{x: x \in \mathbb{R}^n, Bx \geq b\},$$

ahol B egy $n \times n$ -es mátrix, b egy n -dimenziós vektor. Legyen adva egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ és egy tetszőleges m természetes szám. Ekkor létezik egy $n \times n$ D -es mátrix és n -dimenziós d vektor úgy, hogy valamennyi elemük racionális, továbbá

$$\|b^i - d^i\| < \varepsilon \text{ és } |b_i - d_i| < \varepsilon.$$

(ahol \mathbf{b}^i , illetve \mathbf{d}^i a B , illetve \mathbf{D} mátrix i -edik sorát jelöli és $\|\cdot\|$ egy norma \mathbb{R}^n -ben) és az

$$Y = \{x: x \in \mathbb{R}^n, \mathbf{D}x \geq \mathbf{d}\}$$

halmazban levő rácspontok konvex burkának legalább m extrémális pontja van.

Ez a tétel azt mondja, hogy szerencsétlen esetben igen sok csúcsot kell levágni, míg a kívánt optimális megoldáshoz eljutunk.

A továbbiakban először egy olyan módszerről lesz szó, amely elsősorban korlátos változók esetén alkalmazható sikerrel. Utána pedig egy olyan feladatról szólnunk, amely egyrészt ezzel a módszerrel is megoldható, másrészt azonban összekötő kapcsolatot jelent a diszkrét programozás és a számelmélet között.

6.1. A dinamikus programozás alkalmazása a diszkrét programozásban

Bellman nevéhez fűződik a következő optimalitási elv [3]. Ha egy döntési sorozat olyan, hogy az egyes döntések nem változtatják meg a korábbi döntések értékét, akkor egy optimális döntési sorozat bármely részsorozata is optimális.

Ennek az elvnek számos alkalmazása ismert a diszkrét programozásban, de más kombinatorikus feladatok esetén is. Így például erre az elvre épül az irányított gráfokban legrövidebb utat kereső egyik közismert eljárás, a korábban már tárgyalt hátizsák feladat egyik gyors egzakt megoldó algoritmusáé. Ezeknek a problémáknak az a közös jellemzője, hogy a bennük fellépő változók értékkészlete véges. A most [16] alapján bemutatandó eljárás éppen ebben különbözik a többitől.

Tekintsük a következő, nem véges hátizsák feladatot

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq z \\ x_j \geq 0 \text{ és egész,} \end{aligned} \tag{6.1}$$

ahol az a_j, c_j együtthatók ($j = 1, \dots, n$) és a z jobb oldal pozitív egész. A problémát egyelőre mint a z paramétertől függő feladatot vizsgáljuk. Az optimum értékét ezért $f(z)$ -vel jelöljük. Egyszerűen bizonyítható a következő két tétel.

6.1. tétel: Létezik olyan K egész szám, hogy $\frac{c_1}{a_1} < \frac{c_j}{a_j}$ ($j \geq 2$) esetén

$$\forall z \geq K \text{ esetén } f(z) = c_1 + f(z - a_1).$$

6.2. tétel: Ha \bar{x} optimális megoldása a (6.1) feladatnak valamely \bar{z} jobb oldal esetén, akkor az y egész vektor, melyre

$$0 \leq y \leq \bar{x}$$

optimális megoldása (6.1)-nek

$$z = \sum_{j=1}^n a_j y_j$$

jobb oldal mellett.

A második tétel biztosítja a Bellman-elv érvényesülését a vizsgált feladaton. A 6.1 tétel pedig arra ad lehetőséget, hogy végtelen sok jobb oldalra megoldjuk a feladatot, hiszen, ha $z > K$ és t olyan pozitív egész, hogy

$$z - (t - 1)a_1 \geq K > z - ta_1,$$

akkor

$$f(z) = ta_1 + f(z - ta_1).$$

Tehát, ha $z = 1, \dots, K - 1$ esetén ismerjük az optimum értékeket, akkor ezekből azonnal megkapható bármely további z -re az optimum.

Terjedelmi okok miatt itt nem részletezzük az algoritmust, amely a fenti két tétel segítségével adható meg. Röviden csak annyit jegyzünk meg, hogy felhasznál bizonyos elemeket a fentebb már ismertetett korlátozás és szétválasztás eljárásából, és egyszerre oldja meg a (6.1) feladatot valamennyi jobb oldalra.

Ez az utóbbi jellegzetes közös tulajdonsága az összes dinamikus programozáson alapuló algoritmusnak. Ebből származik a módszer előnye és hátránya is. Az előbbi az, hogy ha egy feladatot többször akarunk megoldani változó jobb oldalak, de változatlan egyéb paraméterek mellett, akkor itt gyakorlatilag a második és az utána következő esetekben csak ki kell olvasni a végeredményt. Ennek érdekében azonban elég nagy táblázatokat vagy tömböket kell tárolni, az adott esetben egy K hosszúságú egész vektort.

A dinamikus programozás alkalmazásait a diszkrét optimalizálásban jól foglalja össze [17] 4. fejezete, mely az eredeti dolgozatokhoz képest a módszerek több javítását is tartalmazza.

6.2. A Frobenius-probléma

Frobenius vetette fel a következő problémát, mely az alábbi könnyen bizonyítható tétel alapján fogalmazható meg.

6.3. tétel. Legyenek adva az a_1, \dots, a_n természetes számok úgy, hogy a legnagyobb közös osztójuk 1. Ekkor létezik olyan g egész, hogy a

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j$$

lineáris kifejezés értékkészlete nemnegatív egész változók mellett a g -nél nagyobb valamennyi egészt tartalmazza.

A Frobenius-probléma a legkisebb olyan g megadása, amelyre a tétel állítása igaz. (Ez a g maga még nem tartozik bele az értékkészletbe.)

A keresett számot $g(a_1, \dots, a_n)$ -nal fogjuk jelölni.

Ennek a feladatnak a matematika több fejezetében, így a Markov-láncok, a gráfok és a mátrixok elméletében is van alkalmazása, így érthető, ha számosan vizsgálták a kérdést. Terjedelmi okok miatt nem térhetünk ki a korábbi

eredmények részletes ismertetésére. A téma iránt érdeklődő olvasó jó összefoglalót talál [13]-ban. Itt csak a főbb témaköröket említjük meg: egzakt felső korlátok, speciális feladatok explicit megoldása, egzakt megoldó algoritmusok. Nem voltak ismeretesek viszont alsó korlátok, amelyeknek az alkalmazások szempontjából szintén jelentősége van.

Az ebben a témakörben elért eredmények alapja az eredeti probléma két ekvivalens átfogalmazása.

Az elsőnek a lényege egy parametrikus hátizsák feladatra való átfogalmazás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy

$$a_1 < a_j \quad j = 2, \dots, n \quad (6.2)$$

Ekkor az a_j , ($j \geq 2$) számok a_1 segítségével a következő módon állíthatók elő

$$a_j = c_j a_1 + d_j, \quad d_j < a_1, \quad j = 2, \dots, n \quad (6.3)$$

ahol c_j és d_j természetes számok. Itt ugyanis feltehető

$$d_j \geq 1, \quad j = 2, \dots, n \quad (6.4)$$

mert ellenkező esetben a_j elhagyható a problémából a megoldás megváltoztatása nélkül.

6.4. tétel. Tegyük fel, hogy fennáll (6.2), a c_j , d_j ($j = 2, \dots, n$) természetes számok a (6.3) egyenletből származnak. Legyen k természetes szám, melyre $1 \leq k < a_1$, z_k pedig a következő hátizsák feladat optimumértéke

$$\begin{aligned} z_k &= \min a_1 \left(x_1 + \sum_{j=2}^n c_j x_j \right) + k \\ &\quad - a_1 x_1 + \sum_{j=2}^n d_j x_j = k \\ x_j &\geq 0, \text{ egész.} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ekkor a Frobenius-probléma megoldása

$$g(a_1, \dots, a_n) = \max \{ z_k - a_1 : 1 \leq k < a_1 \}.$$

Ebből származtatható az alábbi speciális feladatosztályra vonatkozó felső korlát [23], valamint az azt követő általános alsó korlátok [24].

6.5. tétel. Tegyük fel, hogy az a_1, \dots, a_n számok sorrendje olyan, hogy

$$a_1 < \dots < a_n,$$

továbbá a (6.3) által definiált c_j számokra

$$c_j = 1 \quad j = 2, \dots, n$$

áll fenn, valamint $d_2 = 1$. Ekkor

$$g(a_1, \dots, a_n) \leq \sum_{j=2}^n a_j \frac{d_{j+1} - d_j}{d_j} - a_1,$$

ahol $d_{n+1} = a_1$.

6.6. *tétel.* Legyen az i olyan index, hogy

$$\frac{c_i}{d_i} = \min \left\{ \frac{c_j}{d_j} : 2 \leq j \leq n \right\}. \quad (6.6)$$

Ekkor

$$g(a_1, \dots, a_n) \geq \frac{c_i}{d_i} a_1^2 - \frac{c_i}{d_i} a_1 - 1.$$

A következőkban $\{t\}$ jelöli a t valós szám tört részét.

6.7. *tétel.* Legyen i a (6.6) szerinti index, k pedig egy természetes szám, melyre $1 \leq k < a_1$. Az f_0, f_1, \dots, f_n és a v, v_1, \dots, v_n számok legyenek a következő módon definiálva

$$\begin{aligned} f_0 &= \left\{ \frac{k}{d_i} \right\} \\ f_1 &= \begin{cases} 1 - \left\{ \frac{a_1}{d_i} \right\}, & \text{ha } d_i \text{ nem osztója } a_1\text{-nek} \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \\ f_j &= \left\{ \frac{d_j}{d_i} \right\} \quad j = 2, \dots, n \\ v_1 &= \begin{cases} \frac{a_i}{d_i f_1}, & \text{ha } f_1 > 0 \\ +\infty & \text{különben} \end{cases} \\ v_j &= \begin{cases} \frac{c_j d_i - d_j c_i}{d_i f_j}, & \text{ha } f_j > 0 \\ +\infty & \text{különben} \end{cases} \\ v &= \min \{v_j : 1 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

Ekkor

$$g(a_1, \dots, a_n) \geq a_1 \frac{kc_i}{d_i} + a_1 \left\{ \frac{k}{d_i} \right\} v + k - a_1.$$

Könnyen látható, hogy itt a bal oldal a maximumát oszthatósági feltételek-től függően az $a_1 - 1$, $a_1 - 2$, $b = \max \{w : w < a_1, w \equiv d_i - 1 \pmod{d_i}\}$ számok valamelyikében veszi fel. Megjegyezzük, hogy a 6.6 és 6.7 tételben adott alsó korlát éles abban az értelemben, hogy megadható hozzájuk felada-toknak egy-egy olyan végtelen sorozata, ahol n — az a_j számok száma — minden határon túl nő és valamennyi feladatnál az alsó korlát egybeesik a pontos értékkel. A második alsó korlát a Gomory-módszer alkalmazásával kapható meg. A 6.5 tételben szereplő felső korlát ugyancsak a pontos értéket adja, ha a

$$\frac{d_{j+1} - d_j}{d_j}$$

számok egészek.

Jelölje F a következő halmazt

$$F = \left\{ r: \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \text{ egész}, r = \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\}.$$

Ekkor nyilván

$$g(a_1, \dots, a_n) = \max_{r \in F} r.$$

Legyen $v(r)$ az alábbi hátztsák feladat optimum értéke

$$\begin{aligned} v(r) = \min & \left(-x_1 + \sum_{j=2}^n c_j x_j \right) \\ & a_1 x_1 + \sum_{j=2}^n d_j x_j = r \\ & x_j \geq 0, \text{ egész}, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (6.7)$$

ahol a c_j, d_j számok (6.3)-ból származnak. Ha a feltételeket kielégítő \mathbf{x} vektor nem létezik, akkor $v(r)$ értéke $+\infty$.

6.8. *tétel* [8]. Az alábbi két állítás ekvivalens.

- (i) $r \in F$
- (ii) $v(r) \leq 0$.

Így a Frobenius-probléma korábban említett másik átfogalmazása:

$$g(a_1, \dots, a_n) = \max \{ r: v(r) > 0 \}.$$

Ezen átfogalmazás segítségével bizonyítható a következő két tétel.

6.9. *tétel* [8]. Ha a c_j, d_j ($j = 2, \dots, n$) számokat (6.3), az i indexet (6.6) szerint határozzuk meg, továbbá a d_2, \dots, d_n számok legnagyobb közös osztója d , akkor

$$g(a_1, \dots, a_n) \geq a_1 \left[(a_1 - 1) d \frac{c_i}{d_i} \right] + a_1 d - d - a_1,$$

ahol $[w]$ azt a legkisebb egészt jelöli, ami a w valós számnál nem kisebb.

6.10. *tétel* [8]. Legyenek adva az $a_1, q_0, q_1, \dots, q_{n-2}, c_2, \dots, c_n$ természetes számok, úgy, hogy a_1 és q_0 relatív prím. Jelölje $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ az a_1 számjegyeit, a q_1, \dots, q_{n-2} által meghatározott általánosított számrendszerben, azaz

$$a_1 = \alpha_2 + \alpha_3 q_1 + \dots + \alpha_n q_1 \dots q_{n-2},$$

ahol

$$\begin{aligned} \alpha_j & \text{ egész} \quad j = 2, \dots, n \\ 0 & \leq \alpha_j < q_{j-1} \quad j = 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy k az a legkisebb index, melyre $\alpha_k > 0$.

Ha

$$a_j = c_j a_1 + q_0 q_1 \dots q_{j-2}, \quad j = 2, \dots, n$$

akkor

$$g(a_1, \dots, a_n) = \max_{\substack{k \leq t \leq n \\ \alpha_i > 0}} [a_2(q_1 - 1) + \dots + a_{t-1}(q_{t-2} - 1) + a_t(\alpha_t - 1) + \\ + a_{t+1}\alpha_{t+1} + \dots + a_n\alpha_n] - a_1$$

Egy további alsó korlát található [12]-ben.

6.11. *tétel*: Tetszőleges relatív prím a_1, \dots, a_n természetes számokra

$$g(a_1, \dots, a_n) \geq \frac{n-1}{n} \sqrt[n-1]{(n-1)! \prod_{j=1}^n a_j} - \sum_{j=1}^n a_j$$

Ugyanebben a dolgozatban található egy másik tétel, mely rámutat arra, hogy a $g(a_1, \dots, a_n)$ szám nagyságának mennyire kell legalább meghaladni az a_1, \dots, a_n számok nagyságát.

6.12. *tétel*: Ha az a_1, \dots, a_n számok relatív prímekek, akkor rögzített n esetén

$$1 \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{a_1, \dots, a_n \geq t} \frac{g(a_1, \dots, a_n)}{(n-1)(\min_j a_j)^{1 + \frac{1}{n-1}}} \geq \frac{n-1}{e^n},$$

ahol e a természetes logaritmus alapja.

7. Polinomiális 0–1 probléma

A [20] dolgozat foglalkozik az alábbi nemlineáris problémával

$$\begin{aligned} \max f(x) \\ g_i(x) \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x \in \{0, 1\}^n, \end{aligned} \quad (7.1)$$

ahol az f és g_i ($i = 1, \dots, m$) függvények polinomok.

Elvben bármely bináris probléma leírható (7.1) alakban a következő tétel értelmében.

7.1 *tétel*: Ha $h(x)$ tetszőleges n -változós valós függvény, akkor létezik egy $P(x)$ valós együtthatós polinom, hogy

$$\forall x \in \{0, 1\}^n \text{ esetén } h(x) = P(x).$$

Azonban a gyakorlatban a tétel nem alkalmazható, mert $P(x)$ zérustól különböző együtthatóinak száma általában igen nagy (legrosszabb esetben 2^n), így $P(x)$ kezelhetetlen. Mégis a gyakorlatban felmerülnek olyan problémák, amelyekre (7.1) megfelelő leírási forma.

A korábbi dolgozatok célja a (7.1) feladat linearizálása volt, melyet sikerült is elérniük számos új változó és feltétel bevezetése árán. Mivel azonban a megoldási idő a gyakorlatban elsősorban a változók számától függ, ezért az ilyen jellegű visszavezetések általában nem szerencsések.

A [20] dolgozat egyik fő eredménye az volt, hogy megmutatta, a 2. fejezetben tárgyalt leszámítási módszerek egyszerű módosítással a (7.1) feladatra is alkalmazhatók. Egy általános leszámítási struktúrát megvalósító programot sikerült is igen kis többletmunkával ennek a problémának a megoldására is alkalmassá tenni.

Végezetül tekintsük a feltétel nélküli feladatot,

$$\max \sum_{i=1}^p a_i \prod_{j \in Q_i} x_j$$

$$x \in \{0, 1\}^n, \quad (7.2)$$

ahol $Q_i \subset \{1, \dots, n\}$, $i = 1, \dots, p$. Magasabb hatványok nem szerepelnek, mert bináris változók esetén bármely k természetes száma $x_j^k = x_j$. Egyszerű szükséges feltétel adható meg arra nézvést, hogy egy pont (7.2) optimális megoldása legyen.

7.2 tétel: Válasszunk egy $\bar{x} \in \{0, 1\}^n$ pontot.
Legyen ekkor

$$A_j = \sum_{\substack{i: \\ j \in Q_i}} a_i \prod_{\substack{q \in Q_i \\ q \neq j}} \bar{x}_q, \quad j = 1, \dots, n$$

Ha \bar{x} optimális megoldása a (7.2) feladatnak, akkor

$$\bar{x}_j = 1 \text{ esetén } A_j \geq 0$$

$$\bar{x}_j = 0 \text{ esetén } A_j \leq 0.$$

8. Ütemezési problémák

A diszkrét programozásnál tágabban értelmezett kombinatorikus optimalizálás körébe tartoznak az ütemezési feladatok, ha az őket definiáló adatok determinisztikusak.

Az alább ismertetendő mindkét modellben egyetlen erőforrást kell szétosztani időben különböző feladatok között. A kettő között a különbség abban rejlik, hogy míg az első esetben az erőforrás oszthatatlan, vagyis egyszerre mindig egyetlen feladattal tud foglalkozni, addig a második esetben az erőforrás bizonyos kvantumokban felosztható. Ezenfelül az utóbbi átfogalmazva bizonyos darabolási problémákat is megold.

8.1 Egy egygépes ütemezési feladat

A következőkben a [14] dolgozat eredményeit foglaljuk össze.

Egy gépen n munkadarabot kell megmunkálni. A megmunkálások között sorrendi megkötöttségek nincsenek. Ezzel szemben az i -edik munkadarab csak r_i időpontban áll rendelkezésre, határideje d_i és a szükséges megmunkálási

idő p_i . Az r_i időpontokat mint fizikai adottságokat fogjuk fel, tehát a megmunkálás semmiképpen sem kezdődhet r_i előtt, azonban d_i -nél befejeződhet később, de ezt nyilván szeretnénk elkerülni. Egy ütemezés azonosítható a munkadarabok egy sorrendjével, ha egy megmunkálást azonnal megkezdünk, ahogy arra lehetőség van. Ha c_i jelöli az i -edik munkadarab megmunkálásának befejezését, akkor a feladat feltételei a következők:

- (i) $c_i \geq r_i + p_i$
(ii) ha $i \neq j$, akkor $[c_i - p_i, c_i] \cap [c_j - p_j, c_j] = \emptyset$.

A cél a maximális késés minimalizálása, azaz

$$(iii) \min_{\pi} \max_{i:} |c_i - d_i|_+,$$

ahol π a munkadarabok egy tetszőleges sorrendjét jelöli. Feltesszük továbbá, hogy a feladat adatai ($r_i, p_i, d_i; i = 1, \dots, n$) nemnegatív egészek.

Az így definiált feladatra nagyobb méretekben csak lassú algoritmusokat sikerült megadni, ezért előtérbe került a heurisztikus eljárások vizsgálata. Számos ilyen eljárás, így az alábbiak is, az általuk javasolt sorrendet a megmunkálási idők figyelembevétele nélkül adják meg. Mint majd látni fogjuk, ez adott esetben különösebb hátrányt nem jelent.

8.1 *definíció*: Rossz párnak nevezünk egy (i, j) ($i \neq j$) munkadarab párt, ha

$$r_i < r_j \text{ és } d_j < d_i.$$

8.2 *definíció*: Nagyon rossz párnak nevezünk egy (i, j) ($i \neq j$) munkadarab párt, ha

$$r_i + p_i < r_j \text{ és } d_j < d_i.$$

8.3 *definíció*: Rossz hármastnak nevezünk egy (i, j, k) ($i \neq j, k; j \neq k$) munkadarab hármast, ha (i, k) nagyon rossz pár és (j, k) rossz pár.

Schrage [18] nevéhez fűződik az alábbi elég természetes heurisztikus eljárás:

1. Elsőként végezzük el azt a munkát, amelyiket a legkorábban megkezdhetünk (vagyis azt, amelyekre r_i minimális). Ha több ilyen van, akkor ezek közül azt, amelyiknek a határideje a legrövidebb. Ha még mindig ilyen van, akkor ezek közül egyet választunk.

2. Ha a munka elvégzésekor egyetlen másikhoz sem foghatunk hozzá, akkor a következő munkát az 1. ponthoz hasonlóan választjuk ki. A két munka között a gép áll. Ellenkező esetben egy minimális határidejű munkát választunk.

3. A fenti eljárást mindaddig folytatjuk, amíg valamennyi munkát sorrendbe nem állítottuk.

Bárhogy adjunk is meg egy sorrendet, az ütemezést végezhetjük úgy, hogy az adott sorrendben azonnal felteszünk a gépre egy munkadarabot, mihelyt lehet. Ekkor a gép időnként áll, két állás között pedig folyamatosan működik, esetleg egymás után több munkadarabot is megmunkálva. Egy-egy ilyen működési periódusba eső munkadarabok összességét nevezzük egy bloknak. Az is nyilvánvaló, hogy a gép ilyen ütemezés mellett csak akkor áll, ha éppen

nem végezhet egyetlen munkát sem. Bevezetjük a következő jelölést. Legyen Π a munkák egy tetszőleges sorrendje.

Ekkor

$$T(\Pi) = \{i: (i, \Pi(n)) \text{ rossz pár; } i \text{ és } \Pi(n) \text{ egy blokkban van}\}, \quad (8.1)$$

továbbá $T(\Pi) \neq \emptyset$ esetén $j(\Pi)$ legyen az az index, melyre

$$c_{j(\pi)} = \max_{i \in T} c_i.$$

Nyilván $j(\Pi)$ egyértelműen meghatározott.

Az eljárás hibájára *Carlier* [9] adott korlátot.

8.1 *tétel*: Legyen Π a fenti algoritmussal szolgáltatott sorrend. Ekkor

- (i) ha $T(\Pi) = \emptyset$, akkor Π optimális
- (ii) ha $T(\Pi) \neq \emptyset$, akkor az eljárás hibája legfeljebb $p_{j(\pi)} - 1$.

8.2 *tétel*: Ha nincs rossz pár, akkor Schrage algoritmus a optimális megoldást ad.

8.3 *tétel*: A Schrage algoritmus lépésszáma $O(n \log n)$.

Az utóbbi abból következik, hogy az algoritmus lényegében a (d_i, r_i) párokat rendezi lexikografikus monoton növvő sorrendbe. A 8.2. tétel pedig az előtte lévőnek azonnali következménye.

Most a Schrage algoritmus felhasználásával megadunk egy módosított eljárást [14].

1. A Schrage algoritmus alkalmazásával meghatározzuk a Π sorrendet.
2. Ha $T(\Pi) = \emptyset$, akkor megyünk a 3. lépésre. Különben legyen

$$r_{j(\pi)} = r_{\pi(n)}.$$

Megyünk az 1. lépésre

3. Az eddig generált sorrendek közül kiválasztjuk a legjobbat.
Erre az eljárásra igazak a következők.

8.4 *tétel*:

- (i) A módosított eljárás hibája legfeljebb annyi, mint a Schrage eljárásé.
- (ii) A módosított eljárás optimális megoldást adja, ha nincs rossz hármas.
- (iii) A módosított eljárás lépésszáma legfeljebb $O(n^3 \log n)$.

Tehát sikerült azon feladatok körét, amelyekre a heurisztikus eljárás optimális megoldást ad, lényegesen kiterjeszteni, anélkül, hogy a számítási mennyiség reménytelenül megnőne. A gyakorlatban a (iii)-ban adott értéknél sokszor lényegesen kevesebb lépés is elég.

8.2. Egy ütemezési feladat megoldása darabolási problémaként

A [6] dolgozat foglalkozik az alábbi problémával. Adott egy erőforrás és bizonyos munkák, amelyek között azt szét kell osztani. Maga az erőforrás egy időpillanatban bizonyos egyenlő részekre, illetve annak többszöröseire felosztható. (Például ha az erőforrás egy brigád, akkor a brigád tagjai egyszerre több munkán is dolgozhatnak, de nyilván mindenki csak egyen.) Az egyes munkákra

meg van adva, hogy az erőforrásból hány egységnyi részt, időben milyen hosszán kötnek le. Mindkét adat rögzített. A feladat a munkák olyan ütemezésének elkészítése, ahol a teljes átfutási idő (az első munka megkezdésétől az utolsó munka befejezéséig számított idő) minimális. Ezt a célfüggvényt ütemezési feladatoknál előszeretettel alkalmazzák, mert megfelelően képvisel több más célt, pl. a határidők tartását is.

A probléma átfogalmazható darabolási problémává. Adott egy szalag (elegendően hosszú), melyből meghatározott méretű téglalapokat kell kivágni a szalag hosszával párhuzamosan. A téglalapok nem forgathatók. A feladat a téglalapok egy olyan elrendezését találni, mely a szalagból minimális hosszát foglal el. Ilyen problémához jutunk, ha az anyag különböző irányokban különbözően viselkedik (pl. az egyik oldallal párhuzamos szálakat tartalmaz).

A probléma matematikai leírása több lépcsőből áll. Először egy hálózatot definiálunk, majd pedig szükséges és elegendő feltételt adunk arra, hogy egy hálózatbeli folyam mikor jelöli ki a téglalapok egy elrendezését.

Adottak tehát a T_1, \dots, T_m téglalapok, ahol

$$T_i = k_i \times w_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

ahol k_i jelöli a téglalpnak a szalag hosszával párhuzamos méretét. A szalag szélessége w .

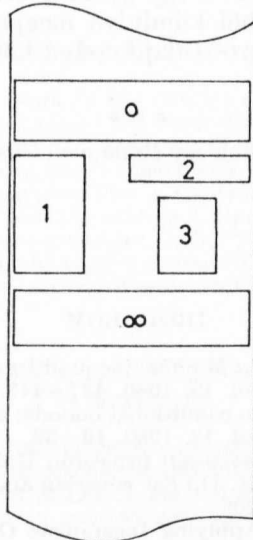
8.4 *definíció*: T -hálózatnak nevezzük a következőt:

(i) a gráf csúcsai

$$V = \{0, 1, \dots, m, \infty\}$$

(ii) a gráf élei

$$E = \{(i, j): 1 \leq i, j \leq m, i \neq j\} \cup \\ \cup \{(0, i): 1 \leq i \leq m\} \cup \{(i, \infty): 1 \leq i \leq m\} \cup \{(0, \infty)\}$$



1. ábra

(iii) az élek kapacitásai

$$a_{ij} = \min \{w_i, w_j\} \quad 1 \leq i, j \leq m, i \neq j$$

$$a_{0i} = a_{i\infty} = w_i \quad 1 \leq i \leq m$$

$$a_{0\infty} = w.$$

Tekintsük most a téglalapokat egy tetszőleges elrendezését a szalagon és képzeljük úgy, hogy a szalag hossza függőleges irányú. Mivel az elrendezés mindenképpen véges helyet foglal el, ezért elhelyezhetünk két további, a szalag teljes szélességét elfoglaló téglalapot az elrendezés fölé (0) és alá (∞). Azt mondjuk, hogy egy téglalap egy másikon van, ha fölötte van és a szalag hosszára merőleges oldaluknak van olyan darabja, hogy ott a két téglalap között nincs további harmadik. Így az 1. ábrán 0 rajta van 1-en, 2-n és ∞ -en; 2 pedig 3-on és ∞ -en.

8.5 *definíció*: Tekintsünk egy elrendezést, melynek alapján a T hálózatban definiáljuk a következő ún. T -folyamot. Az (i, j) élen akkor folyik folyam, ha i a j -n van, és a folyam értéke megegyezik azzal a hosszal, amivel i a j téglalap van.

Nyilvánvaló, hogy a T -folyam értéke w és az egyes téglalapokra folyó (illetve onnan kimenő) folyam értéke pedig a téglalap szélessége.

8.6 *definíció*: T -gráf egy olyan része a T -hálózatnak, ahol a T -folyam értéke egy alkalmas elrendezés mellett pozitív.

8.5 *tétel*: Egy G összefüggő irányított gráfhoz, melynek van egy 0 kifokú és egy 0 befokú csúcsa, akkor és csak akkor található egy alkalmas téglalaprendszer és ennek egy olyan megfelelő elrendezése, hogy G az ehhez tartozó T -gráf, ha G nem tartalmaz irányított kört és síkba rajzolható.

Ennek a tételnek a segítségével egy gyors heurisztikus eljárás adható meg, mely egy konkrét elrendezésből kiindulva megpróbálja azt tovább javítani. A javíthatóság feltétele bizonyos tulajdonságú körök létezése a T -hálózatban.

* * *

A szerző köszönetét fejezi ki a cikk egy általa nem ismert lektorának alapos, a dolgozat jobbitását célzó véleményéért.

(Beérkezett: 1986. február 3-án.)

IRODALOM

1. BACHEM, A. and SCHRADER, R.: Minimal inequalities and subadditive duality. *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 18. 1980. 437—443.
2. BALAS, E.: Cutting planes from conditional bounds: a new approach for set covering. *Mathematical Programming*, Vol. 12. 1980. 19—36.
3. R. BELLMAN: *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, 1957.
4. BELLMORE, M. and RATLIFF, H. D.: Set covering and involutory bases. *Management Science*, Vol. 18. 1971. 194—206.
5. BIRÓ, M.: Efficient Method Applying Incomplete Ordering for Solving the Binary Knapsack Problem. in: K. IRACKI, M. MALANOWSKI and S. WALUKIEWICZ (eds) *Optimization Techniques*. Springer-Verlag 1980. Part 2., 160—169.

6. BIRÓ, M. & BOROS, E.: A Network Flows and Non-Guillotine Cutting Patterns. *European Journal of Operational Research (EJOR)*, 16. 1984. 215—221.
7. BOROS E.: Egy új elv s-feltételek meghatározására. MTA SZTAKI WP MO/28.
8. BOROS, E.: Subadditive Approach to a Linear Diophantine Problem of Frobenius. MTA SZTAKI WP MO/38.
9. CARLIER, J.: The One-Machine Sequencing Problem. *European Journal of Operational Research*, Vol. 11. 1982. 42—47.
10. EVERETT, H.: Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation. *Operations Research*, Vol. 11. 1963. 399—417.
11. S. HALFIN: Arbitrary Complex Corner Polyhedra Are Dense in R^n . *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 23 No. 2. September 1972. 157—163.
12. HUJTER, M.: Lower bounds for the Frobenius problem. MTA SZTAKI WP MO/43.
13. HUJTER, M.: On a problem of Frobenius: a survey. MTA SZTAKI WP. MO/44.
14. HUJTER, M.: An effective algorithm for one-machine maximum lateness problem. Kézirat, publikálás alatt.
15. KOVÁCS L. B.: Leszámlálási struktúrák és alkalmazásuk diszkrét programozási feladatok megoldására. *Matematikai Lapok*, XIX, 33—48.
16. KOVÁCS, L. B.: Solution of Linear Integer Programming Problems by Dynamic Programming. *Math. Operationsforschung u. Statistik*, Vol. 5. 1974.
17. KOVÁCS, L. B.: Combinatorial Methods of Discrete Programming. *Mathematical Methods of Operations Research 2*, ed.: A. PRÉKOPA, Akadémiai Kiadó, Budapest 1980.
18. SCHRAGE, L.: Obtaining optimal solutions to resource constrained network scheduling problems. Publikálatlan kézirat, 1971.
19. SEBŐ, A.: Brief Description of a Class of Cutting Planes for the Set Covering Problem. MTA SZTAKI WP MO/42.
20. VIZVÁRI B.: Leszámlálási algoritmusok a 0—1-es polinomáliás programozásban. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 1. 1975. 373—384.
21. VIZVÁRI B.: A Lagrange szorzók használata diszkrét programozási algoritmusokban. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 2. 1976. 413—425.
22. VIZVÁRI, B.: Lagrange Multipliers in Integer Programming *Problems of Control and Information Theory*, Vol. 7. 1978. 393—406.
23. VIZVÁRI, B.: On the Connection of the Frobenius Problem and the Knapsack Problem. in: *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 37. Finite and Infinite Sets, North-Holland, 799—819.
24. VIZVÁRI, B.: An Application of Gomory Cuts in Number Theory. MTA SZTAKI WP. MO/40.

SOME RECENT HUNGARIAN RESULTS IN DISCRETE PROGRAMMING

The paper is devoted to the work in the field of optimization done by the discrete programming group of the Operations Research Department at the Computer and Automation Institute of the Hungarian Academy of Sciences. Results of the theoretical study of the sets of binary vectors, graph theory and other parts of combinatorics have been omitted. The titles of the chapters are: 1. General aspects of discrete programming problems 2. General methods of problem solving 3. Heuristic methods 4. Special problem classes 5. Duality, 6. Non-zero-one problems 7. The polynomial zero-one programming 8. Scheduling problems. Many of the results contained in the paper have not been published yet but in working papers, especially some in Chapters 4, 5, 6 and 8.

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ДИСКРЕТНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ В ВЕНГРИИ

Цель работы состоит в том, чтобы показать результаты, достигнутые группой дискретного программирования отдела исследования операций Института вычислительной техники и автоматизации ВАН (MTA SZTAKI). Многие из них до сих пор были опубликованы лишь в форме т. н. препринтов, поэтому в особенности разделы 4, 5, 6 и 8 содержат много нового.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

FÜSTÖS LÁSZLÓ—MESZÉNA GYÖRGY—SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA

A sokdimenziós skálázás egyes újabb módszerei, III.

Bevezetés

Az első cikkben egy általános bevezetés után a MINISSA és az MRSCAL eljárásokat tárgyaltuk, egyes kapcsolódó meggondolásokkal együtt. Megjelent a Sigma 1982. XV. évf. 3. számában. A második részben — Sigma 1983. XVI. évf. 3. szám — az INDSCAL eljárást és változatait, a PROFIT és PREFMAP eljárásokat tekintettük át. A most következő harmadik részben a MINIRSA, az MDPREF, a PARAMAP és az UNICON eljárásokat mutatjuk be.

Az egyes cikkek közötti időbeni távolságok áthidalása érdekében néhány mondatban emlékeztetünk a sokdimenziós skálázás problémakörének egyes gondolataira.

A megfigyelési egységek rangsorolása sok tényezőnek együttes figyelembevételével, ez a kérdés mind elméleti, mind gyakorlati oldalról az érdeklődés előterébe került. Számos gyakorlatilag is jól használható eljárás született — a kompromisszum kötés módozataiban különbözve egymástól —, melyek a klasszikus értelemben vett egy dimenziós output rangsort, „skálát” adták eredményül. Cikksorozatunk nem érinti ezeket a gondolatmeneteket.

Egy másik erőteljesen fejlődő irányzat a több dimenziós outputot adó módszerek létrehozását szorgalmazza. Feloldva az egy dimenziós eredő rangsor igen erős következményét, remélhető, hogy a csökkenő kompromisszum igénye mellett tisztábban lesznek felismerhetők a rendszerbeli kapcsolatok, belső összefüggések, mindaddig, amíg a magasabb dimenziószámok más oldalról meg nem növelik a technikai nehézségeket. A cikksorozatban szereplő eljárások közvetlenül vagy közvetve ehhez a gondolatkörhöz tartoznak.

1. A MINIRSA eljárás (*Mini-Rectangular (smallest) Space Analysis*)

Az ismertető modell — a MINISSA eljáráshoz hasonlóan — kétdimenziós adatmátrixok elemzésére szolgál, s az I. cikk elején adott definíció értelmében nem metrikus módszer.

Tekintsük az alábbi adatmátrixot:

		objektumok					
		1	2	...	j	...	m
„személyek”	1						
	2						
	.						
	.						
	i						
	.						
	n						

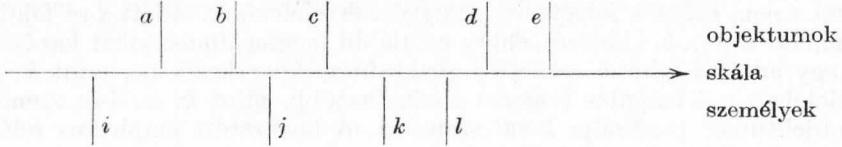
az i -ik sor j -ik helyén álló rangszám adja meg azt az információt, hogy az „ i ” indexű személy a „ j ” objektumot hogyan preferálja. Tehát minden sor az objektumoknak valamely személy szemszögéből történő preferencia sorrendjét tartalmazza.

A MINIRSA-modell r dimenziós térben helyezi el a személyeknek és objektumoknak megfelelő $(n + m)$ pontot az alábbi elv szem előtt tartásával. Jelöljük az „ i ” személyt és „ j ” objektumot reprezentáló pont távolságát d_{ij} -vel.

Megköveteljük, hogy a $d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{im}$ távolságok relatív nagysága feleljen meg a fenti adatmátrix i -ik sorában található preferencia rendezésnek. ($i = 1, 2, \dots, n$). A megfeleltetés jóságát egy alkalmas hibafüggvénnyel mérjük, melyet a pont-kijelölés iteratív folyamatában minimalizálunk.

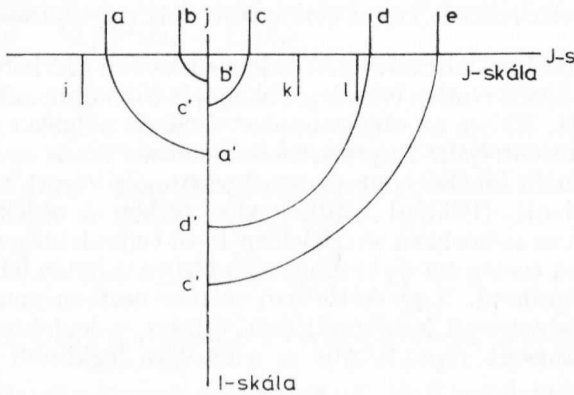
Tételezzük most fel, hogy az m számú objektum valamilyen közös tulajdonság alapján kvantitatívan is összehasonlítható, amit úgy is kifejezhetünk, hogy az objektumoknak egy közös egydimenziós skálán vannak skálaértékei.

Ugyanezen az egydimenziós skálán most az előbbieken bevezetett adatmátrixban szereplő személyeket is megkíséreljük reprezentálni egy-egy ponttal. E pontokat a személyekhez tartozó „maximum preferencia” vagy „ideális” pontoknak fogjuk nevezni. E pontok kijelölését a következő megfontolás alapján végezzük. Feltételezzük, hogy minden személy annál inkább részesíti előnyben (preferálja) az egyes objektumokat, minél közelebb helyezkednek el a skálán (az objektumokat jelentő pontok) a szóban forgó személyt reprezentáló ideális ponthoz. Így az objektumokat rögzítő skála pontok és a személyek ideális pontjai között mért távolságok monoton függvényei lesznek az adatmátrixban rögzített személyenkénti preferencia rangsornak. Az 1. ábra öt objektumot (a, b, c, d, e) és négy személyt (i, j, k, l) ábrázol egy egydimenziós skálán:



1. ábra. Objektumok és személyek az egydimenziós skálán

Ezt az egydimenziós skálát *J*-skálának (joint scale) nevezzük. A *J*-skála alapján egy személy preferencia rangsorának megfelelő *I*-skálát vetítéssel kaphatjuk meg. A vetítést a *j* személyre a *Coombs*-féle „kibontó” (unfolding) technikával a 2. ábrán látható módon végeztük el.



2. ábra. I-skála a „j” személyre

Ha a *J*-skála alapján a példában szereplő többi három személy ideális pontjához is hasonló módon elvégezzük a vetítést, a következő rangsorokat kapjuk:

személy	preferencia rangsor				
i	a	b	c	d	e
j	b	c	a	d	e
k	e	d	b	e	a
l	d	c	e	b	a

Könnyen belátható, hogy egy adott *J*-skála (illetve az objektumok egy már rögzített skála-érték rendszere esetén) nem jöhet létre minden elvileg lehetséges preferencia rangsor. Például, ha az objektumok skálaértékei olyanok — mint a fenti példában —, hogy: *b, c, d* skálaértékei az *a* és *e* értékei közé esnek, akkor nem rögzíthető a skálán olyan személy (azaz az őt reprezentáló ideális pont), amelyhez: *e, a, b, c, d* preferencia sorrend tartozik.

Vezessük be a „ \geq_e ” szimbólummal leírható, gyenge rendezést létrehozó „empirikus relációt”. Az empirikus jelző kívánja hangsúlyozni az eltérést az aritmetika „ \geq ” relációjától, valamint arra is figyelmeztet, hogy itt „dolgok”

közötti s nem számok közötti összefüggést értelmezzük. Adott i -re fejezze ki relációnkat a $p^i(j, k)$ kifejezés, ehhez az alábbi megfogalmazásokat kapcsolhatjuk: egy adott i feltétel mellett j gyakrabban következik be, mint k ; egy i szituációban a j reagálás (válasz) elfogadhatóbb, mint k ; az i -ik személy a j -ik objektumot preferálja k -val szemben. A bevezetett empirikus relációra érvényesek a következő tulajdonságok:

1. $p^i(j, j)$ (reflexivitás)
2. ha: $p^i(j, k)$ és $p^i(k, j)$ akkor:
 j ekvivalens k -val (antiszimmetria)
3. ha: $p^i(j, k)$ és $p^i(k, h)$ akkor:
 $p^i(j, h)$. (transzitivitás)

Ha meggondolásunkban m objektum szerepel a J -skálán az őket reprezentáló pontok $m!$ sorrendben helyezkedhetnek el. Kimutatható, hogy a példa szerinti egydimenziós esetre szorítkozva, a bemutatott vetítéses eljárással csak $\binom{m}{2} + 1$

féle rangsort tudunk előállítani: (pl. 5 objektum esetén 120 helyett csak 11-et.) Az ilyen módon kezelhetetlen esetek problémáját több dimenziós terek felhasználása hidalja át. Ekkor az objektumokat és a személyeket az n dimenziós tér pontjai reprezentálják. A preferencia rendezés itt is a több dimenziós térben elhelyezkedő ideális pont és az objektumok között mért távolságok rangsorolását jelenti. (Például kétdimenziós térben 5 objektum lehetséges 120 sorrendjéből az előzőeknek megfelelően 46-ot tudunk megadni.) Belátható, hogy m objektum esetén $(m - 1)$ dimenziós térben minden lehetséges sorrend realizációja elvégezhető. A gyakorlatban számos esetben nem is cél minden elvileg lehetséges sorrendi konfiguráció előállítása, a legjobb megoldás a lehető legtöbb rangsort reprodukálja a lehetséges legkisebb dimenziószámú térben.

Jelölje az objektumokat j és k index ($j = 1, 2, \dots, m$ és $k = 1, 2, \dots, m$) a személyeket (megfigyelési egységeket) az i index ($i = 1, 2, \dots, n$). Rendelkezésünkre áll a személyeknek az objektumokra vonatkozó preferencia rangsora. [E megállapítások rögzíthetők a $p^i(j, k)$ szimbólummal.] A preferencia mértékét a sokdimenziós térben az i -edik személy ideális pontjának a j -edik objektumot reprezentáló ponttól mért d_{ij} távolsága adja meg.

Legyenek a személyek ideális pontjainak koordinátái az X , az objektumok konfigurációja pedig az Y mátrixban. Ekkor:

$$d_{ij} = \left\{ \sum_t |x_{it} - y_{jt}|^p \right\}^{1/p} \quad (t = 1, 2, \dots, Z),$$

ahol: x_{it} az i -ik ideális pont (személy) t -ik koordinátája

y_{jt} a j -ik objektum t -ik koordinátája

d_{ij} az „ i ” és „ j ” pontok közötti távolság.

Ha $p = 2$ akkor a megszokott euklideszi távolsággal dolgozunk.

Az eljárás indításakor egy alkalmas kezdő konfigurációt veszünk fel s erre kiszámítjuk a d_{ij} távolságokat. Ha rendelkezünk megfelelő információkkal, ez az indulórendszer már tartalmazhatja a valóság egyes markáns tulajdonságait, ellenkező esetben magával a programmal is lehet teljes általánosságban egy induló pont konfigurációt létrehozni.

Ezután — később részletezendő módon — a preferenciákra támaszkodva: $\hat{d}_{ij} \leq \hat{d}_{ik}$ ha: $p^i(j, k)$ kritérium szem előtt tartásával meghatározzuk a d_{ij}

becsléseket. E becslések jóságát az alábbi S függvénnyel mérjük:

$$S = \sqrt{\frac{\frac{1}{n} \sum_i \sum_j (d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2}{\sum_j (d_{ij} - \bar{d}_i)^2}}, \text{ ahol: } \bar{d}_i = \frac{1}{m} \sum_j d_{ij}.$$

S értéke a 0 és 1 közé esik. Az iterációs eljárás során a pontkonfigurációt úgy igyekszünk változtatni, hogy S értéke csökkenjen. A konfiguráció változtatásakor a gradiens módszert használjuk fel.

Az elmondottak alapján az eljárást pontokba szedve a következőképpen foglalhatjuk össze:

1. Ha a felhasználó nem biztosít kezdeti konfigurációt, akkor a program maga generál egy induló pont-rendszert. (Először az objektumok helyét jelölve ki, majd a személyek ideális pontjait helyezi el az általuk legjobban preferált két pont – objektum – közé.)
2. Az origót az összes pont centroidjába helyezzük. (Normalizálva a rendszert: a koordináták négyzetösszege $(n + m)$ r -rel lesz egyenlő.)
3. Kiszámítjuk a d_{ij} távolságokat.
4. Az I. cikkben ismertetett, *Kruskal*-féle monoton regressziós eljárással előállítjuk a \hat{d}_{ij} értékeket. (Ha az aktuálisan előálló \hat{d}_{ij} értékek nem tesznek eleget a fentebb említett:

$$\hat{d}_{ij} \leq \hat{d}_{ik} \text{ ha } p^i(j, k)$$

kritériumnak, akkor a megfelelő d_{ij} értékek átlagával tesszük őket egyenlővé.)

5. Az illeszkedés ellenőrzéséhez kiszámítjuk az S mérőszám értékét.
6. Ha az S eléri a megkívánt szintet, az eljárás befejeződik.
7. Ellenkező esetben a gradiens módszer alkalmazásával módosítjuk a pontkoordinátákat, s ezzel a teljes pont konfigurációt.
8. Az iterációt a 2. ponttól folytatjuk.
9. A végső megoldást rotáljuk úgy, hogy a rendszer tengelyei egybe essenek a konfiguráció főkomponenseivel. Az így rögzíthető tengelyek a rendszert hordozó szerepük, annak „kifeszítéséhez történő hozzájárulásuk” mértékében rendezettek lesznek.

Végül meg kell jegyezni, hogy a gradiens módszer nem biztosítja a globális, csak a lokális minimum elérését. Ezért ilyen helyzetben a program automatikusan egy teljesen eltérő induló konfigurációból is végig viszi az iterációt és a végső megoldást a minimális célfüggvény (S) érték alapján választjuk ki.

2. Az MDPREF eljárás (*Multi Dimensional Preference Scaling*)

Induljunk ki változatlanul az 1. pont elején rögzített adatmátrixból. Ez n személy m objektumra vonatkozó preferencia rendszerét tartalmazta. Az MDPREF-modell a MINIRSA eljáráshoz hasonlóan, mind a személyeket, mind az objektumokat reprezentáló, összesen $(n + m)$ pontot szimultán egy r dimenziós térbe illeszti. A két eljárás elvileg az illesztés kritériumában tér el egymástól. A jelen esetben azt követeljük meg, hogy az objektumok vektorainak

egy-egy személy vektorára vonatkozó merőleges vetületei relatív nagyságukat tekintve feleljenek meg az illető személy preferencia-sorrendjének.

A gondolatmenet némileg hasonlít a PROFIT eljárásnál (l. a II. sz. cikk, Szigma XVI. évf. 3. sz.) látottakhoz, csak amíg ott az objektumok a priori terébe illesztettük a személyek preferenciáinak legjobban megfelelő vektort, az MDPREF-eljárás az objektumok és személyek terét egyidejűleg határozza meg.

Az eljárás kissé részletesebb leírásához fejezzük ki az induló adatmátrixban levő preferenciákat az eddigiektől eltérő technikai megoldással. Tartalmazza az i -ik személy preferenciáit a $P_i = \{p_{i,jk}\}$ mátrix, ahol

$$p_{i,jk} = \begin{cases} +1, & \text{ha: az } i \text{ személy a } j \text{ objektumot preferálja } k\text{-val szemben} \\ -1, & \text{ha: az előzővel ellenkező eset áll fenn} \\ 0, & \text{ha: az } i \text{ személy egyik objektumot sem részesíti a kettő közül} \\ & \text{előnyben.} \end{cases}$$

Legyen továbbá $x_j = [x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jz}]$ a j objektum $y_i = [y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iz}]$ az i személy z elemű vektora.

E jelölésekkel az i személy részéről a j objektum iránt megnyilvánuló preferencia becslése (egy konkrét pont konfiguráció pl. az induló rendszer felhasználásával) a vetület és skaláris szorzat összefüggése értelmében

$$s_{ij} = y_i' x_j.$$

Általánosabban az m objektum koordinátáit az r dimenziós térben tartalmazza az: $\mathbf{X}_{(m \times r)} = \{x_{jt}\}$; az n személy koordinátáit pedig az: $\mathbf{Y}_{(n \times r)} = \{y_{it}\}$ mátrix.

A becsült preferencia értékeket a következőképpen kapjuk:

$$\mathbf{S} = \{s_{ij}\} = \mathbf{YX}'.$$

Problémánk tehát úgy fogalmazható, meg kell határozni olyan \mathbf{Y} és \mathbf{X} mátrixokat (olyan pontokat az adott r dimenziós térben), hogy a belőlük számított preferencia értékek (\mathbf{S}) minél jobban közelítsék a megfigyelt (mért) preferencia adatokat. CARROL és CHANG (1964) adott két eljárást a feladat megoldására. Az egyik egy iteratív módszer, a másik pedig az Eckart—Young dekompozíciós eljárást használja. Az MDPREF-program az utóbbi eljárással dolgozik. Az Eckart—Young-eljárás az \mathbf{SS}' vagy az $\mathbf{S}'\mathbf{S}$ mátrix sajátértékét és a sajátvektorát számítja. Carroll és Chang Monte-Carlo-módszerrel végzett elemzéssel arra a megállapításra jutott, hogy az Eckart—Young-eljárás ugyanolyan jól dolgozik, mint a feladat iteratív megoldása.

3. A PARAMAP-eljárás (*Parametric Mapping*)

A három cikkben ismertetett skálázó módszerek egy része a többdimenziós output alapgondolatát módosítja, fejleszti tovább, hogy az elgondolásban rejlő kompromisszum mértéke és tulajdonságai minél jobban követhetők legyenek. A többi eljárás a skálázás alapproblémájához kapcsolódó más kérdés-felvetésekre keresi a választ.

A PARAMAP-eljárás az első csoportba tartozik, kereteiben szorosan kapcsolódik a MINISSA-modellhez, de amíg ott az input és output jellemzők

között monoton, illetve az MRSCAL esetében alapvetően lineáris kapcsolatot tételeztünk fel, itt nemlineáris, esetleg nem monoton kapcsolatok feltételezésére kerül sor.

A PARAMAP-eljárás alap gondolata szerint az m megfigyelt változó kifejezhető r számú ($r < m$) látens változó nemlineáris függvényével. Így az n objektum az input m dimenziós teréből átvihető egy redukált r dimenziós térbe. Az eljárás a mondottak szerint a nemlineáris faktorelemzés egy megvalósításának is tekinthető. A program kidolgozói SHEPPARD és CARROLL (1966), illetve CARROLL és CHANG (1973).

Az eljárás inputja lehet:

1. n objektum m változóra vonatkozó mérési eredményeit tartalmazó, $(n \times m)$ típusú adatmátrix, vagy

2. egy $(n \times m)$ típusú szimmetrikus különbözőségi (hasonlósági) mátrix.

A második változat esetén, ha a hasonlósági mátrix kovarianciákat tartalmaz, áttérhetünk az objektumok közötti „távolságokra”, a következőképpen:

$$d_{ij}^2 = c_{ii} + c_{jj} - 2c_{ij}.$$

Ha a korrelációs együtthatókat ismerjük, akkor: $r_{ii} = r_{jj} = 1$, s így

$$d_{ij}^2 = 2(1 - r_{ij}).$$

Egyéb különbözőségi mérték alkalmazása esetén:

$$d_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n (\delta_{ik} - \delta_{jk})^2.$$

A következőkben összefoglaljuk az eljárás gondolatmenetét. Legyen $\mathbf{Y}_{(n \times m)} = \{y_{ik}\}$ az előzőekben említett 1-es típusú input adatmátrix.

A megfigyelt változók tehát: y_1, y_2, \dots, y_m ;

A látens változók: x_1, x_2, \dots, x_r ; $r < m$.

Az alapvető feltételezés a következő:

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

vagy az i -edik objektumra: $y_{ik} = f_k(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ir})$.

A PARAMAP-eljárás az r dimenziós output térben keresi azt a pont konfigurációt, melyek közötti D_{ij} távolságok a Carroll-féle κ „folytonossági mérték” szerint jól illeszkednek az input d_{ij} „megfigyelt” távolságaihoz. κ általános alakja:

$$\kappa = \frac{\sum_{i \neq j}^n \frac{d_{ij}^{2a}}{D_{ij}^{2b}}}{\left[\sum_{i \neq j}^n D_{ij}^{2c} \right]^{-b/c}},$$

ahol:

$$d_{ij}^2 = \sum_{k=1}^m (y_{ik} - y_{jk})^2$$

$$D_{ij}^2 = l^2 \sum_{k'=1}^r (x_{ik'} - x_{jk'})^2$$

l : normalizáló konstans.

KRUSKAL és CARROLL (1968) az a , b , c paraméterek következő praktikus megválasztási lehetőségeit javasolta:

$$\begin{array}{lll} a = 1 & b = 1 & c = -1 \\ a = 0,5 & b = 1 & c = -1 \\ a = 0,5 & b = 0,5 & c = -1 \\ a = 1 & b = 2 & c = -1 \end{array}$$

α értelmezéséből következik, hogy egyenletesebb függvénykapcsolatokhoz kisebb α értékek tartoznak.

A α mutató további ekvivalens alakjai is szerepelnek az irodalomban. Ezekből az alakokból megállapítható, hogy a modellben a nagy távolságok kis súlyt, a kis távolságok nagy súlyt kapnak. Az eljárás α -t minimalizálja és eredményül az objektumoknak a redukált térbe illesztett konfigurációját adja.

Az eljárás programja egy önkényesen felvett $(n \times r)$ típusú \mathbf{X} mátrixból indul ki. Ez lehet valamely más skalázó eljárás outputja is. Ezután meghatározza a hozzá tartozó α értéket, majd a gradiens módszerrel iteratív úton lépésről lépésre változtatja az \mathbf{X} mátrixot, míg ki nem alakul egy stacionárius konfiguráció az adott dimenziószámú output térben. A program az iteráció eredményeképpen kapott \mathbf{X} mátrixot normalizálja és a fő tengelyekben rotálja.

4. UNICON-eljárás

(Unidimensional Conjoint Measurement for Multifaceted Design)

Az UNICON-eljárás maximum öt független változónak egy függő változóra vonatkozó összetett, közös hatását határozza meg additív, szubtraktív vagy multiplikatív, illetve ezen műveletek kombinációjával felállított modell segítségével.

A társadalomtudományokban gyakran vizsgálják egy független változó-halmaz együttes hatását egy függő változóra. Például amikor feltételezzük, hogy az életkor és a nem multiplikatívan hat a keresetre, vagy hogy a társadalmi státus és az értékrendszer együttesen befolyásolja az emberek önértékelését, akkor úgynevezett egyesített mérést hajtunk végre. A független változókat, amelyek gyakran nominális vagy ordinális tulajdonságok, egyesítjük valamilyen formában, hogy így előállíthassuk a függő változó értékeit.

A legszélesebb körben ismert és gyakran alkalmazott formája az egyesített mérésnek az N -utas szórásanalízis (N -way analysis of variance — ANOVA). Az ANOVA-modellben a független változók hatását additív módon összesítjük.

Az ANOVA-modellben a függő változóról feltételezzük, hogy legalább intervallum mérési szintű változó, a független változók pedig nominális mérési szintű változók. KRUSKAL (1964) mutatta meg, hogy ha a függő változó ordinális szintű, egy nem-metrikus MDS-eljárást használhatunk a függő változó értékeinek újraskálázására úgy, hogy a független változók hatása jó közelítéssel additív legyen. Ezt az eljárást Kruskal MONANOVA-nak (monoton ANOVA) nevezte el.

Az UNICON-eljárás továbbfejlesztése a MONANOVA-rendszernek. Az UNICON-eljárásban lehetőség van az additív modell mellett, amint azt már említettük, a szubtraktív és multiplikatív, illetve ezek kombinációjából álló modellek alkalmazására is.

Legyen $Q = \{p_{jkl}\}$ a függő változó,

$$A = \{\alpha_j\} \quad (j = 1, 2, \dots, m_\alpha)$$

$$B = \{\beta_k\} \quad (k = 1, 2, \dots, m_\beta)$$

$$C = \{\gamma_l\} \quad (l = 1, 2, \dots, m_\gamma)$$

pedig jelöljék a független változókat (kategóriákkal együtt).

Megfigyelési adataink ekkor egy háromutas táblázatba rendezhetők. A táblázat általános eleme legyen $\{z_{jkl}\}$ az A változó j -edik a B változó k -edik és a C változó l -edik kategóriájába (a táblázat $\{jkl\}$ -háromdimenziós cellájába) eső megfigyelési egységeknek a függő változóra vonatkozó átlagos értéke.

Az általános modellben a függő változó értéke a független változók (ismertlen) f függvényével fejezhető ki:

$$Q = z_{jkl} = f(A_j, B_k, C_l).$$

Az additív modell:

$$f(A_j, B_k, C_l) = \alpha_j + \beta_k + \gamma_l.$$

A szubtraktív modell:

$$f(A_j, B_k, C_l) = \alpha_j - \beta_k - \gamma_l.$$

A multiplikatív modell:

$$f(A_j, B_k, C_l) = \alpha_j \beta_k \gamma_l.$$

Egy lehetséges további változat például:

$$f(A_j, B_k, C_l) = (\alpha_j - \beta_k) \gamma_l.$$

Az UNICON-eljárás a független változók lehetséges kategóriáihoz numerikus skálaértékeket rendel:

$$a_j = g_A(\alpha_j)$$

$$b_k = g_B(\beta_k)$$

$$c_l = g_C(\gamma_l),$$

úgy, hogy a felhasználásukkal reprodukált független változó értékek (\hat{z}_{jkl}): (például: $\hat{z}_{jkl} = a_j + b_k + c_l$) maximálisan illeszkedjenek az eredeti értékekhez, a z_{jkl} -hez. Az illeszkedés jószágát az alábbi *Stress* (S_2) függvénnyel mérjük; amely három független változó esetén a következő alakban írható fel:

$$S_2 = \sqrt{\frac{\sum_j \sum_k \sum_l (z_{jkl} - \hat{z}_{jkl(h)})^2 e_{jkl(h)}}{\sum_j \sum_k \sum_l n_{jkl} (z_{jkl} - \bar{z})^2}},$$

ahol:

$z_{jkl} = f(a_j, b_k, c_l)$ az aktuálisan specifikált modell szerint,

$\hat{z}_{jkl(h)}$ = monoton regressziós becslése z_{jkl} -nek a h -ik iterációban,

$e_{jkl(h)} \begin{cases} = 1, & \text{ha } j, k, l, \text{ a } h\text{-ik iterációban sorrendezett} \\ = 0, & \text{ha } j, k, l \text{ hiányzó adat a } h\text{-ik iterációban,} \end{cases}$

$n_{jkl} = \sum_h e_{jkl(h)}$

$$\bar{z} = \left(\sum_j \sum_k \sum_l n_{jkl} z_{jkl} \right) \backslash \left(\sum_j \sum_k \sum_l n_{jkl} \right).$$

A $z_{jkl(h)}$ értéke nem meghatározott, ha $e_{jkl(h)} = 0$, de ez akkor nincs hatással S_2 -re.

Az UNICON-eljárásban S_2 -t gradiens módszerrel minimalizáljuk. A függő változó becült értékeit a Kruskal-féle monoton regressziós eljárással számítjuk. Leírását l. az I. cikkben. (Sigma XV. 3. szám.)

5. Összefoglalás

A három cikkben tárgyalt tucatnyi sokdimenziós skálázó eljárás, eljárás-változat hazai alkalmazói gyakorlatunkban még szinte teljesen ismeretlennek tekinthető. Az alap eljárások esetében ezért nagyobb gondot fordítottunk a kérdésfeltevések gondosabb megfogalmazására, illetve példa készítésére is, más esetekben csak röviden közöltünk egy-egy eljárást. Remélhető, hogy a speciális programcsomagok terjedésével az ismertetett eljárások is egyre szélesebb körben nyernek majd polgárjogot.

A skálázó eljárások több dimenziós output terében az egyes tengelyekhez kapcsolódó eredeti változók a lényegkiemelés problémájának egyfajta megközelítését szolgáltatják, alternatívát adva így a faktoranalitikus vizsgálatokhoz. A megfigyelési egységek térbeli csoportosulásai ugyanakkor a cluster képződés egyfajta realizációját jelenthetik. Ezek a megfontolások táplálják azokat a nézeteket, hogy a skálázó módszerek elmélete keretül szolgálhat a sokváltozós statisztikai eljárások rendszerbe foglalásához.

(Beérkezett: 1985. november 4-én.)

IRODALOM

- CARROLL, J. D.—CHANG, J. J.: *Models and Algorithms for Multidimensional Scaling*. Bell Laboratories, Mimeo. 1973.
- GOWER, J. C.: Some characterisations of matrix multidimensional scaling methods. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 49. 1980.
- KRANTZ, D. A.—LUCE, R. D.—TVERSKY, A.: *Foundations of measurement: additive and polynomial representations*. Academic Press, New York 1971.
- KRUSKAL, J. B.: Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a non-metric hypothesis. *Psychometrika*, No. 29. 1964.
- KRUSKAL, J. B.: Analysis of factorial experiments by estimating monotone transformations of the data. *Journal of the royal statistical society*, No. 27, 1964.
- KRUSKAL J. B.—CARROLL, J. D.: *Geometric models and badness-of-fit functions (from Multivariate Analysis.)* Academic Press, New York 1966.
- SHEPARD R. N.—CARROLL, J. D.: Parametric Representation of Nonlinear Data Structures. in: P. R. Krishnaiah (ed.) *Multivariate Analysis*. Academic Press New York 1966. pp. 561—592.

SZOFTVER

HANÁK GÁBOR

Nagyméretű modell automatizált input-rendszere

A számítógép alkalmazása során igen gyakran merül fel az a jelentős nehézségeket, sőt a nem számítástechnikai szakemberek részéről bizonyos ellenérzéseket és ellenkezéseket felvető probléma, hogy a ragyogóan működő kész programok, programrendszerek vagy programcsomagok életközeli működtetéséhez többnyire rengeteg és nagyon sokféle input adatot kell megadni. Ez a nehézség különösen akkor érezteti hatását, amikor több ezer, tízezer input adatra van szükség. Egy programterméket, illetve annak egy konkrét megvalósítását tulajdonképpen nem is tekinthetünk teljes értékűnek, ha nem tartalmaz — valamilyen mélységig és rugalmassági fokig — automatikus input-output rendszert. A gyakorlati munka sikere szempontjából ugyanis a számítógéptől távol álló szakemberek joggal várják el: nem elég a problémát megoldani, a megoldást be kell ágyazni a környezetbe.

Az egyik legnagyobb nehézség az, hogy az adatszolgáltatóktól elvárható adatrendszer és a programcsomag működtetéséhez szükséges adatrendszer között gyakran óriási szakadék tátong. Ezt ugyan „kézi” módszerekkel is betömhethjük, de csak igen nagy mennyiségű munka árán. Ha azonban az adatrendszer egyes változatainak többszöri átfuttatására van szükség, akkor ez a módszer gyakorlatilag használhatatlan. Szükség van tehát az input-folyamat automatizált, gépi megoldására.

Az elkövetkezőkben kísérletet teszünk a fent jelzett problémával kapcsolatban bizonyos szabályszerűségek végiggondolására és megfogalmazására, továbbá a szükséges mértékben leegyszerűsítve ismertetjük azt a sémát, amelyet egy konkrét esetben dolgoztunk ki. Írásunkban a teljes rendszernek csak az input oldalával foglalkozunk.

1.1 Automatizált input-rendszer

A továbbiakban a következő egyszerűsítő feltevésekkel élünk:

- adott egy *programcsomag*, ami képes arra, hogy a meghatározott formában érkező, ún. *előkészített adatrendszert*, amely a vizsgálandó *modell* egy speciális *menetrendje*, feldolgozza és az eredményeket valamilyen (számunkra most érdektelen) formában közölje;
- az előkészített adatrendszer tartalmaz bizonyos *alapadatokat*, amelyek a modell valamilyen szintű vázát alkotják, s amelyek minden egyes menetrend esetében változatlanok maradnak;
- létezik egy *elsődleges adatrendszer*, amelyből az alapadatokkal együtt, valamilyen szintű feldolgozással, előállítható az *előkészített adatrendszer*, ami minden egyes menetrend esetében más és más lehet.

Az elsődleges és az előkészített adatrendszer megkülönböztetésére azért van szükség, mert a programcsomag a modell feldolgozásához általában más adatokat vár inputként, mint amiket az adatszolgáltatóktól célszerű megkérni. (Például ha a modell által figyelembe vett egyik anyag két másik anyag keverékéből áll, s ezek mindegyike adott összetételű egy menetrend esetében, akkor a keverék összetételét célszerű egy programmal előállítani; vagy ha a modellben több helyen is előfordul egy termék, aminek az ára is szükség van, akkor ezt az egy információt főlegesen minden esetben megkérni: érdemes az egyetlen adatelem sokszorozására programot írni.) A kétféle adatrendszert *algoritmusrendszer* kapcsolja össze, ha az előkészített adatrendszer minden egyes eleméhez van egy olyan program, ami azt az alapadatokból (illetve azok egy részéből) és az elsődleges adatrendszerből (illetve ennek egy részéből) előállítja. Az algoritmusok megadása természetesen részben az adatszolgáltató, részben pedig a programozó feladata. (Az előző példákban: az anyagok összetételét, és azt, hogy ebből a keveréket hogyan kell számolni, az adatszolgáltató köteles megmondani. Az adatszolgáltatónak itt nem programot kell írnia, csak a megfelelő útmutatásokat kell megadnia !); az adatelem sokszorozásáért viszont a programozó a felelős.)

Nyilvánvaló, hogy egy adott modell esetében az alapadatok a többi adattól egyértelműen elhatárolhatók. Az elsődleges adatrendszer kijelölése azonban már korántsem ilyen egyszerű. Ezek körének meghatározásához ugyanis magukkal az adatszolgáltatókkal kell alapos konzultációkat folytatni. (Felmerülhet például olyan probléma is, hogy az adatszolgáltató a számítógéptől várja el két szám összeadását, ami adott esetben lehet megalapozott igény, máskor viszont nem.)

Az alapadatokat (és az ezeket karbantartó esetleges programokat) egyszer s mindenkorra eltávolítjuk számítógépünk valamelyik adathordozóján; változtatásra csak a modell megváltozása esetén van szükség. Az elsődleges adatrendszer elemeit egy vagy több adathalmazban tárolhatjuk; ezek tartalma minden egyes menetrend esetén más és más lehet. A teljes körű adatszolgáltatás, valamint a gépi feldolgozás érdekében az elsődleges adatrendszert célszerű a számítógép által készített *adatlaprendszeren* kérni az adatszolgáltatótól. Ha az elsődleges adatrendszert már kialakítottuk, akkor ennek célszerűen csoportosított részalmaidat felvehetjük olyan adatlapokra, amelyek tartalmazzák a megfelelő *szöveges meghatározásokat*, a modellhez szükséges esetleges *azonosítókat*, az input-folyamathoz szükséges esetleges *kódokat*, valamint az *adatelemek* helyét. A szöveges meghatározásokat, amik természetesen bármiféle információt tartalmazhatnak (például a megadandó adatelemek mértékegységét), az adatszolgáltató, az azonosítókat és az adatlapokra kerülő adatelemeket a programcsomag, míg a kódokat maga az input-rendszer használja fel. Az adatlaprendszert szintén állandó adatállományként kezelhetjük; megváltoztatására csak a modell, vagy az elsődleges adatrendszer határainak megváltozása esetén van szükség. (Valójában a nagy helyigény miatt nem érdemes azt az adatrendszert tárolni a számítógépben, ami adott esetben az adatszolgáltató előtt nyomtatott formában megjelenik; célszerű adatlapgyártó programokat is írni.)

A modellhez és a programcsomaghoz tartozó *automatizált input-rendszernek* nevezzük egy adott modell és programcsomag esetében adathalmazok és programok olyan rendszerét, amely a fentebb vázolt formában tartalmaz

- alapadatokat;
- adatlaprendszert, amely teljeskörűen felöleli az elsődleges adatrendszert;
- algoritmusrendszert, amely teljeskörűen gondoskodik az előkészített adatrendszerről.

1.2 Adatszintek

Az előkészített adatrendszert változékonyság szempontjából általában jól elhatárolható *szintekre* oszthatjuk. Az egyik szintet nyilvánvalóan mindjárt az alapadatok alkotják, hiszen ezek, adott modell esetén állandók, változtatásukra nincs szükség: ezt nevezzük majd az előkészített adatrendszer nulladik szintjének. Definíciónk szerint viszont a nem alapadatok, bizonyos menetrendek esetén, mind megváltozhatnak, ezért ezek a pozitív szintekhez tartoznak. Az is világos, hogy az előkészített adatrendszer pozitív szintjeit visszavezethetjük az elsődleges adatrendszer (pozitív) szint-felosztására. Fontos itt megjegyeznünk, hogy míg az előkészített adatrendszer felosztása diszjunkt (azaz egy elem egy és csakis egy szinthez tartozhat), ez korántsem áll az elsődleges adatrendszerre; elképzelhető ugyanis, hogy egy-egy elsődleges adat hatással van mind kevésbé mind nagyon változékonny előkészített adatokra is.

Az elsődleges adatrendszer logikailag összetartozó és egy szinten levő elemeit érdemes külön adathalmazban tárolni, és feldolgozásukat is külön algoritmus-sal (programmal) végezni. Az ilyen felosztás esetén az elsődleges adatrendszer különböző szinteken levő adathalmaz-csoportokból áll. Vegyük azonban észre azt is, hogy ily módon nem csupán egymástól független szintek jönnek létre, de ezen szintek között, legalábbis a bonyolultabb esetekben, bizonyos kapcsolatok is vannak. Itt most kétféle ilyen kapcsolatról szólnunk. Egyrészt a feldolgozás *logikája* követel meg valamiféle sorrendiséget bizonyos adathalmazok között (például amikor az előkészített adatrendszer egy részét csak úgy tudjuk kialakítani az egyik adathalmazból, hogy közben fel kell használjuk egy másik adathalmaz feldolgozásának eredményét vagy részeredményét). Másrészt viszont törekednünk kell a számítástechnikai apparátus bizonyos részei (adatok tárolása, programok mérete, futási- és CPU-idők stb.) minél jobb kihasználására is; ez a feldolgozás sorrendjének — nyilvánvalóan csak a logikai után következő — *utilitárius* szempontját adja.

Ha két adathalmaz különböző szinten van, akkor érdemes szintjeik sorrendjében feldolgozni őket, ha csak az ilyen eljárás logikailag egyáltalán lehetséges. Ezzel szemben ugyanis utilitárius szempont nem szólhat, mellette viszont — nyilvánvalóan — igen. Az elsődleges adatrendszernek egy szintekre osztását *regulárisnak* nevezzük, ha a logikai szempont nem zárja ki, hogy a magasabb szinteken levő adathalmazok feldolgozása később következék.

A logikai és utilitárius szempontok figyelembevétele alapján az elsődleges adatrendszer különböző szintjein levő adathalmazoknak egy speciális struktúráját kapjuk. (Ezt a struktúrát irányított gráffal is ábrázolhatjuk: az adathalmazok a gráf csúcspontjai; az A csúcsponthból akkor mutat él a B csúcsponthba, ha a fenti két szempont valamelyike miatt A feldolgozása megelőzi B -ét.) Ha a szintekre osztás reguláris, akkor az egyes szintek egymástól függetlenül kezelhetők; a szinteken belül érvényesülnek szempontjaink, s az egyes szintek sorrendjük szerint követik egymást.

1.3 Az input-kód

A legtöbb programcsomag esetében az előkészített adatrendszernek bizonyos mértékig kötött formátumúnak kell lennie; a leggyakoribb megkötés az input-adatok sorrendjére vonatkozik. Általában egyáltalán nem mindegy, hogy az előkészített adatrendszerben az adatok milyen sorrendben helyezkednek el. (Mi ugyan most nem foglalkozunk azzal az esettel, amikor a programcsomag nem követel meg valamiféle adat-sorrendiséget, annyit azért megjegyzünk, hogy nagy mennyiségű adat feldolgozása esetén még ilyenkor is célszerű valamilyen adat-sorrendet felállítani, már csak az áttekinthetőség és ellenőrizhetőség kedvéért is; az e pontban kifejtendő input-kódra ez esetben is szükség lehet.)

Az előkészített adatrendszer elemeinek a programcsomag által megkövetelt sorrendiségét *logikai sorrendnek* nevezzük. Ha pusztán a logikai sorrendet vennénk figyelembe, akkor — nagyszámú adat feldolgozása esetén — az esetek többségében a programcsomag által ugyan feldolgozható, ám az ember számára teljes mértékben áttekinthetetlen előkészített adatrendszert kapnánk. Ezt még akkor sem engedhetjük meg, ha mind az input-, mind az output-foyamatot teljes mértékben automatizáltuk (bizonyos elkerülhetetlen kézi ellenőrzések, hibakeresések miatt). Ezért szükség van az előkészített adatrendszer elemei *utilitárius sorrendjének* bevezetésére is: a programozónak (esetleg a felhasználóval közösen) meg kell állapítania azoknak az adatelemeknek a sorrendjét, amelyekről a programcsomag logikai sorrendet nem követel meg, hogy az adatrendszerben való eligazodás egyáltalán lehetséges legyen. (Vigyázzunk: az előző pontban nem adatelemeknek, hanem az adathalmazoknak és feldolgozásuknak logikai és utilitárius sorrendjéről volt szó.)

Nagy modellek esetén gyakorlatilag lehetetlen az alapadatokat és az elsődleges adatrendszert úgy feldolgozni, hogy a keletkező eredményhalmazokból az előkészített adatrendszer közvetlenül összeállítható legyen. (Gyakran történik meg ugyanis az, hogy összetartozó adatok más és más adathalmazok feldolgozása során keletkeznek.)

Ezért azután célszerű az előkészített adatrendszer minden egyes különálló adatelemét egy ún. *input-kóddal* ellátni. (Ez nem szükségszerű: igen bonyolult programokkal el lehet érni a kívánt sorrendet az input-kód nélkül is; ez azonban hatalmas erőfeszítést igényel.) Az input-kódot tulajdonképpen speciális sorszámként foghatjuk fel, hiszen szerepe az adatelemek sorrendjének felállításában van, ám az input-kód nemcsak szám lehet, hiszen megfelelő kódolással a sorrendet másképp is kialakíthatjuk.

Az input-kódokat, illetve alkalmasan választott részeitet fel kell tüntetni az adatlapokon, így azok szerepelni fognak az elsődleges adatrendszer adathalmazában. A feldolgozó programoknak természetesen ezeket is kezelniük kell. (Ha például egy elsődleges adatból több előkészített adat is lesz, akkor ebből az egy kódból vagy kódrészletből kell kialakítani valamennyi előkészített adatkódját.)

Most már tisztán utilitárius szempontok alapján a programozó a feldolgozás folyamatába bizonyos pontokon beiktathat olyan lépéseket, amelyek egy vagy több feldolgozott adathalmaz eredményhalmazát az előkészített adatrendszerben elfoglalandó sorrendnek megfelelően alakítja ki és fűzi össze. Szó lehet egyes eredményhalmazok egyszerű rendezéséről, de több eredményhalmaz egyidejű rendezéséről és a szükséges sorrendnek megfelelő összefűzéséről is. Adott esetben elegendő lehet ezt a lépést az előkészített adatrendszer kialakításának utolsó

fázisában végrehajtani, amikor már az összes adathalmazt feldolgoztuk. Több pozitív, reguláris adatszint esetén azonban nagyon is célszerű az egyes szintek feldolgozásának lezárásaként beiktatni egy-egy ilyen lépést, hiszen a változó-konyabb adatokkal történő újrafuttatáskor az alacsonyabb szintű adatokkal, illetve sorrendbe állításokkal, ilyen megoldás esetén, már nem kell foglalkoznunk.

1.4 A konstans adathalmaz

Az alapadatok, valamint a modell struktúrája alapján érdemes elkészíteni az input-folyamat ún. *konstans adathalmazát*. Ez egyrészt — a megfelelő sorrendben — tartalmazza az alapadatokat, másrészt alkalmasan megválasztott helyeken olyan információkat tartalmaz, amelyek alapján eldönthető az, hogy a sorba állított nem-alapadatokból az előkészített adatrendszer számára az adott ponton hány adatelemre van szükség. Ha rendelkezünk ilyen adathalmazal, akkor az adatelőkészítés utolsó lépése a következőképpen alakul: Az input-kódok alapján elvégezzük az utolsó rendezést (összefűzést), majd a konstans adathalmaz első részlete egyfelől megmondja, hogy innen mely alapadatok kerüljenek az előkészített adatrendszer elejére (természetesen ez lehet üres részalmaz is), másfelől pedig valamiképpen megmondja azt, hogy az imént összefűzött adathalmazból mely adatokra van szükség (természetesen most is lehet szó üres részalmazról). Ezután a konstans adathalmaz második részlete egyfelől megmondja, hogy innen mely alapadatok kerüljenek az előkészített adatrendszer következő helyeire, másfelől pedig ugyancsak az összefűzött adathalmazból szükséges soron következő adatokat határozza meg; és így tovább.

A konstans adathalmaz, mint a neve is mutatja, állandó (legalábbis változatlan modell esetén). Jelentősége azonban nemcsak az ismertett eljárás célszerűségében áll, és nemcsak ezért kezeljük kiemelten, hanem ellenőrzési szerepe miatt is. Elképzelhető lenne az is, hogy ugyanúgy kezeljük, mint a többi adathalmazt, azzal a különbséggel, hogy a nulladik szinthez tartozónak tekintjük; elemeit input-kóddal látjuk el, és a feldolgozás első fázisában vesz részt.

A konstans adathalmaz tartalmazza a modell vázát, s mint ilyet, a modell ismert matematikai leírása segítségével, egyszer s mindenkorra összeállíthatjuk. A benne tárolt információk alapján ellenőrizhetjük, hogy az előkészített adatrendszer a megfelelő helyeken valóban annyi adatelemet tartalmaz-e, amennyit kell. Ennek óriási a jelentősége, még ha ez a funkció nem is tesz feleslegessé számos egyéb fontos ellenőrzési feladatot.

(A konstans adathalmaz alapadatait természetesen elláthatjuk a megfelelő input-kóddal. Ennek célja azonban nem az, hogy belőle kiindulva kapjuk meg az előkészített adatrendszert ugyanolyan összefűzéssel, ahogy a pozitív szintekhez tartozó feldolgozott adathalmazokat kezeljük, hanem egyrészt további ellenőrzések céljára szolgál, másrészt pedig az előkészített adatrendszert egységesíti.)

1.5 Több lépcsős input-folyamat

Ha a programcsomag rugalmasan kezelhető saját adattárolási és karbantartási lehetőségekkel rendelkezik, akkor a modellt nem szükséges egy lépcsőben felépíteni. Ilyen esetben lehetséges az is, hogy csak a modell egy (nagy) részé-

nek előkészített adatrendszerét állítjuk elő az első lépcsőben, majd — a programcsomag karbantartó részeit használva — a további lépcsőkben további előkészített adatrendszereket készítünk. Különösen a felső szintek feldolgozását célszerű a későbbi lépcsőkben elvégezni, hiszen az igen változékony adatokkal amúgy is sokszor kell módosítani a modell adatrendszerét, s az ehhez szükséges munka nagy részét a programcsomag készítői már elvégezték.

1.6 Az automatizált input-rendszer működésének összefoglalása

- A) Rendelkezésünkre áll az 1.1 pontban leírt adatlaprendszer.
 - B) Rendelkezésünkre áll az 1.4 pontban leírt konstans adathalmaz.
 - C) Rendelkezésünkre áll az 1.1 pontban leírt elsődleges adatrendszernek az 1.2 pontban leírt (esetleg reguláris) szintekre osztása.
 - D) Esetleg rendelkezésünkre áll az input-folyamat 1.5 pontban leírt lépésekre bontása.
 - E) Rendelkezésünkre áll az 1.1 pontban leírt algoritmusrendszer.
1. A megfelelő programokkal kinyomatjuk az adatlapokat (a dokumentálás végett több példányos papírra!).
 2. A kitöltött adatlapokról a releváns adatokat betöltjük az elsődleges adatrendszer különböző szintjein levő adathalmazokba.
 3. A figyelembe vett logikai és utilitárius szempontok alapján elvégezzük az egyes adathalmazok megfelelő sorrendű feldolgozását, az alkalmasan megválasztott helyeken közbeiktatva egyes adathalmazok rendezését, illetve összefűzését.
 4. A konstans adathalmaz és az utoljára összefűzött adathalmaz segítségével előállítjuk az előkészített adatrendszert. (Több lépcsős input-folyamat esetén az első előkészített adatrendszert.)
 5. Használjuk a programcsomagot.
 6. Több lépcsős input-folyamat esetén a programcsomag karbantartó része számára elkészítjük a további előkészített adatrendszereket.
 7. Használjuk a programcsomagot.

Megjegyzések

1. A konstans adathalmazzal kapcsolatos kiemelt adatellenőrző lépést leszámítva nem említettünk eddig semmiféle más, az input-folyamatban szereplő ellenőrzési tevékenységet — bár ilyenre nyilvánvalóan igen nagy szükség van. Úgy gondoltuk azonban, hogy efféle tevékenységet minden programban kell végezni; a tisztán ellenőrzési funkciót betöltő programokat pedig az algoritmusrendszer részének tekintettük.

2. A fentiekben egy általános sémát ismertettünk. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy minden konkrét esetben mereven ragaszkodni kellene hozzá; mindössze egy olyan gondolati vonulatot kívántunk felvázolni, ami az egyes esetekben a kivitelezéshez támpontokat nyújt. Mint látni fogjuk, az általunk megvalósított konkrét automatizált input-rendszer is mutat eltéréseket az általános sémától.

2.1 A konkrét programcsomag és modell rövid ismertetése

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének munkatársai hosszabb ideje vesznek részt a Magyar Alumíniumipari Tröszt (MAT) hosszú távú stratégiai tervezési feladatát segítő nagyméretű modell kidolgozásában, felállításában és vizsgálatában.

A modell tulajdonképpen egy vegyes-egészértékű lineáris programozási feladat. Ezt a MAT IBM 4331 típusú számítógépén megtalálható MPSX-MIP/370 (*Mathematical Programming System Extended — Mixed Integer Programming*) programcsomag segítségével oldjuk meg.

Az MPSX—MIP/370 [1] igen alkalmas igen nagyméretű (akár 16 ezer feltélt tartalmazó) vegyes-egészértékű lineáris programozási feladatok megoldására. Nem célunk itt a programcsomag általános ismertetése, mindössze annak input-rendszeréről mondjuk el a témánkhoz illeszkedő legfontosabb részleteket.

A programcsomag az input-adatokat háromféle formában képes feldolgozni. Mi a modell mérete, az ellenőrzési lehetőségek, és az input-folyamat könnyebb automatizálhatósága érdekében azt választottuk, amelyik az adatokat rögzített formátumban, kártyaképek alakjában várja. Az egyes kártyaképek vagy indikátorok (ezek bizonyos adatsoportok jelzésére, elválasztására szolgálnak, s így számadatokat nem is tartalmaznak), vagy pedig adatsorok. Az adatsorokat az MPSX-MIP/370 hét adatmezőre osztja. Az első egy indikátor-kód (ezzel adjuk meg például, hogy az egyes feltételeket korlátozzuk-e, és ha igen, akkor alsó, illetve felső korlátról, vagy pedig egyenlőségről van-e szó); a második, valamint a harmadik és az ötödik (utóbbi kettő lehet üres is) oszlop- vagy sorazonosító (ezek felelnek meg a mátrix változóinak, illetve feltételeinek; az MPSX-MIP/370 legtöbb outputja ezeken a neveken hivatkozik a megfelelő változókra, illetve feltételekre); a negyedik és a hatodik (mindkettő lehet üres is) tartalmazza a megfelelő számadatot; végül a hetedik, amelyet az MPSX-MIP/370 adatfeldolgozója tulajdonképpen figyelmen kívül hagy, teremt meg az input-kód bevezetésének lehetőségét. Az egyes mezők meghatározott pozíciókon kezdődnek és végződnek.

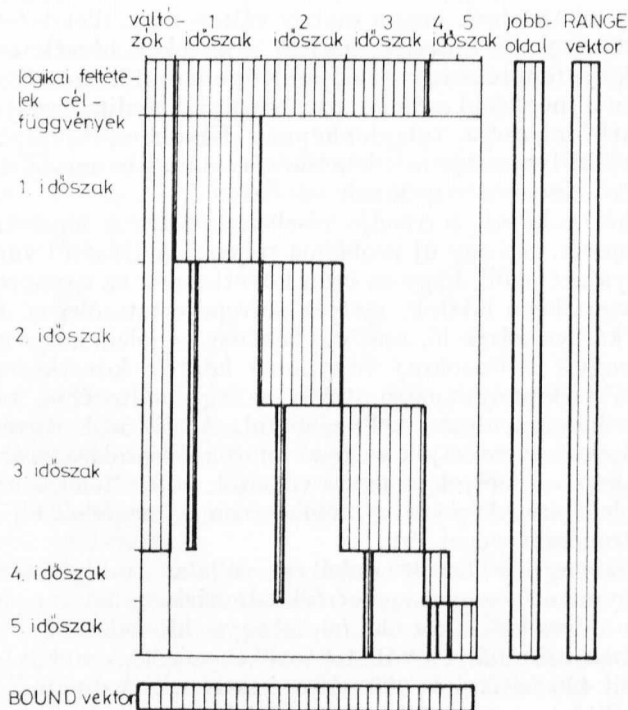
Az egyes kártyaképek sorrendje részben kötött. A legelső adja meg az adatrendszer nevét. Ha egy új probléma teljes felállításáról van szó, akkor a második kártya azt jelöli, hogy ez után következnek az egyes sorokra (vagyis feltételekre) vonatkozó adatok, melyek sorrendje tetszőleges. Ezt a blokkot egy indikátorkártya zárja le, ami egyben azt is jelzi, hogy most az egyes oszlopokra (vagyis változókra) vonatkozó adatok következnek. Ezeket a kártyaképeket oszlopfolytonosan, tehát az egy változóhoz tartozó adatok egymás után, hézagmentesen kell megadni. A változók sorrendje azonban tetszőleges. Ezek és a hozzájuk tartozó adatok felsorolása után következnek azok a kártyaképek, amelyek az egyes változók és feltételek korlátozását szolgálják. Az utolsó kártyakép jelzi a programcsomag megfelelő eljárása számára, hogy az adatrendszer véget ért.

A programcsomag által kezelt modell egy vállalat stratégiai tervezési céljaira alkalmas, nagyméretű vegyes-egészértékű lineáris programozási feladat. A modell három ötéves időszakot ölel fel; az egyes időszakokban, meghatározott szintű bontásban, szimulálja a vállalat tevékenységét. A mátrixban időszakonként körülbelül 400 feltétel és 600 változó szerepel. A dinamikára vonatkozó bizonyos stabilitási szempontok miatt a három valódi időszakhoz hozzávettünk még két, összesen mintegy 30 feltélt és 50 változót tartalmazó

pszeudo-időszakot. Így a mátrixot körülbelül 1200 feltétel, 1800 változó és 10 000 nem nulla elem alkotja. Az egyes időszakok közötti összefüggés szűk keresztmetszeten jelentkezik, ezért a mátrix lényegében három diagonálisan elhelyezkedő almátrixból áll.

A stratégiai tervezést 12 fejlesztési körhöz kapcsolódóan 31 egész-változó segítségével írjuk le. Egy-egy fejlesztési körhöz 2–4 egész-változó tartozik, amelyek mindegyike csak a 0 vagy az 1 értéket veheti fel. Az azonos fejlesztési körhöz tartozó változók összege kötelezően 1. Ez azt jelenti, hogy a feladat megengedett megoldása esetén minden egyes fejlesztési körben pontosan egy egész-változó értéke egyenlő 1-gyel, az összes többi 0-val. Ezek az egész-változók képviselik tehát a döntéseket. Minden fejlesztési kör a vállalat egy nagyobb részterületének felel meg. Az egyes egész-változók reprezentálják az erre a területre vonatkozó, egymástól eltérő fejlesztési pályákat, amelyek közül pontosan egynek kell megvalósulnia. Amennyiben egy egész-változó értéke a megoldásban 1, úgy a hozzá kapcsolódó beruházások, kapacitások, egyéb ráfordítások (munkaerő, munkabér, karbantartás stb.) „élnek”, az ehhez a fejlesztési körhöz tartozó többi egész-változó által meghatározott adatok nem játszanak szerepet a megoldás többi részének kialakításában. Az egész-változókra vonatkozó adatok természetesen mind a három tervidőszak tevékenységét meghatározzák, így az ezekhez a változókhoz tartozó mátrix-elemek nem korlátozódnak egy almátrixra.

A modell szerkezetét az 1. ábra szemlélteti.



1. ábra

2.2 A modell adatrendszere

A programcsomagnak körülbelül 10 000 számadatra van szüksége ahhoz, hogy a modellt a számítógépen felállítsuk. Ezen adatmennyiség mintegy harmada konstans (általában + 1 vagy - 1): ezek alkotják a nulladik szintű adathalmazt, az alapadatokat.

A többi adatot három szintre osztottuk be. Az első szinten azok a fajlagosok vannak, amelyek a vállalaton belüli technológiai folyamatok leírásához szükségesek. A második szintre kerültek az egyes döntési (egész) változókhoz kapcsolódó adatok (kapacitások, a szükséges beruházások, ezek felosztása, az ezekhez kapcsolódó egyéb költségek, adók stb.). Végül a harmadik, legmagasabb szinten a vállalat által vásárolt, illetve eladott termékek különféle árai (kétféle tőkés export, tőkés import, szocialista export és import, valamint belföldi) és a hazai ellátási feladatokat szabályozó adatok vannak. Az első és a második szintet azért érdemes elkülöníteni, mert a technológiai folyamatok fajlagosai új fejlesztési pályarendszer (azaz a második szint) megadása hiányában nem változnak, míg olyan új fejlesztési változatok bevezetése, amely a fajlagosokat nem módosítja, nagyon is elképzelhetők.

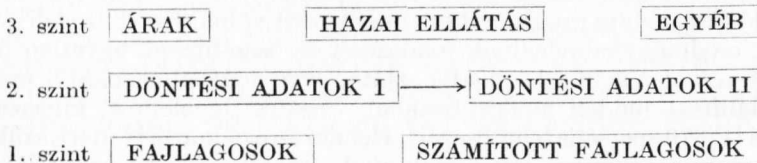
Az elsődleges adatrendszer első szintjén két adathalmaz van. Az egyik azokból a fajlagosokból áll, amelyeket változtatás nélkül írhatunk be a mátrix egyetlen pozíciójába. A másik adathalmazba az olyan elsődleges adatok kerültek, amelyeket vagy nem lehet közvetlenül beírni a mátrixba, mert bizonyos mértékű feldolgozásra szorulnak, vagy pedig a mátrix két vagy több pozíciójába kell beírni őket.

A második szinten ugyancsak két adathalmaz található. Az egyik feldolgozásának melléktermékeként olyan közbülső adathalmazt kapunk, amelyet a másikkal együtt lehet földolgozni.

Végül a harmadik szinten három adathalmaz van: az elsőben az árak, a másodikban a hazai ellátási feladatokkal kapcsolatos adatok, a harmadikban pedig néhány olyan vegyes adat, amit logikailag máshová nem lehetett besorolni.

Ily módon az elsődleges adatrendszer reguláris szintekre osztását kapjuk. Ezt a 2. ábrán szemléltetjük.

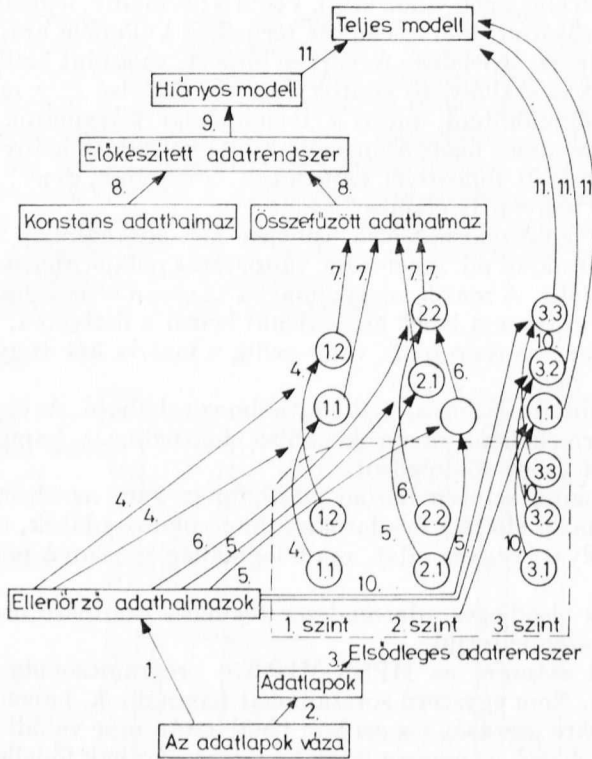
Az input-kód számára az MPSX-MIP/370 programcsomag 9 karakternyi helyet tart fenn. Nem egyszerű sorszámokat használunk, hanem a 9 karakternek olyan mezőkre osztását (és azokon belül aztán már valódi sorszámozást), amelyből kiolvashatók az egyes adatok hovatarozásának fő jellemzői (például: melyik időszakról, melyik változócsoporthoz, változóról, azon belül melyik adatelemről van szó stb.). Így akár az input-kódból, akár a (programcsomag által használt) azonosítóból rögtön leolvasható, hogy egy változót, például a vállalat melyik egységének tevékenységéhez használunk.



2. ábra

2.3 A modell algoritmusrendszere

Az input-folyamat két lépcsős. Az első lépcsőben dolgozzuk fel a nulladik, az első és a második szinten levő adatokat, majd a programcsomag probléma-felállító eljárása segítségével a modellt — még hiányosan — felvisszük a gépre és el is tároljuk. A második lépcsőben a harmadik szinten levő adatokat dolgozzuk fel, és az MPSX-MIP/370 egyik módosító eljárása segítségével az előzőleg eltárolt modellt megváltoztatjuk, a hiányzó adatokkal kipótoljuk, és az immár teljessé vált modellt tároljuk el.



3. ábra

Esetünkben az első szinten levő adathalmazok feldolgozása eredményeként kapott adathalmazoknak az input-kód szerinti rendezése, illetve összefűzése igen rövid futási idejű programot eredményezett volna. Ezért az első és a második szint eredményhalmazainak rendezését és összefűzését egyetlen programmal végezzük el. Végül a harmadik szinten levő adathalmazokat a már részlegesen felállított modell módosításaként vesszük figyelembe, kihasználva az MPSX-MIP/370 speciális lehetőségeit. Rendezésre ekkor már nincs szükségünk, mert a programcsomag — lévén csak módosításról szó, nem pedig új vektorok hozzáadásáról — az adatokat „magától” a helyükre teszi. Ez a módszer azért

is hasznos, mert hasonló jellegű módosításokat (például új árrendszer esetén) a teljesen felállított modellel is gyakran kell végezni.

Adatlapjainkat külön programok állítják elő. Az adatlapok vázát lemezen tároljuk. Ebből készülnek egyrészt maguk a nyomtatott adatlapok, másrészt az egyes adathalmazok feldolgozásának ellenőrző adathalmazai. Az ellenőrzés úgy történik, hogy az ellenőrző adathalmaz egyes adatait egybevetjük az adathordozóra felvitt kitöltött adatlapokkal. Ily módon az adatfelvitel során az azonosítóiban vagy az input-kódokban bekövetkező esetleges hibákat igen nagy valószínűséggel tudjuk kiszűrni.

Végeredményben tehát a következő sémát kapjuk (l. a 3. ábrát):

1. Az adatlapok vázából ellenőrző adathalmazok készítése.
2. Az adatlapok vázából adatlapok készítése.
3. A kitöltött adatlapok felvitele.
4. Az első szint két adathalmazának feldolgozása.
5. A második szint első adathalmazának feldolgozása; egyszersmind input készítése e szint másik adathalmazának feldolgozásához.
6. A második szint másik adathalmazának feldolgozása.
7. Az eddig kapott négy eredmény-adathalmaz rendezése és összefűzése.
8. Az előbb kapott és a konstans adathalmaz összefűzése.
9. A modell hiányos felállítása.
10. A harmadik szint három adathalmazának feldolgozása.
11. Az előbbieken alapján a már felállított modell módosítása, azaz teljessé tétele.

2.4 Tapasztalatok az automatizált input-rendszerrel

A fent jelzett programok a MAT IBM 4331 típusú számítógépre vannak telepítve. A forrásprogramok nyelve az MPSX-MIP/370 által használt ún. ECL (*Extended Control Language*) nyelvvel kompatibilis PLIOPT. A megfelelő program-könyvtárakban minden egyes fent jelzett (l. a 3. ábrát) program megtalálható forrásnyelvi, lefordított és megszerkesztett (futtatható) és modul (azaz lefordított és más programba beszerkeszhető) formában. Létezik továbbá egy olyan, paraméterekkel irányítható program is, ami — kérés esetén — ezek közül a modulok közül választ; ily módon egyetlen programmal futtathatjuk akár a teljes input-folyamatot, akár annak bármely részletét.

A jelentősebb lépések a CPU-idő felhasználása szempontjából a következők (a 3. ábra jelöléseivel):

5. A DÖNTÉSI ADATOK I feldolgozása
7. A négy eredményhalmaz rendezése és összefűzése
8. Az előkészített adatrendszer elkészítése
9. A hiányos modell felállítása
11. A teljes modell felállítása.

Ezek közül is kiemelkedik a 7. lépés (rendezés-összefűzés); ez a teljes input-folyamat CPU-idő szükségletének körülbelül 90%-át fogyasztja el. Ez azonban csak akkor van így, ha a teljes input-folyamatot futtatjuk. Ha ugyanis az 5. programlépést (a DÖNTÉSI ADATOK I feldolgozása) kihagyjuk, akkor a 7. lépés CPU-idő igénye (ha egyáltalán szükség van erre a lépésre az adott feldolgozási eljárás során) a teljes folyamat CPU-idő igényének csak mintegy harmada lesz.

Látható tehát, hogy eme speciális input-rendszer sarkpontját a döntési változókhoz kapcsolódó nagymennyiségű adat feldolgozása, és a feldolgozott adatok rendszerbe illesztése jelenti. Ez nyilvánvalóan a modell — stratégiai — jellegéből fakad.

Nem állítjuk természetesen azt, hogy a fent vázlatosan leírt automatizált input-rendszer létrehozásával és működtetésével az adatfeldolgozás és az adatelőkészítés valamennyi problémáját megoldottuk. Különösen akkor nem mondhatjuk ezt el, ha valamiféle optimumot szeretnénk elérni. Ennek ellenére úgy véljük, hogy mindazokat a lehetőségeket, amiket — e feladatmegoldásához — a számítógép kínál, nagy mértékben ki tudjuk használni a fenti séma alkalmazásával.

A fennmaradó problémák természete tulajdonképpen szervezési: egy működőképes automatizált input-rendszer olajozott használhatósága a szervezési feladatok hatékony megoldásától függ, hiszen az elsődleges adatok körében az adatszolgáltatás csak a géptől függetlenül, a modellt használó szervezet megmozgatásával érhető el.

IRODALOM

1. HANÁK G.: Az MPSX-MIP/370 matematikai programozási programcsomag. Néhány konkrét tapasztalat. *Sigma*, 1984. XVII/4, 267—281.

KÖNYVEKRŐL

J. SZÉP—F. FORGÓ: *Einführung in die Spieltheorie* Akadémiai Kiadó, Budapest 1983

Neumann és Morgenstern alapvető munkáját követően számos könyv jelent meg, amely áttekintést kívánt nyújtani a játékelmélet egész problémaköréről. Az első magyar nyelvű kezdeményezés Szép Jenő és Forgó Ferenc nevéhez fűződik, nevezetesen a *Bevezetés a játékelméletbe* című könyvükhöz, amely 1974-ben jelent meg. S mivel ez a munka a szakemberek körében általános elismerést aratott, célszerűnek látszott valamelyik „világnyelven” is megjeleníteni. Így született meg az *Einführung in die Spieltheorie*, amelynek ismertetése most a feladatunk.

Az új könyv az elsőnek alapos átdolgozása, illetve több irányban való kiegészítése révén készült. Elsőként arra hivatkozunk, hogy a szerzők — eltérően az eddig megjelent kézikönyvektől — az egész játékelméletet a nála általánosabb rendszerelméletbe ágyazzák be, s reá támaszkodva fejtik ki az alapvető fogalmakat és összefüggéseket. Fontosnak tartjuk azt is megjegyezni, hogy több témakörnél merőben új tárgyalásmódot alkalmaztak; így például az oligopol-játékok és a koalíciós játékok elméleténél. Megemlíjtük továbbá, hogy a könyvbe több új téma is bekerült, mint például a Scarf—Hansen-féle algoritmus és a nem teljes információ alulul játékok.

A könyv az elméletet teljes matematikai szigorúsággal építi fel, de ezen belül sokkal inkább a módszerekre, illetve a „megoldásokra” irányul, mint az eddig megismert elméleti szakkönyvek. A szerzők azonban nem feledkeznek meg a gyakorlati alkalmazásokról. Többek között a közgazdasági, operációkutatási, döntéselméleti, statisztikai és katonai alkalmazásokról sem. E tekintetben is példamutató munkával állunk szemben.

A szerzők mindazonáltal nem monográfiát írtak. Ebben már a megszabott terjedelem is akadályozta őket. Ezért főként

azokat a témaköröket fejtették ki részletesebben, amelyekben újat nyújtottak, vagy legalábbis más tárgyalásmódot alkalmaztak, mint a többi kézikönyvek. Így az egyes fejezetek terjedelméből nem szabad következtetést levonni a kérdéses probléma súlyára. A fenti okok következménye az is, hogy a könyvből hiányoznak bizonyos „klasszikus” témák, így a differenciális játékok elmélete és az n -személyes játékok azon esete, amikor az n végtelen nagy.

Ami a tartalom közelebbi ismertetését illeti, az 1. fejezet adja meg az egész témakör rendszerelméleti megalapozását. A 2—6. fejezet az n -személyes játékok és annak többirányú kiterjesztését tárgyalja. Idetartoznak az egyensúlyi pontok különféle egzisztencia-tételei, speciális n -személyes játékok (konkáv játékok, poliédrikus játékok, speciális zérusösszegű játékok) és megoldási módszereik, különös tekintettel a Scarf—Hansen-féle algoritmusra, s itt található meg az oligopol-probléma teljes kifejtése is. A nagy terjedelmet elfoglaló 7—21. fejezet a kétszemélyes játékokról nyújt részletekbe menő ismertetést. Ezzel kapcsolatban először is a bimátrix-játékokat és a null-összegű mátrix-játékokat említjük, beleértve kapcsolatukat a lineáris programozással is. Fontos szerepet játszanak az egyensúlyi stratégiák és a rájuk vonatkozó különböző megoldási módszerek, mint pl. a szimplex-módszer, a fiktív lejátszás módszere és a Neumann-féle eljárás, továbbá a mátrix-játékok dekompozíciója. Speciális módszereket igényelnek a $2 \times n$ -személyes játékok, az egységnégyzetten értelmezett játékok, a természet elleni játékok és a szekvenciális játékok. A 22—27. fejezet az n -személyes kooperatív játékokkal foglalkozik. Itt is több megoldási koncepció jöhet szóba. Ilyen a Neumann—Morgenstern-féle eljárás, a magtest (nucleolus) fogalma, a Shapley-érték és a Nash-féle koncepció. Szó van itt még a kifizetési függvény stabilitásáról és a Weber-féle megegyezései (bargaining) modellről is. Az utolsó fejezet

a nem teljes információn alapuló játékok problémáit tárgyalja.

A 211 forrásmunkára kiterjedő bibliográfia hasznos segítséget nyújthat azoknak, akik további ismereteket kívánnak szerezni.

Az elmondottak alapján megállapítható, hogy a könyv jó szolgálatot tehet mind a tudományos kutatásban, mind az egyetemi oktatásban, de haszonnal forgathatják azok is, akik gyakorlati problémákat a játékelmélet eszközeivel kívánják megoldani.

KREKÓ BÉLA

F. J. GOULD—J. W. TOLLE: *Complementary Pivoting on a Pseudomanifold Structure with Applications in the Decision Sciences*. (Komplementáris pivotálási technika pszeudomanifold struktúráján döntéselméleti alkalmazásokkal.) Sigma Series in Applied Mathematics vol 2. Heldermann Verlag, Berlin 1983. 203 p.

A könyv a komplementáris pivotálási technika absztrakt matematikai alapjait, majd annak adott, speciális feladatokra való alkalmazásait tartalmazza. Az optimalitás elmélete iránt érdeklődő minden olvasó haszonnal forgathatja. A könyv akár tankönyvnek is beillő didaktikus felépítésben, precízen íródott. Címében a döntéselméleti alkalmazásokra vonatkozó ígéret talán félrevezető lehet. A könyvben nem új döntéselméleti modelleket dolgoznak ki, mutatnak be a szerzők, hanem számos jól ismert modell megoldására adnak módszert, és így bizonyítják a bemutatott komplementáris pivotálási technika széles körű alkalmazhatóságát. Gazdag feladatanyag zár minden fejezetet, melyeket érdemes feldolgozni az anyag teljes megértéséhez. A szerzők nyílt kérdéseket is felvetnek, melyek a további kutatómunkához is kiindulópontul szolgálhatnak.

A bevezető fejezetben hangsúlyozzák, hogy a bemutatandó algoritmusok a klasszikus analitikus algoritmusoktól eltérően nem monotonok, csak a feladatok kombinatorikus tulajdonságaira építenek. Így algoritmusaik szélesebb feladatosztály megoldására képesek, s így döntéselméleti felhasználási körük is bővebb. Elismerik, hogy az általánosságra törekvés csak az algoritmusok hatékonyságának rovására történhet. Ugyanitt néhány klasszikus (lineáris programozás, feltétel nélküli optimalizálás, fix pont probléma, lineáris komplementaritási probléma) optimumszámítási feladatot mutatnak be.

Sajnos, az egész könyvben kevés szó esik a bemutatott feladatok megoldására

alkalmas más algoritmusokról. Néhány utalás könnyebbé tehetné volna a témakörben való tájékozódást az olvasó számára.

A második fejezetben az alapvető definíciókat, elnevezéseket (bázis, altér, affin tér, szimplex, komplex, pszeudomanifold) vezetik be a szerzők. A fogalmak jobb megértését ábrákkal, példákkal segítik, ezzel nagy mértékben megkönnyítik a bevezetett fogalmak elsajátítását. A fejezet — mint minden ezt követő rész is — feladatokkal zárul.

A harmadik fejezetben több példát mutatnak be. Megmutatják, hogyan származtathatók újabb pszeudomanifoldok már adottakból. Ezek a példák egyben elő is készítiknek további fejezeteket, ahol felhasználják őket.

Először a lineáris programozás elméletéből is ismert megengedettségi ($Ax = b$, $x \geq 0$) feladattal foglalkoznak, és megmutatják, hogy a megengedett megoldások halmaza is egy pszeudomanifold (így a pszeudomanifoldok speciális esetekben tartalmaznak a poliédereket). Evezetik a lap, él, csúcs fogalmakat, majd ezek és néhány további fogalom segítségével jellemzik a bevezetett halmazokat.

Ismertetik és jellemzik az R^n -tér szimplex felbontását, eljárásokat adnak az egységkocka, illetve az R^n -tér különböző szimplex felbontásaira. Megmutatják a Brouwer fix pont tétel bizonyításához Scarf által bevezetett primitív halmazokat, mint speciális pszeudomanifoldokat. A fejezet hátralevő részében néhány eljárást ismertetnek, hogyan lehet új, több dimenziós pszeudomanifoldokat képezni már adottakból.

A negyedik fejezetben vezetik be a komplementáris pivotálási technikákat, ezek játsszák a döntő szerepet a könyv hátralevő részében. Az algoritmusok lényegében a lineáris programozásból jól ismert „báziscsere” általánosításaként foghatók fel. Így „csúcsról” „csúcsra” lépve jutnak el a megkívánt tulajdonságú „csúcsig”, miközben garantálják az algoritmusok végeességét. Ehhez az adott struktúrában definiálják a szomszédtságot, az út és a kör fogalmát, szomszédtsági és címkézési struktúrát rendelnek a halmazokhoz. Az általános algoritmus végeessége (a generált út végeessége) nem garantálható, a konkrét alkalmazásokban ehhez mindig további feltétel szükséges. Egy egyszerű példa ismertetésével és feladatokkal zárják a fejezetet.

Az ötödik fejezet a témakör legismertebb és legszélesebb körben alkalmazott feladatesaládjával, a lineáris komplementaritási problémákkal foglalkozik. A lineá-

ris komplementaritási problémák általános megfogalmazása után speciális eseteket mutatnak be: bimátrix játékok egyensúlyi pontjának meghatározását, kvadratikus programozást, lineáris programozást. A témakör fontos tételeinek tárgyalásmódba illő bizonyítását konkrét numerikus példák követik. Tárgyalják a lineáris komplementaritási problémák azon speciális eseteit, amikor ismert a feladat megoldása, illetve bizonyított az algoritmus végessége. Ezen belül a kopozitív mátrixok osztálya talán a legérdekesebb.

A hatodik fejezetben leképezések fixpontjának meghatározására alkalmazzák a komplementáris pivotálási algoritmust. Először a valós n dimenziós tér egy részhalmazának önmagára való folytonos leképezéseinek fixpontjait vizsgálják, majd az R^n tér felülről féligfolytonos pont-halmaz leképezéseinek fixpont problémájára alkalmazzák a fenti elméletet. A második eset igaz, hogy speciális esetként tartalmazza az elsőt, de az első esetben számos hasznos eredmény igazolható, ami a másodikban nem. A fejezetben konstruktív bizonyítást találunk a *Brouwer* és a *Kakutani* fixpont tételekre.

A hetedik fejezet nem differenciálható függvények feltétel nélküli minimumának meghatározására ad módszereket. A tér szimplex felbontására építve elkészítik a feladatnak egy lineáris approximációját és az így kapott lineáris programozási feladatra alkalmazzák a komplementáris pivotálási algoritmust. Így természetesen közelítő optimális megoldás kapható meg. A közelítő megoldások „jóságára” becsléseket adnak, valamint az algoritmus alkal-

mazhatóságát precízen bizonyított tételekkel támasztják alá.

A nyolcadik fejezet az általános, nem differenciálható programozási feladatot tárgyalja. Közelítő megoldására (komplementáris pivotálási algoritmussal) több lehetőséget mutatnak be. Az egyik a linearizálás, ezt részletesen tárgyalják. Bizonyítják, hogy egy finomodó approximáció sorozatnak a torlódási pontjai egyben az eredeti feladatnak az optimális megoldásai is. Röviden tárgyalják a feladat büntető függvényekkel való megoldását, illetve annak nemlineáris komplementaritási problémává való átfogalmazását.

Néhány további megoldási lehetőséget vetnek fel a fejezetet záró feladatokban.

A könyvet egy 164 tételből álló, a témakör irodalmát jól átfogó irodalomjegyzék, valamint egy rövid szöveget zárja.

*

Külön kiemelendő a könyv precíz, didaktikus felépítése. A bevezető fejezetekben definiálják és kellően szemléltetik, begyakoroltatják az alapvető fogalmakat, majd ismertetik azt a módszert, eszközt, amelyre tulajdonképpen a könyv épül. Ezután az egyszerűbbtől a bonyolultabb felé haladva tárgyalják az algoritmus alkalmazási területeit. Összefoglalva: a könyv egy speciális, de széles körben alkalmazható eszköz, a komplementáris pivotálási technika ismertetését és annak alkalmazásait tartalmazza. A matematika és alkalmazásai iránt érdeklődő minden olvasónak melegen ajánlhatjuk.

TERLAKY TAMÁS

TUDOMÁNYOS ÉLET

XV. Magyar Operációkutatási Konferencia (Sopron, 1985)

A szokásosnál később, október 21. és 24. között rendezték meg a tizenötödik Operációkutatási Konferenciát, melynek helyszíne a Soproni Liszt Ferenc Művelődési Központ volt. Ebben az évben a Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya vállalta magára a program összeállítását és a gyakorlati lebonyolítást. Bizonyára ennek köszönhető, hogy sok előadás foglalkozott az operációkutatás közgazdasági alkalmazásának lehetőségeivel, eredményeivel.

A konferenciát *Garamvölgyi Károly*, a társaság főtitkára nyitotta meg. Méltatta a magas szintű matematika oktatásának jelentőségét a közgazdászképzésben, s a Közgazdasági Társaság Széchenyi Emlékérmét nyújtotta át *Krekó Bélának*, az operációkutatás oktatásában és a matematika közgazdasági alkalmazásában folytatott kiemelkedő tevékenységéért, 70. születésnapja alkalmából.

A nyitó plenáris ülés *Bródy András* „Árak és mennyiségek a matematikai közgazdaságtanban” című előadásával folytatódott. Középpontjában a fizikának a közgazdasági gondolkodásra gyakorolt hatása állt.*

A továbbiakban a konferencia szekciókban folytatta munkáját. Három nap alatt több mint ötven előadás hangzott el, melyekből témakörönként igyekszünk egy kis ízelítőt adni.

Valamennyi matematikával foglalkozó előadás olyan kérdéseket vetett fel, melyeknek operációkutatási vonatkozásai vannak. Hallhattunk többek közt az izotón leképzések fixponttulajdonságairól, az általános konvexitásról és alkalmazásairól és az utazó ügynök feladat heurisztikus megoldási módszereiről.

Az ökonometriai tárgyú előadások többsége elméleti-módszertani problémákkal, újításokkal foglalkozott. Ilyenek például a dinamikus szabályozási modell strukturális és paraméteres identifikációja, a dinamikus faktoranalízis kiegészítése kontroll változóval, mely újfajta szimulációs vizsgálatokat tesz lehetővé, vagy a *Klein-1* modell paramétereinek 24 különböző becslése. Ez utóbbira támaszkodva össze lehetett hasonlítani a különböző becslési eljárások hatékonyságát és bemutatni például a legkisebb négyzetek klasszikus módszerének torzítását.

A matematikai-statisztikai eljárások gyakorlati alkalmazásával foglalkozó előadások közül három is többváltozós módszerekkel végzett vizsgálatokkal ismertette meg a hallgatóságot. Az egyik során 16 OECD ország és Magyarország fogyasztási struktúráját hasonlították össze klaszteranalízissel, a másikon az európai országok mezőgazdaságát faktoranalízis és klaszterelemzés felhasználásával, a harmadik esetben pedig a megyék és Budapest infrastrukturális ellátottságát vizsgálták különböző többváltozós módszerekkel, s meghatározták azt a minimális számú mutatót, amely a vizsgált időszakban a legjobban jellemezte a vizsgált jelenséget. A készletezésről szóló előadások közül az egyik a készlet-elemzés „fehér foltjaira” hívta fel a figyelmet, a másik pedig az integrált termelési-készletezési rendszerek főbb jellemzőit mutatta be, és beszámolt hazai alkalmazásuk eredményeiről. Hallhattunk a matematikai-statisztika módszereinek felhasználásáról sok más területen is. Szó volt többek közt az ELAR mintából megyénként számított becslések pontosságának javításáról, a lakásépítési költségek növekedésének elemzéséről regressziós modellek felhasználásával és a geostatisztikában használt speciális mutatókról, módszerekről.

Több előadás a vállalatok viselkedését, illetve a vállalatok pozíciójának alakulását vizsgálta. Hallhattunk például kísérletekről annak leírására, hogyan viselkednek a vállalatok

* Lásd ebben a számban. (A szerkesztő)

latok az indirekt irányítási rendszer keretei között, vagy hogy a vállalatok jövedelmezőségére ható különböző tényezők hatása hogyan számszerűsíthető regressziós modellek segítségével. Szó volt arról is, hogy új intézményi és szervezeti formák bevezetése előtt, akár a várható követelmények felmérések, akár már felismert problémák elemzésekor lényeges összefüggések tárhatók fel az információk asszimetriái irodalmából megismert fogalmi rendszerek és modellek alkalmazásával.

A szabályozás problémáihoz kapcsolódott a rubel export szabályozásának és a magyar árrendszerek a leírására alkalmas modellek bemutatása is. A gazdaság-, illetve a társadalompolitika aktuális kérdéseivel is sok előadás foglalkozott. Ilyen volt például az *Egyensúly vagy növekedés* című, amely egy olyan modellt ismertetett, ami egyensúlyban levő, optimális növekedési pályákat generál, vagy a társadalombiztosítás kérdőjeleiről, s ezen belül a nyugdíjrendszer problémáiról szóló tanulmány. Hallhattunk a napjainkban egyre nagyobb súlyú „láthatatlan” jövedelmeknek a jövedelemeloszlást módosító hatásáról, a mérését célzó mikroszimulációs számításokról is.

A mikroszféra problémáinak megoldásánál is lehetőség van operációkutatási módszerek felhasználására. A konferencián ilyen vizsgálatok eredményeivel is megismerkedhettünk. Szó volt például sztochasztikus döntési elvek alkalmazásáról stratégiai tervezési modellekben, melyek alkalmasak a kockázat figyelembevételére és arról is, hogy a vállalat stratégiai tervének készítésekor a rövid távú, taktikai tervnél alkalmazható optimalizáló modellek helyett másfajta, a kérdések megfogalmazását elősegítő modellekre van szükség.

A mezőgazdaságban nagy hagyománya van a modellépítésnek és -felhasználásnak. Hallhattuk például, hogy a vágósertés kínálat előrejelzésére milyen matematikai modellet használunk, és hogy miképpen mérték fel a Délkelet Alföld agropotenciálját regionális tervmodell felhasználásával.

Az operációkutatás számítástechnikai hátterével kapcsolatban szó volt többek közt ütemezési feladatok megoldásáról személyi számítógépen, nagyteljesítményű mikroszámítógépek nyújtotta lehetőségekről és egy új szimulációs programcsomagról, a GPSS FORTRAN 3. változatáról is.

Egyik este kerekasztal-beszélgetés folyt az ipari dinamika gyorsítási lehetőségeit vizsgáló modellszámításokról. A beszélgetést *Bod Péter* vezette, az Ipari Minisztérium Modellezési Bizottságának vezetője, aki elmondta annak a kutatásnak az eddigi tapasztalatait, melynek során több modell felhasználásával arra keresik a választ, milyen módon valósítható meg az ipar dinamizálása az egyensúly felborulása nélkül. A beszélgetés során a gazdaságpolitika sok aktuális kérdését is megvitatták.

DUNAVÖLGYI MÁRIA

Rendszer modellezés és optimalizálás (IFIP konferencia Budapesten)

A sok tagszervezetet számláló jelentős nemzetközi számítógépes társulat, az IFIP TC 7-es rendszermodellezési munkacsoportja 1985 szeptemberében Budapesten tartotta kétévenkénti konferenciáját. Ez nemzetközi kapcsolataink és a hazai modellezési és optimalizálási eredmények elismerését is jelenti. A szervezést a Neumann János Számítógéptudományi Társaság végezte.

A konferencia tárgyköre a műszaki, technikai és gazdasági rendszerek modellezése és működésük optimalizálása volt. Ez a széles témakör az előadásokra való felhívásban az irányításmélet, a matematikai programozás és ezek alkalmazási és software kérdései köré csoportosult. A beküldött 370 előadáskivonatból 260-at fogadott el a nemzetközi programbizottság, 14 szkeicéba osztva.

A konferencián 265-en jelentek meg 220 előadással. Közöttük 29 országból 200 külföldi résztvevő volt. Öt nap alatt 10 plenáris előadás hangzott el, ezekben a szakma vezető kutatói a legújabb irányzatok és kutatási eredmények összefoglalását nyújtották a következő területeken:

- hozzárendelési feladat új megoldási módszerei és alkalmazásai (*R. Burkard*),
- geometriai számítási módszerek és alkalmazásai (*M. Iri*),
- szerkezetek megbízhatósági modellezése (*P. Thoft—Christensen*),
- sztochasztikus irányításmélet és számítási módszerei (*M. Arató*),
- erőforrás elosztási problémák dekompozíciója (*S. M. Robinson*),
- matematikai programozási software (*K. Schittkowski*),

- peremérték feladatok optimális irányítása (*C. Saguez*),
- hiperbolikus parciális differenciálegyenletekkel leírt rendszerek peremérték irányítási feladatai (*I. Lasiecka*),
- nagy energiarendszerek tervezésének és működtetésének irányításméleti módszerei (*P. Sandrin*),
- orvosbiológiai rendszerek matematikai modellezése (*A. Garlianskas*).

A szekció előadások párhuzamosan négy teremben folytak, emellett egy poszter szekció is volt, melyen 8 optimalizálási software előadás és bemutató szerepelt. A szekciókban elhangzott előadások fő érdeklődési területeit, tendenciáit megpróbáljuk röviden jellemezni, kiemelve a közgazdasági jellegű kérdéseket.

A „Dinamikus rendszerek irányítása” szekcióban volt a legtöbb előadás, a 8 ülésen 36-an foglalkoztak a modellezés, identifikálás, irányíthatóság, stabilitás, optimális irányítás különböző elméleti és módszertani kérdéseinek megoldásával. Az „Elosztott rendszerek irányítása” szekciónak a 4 ülésén a parciális differenciálegyenletekhez kapcsolódó irányítási problémák és ezek megoldási módszerei szerepeltek. A „Sztochasztikus rendszerek” szekció 14 előadása elsősorban a sztochasztikus programozás algoritmikus kérdéseivel, megoldási módszereinek javításával, összehasonlításával foglalkozott, de az alkalmazási lehetőségek is jelentős súlyt kaptak az algoritmusok hatékonyságának növekedésével együtt.

A klasszikus matematikai programozási feladatok új variánsai, modellek és megoldási módszerek szerepeltek a lineáris, nemlineáris és diszkrét programozás három szekciójában, melyeknek együttesen 12 ülése volt 60 előadással. Három előadás foglalkozott speciális lineáris programozási módszerekkel. Sok nemlineáris programozási előadás szerepelt. Általános vélemény volt, hogy inkább a meglévő algoritmusok finomításával és hatékonyságának fokozásával lehetne jó alkalmazási eredményeket elérni, mintsem újabb algoritmusok konstruálásával. Ennek ellenére sok új speciális probléma is felvetődött, melyek megoldása új modellezési, elméleti és algoritmikus eredményt kíván. A diszkrét programozás, gráfok és hálózatok vizsgálati módszerei és algoritmusai egy szekcióban szerepeltek. Az utazó úgynök probléma, a hozzáférési feladat, az ütemezés és az erőforrás elosztási feladatok jól ismert körét is gazdagította több új, elsősorban speciális esetekre alkalmazható algoritmus, illetve komplexitási vizsgálat. Egy előadás a fűtési és távközlési hálózatok optimalizálásának elvi kérdései mellett szólt a számítógéppel segített modellezési gyakorlatról is.

Számítógép rendszerek optimalizálásával öt előadás foglalkozott, részben a multi-processzoros gépekkel, részben az osztott rendszerek tervezésével kapcsolatban.

Az alkalmazási orientáltság az eddig említett szekciók igen sok előadására jellemző volt, de a programbizottság az alkalmazások súlyát kiemelve 7 szekciót szervezett a különböző alkalmazási területekről érkező előadásoknak.

A közlekedés és szállítási alkalmazási területéről 14 előadás hangzott el. Autóbusz-, vasúti és légi közlekedés menettervezésével, személyzetének beosztásával, alkatrész-ellátásával foglalkoztak, számítógépes megoldásokat, döntéselőkészítő rendszereket ismertettek. Az ipari, műszaki alkalmazásokkal foglalkozó előadások széles kört öleltek fel. A termelési tervezés, sorozatnagyságok optimalizálása, sorrendezések, termelési-készletezési rendszerek tervezése, irányítása, szimulálása volt az egyik terület, számítógépes döntéselőkészítő rendszerekkel alátámasztva. Az általános termelési problémák mellett speciális műszaki irányítási feladatok megoldásai szerepeltek, így vízellátási, szennyvízelvezetési, vízminőség vizsgálati és javítási rendszerek, építőipari projektek modellezése, optimalizálása. Külön szekcióban hangzottak el a strukturált rendszerek optimalizálásáról szóló előadások a mechanikai, acélipari, meteorológiai rendszerek és az idegrendszer modellezéséhez kapcsolódóan.

Mint az eddigi áttekintésből is láthattuk, igen sok előadás közvetett témaként szerepeltek a különböző gazdaságossági vizsgálatok, közgazdasági mérlegelések és modellezési elvek. Egy külön alkalmazási szekció is volt a gazdasági rendszerek témájában. Itt öt előadás hangzott el, ezeket a következőkben lehet röviden összefoglalni. Ismertettek egy integrált vállalati információs rendszert a pénzügyi, marketing és termelési folyamatok együttesére. Ezt egy fémfeldolgozó vállalatnál a döntési folyamatok alapján tervezték, alkalmazták és értékelték. Egy hosszú távú tervezést szolgáló számítógépes dialógus rendszer működéséről számoltak be, mely statisztikai előrejelzési, gazdasági mérlegelési és matematikai döntésméleti eszközökre épül. Három előadás foglalkozott beruházások hosszú távú tervezésével. A környezetvédelem, a természeti kincsek kiaknázása és az energiaellátás volt a három vizsgált terület. Közös jellegzetességük volt, hogy nagy súlyt helyeztek a gazdaságossági mérlegelésekre, a hasznossági függvényekre és a véletlen hatásokra.

Az energiarendszerek témakörében különösen sok (18) és színvonalas előadás érkezett. Különböző időhorizontokon, a rövid távú irányítástól a hosszú távú tervezésig, vizsgálták a villamosenergia-rendszerek együttműködését, bővítését, terheléelosztását. Az energiafajták optimális felhasználása, az atomenergia felhasználás modellezése, vízierőművek működtetéséhez a víztározók optimális szabályozása is egy-egy előadás témája volt. A biológiai, orvosi rendszerek modellezése és optimalizálása is két ülészakon szerepelt.

A tudományos programmal párhuzamosan 9 hazai cég állította ki software kínálatát, és a mikrogépes termékeket a helyszínen bemutatta.

A konferencián a témakör legkiválóbb nemzetközi szakemberei nagy számban jelentek meg, sok színvonalas előadás is elhangzott. Az előadások mintegy fele referálva meg fog jelenni könyv formájában a Springer kiadónál. A témakör iránt érdeklődők ebből széles körű áttekintést nyerhetnek a legújabb modellezési, számítástechnikai és alkalmazási eredményekről.

KELLE PÉTER

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda főigazgatója

Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat a nyomdába érkezett: 1986. július 18. — Terjedelem: 13.65 (A/5) ív
S7.15861. Akadémiai Kiadó és Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Hazai György

CONTENTS

ROY RADNER: Decentralization and incentives	1
ANDRÁS BRÓDY: On the physical economy	41
TAMÁS TÉTÉNYI: A computer-intensive estimation of the h -distribution model with distributed lags	49
PÉTER KELLE: Inventory control of enterprises using reliability type inventory models	71
BÉLA VIZVÁRI: Some recent Hungarian results in discrete programming	93

CONCEPTS AND METHODS

LÁSZLÓ FÜSTÖS—GYÖRGY MESZÉNA—NÓRA SIMON-MOSOLYGÓ: New methods of multidimensional scaling III	125
---	-----

SOFTWARE

GÁBOR HANÁK: Automated input system of a large size model	135
---	-----

BOOK REVIEWS

JENŐ SZÉP—FERENC FORGÓ: Introduction to game-theory (<i>Béla Kerekó</i>)	147
F. J. GOULD—J. W. TOLLE: Complementary pivoting on a pseudomanifold structure with applications in the decision sciences (<i>Tamás Terlaky</i>)	148

SCIENTIFIC LIFE

MÁRIA DUNAVÖLGYI: The 15th Hungarian Conference on Operational Research	151
PÉTER KELLE: System modelling and optimization (IFIP conference in Budapest)	152

СОДЕРЖАНИЕ

Рой Раднер: Децентрализация и заинтересованность	1
Андраш Броди: О физической экономике	41
Тамаш Тетени: Интенсивная оценка запаздывающей распределенной модели, имеющей h -распределение, с помощью ЭВМ	49
Петер Келле: Управление запасами предприятий на основе применения моделей исследований операций	71
Бела Визвари: Новые результаты в дискретном программировании в Венгрии	93

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

Ласло Фюштеш—Дьердь Месена—Нора Шимон-Мошойго: Несколько новых методов многомерного градуирования III	125
---	-----

СОФТВЕР

Габор Ханак: Автоматизированная система затрат большой модели	135
---	-----

О КНИГАХ

Ене Сеп—Ференц Форго: Введение в теорию игр (<i>Бела Кресо</i>)	147
Ф. Й. Гоулд—Й. В. Толле: Дополнительное базисное преобразование на псевдомножествах и их применение в теорию управления	148

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Мария Дунавельди: XVая Венгерская конференция по операционному исследованию	151
Петер Келле: Моделирование и оптимализирование систем	152

Ára: 52,— Ft

Előfizetés egy évre: 104,— Ft

ISSN 0039—8128

TARTALOM

ROY RADNER: Decentralizáció és érdekelttség	1
BRÓDY ANDRÁS: A fizikai gazdaságtanról	41
TÉTÉNYI TAMÁS: A h -eloszlású osztott késleltetésű modell számítógép-intenzív becslése	49
KELLE PÉTER: Vállalati készletgazdálkodás megbízhatósági készletmodellek felhasz- nálásával	71
VIZVÁRI BÉLA: Néhány újabb hazai eredmény a diszkrét programozásban	93

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

FÜSTÖS LÁSZLÓ—MESZÉNA GYÖRGY—SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA: A sokdimenziós skalázás egyes újabb módszerei, III.	125
---	-----

SZOFTVER

HANÁK GÁBOR: Nagyméretű modell automatizált input-rendszere	135
---	-----

KÖNYVEKRŐL

JENŐ SZÉP—FERENC FORGÓ: Einführung in die Spieltheorie (<i>Krekó Béla</i>)	147
F. J. GOULD—J. W. TOLLE: Complementary pivoting on a pseudomanifold structure with applications in the decision sciences (<i>Terlaky Tamás</i>)	148

TUDOMÁNYOS ÉLET

DUNAVÖLGYI MÁRIA: XV. Magyar Operációkutatási Konferencia	151
KELLE PÉTER: Rendszer modellezés és optimalizálás (IFIP konferencia Budapesten)	152



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST